Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Tóth Marcell Dávid

A Bin-packing probléma áttekintése

BSc Alkalmazott Matematikus Szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Tichler Krisztián

Eötvös Loránd Tudományegyetem Informatikai Kar

Algoritmusok és Alkalmazásaik Tanszék

Budapest, 2019

Az óra végéhez közeledve a tanár letakarította az asztalát, majd néhány tárgyat helyezett rá: egy üres befőttesüveget, néhány pingponglabdát, egy marék apró kavicsot és egy kis zacskó homokot. A tanár elkezdte belerakni a pingponglabdákat a befőttesüvegbe egészen addig, amíg már több nem fért bele, ezután az osztályhoz fordult és megkérdezte, hogy tele van-e a befőttesüveg. Az osztály bólintott.

Ekkor a tanár fogta az apró kavicsokat, és elkezdte beleszórni azokat az üvegbe. Az apró kavicsok kitöltötték a hézagokat a pingponglabdák között. A tanár ismért megkérdezte az osztálytól, hogy tele van-e a befőttesüveg. Ismét igenlő választ kapott.

Ezután a tanár a zacskó homokért nyúlt, és elkezdte annak tartalmát a befőttesüvegbe szórni. A az apró szemcsék a kis réseket is megtöltötték. Az osztályban ekkor többen elmosolyodtak, várták, hogy mi lesz még ezután. A tanár kérdezte, hogy tele van-e a befőttesüveg, és mint eddig, most is igen választ kapott az osztálytól.

Erre a tanár az asztal fiókjába nyúlt és kivett két sörösdobozt, majd a bennük lévő sört a befőttesüvegbe töltötte. Az osztályban kitört a nevetés. A tanár megvárta, míg elhal, majd így szólt: "Szeretném, ha felismernétek, hogy a befőttesüveg a ti életeteket reprezentálja. A benne lévő pingponglabdák az élet fontos, szerves részei: család, gyerekek, egészség, barátok, életcélok stb. Ha ezeket kivesszük, a befőttesüveg még mindig tele lesz.

A kavicsok már kisebb dolgok az életből: tanulás, munka, ház, autó stb. Ha ezeket kivesszük, még akkor is tele van a befőttesüveg. A homok minden egyéb. Apróságok. Ha elsőként ezt töltöm bele a befőttesüvegbe, nem maradna hely a pingponglabdáknak és a kavicsoknak.

Ugyanígy van az életben is. Ha minden időtöket és energiátokat apróságokra pazaroljátok, akkor nem lesz hely az életetekben az igazán fontos dolgoknak. Töltsetek időt a családotokkal! Játszatok a gyerekeitekkel! Mindig lesz még idő elmenni bevásárolni vagy az edényeket elmosogatni. Figyeljetek a pingponglabdákra, igazán csak azok számítanak! A többi csupán kavics vagy homok. Köszönöm a figyelmet, mára ennyi lenne!"

Ekkor valaki felszólalt: "Tanár úr, nem mondta, hogy a sör mit jelent az egészben!" A tanár elmosolyodott: "Örülök, hogy megkérdezted. A sör csak azt mutatja meg, hogy bármennyire is tűnik úgy, hogy az életedbe már nem fér több minden, hidd el, egy baráti sörözésnek mindig lesz hely!"

Köszönetnyilvánítás

Szeretném ezúton is megköszönni Tichler Krisztiánnak a szakdolgozat elkészítése során nyújtott temérdek korrektúrát és tanácsot. Köszönettel tartozom édesanyámnak is, aki időt nem kímélve javította nyelvtani hibáimat, hozzájárulva a szakdolgozat szabatos fogalmazásához. Továbbá szeretném hálámat kifejezni azoknak, akik segítettek egyetemi pályafutásom során, gondolva itt családomra, barátaimra, tanáraimra és szaktársaimra.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés, a probléma bonyolultsága **5**

2. Közelítő algoritmusok **9**

2.1. Általános vizsgálat 9

2.2. Az AF- és AAF-kritériumok vizsgálata 12

2.3. Optimális értéket közelítő algoritmusok 15

3. A First Fit algoritmusról **19**

3.1. A legrosszabb esetek 19

3.2. A súlyfüggvény 23

4. Kínai pakolás **31**

4.1. A legkisebb aszimptotikus közelítő hányados 32

4.2. A legkisebb abszolút közelítő hányados 36

5. További eredmények, kitekintés **43**

5.1. First Fit Decreasing 43

5.2. A First Fit egy implementációja 46

1. fejezet

Bevezetés, a probléma bonyolultsága

Napjainkban bonyolultságelméletben elért eredmények leginkább azt sejtetik, hogy egy kombinatorikus optimalizálási problémát szinte lehetetlen megoldani hatékonyan abban az értelemben, hogy limitált mennyiségű számolást végzünk egy nem túl apró feladat esetén. Hogy mégis egy probléma egyfajta megoldását kapjuk, legtöbbször kénytelenek vagyunk *közelíteni* az optimális értéket, és közben reménykedni abban, hogy "elég jó" megoldást kapunk végeredményként még elfogadható mennyiségű számítással. Megragadva a közelítés fogalmát, hogy adott esetben gyors algoritmust adjunk a probléma egy nagyméretű példányára, ahelyett figyelmünket inkább az optimális értékhez képest legkisebb hibát produkáló algoritmusokat fogjuk vizsgálni (a futási idő szükségszerű romlása mellett). Sajnálatos módon, a teljesítmény efféle vizsgálata nem egyszerű, tekintve, hogy többről van szó, mint nagy bemeneteken való tesztelésen, amin ismert az optimális érték. Egy ennél szigorúbb módszer a tervezett algoritmus matematikai analízise, annak a szemügyre vétele, hogy mennyire képes az algoritmus az optimumértéket közelíteni, de ide tartozik az ún. legrosszabb esetek konstruálása, vagyis olyan bemenetek alkotása, melyre az algoritmus garantáltan nem lépheti túl az optimális érték egy bizonyos, remélhetőleg kicsi százalékát.

A klasszikus Bin-packing problémát optimalizálási feladatként szokás megfogalmazni. Az alapfelállás az, hogy adott $L = [b_1, \ldots, b_n]$ pozitív, $(0; 1]$-beli racionális számok *listája*, amelynek elemeit tárgyaknak hívjuk. Ragaszkodunk a *lista* szóhoz L definíciójában, mert több tárgy is előfodulhat ugyanolyan mérettel, illetve a tárgyak sorrendje is fontos lehet bizonyos algoritmusok vizsgálatakor. A ládák egységnyi kapacitással rendelkeznek, azaz a bennük lévő tárgyak méretének összege legfeljebb 1. Kérdés, hogy mennyi az a minimális ládamennyiség, amelybe a tárgyak beleférnek. A probléma voltaképpen egydimenziós esete az iparban gyakran előforduló CUTTING-STOCK problémának, de a tárgyak elképzelhetők másként is, például tovább nem törhető részprogramokként, amiket lemezekre (-ládákra) kell írni.

Rögtön látszik, hogy a probléma **NP**-beli, de ezt igazolandó szerepeljen itt egy rövid indoklás: legyen $P(L)$ egy optimális ládapakolás, azaz a tárgyak egy particionálása néhány egység kapacitású ládába. Mivel a tárgyak egyesével beleférnek külön-külöm ládákba, ezért $|P(L)| \leq n$. Tetszőleges ládában szereplő tárgyak összmérete kiszámítható polinom időben, és egy ládában legfeljebb n darab tárgy lehet, így annak ellenőrzése, hogy egy ládában a pakolás megfelelő, szintén polinom idejű. Az egészet összevetve, adott optimális pakolásról eldönteni, hogy valóban kielégítő, polinom időben lehetséges.

A PARTITION-problémában adottak $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív egész számok, amelyek összege A páros szám. Kérdés, hogy létezik-e olyan $B \subseteq \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ részhalmaz, amelyre fennáll, hogy

$$\sum_{a_i \in B} a_i = \sum_{a_i \notin B} a_i$$

azaz van-e olyan részhalmaza a számoknak, amelyben az elemek összege pontosan fele a teljes összegnek.

1.0.1. Tétel. *A* BIN-PACKING *probléma **NP**-teljes.*

Bizonyítás. A PARTITION-problémát fogjuk visszavezetni a BIN-PACKING problémára. Megmutatjuk, hogy az előbbihez pontosan akkor létezik megfelelő B részhalmaz, ha az adott bemenetre az optimális pakolás két ládát használ.

Adott $a_1, \ldots, a_n$ pozitív egészek esetén legyen $A = \sum_{i=1}^{n} a_i$, a bemenete a BIN-PACKING feladatnak pedig

$$L = [2a_i/A \mid 1 \leq i \leq n] = [b_1, \ldots, b_n]$$

1. Ha a PARTITION-problémához létezik a kívánt tulajdonsággal rendelkező B részhalmaz, akkor $|B| = k$ mellett

$$\sum_{a_i \in B} \frac{2a_i}{A} = \sum_{i=1}^{k} b_i = 1$$

   Ennélfogva B és $\overline{B}$ két ládába való bepakolást írnak le, ahol minden láda teljesen megtelik, azaz $b_1, \ldots, b_n$ bemenetre az optimális pakolás kételemű.

2. Visszafelé, ha B_1, B_2 ládákba belefér a $b_1, \ldots, b_n$ bemenet, akkor

$$2 \geq \sum_{b_i \in B_1} b_i + \sum_{b_j \in B_2} b_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i}{A} = 2$$

miatt mindkét láda teljesen megtelik és így $B = B_1$ választásával a Partition egy megoldását kapjuk.

3. Hogy a Bin-packing bemenetét megkapjuk a Partition bemenetéből, ahhoz számokat összeadni és szorozni kellett, amelyek mind polinom időben elvégezhetők, ennélfogva a visszavezetés polinom időben történik.

□

A Bin-packing nem csupán optimalizálási feladatként szokott megjelenni a szakirodalomban. Mivel a számítástudomány elsősorban adott nyelvek *eldöntésére* fektet hangsúlyt, ezért a szóban forgó problémát is érdemes így megfogalmazni. Legyenek ez esetben $a_1, \ldots, a_n, C$ pozitív egész számok, ahol C-t *ládakapacitásnak* nevezzük, illetve B pozitív egész, amely a ládák számát jelöli. Eldöntésre vár, hogy bepakolhatók-e a tárgyak B darab ládába.

Az előbbiekkel összhangban szerepeljen itt egy másik bizonyítás is, a 3D-matching probléma megismertetésével együtt. A problémában adott három n elemű halmaz, F, L és H (fiúk, lányok és házak), és egy $R \subseteq F \times L \times H$ háromváltozós reláció, melyet igényeknek is szokás hívni. Kérdés, hogy kiválasztható-e R-ből n darab olyan rendezett hármas, melyek minden komponensükben eltérnek egymástól, vagyis különböző fiúkhoz különböző lányokat rendelünk, és minden párhoz egy-egy saját házat.

Bizonyítás. A 3D-matching problémát fogjuk polinom időben visszavezetni a Bin-packing problémára. Legyenek $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ a fiúk, $L = \{l_1, \ldots, l_n\}$ a lányok és $h = \{h_1, \ldots, h_n\}$ a házak halmazai, illetve $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$ az igények halmaza, ahol általánosan $r = (f_i, l_j, h_k)$ a megfelelő indexekre.

A Bin-packing bemenete $4m$ tárgyat fog tartalmazni, minden r igényhez egyet, illetve a fiúk, lányok és házak minden egyes rendezett hármasban való előfordulásához egyet-egyet. Legyen $f_i[t]$ az f_i fiú t-edik előfordulása az igényeknél, illetve M egy nagy szám, továbbá $C = 40M^4 + 15$ a kapacitás. A következő táblázat mutatja az egyes tárgyak súlyát.

	Tárgy	**Méret**
Fiúk	$f_i[1]$	$10M^4 + iM + 1$
	$f_i[t]$, $t > 1$	$11M^4 + iM + 1$
Lányok	$l_j[1]$	$10M^4 + jM^2 + 2$
	$l_j[t]$, $t > 1$	$11M^4 + jM^2 + 2$
Házak	$h_k[1]$	$10M^4 + kM^3 + 4$
	$h_k[t]$, $t > 1$	$8M^4 + kM^3 + 4$
Igények	$r = (f_i, l_j, h_k)$	$10M^4 - iM - jM^2 - kM^3 + 8$

Legyen $B = m$ és tegyük fel, hogy valahogyan bepakolhatjuk a tárgyakat a ládákba. Vegyük észre, hogy a tárgyak összsúlya éppen mC, ennélfogva minden ládát teljesen megtöltöttünk.

Vegyünk egy tetszőleges ládát. Ebben pontosan négy darab tárgy van, mert minden b tárgyra $C/5 < b < C/3$, azaz három tárgy hézagot hagyna, de öt tárgy már nem férne el. Mivel $C \equiv 15 \mod M$, és négy elem ismétléses kiválasztásával csak egyféleképpen tudjuk a 15-öt összegként előállítani az 1, 2, 4, 8 számokból, ezért a ládában kell lennie egy $f_{i'}$ fiúnak, egy $l_{j'}$ lánynak, egy $h_{k'}$ háznak és egy $r = (f_i, l_j, h_k)$ hármasnak. Mindez a következő egyenlethez vezet:

$$40M^4 + (i' - i)M + (j' - j)M^2 + (k' - k)M^3 + 15 = 40M^4 + 15$$

Ha rendre modulo M^2, M^3, M^4 nézzük az egyenletet, azt kapjuk, hogy $i' = i$, $j' = j$ és $k' = k$, azaz a ládában vagy mindhárom előfordulás első előfordulás vagy egyik sem az. Azt az n ládát véve, amelyek csak első előfordulásokat tartalmaznak, a 3D-MATCHING probléma egy megoldását kapjuk.

Ezt megfordítva, ha létezik egy megoldás, akkor a konstruált tárgyak bepakolhatók m ládába úgy, hogy minden rendezett hármas mellé a saját komponenseit rakjuk, ügyelve arra, hogy ezek a komponensek mindig első előfordulások legyenek. Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

A BIN-PACKING probléma **NP**-teljességével kapcsolatos legfontosabb eredmények megtalálhatók **[7]**-ben. A könyvben részletesebben taglalt részeket (erős **NP**-teljesség, a k-PARTITION problémával való szoros kapcsolat) itt nem tárgyaljuk.

2. fejezet

Közelítő algoritmusok

2.1. Általános vizsgálat

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért b_i nemcsak a tárgyat, hanem a tárgy méretét is jelöli és hasonlóan fogunk bánni a ládákkal is, azaz B jelöli a ládát és láda összsúlyát is. Ha PA egy ládapakoló algoritmus és L egy bemenet, akkor $PA(L)$ jelölje a ládák számát, ha a PA algoritmust alkalmazzuk L-re, illetve L_{opt} jelölje a későbbiekben az optimális pakolásban a ládák számát. Amennyiben L-ben lévő tárgyak egy $I \subseteq (0;1]$ intervallum részeit képezik, akkor azt $L \subseteq I$-vel fogjuk jelezni.

2.1.1. Definíció. *Legyen PA egy ládapakoló algoritmus. Ekkor PA abszolút közelítő algoritmus az R_{PA} abszolút közelítő hányadossal, ha*

$$PA(L) \leq R_{PA} \cdot L_{opt}$$

azaz PA kimenete legfeljebb az optimális érték R_{PA}-szorosa.

2.1.2. Következmény. Ha PA egy polinomiális futásidejű pakoló algoritmusra $R_{PA} < 3/2$, akkor $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

Bizonyítás. Amennyiben létezne ilyen algoritmus, úgy abban az esetben, amikor a Partition-probléma visszavezetésével az **(1.0.1)** tételnél igazoltuk a Bin-packing probléma **NP**-teljességét, akkor az átalakított bemenetre az algoritmus mindig megadná az optimális pakolást, hiszen ott $L_{opt} = 2$. Ennélfogva létezne a Partition-problémára egy, a bemenet méretében polinomiális futásidejű algoritmusunk, melynek következtében $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ lenne. □

A BIN-PACKING egyike azoknak az optimalizálási problémáknak, ahol a közelítés mértékét erősen befolyásolja a bemenet szerkezete vagy az optimális pakolás mérete, ezért szükségünk lesz a következő definícióra is.

2.1.3. Definíció. *Legyen PA egy pakoló algoritmus. Ekkor PA aszimptotikus közelítő algoritmus az A_{PA} aszimptotikus közelítő hányadossal, ha*

$$PA(L) \leq A_{PA} \cdot L_{opt} + C$$

valamilyen $C > 0$ konstansra.

Ha $L \subseteq (0;t]$ adott $0 < t \leq 1$ számmal, akkor az $A_{PA}(t)$ t-korlátos aszimptotikus közelítő hányados az az érték, melyre a

$$PA(L) \leq A_{PA}(t) \cdot L_{opt} + C$$

képlet érvényesül.

Megjegyezzük, hogy $0 < s \leq t \leq 1$ esetén, mivel $(0;s] \subseteq (0;t]$, ezért $A_{PA}(s) \leq A_{PA}(t)$, azaz A_{PA} a t-korlát monoton növő függvénye, melyet a bemenet tárgyainak méretére szabunk ki; továbbá az sem okoz félreértést, hogy $t = 1$ esetén $A_{PA} = A_{PA}(t)$.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy ezen definíció bevezetése rendkívül hasznos, mert az optimum méretének növekedése függvényében az aszimptotikus és az abszolút közelítő hányados értékek különválnak. Amíg a fentebbi bizonyításban azt láttuk, hogy az eddig ismert pakoló algoritmusokra értelmezett abszolút közelítő hányados értéke legalább $3/2$, addig az aszimptotikus közelítő hányados jóval ez alá az érték alá csökken.

A szakdolgozatban több pakoló algoritmust is ismertetünk, melyet a BIN-PACKING klasszikus alakjára (a tárgyak a $(0;1]$ intervallum racionális számai, a ládakapacitás egységnyi) terveztek, de először egy általános képet kell kapnunk ezek működéséről. A legtöbb PA pakoló algoritmust az alábbi pontok határozzák meg:

0. A bemeneti L lista előzetes átrendezése egy L' listává valamilyen szempont alapján. Az ilyen szabályok egyik legegyszerűbbike a tárgyak monoton csökkenő sorrendbe való rendezése.

1. Legyen PA pakolása kezdetben $B_1, \ldots, B_n$ üres ládák sorozata és $i = 1$.

2. Ha $i > n$, megállunk.

3. Tekintsük b_i tárgyat. A tárgy méretének és a ládák telítettségi szintjeinek ismeretében, valamilyen pakolási szabály alapján PA választ egy B_j ládát, amire $B_j + b_i \leq 1$.

4. Módosítsuk PA pakolását úgy, hogy a kiválasztott B_j láda telítettségét megemeljük b_i-vel. Az $i = i + 1$ lépés után térjünk vissza a 2. pontra.

A 0. pont hiánya vagy megléte esetén az algoritmusok *online* vagy *offline* kategóriába tartozhatnak. Habár az itt elmondottak nem egészen ezt sejtetik, ezek az algoritmusok teljes bemenet ismeretében különböznek egymástól. Általánosságban elmondható, hogy az offline algoritmusok jobban teljesítenek az online algoritmusokkal szemben, lévén többletinformációval rendelkeznek a futás kezdetekor.

Kiemelt hangsúlyt kap továbbá a 3. pont, amikor PA adott tárgyat egy ládába helyez. A későbbiekben bemutatásra kerülő algoritmusoknál a használt ládák számának csökkenését eredményezi (azaz számottevő javulást mutat), ha megfelelnek az alábbi két szempontnak :

- Any Fit-kritérium (AF): ha a B_j láda üres, úgy csak akkor kerülhet bele egy b tárgy, ha az a B_j-t megelőző ládák egyikébe sem fért bele.

- Almost Any Fit-kritérium (AAF): ha B_j a legkevésbé megtöltött nem üres láda, akkor egy b tárgy csak akkor lesz belehelyezve, ha az a B_j-t megelőző ládák egyikébe sem fért bele.

A későbbiekben olyan algoritmusokat fogunk vizsgálni, amelyek megfelelnek a fenti kritériumoknak. Feltételezzük, hogy a továbbiakban nem okoz gondot az, hogy abban esetben, ha egy PA pakoló algoritmusra teljesül az AF-kritérium, akkor azt $PA \in AF$ jelöléssel írjuk, illetve $PA \in AAF$ jelölést alkalmazunk, ha mindkét kritérium teljesül.

Zárásként itt megemlítjük a legismertebb közelítő algoritmusokat, melyeket a BIN-PACKING feladat megoldására terveztek. Az algoritmusokat a hozzájuk tartizó pakolási szabályokkal együtt mutatjuk be, és a továbbiakban csak elnevezéseik rövidítéseivel fogunk rájuk hivatkozni.

1. First Fit (FF): adott b_i tárgy elhelyezésekor keressük meg az első olyan ládát, meylbe b_i belefér. Könnyen igazolhatóan $FF \in AAF$.

2. Best Fit (BF): adott b_i tárgy elhelyezésekor vegyük sorra azokat a ládákat, melyekbe b_i belefér, és válasszuk ezek közül a ládák közül ki a maximális telítettségűt. Ebben az esetben is $BF \in AAF$.

3. Worst Fit (WF): a BF algoritmusnál látott szabályhoz hasonló módon választunk ládát, azonban itt a legkevésbé megtöltött ládát választjuk. Emiatt $WF \in AF$, de $WF \notin AAF$.

2.2. Az AF- és AAF-kritériumok vizsgálata

Az előbbiekkel kapcsolatban a következő lemmákat említjük.

2.2.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy $L \subseteq (0, 1/m]$, ahol $m \geq 2$ egész szám és hogy $PA \in AF$. Adott $j \leq PA(L)$ indexre legyen b az első B_j ládába rakott tárgy. Ekkor teljesülnek a következők:*

1. *A b tárgy elhelyezésekor minden $i < j$ indexre $B_i > (m-1)/m$.*

2. *Ugyanekkor B_i-ben legalább m darab tárgy volt.*

Bizonyítás. A lemma egyszerű következménye az AF tulajdonságnak és annak, hogy $b \leq 1/m$. □

2.2.2. Lemma. *Legyen $L \subseteq (0, 1/m]$ ahol $m \geq 2$ egész szám és $PA \in AAF$, továbbá adott $j < PA(L)$ indexre legyen $\alpha_j = \max\{1 - B_i \mid i < j\}$. Ekkor B_j ládában legalább m darab olyan b tárgy van, melyre $b \geq \alpha_j$.*

Bizonyítás. Az előző lemma alapján, amikor B_{j+1}-be (ez legfeljebb a legutolsó láda) PA belerakta az első tárgyat, akkor B_j ládában már volt legalább m darab tárgy. Legyenek ezek a berakás sorrendjében $b_1, \ldots, b_m$ tárgyak.

- Mivel $PA \in AF$, ezért $b_1 > \alpha_j$, máskülönben egy B_j ládát megelőző helyre került volna. Megjegyezzük, hogy az előző lemma miatt ekkor már minden B_i ládában ($i < j$) legalább m darab tárgy van és $B_i > (m-1)/m$, ennélfogva $\alpha_j < 1/m$.

- Tetszőleges $2 \leq i \leq m$ indexre értelmezve, vizsgáljuk meg a b_i tárgyat elhelyezésének pillanatában. Ekkor az L bemenetre szabott feltétel miatt a B_{j+1} ládában még nem lehet tárgy, így B_j a legkevésbé megtöltött, nem üres láda. Tehát az AAF tulajdonságot kihasználva minden $i \leq m$ indexre $b_i > \alpha_j$.

□

2.2.3. Lemma. *Legyen $L \subseteq (0, 1/m]$, ahol $m \geq 2$ egész szám és $PA \in AAF$. Ekkor az utolsó láda kivételével legfeljebb egy olyan B_j láda van, amelyre $B_j < m/(m+1)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy létezik két ilyen láda is, legyenek ezek B_i és B_j megfelelő $i < j$ indexekre. Az első lemma alapján tudjuk, hogy mindkét láda tartalmaz legalább m darab tárgyat, így B_j ládában van egy olyan b tárgy, amire $b < 1/(m+1)$, máskülönben ellentmondanánk a feltétellel. Ennek a tárgynak a létezése ellentmond a második lemmával, mert ezt b tárgyat az AAF tulajdonság miatt a B_i ládába kellett volna rakni, amikor B_j volt a legkevésbé megtöltött nem üres láda. $\square$

Az előző lemmáknak köszönhetően a következő eredményre jutottunk:

2.2.4. Tétel. *Legyen $PA \in AAF$ és $m = \lfloor 1/t \rfloor \geq 2$. Ekkor $A_{PA}(t) \leq 1 + 1/m$.*

Bizonyítás. Legyen $L = [b_1, \ldots, b_n]$, ahol minden $b_i \leq t$. Az előző lemmának köszönhetően legfeljebb egy olyan láda van (az utolsó ládát figyelmen kívül hagyva), melynek telítettsége kevesebb $m/(m+1)$, így

$$(PA(L) - 2) \cdot \frac{m}{m+1} < \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Mindemellett $\sum_{i=1}^{n} b_i \leq L_{opt}$, tehát

$$PA(L) < \frac{m+1}{m} \cdot L_{opt} + 2$$

Ennek következtében $A_{PA}(t) \leq (m+1)/m$, ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

A későbbiek folyamán belátjuk, hogy valójában $t \leq 1/2$ esetén $A_{PA} = 1 + 1/m$, ahol $m = \lfloor 1/t \rfloor$, ehhez a következő észrevételünkre van szükség.

2.2.5. Lemma. *Ha $PA \in AF$, akkor $A_{PA}(t) \geq A_{FF}(t)$ minden $0 < t \leq 1$ számra.*

Bizonyítás. Vegyük az FF pakolását, legyenek a ládák $B_1, \ldots, B_n$. Ekkor úgy módosítható az L bemenet, hogy először B_1 tárgyait soroljuk fel, utána B_2 tárgyait stb. Ha PA algoritmus rendelkezik valamiféle előzetes átrendezéssel, akkor ez az AF kritérium megsértése nélkül elhagyható. Ekkor PA kényszerűen az FF pakolását fogja eredményezni. $\square$

Ennek fényében már csak azt kell bizonyítanunk, hogy létezik olyan L bemenet, amelyre $L \subseteq (0; t]$ és $FF(L) \geq 1 + 1/\lfloor 1/t \rfloor$, ahol $t \leq 1/2$. Hogy ilyen bemenet valóban létezik, azt a következő fejezet elején fogjuk belátni.

Mindenesetre $t > 1/2$ esetén is felmutathatók eredmények. Szintén a következő fejezetben fogjuk belátni azt, hogy $A_{FF}(t) = 17/10$, amikor $t > 1/2$, így előző lemma miatt az $A_{PA}(t) \geq 17/10$ eredményt kapjuk. Nem meglepő ezután a következő tétel.

2.2.6. Tétel. *Ha $PA \in AAF$, akkor $t > 1/2$ mellett $A_{PA}(t) = 17/10$.*

Ennek a tételnek a bizonyítását a szakdolgozatban mellőzzük, de az FF-re vonatkozó következő fejezetben látni fogunk néhány kulcsfontosságú gondolatot. Egy-két megjegyzéssel zárjuk le az AF és AAF kritériumot teljesítő algoritmusok vizsgálatát.

2.2.7. Megjegyzés.

- A WF algoritmus esetében, mivel nem teljesíti az AAF kritériumot, arra számítunk, hogy várhatóan a rá vonatkozó aszimptotikus közelítő hányados egy az előzőeknél nagyobb érték. A sejtés helyes, mert könnyen megmutatható, hogy

$$A_{WF}(t) \geq 2 \text{ , ha } t > 1/2$$

$$A_{WF}(t) \leq 1/(1-t) \text{ , ha } t \leq 1/2$$

- Jelentős javulást eredményez, ha egy PA pakoló algoritmusra az AF kritérium mellett AAF kritérium is teljesül. Az ide kapcsolódó tétel a következő:

2.2.8. Tétel. *Legyen $PA \in AF$. Ekkor*

$$17/10 \leq A_{PA}(t) \leq 2 \text{ , } \textit{ha } t > 1/2 \tag{2.1}$$

$$1 + 1/\lfloor 1/t \rfloor \leq A_{PA}(t) \leq 1/(1-t) \text{ , } \textit{ha } t \leq 1/2 \tag{2.2}$$

Bizonyítás. Az alsó korlátra vonatkozó becslést **(2.2)** esetében már beláttuk. A felső korlát következik abból a tényből, hogy L lista t-korlátja miatt minden láda (legfeljebb az utolsó kivételével) több mint $1-t$-ig van megtöltve. Így adódik, hogy

$$(PA(L) - 1) \cdot (1-t) \leq \sum_{i=1}^{n} b_i \leq L_{opt}$$

melyet átrendezve

$$PA(L) \leq L_{opt}/(1-t) + 1$$

Hasonlóan **(2.1)** esetében, itt azt látjuk, hogy hogy minden láda legalább félig van (legfeljebb az utolsó kivételével), ennélfogva

$$(PA(L) - 1) \cdot 1/2 \leq \sum_{i=1}^{n} b_i \leq L_{opt}$$

azaz

$$PA(L) \leq 2L_{opt} + 1$$

□

Az előző tétel fényében látható, hogy aszimptotikus közelítés szempontjából a WF egyike a "legrosszabb" pakoló algoritmusoknak, illetve hogy az AAF kritérium következtében az alsó korlátra vonatkozó egyenlőtlenség valójában egyenlőség is. További érdekességekért **[3]**-at érdemes olvasni.

2.3. Optimális értéket közelítő algoritmusok

A mostani kis kitérő részt érdekességnek szánjuk az általános vizsgálat mellé. Amennyiben másként itt nem rendelkezünk, L legyen mindig $[b_1, \ldots, b_n]$ lista, így $n = |L|$. Ebben a fejezetben megismertetjük az olvasót BIN-PACKING-re konstruált APTAS (asyimptotic polinomial time approximation scheme) algoritmussal. A fejezetrész alapját **[5]** és **[6]** képezte.

2.3.1. Lemma. *Legyenek $\epsilon > 0$ és $k \in \mathbb{N}$ számok. Ekkor létezik egy, a bemenet méretében polinomiális futásidejű algoritmus a* BIN-PACKING *probléma olyan L bemeneteire, ahol $L \subseteq (\epsilon, 1]$ és L legfeljebb k darab különböző méretű tárgyat tartalmaz.*

Bizonyítás. L szerkezete miatt egy ládában legfeljebb $m = \lfloor 1/\epsilon \rfloor$ darab tárgy lehet, így egy ládába legfeljebb $M = \binom{m+k-1}{k}$ módon tehetünk tárgyakat. Tudjuk, hogy a teljes bemenet belefér n ládába (egy ládába egy tárgy), emiatt a teljes bemenet n ládába történő bepakolása összesen $N = \binom{n+M-1}{M}$-féle módon történhet meg, amely n-nek polinomja.

Egy tetszőleges pakolás helyessége legfeljebb lineáris időben ellenőrizhető, tehát az az algoritmus, amely valamilyen sorrendben az összes pakolást megkonstruálja és ellenőrzi, polinomiális futásidejű lesz a bemenet méretében (természetesen vegyük észre, hogy ϵ vagy k számokban az algoritmus exponenciális). □

2.3.2. Lemma. *Legyen $\epsilon > 0$ szám. Ekkor létezik egy, a bemenet méretében polinomiális futásidejű, $(1 + \epsilon)$-közelítő algoritmus minden olyan L bemenetre, amelyre $L \subseteq (\epsilon, 1]$.*

Bizonyítás. A bizonyítás az előző lemma segítségével történik. Rendezzük L tárgyait növekvő sorrendbe, majd osszuk szét őket $k+1$ csoportba, ahol minden csoportban a tárgyak száma legfeljebb $m = \lfloor n/k \rfloor$ (az első legkisebb m darab tárgy az első csoport, utána a második legkisebb m darab tárgy a második csoport, az utolsó a legnagyobb, legfeljebb m darab tárgy). A k számot a későbbiek folyamán határozzuk meg.

Konstruáljuk meg K és M listákat a következőképpen: a K listához L előző felosztásában egy adott csoport tárgyainak méretét csökkentsük le a csoportban szereplő legkisebb tárgy méretéhez, M esetében pedig növeljük őket a csoportban lévő legnagyobb tárgy méretéhez. Nyilvánvalóan

$$K_{opt} \leq L_{opt} \leq M_{opt}$$

Adott $i \leq k$ indexre tekintsük a K lista $i+1$-edik csoportját. Itt minden tárgy mérete legalább akkora, mint az M lista i-edik csoportjában a tárgyak mérete. Ennélfogva, K optimális pakolásában az $i+1$-edik csoport tárgyainak helyeire bepakolhatók az M lista i-edik csoportjának tárgyai, kihagyva M-ből az utolsó legnagyobb m tárgyat. Így állíthatjuk, hogy

$$M_{opt} \leq K_{opt} + m \leq L_{opt} + m$$

Ha úgy választjuk meg k számot, hogy $m \leq \epsilon \cdot L_{opt}$ legyen, akkor azt kapjuk, hogy $M_{opt} \leq (1+\epsilon) \cdot L_{opt}$. A $k = \lceil 1/\epsilon^2 \rceil$ jó választás, ugyanis ekkor L lista szerkezetének használata azt eredményezi, hogy

$$m = \left\lfloor \frac{n}{\lceil 1/\epsilon^2 \rceil} \right\rfloor \leq \lfloor \epsilon^2 \cdot n \rfloor \leq \epsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \leq \epsilon \cdot L_{opt}$$

A k ilyen módon történő megválasztása után alkalmazzuk az előző lemmát ϵ és $k+1$ számokkal az M bemenetre. Az M optimális pakolása természetesen L-nek is kielégítő pakolása lesz. □

2.3.3. Tétel. *Tetszőleges $\epsilon < 1/2$ számhoz létezik egy, a bemenet méretében polinomiális futásidejű PA pakoló algoritmus, amely legfeljebb $(1+\epsilon) \cdot L_{opt}$ ládát használ abban az esetben, ha $2/\epsilon \leq L_{opt}$.*

Bizonyítás. Adott L bemenet és $\epsilon > 0$ alapján legyen $\delta > 0$ szám, melyet később meghatározunk. Töröljük ki L-ből a δ-nál kisebb méretű tárgyakat, így kapva a $K \subseteq [\delta, 1]$ listát. Az előző lemma alapján polinomiális időben megtalálható K-nak egy olyan pakolása, amely legfeljebb $(1+\delta) \cdot K_{opt}$ ládát használ.

Ezután a maradék, kisebb méretű tárgyakat egy $PA \in AAF$ algoritmus segítségével pakoljuk tovább. Két eset lehetséges:

1. Nincs szükség további ládákra. Ekkor készen vagyunk, hiszen bármely $\delta \leq \epsilon$ szám esetén igaz, hogy

$$PA(L) = PA(K) \leq (1+\delta) \cdot K_{opt} \leq (1+\epsilon) \cdot L_{opt}$$

2. Ha szükség van további ládákra, akkor minden láda legalább $1-\delta$ szintig van megtöltve (legfeljebb az utolsó kivételével), hiszen a maradék tárgyak a $(0,\delta]$ intervallum elemei, ennélfogva

$$\big(PA(L) - 1\big) \cdot (1-\delta) \leq \sum_{i=1}^{n} b_i \leq L_{opt}$$

$$PA(L) \leq \frac{L_{opt}}{1-\delta} + 1 \leq (1+2\delta) \cdot L_{opt} + 1$$

ahol kihasználtuk az $1/(1-x) \leq 1+2x$ egyenlőséget, amely tetszőleges $0 < x \leq 1/2$ esetén igaz. Legyen ekkor $\delta = \epsilon/4$. A $2/\epsilon \leq L_{opt}$ feltétellel

$$PA(L) \leq \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \cdot L_{opt} + \frac{\epsilon}{2} \cdot L_{opt} \leq (1+\epsilon) \cdot L_{opt}$$

Ezzel a tételt beláttuk. □

A fentiek értelmében az $1+\epsilon$-közelítő APTAS algoritmust a következőképpen írnánk le:

1. Rendezzük L listát növekvő sorrendbe.

2. Töröljünk ki minden olyan b tárgyat L-ből, amelyre $b < \epsilon$. Az így kapott lista legyen K.

3. Osszuk fel K-t $\lceil 1/\epsilon^2 \rceil$ darab csoportra.

4. Minden csoportban a tárgyak méretét növeljük meg a csoportban szereplő legnagyobb tárgy méretére. Az így kapott listát nevezzük M-nek.

5. Az M összes lehetséges pakolását soroljuk fel, majd válasszuk ki az optimálisat.

6. Az optimális pakolást alkalmazzuk L-re. A kitörölt, ϵ-nál kisebb méretű tárgyak bepakolásához használjunk FF-et.

Természetesen, ahogy a **(2.3.1)** lemma végén is megjegyeztük, ϵ méretében ez az algoritmus exponenciális futásidejű, így ennek megvalósítása a gyakorlatban nem lenne hatékonyan alkalmazható.

3. fejezet

A First Fit algoritmusról

3.1. A legrosszabb esetek

Elöljáróban rögtön megemlítjük azon t-korlátos bemenetek esetét, amikor $t \leq 1/2$.

3.1.1. Tétel. *Tetszőleges k pozitív egész számhoz létezik olyan $L \subseteq (0;t]$, $t \leq 1/2$ bemenet, amelyre $L_{opt} = k$, viszont $m = \lfloor 1/t \rfloor$ mellett*

$$FF(L) \geq \frac{m+1}{m} \cdot L_{opt} - \frac{1}{m}$$

Bizonyítás. Legyen k tetszőleges pozitív egész és definiáljuk a következő tárgyakat

$$b_j = 1/(m+1) - m^{2j+1}\delta \text{ , ahol } 1 \leq j \leq k-1$$

$$a_{1j} = \cdots = a_{mj} = 1/(m+1) + m^{2j}\delta \text{ , ahol } 1 \leq j \leq k$$

ahol $\delta > 0$ eléggé kicsi szám. Ekkor

$$L = [a_{1k}, \ldots, a_{mk}, b_{k-1}, a_{1(k-1))}, \ldots, a_{m(k-1)}, b_{k-2}, \ldots, b_1, a_{11}, \ldots, a_{1m}]$$

azaz az a-típusú elemeket csökkenő sorrendben soroljuk fel, és minden m-es csoport közé beszúrunk egy-egy b-típusú tárgyat növekvő sorrendben. Innen könnyen látható, hogy

$$FF(L) = \left\lceil \frac{k(m+1)-1}{m} \right\rceil$$

Azonban látható, hogy L optimálisan pakolható úgy, hogy $b_j, a_{1j}, \ldots, a_{mj}$ egy ládába kerülnek minden $1 \leq j \leq k-1$ indexre (minden ilyen láda maximálisan telített) és az utolsó a-típusú csoportot még plusz egy ládába rakjuk, így $L_{opt} = k$. Ekkor az alábbi következtetést vonhatjuk le:

$$\frac{FF(L)}{L_{opt}} \geq \frac{k(m+1)-1}{mk} = \frac{m+1}{m} - \frac{1}{m \cdot L_{opt}}$$

amivel a tételt beláttuk. □

3.1.2. Tétel. *Tetszőleges k pozitív egész számhoz létezik olyan L bemenet, hogy $L_{opt} = k$, de $FF(L) \geq 17/10 \cdot L_{opt} - 8$, így $A_{FF} \geq 17/10$.*

Bizonyítás. A bizonyítás a megfelelő bemenet konstrukcióját fogja leírni. Három nagy régióba fogjuk sorolni a tárgyakat, ahol az első régió elemei megelőzik a második régió elemeit, a második régió elemei pedig a harmadikét.

Legyen N egy 17-tel osztható szám és $0 < \delta$ eléggé kicsi szám. Legyenek továbbá $0 < \delta_i = \delta \cdot 18^{N/17-i}$ számok minden $1 \leq i \leq N/17$ indexre. Jegyezzük meg, hogy $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \cdots \geq \delta_{N/17} = \delta$.

Definiáljuk az első régió elemeit a következőképpen: a régiót $N/17$ blokkra osztjuk, ahol minden blokknak 10 eleme van. Legyenek az i indexű blokk elemei a következők:

Tárgy	**Méret**
a_{0i}	$1/6 + 33\delta_i$
a_{1i}	$1/6 - 3\delta_i$
a_{2i}, a_{3i}	$1/6 - 7\delta_i$
a_{4i}	$1/6 - 13\delta_i$
a_{5i}	$1/6 + 9\delta_i$
$a_{6i}, a_{7i}, a_{8i}, a_{9i}$	$1/6 - 2\delta_i$

Legyen a bemenet első $10N/17$ eleme $N/17$ darab ilyen tíz elemből álló blokk és vegyük észre, hogy

$$a_{0i} + ... + a_{4i} = 5/6 + 3\delta_i$$
$$a_{5i} + a_{9i} = 5/6 + \delta_i$$

Ha az FF-et a bemenetre alkalmazzuk, akkor az i-edik blokk első öt tárgya megtölti a B_{2i-1} ládát, szintúgy a második öt tárgy pedig B_{2i} ládát. Hogy ezt igazoljuk, nézzük az i-edik blokk legkisebb elemét, a_{4i}-t és vizsgáljuk meg a legkevésbé megtöltött ládát, B_{2i-2}-t

(δ_i definíciója miatt minden blokk összsúlya szigorúan monoton csökken, így valóban az előbb említett B_{2i-2} láda a legkevésbé telített). Ekkor

$$B_{2i-2} = 5/6 + \delta_{i-1} = 5/6 + 18\delta_i$$

Tehát a_{4i} valóban nem fér bele az előbbi ládák egyikébe sem és emellett az i-edik blokk második felének egyik eleme sem fér bele B_{2i-1}-be. Ennélfogva az első régió tárgyai megtöltenek $2N/17$ darab ládát.

A második régió hasonlóan definiálható. Az előbbi δ_i számok további használatával legyen

Tárgy	**Méret**
b_{0i}	$1/3 + 46\delta_i$
b_{1i}	$1/3 - 34\delta_i$
b_{2i}, b_{3i}	$1/3 + 6\delta_i$
b_{4i}	$1/3 + 12\delta_i$
b_{5i}	$1/3 - 10\delta_i$
$b_{6i}, b_{7i}, b_{8i}, b_{9i}$	$1/3 + \delta_i$

A bemenet következő $10N/17$ tárgya legyen szintén $N/17$ darab ilyen tíz elemből álló blokk. Itt a tárgyakat úgy definiáltuk, hogy páronként megtöltsenek egy-egy ládát, azaz

$$b_{0i} + b_{1i} = b_{2i} + b_{3i} = 2/3 + 12\delta_i$$
$$b_{4i} + b_{5i} = b_{6i} + b_{7i} = b_{8i} + b_{9i} = 2/3 + 2\delta_i$$

Eltekintve az első régió által megtöltött ládák sorszámaitól ($2N/17$-ig), a második régió i-edik blokkja, megtölti az $5i-4$, $5i-3$, $5i-2$, $5i-1$, $5i$-edik ládákat. Ezt igazolandó, szintén hivatkozhatunk arra, hogy a δ_i-k definíciójának köszönhetően a telített ládák súlya szigorúan monoton csökken és az i-edik blokk legkisebb eleme, b_{1i} nem fér bele az $i-1$-edik blokk által használt ládák egyikébe sem, hiszen

$$B_{5i-5} = 2/3 + 2\delta_{i-1} = 2/3 + 36\delta_i$$

Könnyen látható, hogy az i-edik blokk tárgyai öt ládánál kevesebb ládába nem pakolhatók FF-el, és ezzel igazoltuk, hogy a második blokk megtölt $5N/17$ darab ládát.

A harmadik régió jóval egyszerűbb szerkezettel rendelkezik, mint elődei: mindegyik súlya $1/2+\delta$, és legyen hasonlóan $10N/17$ darab ezekből is. Így ezek a tárgyak megtöltenek $10N/17$ ládát.

Összességében $(2N + 5N + 10N)/17 = N$ darab ládát használnak az algoritmusok, ennek ellenére a felsorolt $30N/17$ tárgy belefér hármasával csoportosítva $(10N/17) + 1$ darab ládába is az alábi módon:

1. $2 \leq j \leq 9$ és $1 \leq i \leq N/17$ esetén a_{ji} és b_{ji} kerülnek be egy ládába. Minden ilyen pár összsúlya $1/2 - \delta_i$ lesz és ez a pakolás $16N/17$ darab tárgyat fed le az első és második régiókból összesen.

2. a_{0i} és b_{1i} alkot egy párt $1 \leq i \leq N/17$ esetén, szintén $1/2 - \delta_i$ összsúllyal, itt $2N/17$ tárgyat felhasználva az első és második régióból.

3. a_{1i} és $b_{0(i+1)}$ kerül egy ládába $1 \leq i \leq N/17 - 1$ esetén, az itteni összsúly $1/2 - 8 \cdot \delta_{i+1}$, és ezzel lefedtünk $2N/17 - 2$ darab tárgyat, $a_{1(N/17)}$-et és b_{01}-et kivéve.

4. Az eddig 1., 2. és 3. pontokban töltött ládákba még belefér egy-egy $1/2 + \delta$ tárgy a harmadik régióból, azaz $10N/17 - 1$ darab tárgyat használunk fel: ebből $8N/17$ darabot az 1. pont ládáihoz, $N/17$ darabot a 2. pont ládáihoz, végül $N/17 - 1$ darabot a 3. pont ládáihoz, kihagyva egyetlen, $1/2 + \delta$ súlyú tárgyat.

5. Tekintve, hogy a kint hagyott három tárgy nem fér bele egy ládába, így további két láda felhasználásával véglegesítjük a pakolást. Összesen $10N/17 + 1$ darab ládát használtunk fel.

Megmutattuk, hogy $L_{opt} \leq 1 + 10N/17$, tehát

$$\begin{aligned}\frac{FF(L)}{L_{opt}} &\geq \frac{N}{(10N/17)+1} = \frac{17N}{10N+17} = \frac{17}{10} \cdot \frac{N}{N+17/10} \\ &= \frac{17}{10} - \frac{17}{10} \cdot \frac{17/10}{N+17/10} > \frac{17}{10} - \frac{2}{L_{opt}}\end{aligned}$$

Fentebb csak 1-gyel kongruens (mod 10) méretű optimális pakolásokról van szó. Ha L végére további ($m \leq 9$ db) egység méretű tárgyat rakunk, akkor eredményeink a következőképpen módosulnak (M-mel jelölve a módosított bemenetet, hasonlóan M_{opt}-tal az optimális pakolást):

$$FF(M) = FF(L) + m \text{ és } M_{opt} = L_{opt} + m \leq 1 + (10N/17) + m$$

Ennek következtében

$$\frac{FF(M)}{M_{opt}} \geq \frac{N+m}{(10N/17)+1+m} = \frac{17N+17m}{10N+17+17m}$$

$$= \frac{17}{10} \cdot \frac{N+m}{N+17/10+17/10 \cdot m} = \frac{17}{10} - \frac{17}{10} \cdot \frac{17/10+7/10 \cdot m}{N+17/10+17/10 \cdot m}$$

$$= \frac{17}{10} - \frac{17/10+7/10 \cdot m}{(10N/17)+1+m} \geq \frac{17}{10} - \frac{8}{M_{opt}}$$

Ezzel az állításunkat beláttuk. □

A következőkben pedig megmutatjuk, hogy a fenti bemenet a lehető legrosszabb pakolást eredményezi, vagyis a 17/10 felső korlát az FF aszimptotikus közelítő hányadosára.

3.2. A súlyfüggvény

Definiáljuk az alábbi, $W\colon (0;1] \to (0;1]$ függvényt:

$$W(x) = \begin{cases} 6/5 \cdot x & , 0 < x \leq 1/6 \\ 9/5 \cdot x - 1/10 & , 1/6 < x \leq 1/3 \\ 6/5 \cdot x + 1/10 & , 1/3 < x \leq 1/2 \\ 6/5 \cdot x + 2/5 & , 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Az itt definiált W súlyfüggvénynek kulcsfontosságú szerepe lesz az aszimptotikus közelítő hányadosra vonatkozó becslésekben, éppen ezért először erre tereljük az olvasó figyelmét.

3.2.1. Állítás. *Legyen egy B láda megtöltve b_1, b_2, ..., b_m tárgyakkal. Ekkor*

$$W(B) = \sum_{i=1}^{m} W(b_i) \leq \frac{17}{10}$$

Bizonyítás.

- Figyeljük meg, hogy ha $b \leq 1/2$, akkor igazolhatóan $W(b)/b \leq 3/2$ és $b = 1/3$ esetén egyenlőség is teljesül. Tehát ha csak ilyen méretű tárgyaink vannak, akkor

$$W(B) = \sum_{i=1}^{m} W(b_i) \leq \frac{3}{2} \cdot \sum_{i=1}^{m} b_i < \frac{17}{10}$$

Ennélfogva tegyük fel, hogy van B-ben 1/2-nél nagyobb méretű tárgy, legyen ez az egyetlen tárgy b_1. Ekkor $\sum_{i=2}^{m} W(b_i) \leq 7/10$, amely bizonyításra vár.

- A kövezkező megfigyelésünk, hogy a $(0, 1/6]$ és az $(1/3; 1/2]$ intervallumokon W meredeksége azonos. Amennyiben egy b tárgy az utóbbi intervallum eleme, úgy bontható fel $b - 1/3$; $1/3$ tárgyakra, hogy $W(B)$-ben nem keletkezik változás. Valóban,

$$W(b - 1/3) + W(1/3) = 6/5 \cdot (b - 1/3) + 9/5 \cdot (1/3) - 1/10 = W(b)$$

  Tehát a továbbiakban feltesszük, hogy $b_2, ..., b_m \leq 1/3$.

- Utolsó megfigyelésünk, hogy ha b_i és b_j tárgyak mindegyike a $(0; 1/6]$ intervallumban van, akkor a két tárgy egybevételével $W(B)$ nem csökken. Ez azonnal látszik, ha a tárgyak összege még mindig kisebb, mint $1/6$, és ha $1/6 < b_i + b_j \leq 1/3$, akkor

$$\begin{aligned} W(b_1 + b_2) &= 9/5 \cdot (b_1 + b_2) - 1/10 \\ &= 6/5 \cdot (b_1 + b_2) + 3/5 \cdot (b_1 + b_2) - 1/10 \\ &= W(b_1) + W(b_2) + 3/5 \cdot (b_1 + b_2) - 1/10 \end{aligned}$$

  ahol $3/5 \cdot (b_1 + b_2) - 1/10 > 0$ a feltételek miatt. Így a továbbiakban az is feltehető, hogy legfeljebb egy tárgy van a $(0; 1/6]$ intervallumban.

Ezzel leszűkítettük a bizonyítás tárgyát összesen négy esetre:

1. $m = 2$ és $b_2 \leq 1/3$. Ekkor $W(b_2) \leq 3/2 \cdot b_2 < 7/10$, ahogy a bizonyítás elején láttuk.

2. $m = 3$ és $1/6 < b_2 \leq b_3 \leq 1/3$. Ekkor

$$W(b_2) + W(b_3) = 9/5 \cdot (b_2 + b_3) - 1/5 < 9/5 \cdot 1/2 - 1/5 = 7/10$$

   Az utóbbi becslésünk azért igaz, mert a ládában $b_1 > 1/2$.

3. $m = 3$ és $b_2 \leq 1/6 < b_3 \leq 1/3$. Ekkor

$$W(b_2) + W(b_3) = 6/5 \cdot b_2 + 9/5 \cdot b_3 - 1/10 \leq 1/5 + 3/5 - 1/10 = 7/10$$

4. $m = 4$ és $b_2 \leq 1/6 < b_3 \leq b_4 \leq 1/3$. Ekkor

$$\begin{aligned} W(b_2) + W(b_3) + W(b_4) &= 6/5 \cdot b_2 + 9/5 \cdot (b_3 + b_4) - 1/5 \\ &= 9/5 \cdot (b_2 + b_3 + b_4) - 3/5 \cdot b_2 - 1/5 \\ &< 9/10 - 1/5 = 7/10 \end{aligned}$$

   Ahol megint hivatkoztunk arra, hogy $b_1 > 1/2$

□

3.2.2. Definíció. *Egy B_k láda maximális megelőző hiánya (MMH) a következő érték:*

$$\alpha_k = \max\{1 - B_j \mid 1 \leq j < k\}$$

azaz a B láda MMH-ja az őt megelőző ládák közül a legkevésbe telített láda súlya. Mivel az $i = 1$ indexre ez nem lenne értelmes, az első láda MMH-ja legyen 0.

3.2.3. Állítás. *Tegyük fel, hogy a ládákat FF-el töltjük meg, és a pakolás végén a B ládának MMH-ja α. Ekkor minden b tárgyra, amely azelőtt lett B-be rakva, mielőtt B már félig tele lett volna igaz, hogy $b \geq \alpha$.*

Bizonyítás. Egy AAF alogritmus futtatásakor értelemszerűen egyetlen lépés során sem keletkezhet olyan B_i és olyan B_j láda ($i < j$), amelyek telítettsége legfeljebb $1/2$, mert ez esetben B_j tárgyait a futás során B_i-be kellett volna helyezni. Ennélfogva, ha B láda telítettsége legfeljebb $1/2$, az csak úgy lehetséges, hogy B

- vagy egy üres láda,
- vagy a legkevésbé megtöltött, nem üres láda.

Ha B üres láda, akkor egy b tárgy csak akkor kerülhet bele az AF tulajdonság alapján, ha b nem fért bele az eddigi nem üres ládák egyikébe sem, tehát $\alpha \leq b$.

Ha B nem üres láda, akkor b tárgy csak akkor kerülhet bele, ha a nála kisebb indexű ládák egyikébe sem fért bele az AAF tulajdonság miatt, azaz ugyanarra az $\alpha \leq b$ eredményre jutunk. □

3.2.4. Állítás. *Legyen egy B láda MMH-ja $\alpha < 1/2$ és legyen megtöltve a $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_m$ tárgyakkal az FF szerint.*

$$\text{Ekkor, ha } \sum_{i=1}^{m} b_i \geq 1 - \alpha \text{ , akkor } W(B) = \sum_{i=1}^{m} W(b_i) \geq 1.$$

Bizonyítás. Ha $b_1 > 1/2$, akkor az állítás nyilvánvaló, hiszen $W(b_1) = 1$, így tegyük fel, hogy $b_1 \leq 1/2$. Ha $m \geq 2$, akkor az első két tárgy akkor lett berakva, mielőtt B legalább félig megtelt volna, ennélfogva az előző állítás miatt $b_1 \geq b_2 \geq \alpha$. Ekkor α értékétől függően több esetet fogunk megvizsgálni:

- Ha $\alpha \leq 1/6$, akkor $5/6 \leq 1-\alpha \leq \sum_{i=1}^{m} b_i$. Továbbá, mivel $0 < b \leq 1/2$ esetén $6/5 \cdot b \leq W(b)$, a kívánt eredmény azonnal adódik:

  $$1 = 5/6 \cdot 6/5 \leq W(B)$$

  Ez utóbbi állításunkat még fogjuk használni a bizonyítás során:

  $$0 < b \leq 1/2 \Rightarrow 6/5 \cdot b \leq W(b) \leq 3/2 \tag{3.1}$$

- Amennyiben $1/6 < \alpha \leq 1/3$ áll fenn, úgy további részesetekre lesz szükségünk:
  - $m = 1$. Ekkor a feltételeket összevetve azt kapjuk, hogy

    $$1/2 \geq b_1 \geq 1-\alpha \geq 2/3$$

    ami ellentmondás.
  - $m = 2$. Több eset is lehetséges. Ha $1/3 \leq b_2 \leq b_1$, akkor

    $$\begin{gathered} W(b_1) + W(b_2) = \\ 6/5 \cdot (b_1 + b_2) + 1/5 \geq 1 \end{gathered}$$

    Ha b_1, $b_2 \leq 1/3$, akkor $b_1 + b_2 \leq 2/3 \leq 1-\alpha$, ami ellentmond a feltételeknek. Ha pedig $\alpha \leq b_2 \leq 1/3 < b_1$, akkor

    $$\begin{aligned} W(b_1) + W(b_2) &= \\ (6/5 \cdot b_1 + 1/10) + (9/5 \cdot b_2 - 1/10) &= \\ 6/5 \cdot (b_1 + b_2) + 3/5 \cdot b_2 &\geq \\ 6/5 \cdot (1-\alpha) + 3/5 \cdot \alpha &\geq 1 \end{aligned}$$

  - $m \geq 3$. Ahogyan az előbb is, ha $1/3 < b_2 \leq b_1$, azonnal a kívánt eredményt kapjuk.

Ha $b_2 \leq 1/3 < b_1$, akkor **(3.1)** felhasználásával

$$\begin{aligned}W(B) = W(b_1) + W(b_2) + \sum_{i=3}^{m} W(b_i) \geq \\ (6/5 \cdot b_1 + 1/10) + (9/5 \cdot b_2 - 1/10) + 6/5 \cdot \sum_{i=3}^{m} b_i = \\ 6/5 \cdot \sum_{i=1}^{m} b_i + 3/5 \cdot b_2 \geq \\ 6/5 \cdot (1-\alpha) + 3/5 \cdot \alpha \geq 1\end{aligned}$$

Ha pedig $b_2 \leq b_1 \leq 1/3$, akkor szintén **(3.1)**-mal

$$\begin{aligned}W(b_1) + W(b_2) + \sum_{i=3}^{m} W(b_i) \geq \\ 9/5 \cdot (b_1 + b_2) - 1/5 + 6/5 \cdot \sum_{i=3}^{m} b_i = \\ 6/5 \cdot \sum_{i=1}^{m} b_i + 3/5 \cdot (b_1 + b_2) - 1/5 \geq \\ 6/5 \cdot (1-\alpha) + 3/5 \cdot (2\alpha) - 1/5 \geq 1\end{aligned}$$

Ezzel az $1/6 < \alpha \leq 1/3$ esetet lezártuk.

- $1/3 < \alpha < 0.5$, az utolsó eset.
  - Ha $m = 1$, akkor $b_1 \geq 1 - \alpha > 1/2$, azaz $W(b) \geq 1$.
  - Ha $m = 2$, akkor $1/3 < b_2 \leq b_1$, ezt az esetet már többször tárgyaltuk.

Ezzel az állítást beláttuk. □

3.2.5. Állítás. *Ha az FF-pakolás végén egy $\alpha < 1/2$ MMH-val rendelkező B láda $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_m$ tárgyaira igaz, hogy*

$$W(B) = \sum_{i=1}^{m} W(b_i) = 1 - \beta$$

valamilyen $\beta > 0$ szám mellett, akkor vagy

(i) $m = 1$ és $b_1 \leq 1/2$, vagy

(ii) $\sum_{i=1}^{m} b_i \leq 1 - \alpha - 5/6 \cdot \beta$

Bizonyítás. Ha $m = 1$ és $b_1 > 1/2$, akkor $W(b_1) = 1$ miatt nem létezik megfelelő β szám, ennélfogva, ha (i) nem igaz, akkor az előző állítás elején tett észrevételeinket felhasználva rögtön feltehetjük, hogy $2 \leq m$ és $\alpha \leq b_2 \leq b_1$. Legyen adott γ számra $\sum_{i=1}^{m} b_i = 1-\alpha-\gamma$. Az előző állítás miatt nem lehet $\sum_{i=1}^{m} b_i \geq 1 - \alpha$, ennélfogva $0 < \gamma < 1$. Legyen ekkor $1 \leq i \leq 6$ indexekre $d_i = \gamma/6$. Ezekkel a tárgyakkal konstruálható egy "megjavított" C láda, amelyre már igaz, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{6} d_i = 1 - \alpha$$

és így az előző állítás következménye, hogy $1 \leq W(C) = W(B) + \sum_{i=1}^{6} W(d_i)$. Mindemellett mindegyik $d_i = \gamma/6 < 1/6$, emiatt pedig

$$1 \leq W(C) = W(B) + 6/5 \cdot \sum_{i=1}^{6} d_i = 1 - \beta + 6/5 \cdot \gamma$$

Az egyenletet átrendezve $5/6 \cdot \beta \leq \gamma$, amelyből

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = 1 - \alpha - \gamma \leq 1 - \alpha - 5/6 \cdot \beta$$

□

3.2.6. Állítás. *Legyen az L lista FF pakolása $B_1, \ldots, B_{FF(L)}$. Ekkor*

$$W(L) \geq FF(L) - 1 + \sum_{i=1}^{FF(L)} \max\{0, W(B_i) - 1\}$$

Bizonyítás. Definiáljuk minden $1 \leq i \leq FF(L)$ indexekre a következőket:

$$\beta_i = \max\{0, 1 - W(B_i)\} \text{ - a } B_i \text{ láda hiánya}$$

Ekkor könnyen látható, hogy

$$W(L) = FF(L) + \sum_{i=1}^{FF(L)} \max\{0, W(B_i) - 1\} - \sum_{i=1}^{FF(L)} \beta_i$$

tehát csak azt kell bizonyítanunk, hogy a jobb oldalon szereplő kivonásnál legfeljebb 1-et veszünk el az összegből. Tekintve, hogy a $\beta_i = 0$ eset érdektelen számunkra, a sorrendet jelöljük megtartva $C_1, \dots, C_k$-val a valóban hiányos ládákat ($\beta_i > 0$), hasonlóan átcímkézve β_i-ket is. Amennyiben $k \leq 1$, azaz legfeljebb egy hiányos láda van, úgy az állítás rögtön adódik, így tegyük fel, hogy $k \geq 2$. Legyenek a ládák MMH-ja α_i. Feltevésünk miatt tetszőleges $b \in C_i$ tárgyra $b > \alpha_i$ minden $1 \leq i \leq k$ indexre.

Alkalmazzuk C_i-re $i < k$ feltétellel a hiányos ládákról szóló előző állítást. Ha **(i)** lenne igaz, akkor $\alpha_{i+1} \geq 1/2$, és ezt összevetve a feltételekkel C_{i+1}-ben kell lennie egy 1/2-nél nagyobb méretű b tárgynak. Mivel ekkor $W(b) \geq 1$, ez ellentmondana C_{i+1} hiányos voltának. Így tehát $i < k$ esetén csak az állhat fenn, hogy $C_i \leq 1 - \alpha_i - (5/6) \cdot \beta_i$. Átrendezve ezt az egyenlőtlenséget és alkalmazva az MMH definícióját, azt kapjuk, hogy $\alpha_{i+1} - \alpha_i \geq (5/6) \cdot \beta_i$. Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva

$$\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \leq 6/5 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) = 6/5 \cdot (\alpha_k - \alpha_1)$$

Emellett C_k ládában van legalább egy b tárgy, amelyre $b > \alpha_k$. Tudjuk, hogy **(3.1)** alapján $6/5 \cdot b \leq W(b)$, amelyből $W(b) > 6/5 \cdot \alpha_k$. Hozzávéve a β_k hiány definícióját $\beta_k \leq 1 - W(b) < 1 - 6/5 \cdot \alpha_k$.

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i \leq 6/5 \cdot (\alpha_k - \alpha_1) + 1 - 6/5 \cdot \alpha_k = 1 - \alpha_1 \leq 1$$

□

Az állítás során tett részeredményünket a későbbiek folyamán még felhasználjuk, így jobbnak látjuk, ha itt kiemelve szerepel.

3.2.7. Lemma. *Legyenek az FF pakolásában $C_1, \dots, C_k$ azok a hiányos ládák, amelyekre $W(C_i) = 1 - \beta_i < 1$ és $k \geq 2$. Ha a C_i láda MMH-ja α_i, akkor*

$$\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \leq 6/5 \cdot \alpha_k$$

Az előző állítások következményeképpen gyakorlatilag egy kész tétel birtokában vagyunk.

3.2.8. Tétel. *Bármilyen L bemenetre $FF(L) \leq 17/10 \cdot L_{opt} + 1$, így $A_{FF} = 17/10$.*

Bizonyítás. Legyen $L = [a_1, \dots, a_n]$ és $W(L) = \sum_{i=1}^{n} W(a_i)$. Az optimális pakolás L particionálása, így a súlyfüggvényre vonatkozó **(3.2.1)** állítás miatt

$$W(L) = \sum_{i=1}^{n} W(a_i) \leq 17/10 \cdot L_{opt}$$

Az előző állítással együtt pedig

$$FF(L) \leq W(L) + 1$$

Ezeket összerakva

$$FF(L) \leq 17/10 \cdot L_{opt} + 1$$

□

3.2.9. Megjegyzés.

- Érdekesség, hogy 17/10 aszimptotikus közelítő érték néhány $L_{opt} = k$ értékre egyenlő is. Legyen L lista a következő:

$$L = \left[a_{1,\ldots,7} = \frac{6}{101}, b_{1,\ldots,7} = \frac{10}{101}, c_{1,\ldots,3} = \frac{16}{101}, d_{1,\ldots,10} = \frac{34}{101}, e_{1,\ldots,10} = \frac{51}{101}\right]$$

  ahol hangsúlyozzuk, hogy a tárgyak növekvő sorrendbe vannak rendezve. Ekkor $L_{opt} = 10$ pakolása 3 darab $B_1 = (16+34+51)/101$ és 7 darab $B_2 = (6+10+34+51)/101$ teljesen telített láda. Ezzel szemben az $FF(L) = 17$ pakolása sok hézagot hagy:

$$B_1 = \sum_{i=1}^{7} a_i + \sum_{j=1}^{5} b_j = 92/101 \ , \ B_2 = \sum_{j=6}^{7} b_j + \sum_{i=1}^{3} c_i = 68/101$$

$$B_{3,\ldots,7} = d_j + d_{j+1} = 68/101 \ , \text{ ahol } j = 1, 3, 5, 7, 9$$

$$B_{8,\ldots,17} = e_{1,\ldots,10} = 51/101$$

  Létezik továbbá olyan lista is, amelyre $L_{opt} = 20$ és $FF(L) = 34$.

- Figyeljük meg, hogy a legrosszabb esetek vizsgálatakor olyan bemeneteket konstruáltunk, amelyekre a BF ugyanúgy reagálna, mint az FF. Ennélfogva mondhatjuk, hogy $A_{BF} = 17/10$.

- A következő fejezetben említést teszünk az FF abszolút közelítő hányadosáról, de szerepeljen itt: $R_{FF} \leq 7/4$.

- A fejezetben bemutatott állítások és tételek megtalálhatók **[2]**-ben és **[4]**-ben.

4. fejezet

Kínai pakolás

Ebben a fejezetben jóval erősebb felső becslést fogunk bemutatni az R_{FF} abszolút közelítő hányadosra, továbbá az előző (eredeti) bizonyításban kapott additív konstanst fogjuk tovább csökkenteni. Felfrissítve a harmadik fejezetben említett eredményeket, jelenleg $R_{FF} \leq 7/4$ és bármilyen L bemenetre $FF(L) \leq 17/10 \cdot L_{opt} + 1$. Ebben a fejezetben belátjuk, hogy $R_{FF} \leq 12/7$ és $FF(L) \leq 17/10 \cdot L_{opt} + 7/10$, tovább csökkentve ezzel az abszolút és aszimptotikus közelítő hányadosok közötti űrt. A kapcsoló szakirodalom **[1]**-ben található.

Legyen $\mathcal{B}_{FF}$ az FF algoritmus által nyert pakolás ládáinak halmaza, hasonlóan $\mathcal{B}_{opt}$ pedig az optimális pakolásé. Ha egy $B \in \mathcal{B}_{FF}$ láda legalább egy (kettő stb.) tárgyat tartalmaz, akkor $\mathcal{B}_I$ ($\mathcal{B}_{II}$ stb.) típusúnak fogjuk mondani. Hasonlóan, ha $B \in \mathcal{B}_{FF}$ pontosan egy (kettő stb.) tárgyat tartalmaz, akkor legyen $\mathcal{B}_i$ ($\mathcal{B}_{ii}$ stb.) típusú. Ha egy tárgy egy $\mathcal{B}_i$ ($\mathcal{B}_{ii}, \mathcal{B}_I, \mathcal{B}_{II}$) típusú láda tartalmát képezi, akkor a tárgyat i (ii, I, II) típusú tárgynak nevezzük. A fentebb definiált ládatípusok számát rendre $\mathcal{N}_I, \mathcal{N}_{II}, \mathcal{N}_i, \mathcal{N}_{ii}$ stb. fogja jelölni.

4.0.1. Lemma. $\mathcal{N}_i \leq L_{opt}$.

Bizonyítás. Tetszőleges b_1, b_2 i-típusú tárgyakra $b_1 + b_2 > 1$, különben az FF segítségével egy ládába is tudnánk őket tenni. Emiatt b_1 és b_2 az optimális pakolásban sem tehető egybe. $\square$

4.1. A legkisebb aszimptotikus közelítő hányados

4.1.1. Lemma. *Legyen k tetszőleges egész és $m \geq k+1$ szintén egész szám. Ha a $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{B}_{FF}$ az összes olyan láda, amelyben legalább k darab tárgy van, akkor*

$$\sum_{i=1}^{m} B_i > m \cdot \frac{k}{k+1}$$

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk m szerint. Feltehető, hogy a tételben szereplő ládákat az FF pakolás sorrendjét megtartva soroltuk fel, tekintsük így B_s és B_t ládákat $(s < t)$. Legyen $b_{t_1}, \ldots, b_{t_k}$ a legalább k darab tárgy egy tetszőleges k elemű részhalma B_t ládából. Az FF pakolási szabálya miatt tudjuk, hogy $B_s + b_{t_j} > 1$ minden $1 \leq j \leq k$ indexre. Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva azt kapjuk, hogy tetszőleges $s < t$ ládaindexek esetén fenáll, hogy

$$k \cdot B_s + B_t > k$$

Legyen $m = k+1$. Ekkor $k \cdot B_i + B_{k+1} > k$ minden $1 \leq i < k+1$ indexre és ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva

$$k^2 < k \cdot \sum_{i=1}^{k} B_i + k \cdot B_{k+1} = k \cdot \sum_{i=1}^{k+1} B_i$$

azaz $k < \sum_{i=1}^{k+1} B_i$, így $m = k+1$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $m > k+1$ és m-ig igaz az állítás, ebből belátjuk, hogy $m+1$-re is igaz lesz. Itt is kihasználjuk, hogy $k \cdot B_i + B_{m+1} > k$ igaz minden $1 \leq i \leq m$ indexre és ebből

$$k \cdot \sum_{i=1}^{m} B_i + m \cdot B_{m+1} > m \cdot k$$

Ezt összevetve az indukciós feltétellel, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m+1} B_i &= \frac{m \cdot \sum_{i=1}^{m} B_i + m \cdot B_{m+1}}{m} \\
&= \frac{k \cdot \sum_{i=1}^{m} B_i + m \cdot B_{m+1} + (m-k) \cdot \sum_{i=1}^{m} B_i}{m} \\
&> \frac{m \cdot k + (m-k) \cdot (\frac{m \cdot k}{k+1})}{m} = (m+1) \cdot \frac{k}{k+1}
\end{aligned}$$

□

Néhány egyszerű következményt említünk meg itt, az egyes pontokban rendre $k = 1, 2, 3$ választásokkal.

4.1.2. Következmény. Legyen $|\mathcal{B}_{FF}| = m$.

1. Ha $m \geq 2$, akkor $\sum_{B \in \mathcal{B}_{FF}} B > 1/2 \cdot m$.
2. Ha $m \geq 3$, akkor a $\mathcal{B}_{II}$-típusú ládákra $\sum_{B \in \mathcal{B}_{FF}} B > 2/3 \cdot m$.
3. Ha $m \geq 4$, akkor a $\mathcal{B}_{III}$-típusú ládákra $\sum_{B \in \mathcal{B}_{FF}} B > 3/4 \cdot m$.

A fenti következmények segítségével már beláthatjuk az FF aszimptotikus közelítő hányadosára vonatkozó, alábbi tételt:

4.1.3. Tétel. *Tetszőleges L bemenet esetén $FF(L) \leq 17/10 \cdot L_{opt} + 7/10$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $FF(L) > 17/10 \cdot L_{opt} + 7/10$, azaz rendezve

$$FF(L) \geq 17/10 \cdot L_{opt} + 4/5 \tag{4.1}$$

Több állítást is fogunk tenni, ezek mindegyikét külön-külön fogjuk bizonyítani a következőkben.

4.1.4. Állítás. *Ha $FF(L) \geq 17/10 \cdot L_{opt} + 4/5$ és b II-típusú tárgy, akkor $b \leq 1/2$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy B-ben van egy $1/2 < b_1$ tárgy. Mivel B-ben még legalább egy tárgy van, az legyen b_2. Ekkor a W súlyfüggvényre vonatkozó alapbecslés miatt (**(3.1)** állításnál látható)

$$W(B) \geq 6/5 \cdot b_1 + 4/10 + 6/5 \cdot (B - b_1) = 6/5 \cdot B + 4/10 \geq 6/5$$

Ekkor a **(3.2.6)** lemma alkalmazásával

$$W(L) > FF(L) - 1 + (6/5 - 1) = FF(L) - 4/5 \geq 17/10 \cdot L_{opt}$$

a **(4.1)** értelmében. Ez az eredmény viszont ellentmondana a **(3.2.1)** állításnak, ennek következtében tudjuk, hogy $B < 2/3$ és $b_2 < 1/6$.

Vizsgáljuk az előbbiek ismeretében a B-t megelőző ládákat. Minden ilyen A ládára $A > 5/6$, mely b_2 méretéből adódik, így $W(A) \geq 6/5 \cdot A \geq 1$.

Bontsuk ketté a B után következő ládák csoportját: egy $\mathcal{B}_{II}$ példány legyen C, egy $\mathcal{B}_i$ példány legyen D. Egy C ládában minden tárgy mérete nagyobb mint $1/3$, mivel $B < 2/3$, így $W(C) \geq 2 \cdot W(1/3) = 1$. Áttérve D-re, mivel az ilyen típusú ládákban pontosan egy darab tárgy van, így ezekben mindegyik tárgy mérete nagyobb mint $1/2$, legfeljebb egy darab láda kivételével. (Ha lenne két ilyen láda, az FF egyberakta volna őket.) Tehát minden ilyen D ládára igaz, hogy $W(D) > 1$, és ha E kivétel, akkor $E > 1/3$, amelyből $W(E) > W(1/3) \geq 1/2$. Mindezt most egy egyenlőtlenségbe összerakva

$$17/10 \cdot L_{opt} \geq W(L) = \sum_{B \in \mathcal{B}_{FF}} W(B) \geq \sum_{i=1}^{FF(L)-1} 1 + W(1/3)$$
$$> FF(L) - 1 + 1/2 \geq 17/10 \cdot L_{opt} + 3/10$$

Az utolsó lépésben **(4.1)**-et használtunk, és nyilvánvalóan ellentmondásra jutottunk. □

Tehát **(4.1)** következtében a $\mathcal{B}_{II}$ típusú ládákban nincs 1/2-nél nagyobb méretű tárgy; ezek szeparáltan, egyesével vannak a ládákba helyezve. Folytatjuk tovább az ilyen nagy méretű tárgyak és a $\mathcal{B}_i$ ládák kapcsolatának vizsgálatával.

4.1.5. Állítás. *Van olyan $B \in \mathcal{B}_i$ láda, amelynek egyetlen b tárgyára $b \leq 1/2$. Másképpen, ha k a $b > 1/2$ tárgyak száma, akkor $k < \mathcal{N}_i$.*

Bizonyítás. Az előző állítás alapján triviális, hogy $k \leq \mathcal{N}_i$. Indirekt tegyük fel, hogy $k = \mathcal{N}_i$.

Mivel minden $B \in \mathcal{B}_i$ ládára igaz, hogy $B > 1/2$, ezért $W(B) \geq 1$, így, ha létezik hiányos C láda, amelyre $W(C) < 1$, akkor $C \in \mathcal{B}_{II}$. A hiányos ládák m számától függően két esetet kell megfigyelnünk:

1. $m \geq 2$. Tekintsük a C_m láda MMH-ját, legyen ez α_m, és szorítsuk meg az MMH definícióját itt annyiban, hogy α_m maximális értéket csak a C_i hiányos ládák mentén keressük. Ekkor α_m csökkenhet, de azt állítjuk, hogy $\alpha_m > 1/6$ még így is. Ezt bizonyítandó, legyen $1 \leq j < m$ indexre C_j az a láda, amelyre $C_j = 1 - \alpha_m$. Ekkor

$$1 > W(C_j) \geq 6/5 \cdot C_j = 6/5 \cdot (1 - \alpha_m)$$

a C_j hiányos volta miatt. Mivel $C_m \in \mathcal{B}_{II}$, így minden benne lévő b_1, b_2 tárgyra igaz, hogy $b_1, b_2 > \alpha_m$. Így a **(3.2.1)** lemma alkalmazásával

$$\begin{aligned}
17/10 \cdot L_{opt} \geq W(L) &= \sum_{W(B)\geq 1} W(B) + \sum_{i=1}^{m-1} W(C_i) + W(C_m) \\
&= \sum_{W(B)\geq 1} W(B) + \sum_{i=1}^{m-1} 1 - \big(1 - W(C_i)\big) + W(C_m) \\
&\geq \sum_{B\neq C_m} 1 - \sum_{i=1}^{m-1} \big(1 - W(C_i)\big) + W(C_m) \\
&\geq FF(L) - 1 - \sum_{i=1}^{m-1} \big(1 - W(C_i)\big) + W(b_1) + W(b_2) \\
&> FF(L) - 1 - 6/5 \cdot \alpha_m + 6/5 \cdot \alpha_m + 6/5 \cdot \alpha_m \\
&= FF(L) - 1 + 6/5 \cdot \alpha_m > FF(L) - 4/5
\end{aligned}$$

ahol a **(3.2.7)** lemmát is felhasználtuk. Mindez ellentmond **(4.1)**-nek, így tekintsük a következő esetet:

2. $m = 1$. Ekkor, ha $W(C_1) > 1/5$, akkor

$$17/10 \cdot L_{opt} \geq W(L) = \sum_{W(B)\geq 1} W(B) + W(C_1) > FF(L) - 1 + 1/5$$

mely ellentmondana **(4.1)**-nek. Ennélfogva $W(C_1) \leq 1/5$, melynek következtében $C_1 \leq 1/6$. Létezhet-e ebben az esetben 1/2-nél nagyobb méretű tárgy? Ha igen, azaz $k \geq 1$, akkor ezek a tárgyak csak egyelemű ládákban lehetnének az előbbi állítás miatt, így C_1 telítettségéből adódóan egy ilyen b tárgyra $b > 5/6$. Ennek fényében az indirekt $k = \mathcal{N}_i$ feltevéssel együtt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
17/10 \cdot L_{opt} \geq W(L) &\geq FF(L) - 2 + W(b) + W(C_1) \\
&> FF(L) - 2 + W(5/6) = FF(L) - 3/5
\end{aligned}$$

amely megintcsak ellentmond **(4.1)**-nek, tehát ebben az esetben nincs nagy méretű tárgy, $k = 0$. Mivel minden $0 < b \leq 1/2$ tárgyra $W(b) \leq 3/2$, azonnal azt látjuk a **(3.2.6)** állítás segítségével, hogy

$$FF(L) - 1 < W(L) \leq 3/2 \cdot L_{opt} \leq 17/10 \cdot L_{opt} - 1/5$$

amely szintén ellentmond **(4.1)**-nek. Mindenképpen ellentmondásra jutottunk, így az állítást beláttuk.

□ Eddigi tudásunk alapján a nagy tárgyak szeparáltan helyezkednek el a pontosan egy tárgyat tartalmazó ládákban és van legalább egy olyan $C \in \mathcal{B}_i$ láda is, amelyben a b tárgyra $b \leq 1/2$. Továbbra is k-val jelölve a nagy tárgyak számát, az előző állításból látható, hogy $k \leq \mathcal{N}_i - 1 \leq L_{opt} - 1$, ennélfogva

$$\begin{aligned} FF(L) - 1 < W(L) &= \sum_{B \neq C} W(B) + W(C) \\ &\leq 17/10 \cdot (L_{opt} - 1) + 3/2 = 17/10 \cdot L_{opt} - 1/5 \end{aligned}$$

Ennek következtében $FF(L) < 17/10 \cdot L_{opt} + 4/5$, amely ellentmond **(4.1)**-nek, és így a tételt magát is beláttuk. □

Eddigi ismereteink alapján a 7/10 a legkisebb additív konstans az FF aszimptotikus közelítő hányadosában. Nem állhatunk meg itt, látványos eredményt kell produkálnunk az abszolút közelítő hányados esetében is.

4.2. A legkisebb abszolút közelítő hányados

Az első lemmánk megmutatja, hogy ha túl kevés vagy túl sok $\mathcal{B}_i$ típusú ládánk van, az FF az eddigieknél jobban teljesít.

4.2.1. Lemma. *Ha $\mathcal{N}_i \leq 1$ vagy $\mathcal{N}_i \geq FF(L) - 2$, akkor $FF(L) \leq 5/3 \cdot L_{opt}$.*

Bizonyítás. $FF(L) = 1$, ha $L_{opt} = 1$. $L_{opt} \geq 2$ esetén $5/3 \cdot L_{opt} \geq 3$. Így az eredmény azonnali, amennyiben $L_{opt} = 1$ vagy $FF(L) \leq 3$, emiatt azt kell vélelmenzünk, hogy $L_{opt} \geq 2$ és hogy $FF(L) \geq 4$.

1. Ha $\mathcal{N}_i \leq 1$, akkor $\mathcal{N}_{II} = FF(L) - \mathcal{N}_i \geq 3$. Felhasználva a **(4.1.2)** következményt, azt látjuk, hogy

   $$L_{opt} \geq \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{B \in \mathcal{B}_i} B + \sum_{B \in \mathcal{B}_{II}} B \geq \sum_{B \in \mathcal{B}_{II}} B > \frac{2}{3} \cdot \mathcal{N}_{II} = \frac{2}{3} \cdot \left(FF(L) - \mathcal{N}_i\right)$$

   azaz $3 \cdot L_{opt} \geq 2 \cdot FF(L) - 1$. Mivel $L_{opt} \geq 3$, ezért rendezve

   $$FF(L) \leq 3/2 \cdot L_{opt} + 1/2 \leq 5/3 \cdot L_{opt}$$

2. Ha $\mathcal{N}_i \geq FF(L) - 2$, akkor a **(4.0.1)** lemma miatt $FF(L) \leq L_{opt} + 2$. Ha $L_{opt} = 2$, akkor a kezdeti feltevések miatt $FF(L) = 4$ és $\mathcal{N}_i = 2$. Legyen b_1, b_2 az a két tárgy,

amely $\mathcal{N}_i$ típusú ládában van (emiatt $b_1 + b_2 > 1$), és ekkor

$$\sum_{B \in \mathcal{B}_{II}} B = \sum_{a \in L} a - (b_1 + b_2) \leq L_{opt} - (b_1 + b_2) < 1$$

De ez az eredmény ellentmond annak, hogy $FF(L) - \mathcal{N}_i = \mathcal{N}_{II} = 2$. Ennek következtében $L_{opt} \geq 3$ és így

$$FF(L) \leq L_{opt} + 2 \leq 5/3 \cdot L_{opt}$$

□

A következő lemmáról és a hozzátartozó állításokról mondhatnánk, hogy az előbbi lemma komplementere, ugyanis ha megnézzük azt az esetet, amikor az FF rosszabul teljesít a vártnál, akkor különböző összefüggések mutathatók ki a $\mathcal{B}_i$- és a $\mathcal{B}_{II}$-típusú ládák, a bennük lévő $b > 1/4$ tárgyak és az $FF(L), L_{opt}$ értékek között.

4.2.2. Lemma. *Ha $FF(L) \geq 17/10 \cdot L_{opt}$, akkor*

$$4\mathcal{N}_i \geq 18FF(L) - 27L_{opt} - 1$$

Bizonyítás. Mivel $FF(L) \geq 1.7 \cdot L_{opt} > 5/3 \cdot L_{opt}$, az előző lemmából következik, hogy $2 \leq \mathcal{N}_i \leq FF(L) - 3$. Mivel $\mathcal{N}_{II} = FF(L) - \mathcal{N}_i$, a **(4.1.2)** következmény segítségével

$$L_{opt} \geq \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{B \in \mathcal{B}_i} B + \sum_{B \in \mathcal{B}_{II}} B > 1/2 \cdot \mathcal{N}_i + 2/3 \cdot \mathcal{N}_{II}$$

$$= 1/2 \cdot \mathcal{N}_i + 2/3 \cdot \big(FF(L) - \mathcal{N}_i\big) = 2/3 \cdot FF(L) - 1/6 \cdot \mathcal{N}_i$$

Használva még a **(4.0.1)** lemmát, azt kapjuk, hogy $L_{opt} > 2/3 \cdot FF(L) - 1/6 \cdot L_{opt}$, melyet rendezve

$$FF(L) \leq \lceil 7/4 \cdot L_{opt} \rceil - 1 \tag{4.2}$$

Számolással látható, hogy az előbb kapott érték kisebb mint $17/10 \cdot L_{opt}$, ha $L_{opt} \leq 6$. Ez ellentmondana a kezdeti feltevésnek, így legyen $L_{opt} \geq 7$. A **(4.2)** előtti egyenlőtlenséget 12-vel felszorozva és némileg átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{N}_{II} > 9FF(L) - 12L_{opt} - 3\mathcal{N}_i$$

Ha itt a jobboldal legfeljebb 2, akkor a **(4.0.1)** lemmával és az $L_{opt} \geq 7$ feltétellel

$$FF(L) \leq 4/3 \cdot L_{opt} + 1/3 \cdot \mathcal{N}_i + 2/9 \leq 5/3 \cdot L_{opt} + 2/63 \cdot L_{opt} < 17/10 \cdot L_{opt}$$

amely ellentmondana az alapfeltevésnek, így $\mathcal{N}_{II} \geq 4$, mert a jobboldal egész.

4.2.3. Állítás. *Ha $FF(L) \geq 17/10 \cdot L_{opt}$, akkor az utolsó*

$$9FF(L) - 12L_{opt} - 3\mathcal{N}_i$$

darab B_{II} típusú ládában csak olyan b tárgyak vannak, melyekre $b > 1/4$.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem így van, azaz a megadott számú utolsó ládák között van egy $c \leq 1/4$ tárgy. Ekkor az első

$$\mathcal{N}_{II} - (9FF(L) - 12L_{opt} - 3\mathcal{N}_i) = 12L_{opt} - 8FF(L) + 2\mathcal{N}_i$$

darab $\mathcal{B}_{II}$ típusú ládák mindegyikének telítettsége nagyobb mint $3/4$. Tudva a lemma elejéről, hogy $\mathcal{N}_i \geq 2$ és most, hogy $\mathcal{N}_{II} \geq 4$, használhatjuk a **(4.1.2)** következményt, így

$$\begin{aligned} L_{opt} > 1/2 \cdot \mathcal{N}_i + 3/4 \cdot \big(12L_{opt} - 8FF(L) + 2\mathcal{N}_i\big) \\ + 2/3 \cdot \big(9FF(L) - 12L_{opt} - 3\mathcal{N}_i\big) = L_{opt} \end{aligned}$$

amely ellentmondást eredményez. □

4.2.4. Állítás. *Ha $FF(L) \geq 17/10 \cdot L_{opt}$, akkor bármely b i-típusú tárgyra $b > 1/4$.*

Bizonyítás. Bármely b i-típusú tárgyra $b > 1/2$ legfeljebb egy kivételével, máskülönben az FF egyberakná őket. Tehát legfeljebb egy b tárgy lehet olyan, amelyre $b \leq 1/4$. Indirekt tegyük fel, hogy valóban létezik egy ilyen b tárgy. Emiatt a többi i-típusú tárgy mérete nagyobb mint $3/4$ – szintén az FF pakolási szabálya miatt. Ekkor a **(4.1.2)** következmény és az $L_{opt} \geq 7$ segítségével

$$\begin{aligned} L_{opt} &> 3/4 \cdot (\mathcal{N}_i - 1) + 2/3 \cdot \mathcal{N}_{II} \\ &= 2/3 \cdot FF(L) + 1/12 \cdot \mathcal{N}_i - 3/4 \\ &> 2/3 \cdot FF(L) - 3/28 \cdot L_{opt} \end{aligned}$$

Ennek következtében $FF(L) < 93/56 \cdot L_{opt} < 17/10 \cdot L_{opt}$, amely ellentmondana a lemma feltételének. □

4.2.5. Állítás. *Ha $FF(L) \geq 17/10 \cdot L_{opt}$, akkor legfeljebb $3L_{opt} - 2\mathcal{N}_i + 1$ darab olyan b II-típusú tárgy van, amelyre igaz, hogy $b > 1/4$.*

Bizonyítás. Vessük össze az FF pakolását az optimálissal. Az előző állítás gondolatmenetét felidézve, az FF pakolásban $\mathcal{N}_i - 1$ ládában csak $b > 1/2$ tárgy lehet, az utolsóban pedig $c > 1/4$. Ha ezeket a $\mathcal{B}_i$ típusú ládákat optimális pakolásban nézzük, akkor legfeljebb még egy olyan d tárgy helyezhető beléjük, amelyre $d > 1/4$, az utolsó láda esetében pedig legfeljebb 2 ilyenről beszélhetünk. A maradék $L_{opt} - \mathcal{N}_i$ darab ládában legfeljebb 3 ilyen d tárgy fér el, ennélfogva legfeljebb

$$(\mathcal{N}_i - 1) + 2 + (L_{opt} - \mathcal{N}_i) \cdot 3 = 3 \cdot L_{opt} - 2 \cdot \mathcal{N}_i + 1$$

a száma az összes olyan d tárgynak, amelyre $d > 1/4$. $\square$

Innentől már be tudjuk bizonyítani a lemmát. Az előbbi állításoknak köszönhetően az utolsó $9FF(L) - 12L_{opt} - 3\mathcal{N}_i$ darab $\mathcal{B}_{II}$ típusú ládában csak olyan b tárgyak vannak, melyekre $b > 1/4$, és az ilyen tárgyak száma legfeljebb $3L_{opt} - 2\mathcal{N}_i + 1$. Ezeket összehasonlítva

$$2 \cdot \big(9FF(L) - 12L_{opt} - 3\mathcal{N}_i\big) \leq 3L_{opt} - 2\mathcal{N}_i + 1$$

mindezt rendezve

$$18FF(L) - 27L_{opt} - 1 \leq 4\mathcal{N}_i$$

$\square$

4.2.6. Lemma. *Ha $\mathcal{N}_i = L_{opt}$, akkor $L_{opt} \geq 2\mathcal{N}_{ii}$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $L_{opt} < 2\mathcal{N}_{ii}$. Ekkor a skatulya-elv miatt van egy olyan $B^* \in \mathcal{B}_{opt}$ láda, amelyben benne van két b_1, b_2 ii-típusú tárgy, amely az FF pakolásában egy vagy több $\mathcal{B}_{ii}$ láda tartalmát képezte. Mivel $\mathcal{N}_i = L_{opt}$, ezért B^*-ban lennie kell még egy $a_1 > 1/2$ tárgynak is. Jegyezzük meg, hogy $a_1 + b_1 + b_2 \leq B^* \leq 1$.

A b_1, b_2 tárgyak nem lehetnek az FF pakolásban egy ládában, mert az előző egyenlőtlenség alapján még beférnének a_1 mellé. Legyen így $b_1 \in B_1$ és $b_2 \in B_2$, ahol $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{FF}$ és B_1 megelőzi B_2-t: ez feltehető az általánosság megszorítása nélkül. Mivel b_1 ii-típusú, ezért B_1-ben van még egy b_3 tárgy. Mivel b_2 későbbi ládában van, ezért $b_1 + b_2 + b_3 > 1$.

A mostani egyenlőtlenségnek az a következménye, hogy $b_3 \notin B^*$ az optimális pakolásban, emiatt b_3 egy másik ládában van, ahol tudjuk, hogy van még egy i-típusú tárgy, legyen ez a_2. Ekkor $a_2 + b_3 \leq 1$ és mivel mind a_1, mind a_2 i-típusú, ezért $a_1 + a_2 > 1$.

Összerakva a kapott négy egyenlőtlenséget

$$1 < b_1 + b_2 + b_3 \leq b_1 + b_2 + 1 - a_2 < b_1 + b_2 + a_1 \leq B^* \leq 1$$

amely nyilvánvalóan ellentmondás. $\square$

4.2.7. Lemma. *Ha* $\mathcal{N}_i = L_{opt}$ *és* $FF(L) > 12/7 \cdot L_{opt}$*, akkor*

$$FF(L) \le \max\{1/9 \cdot \lfloor L_{opt}/2 \rfloor + 5/3 \cdot L_{opt} - 1/9, \lfloor L_{opt}/2 \rfloor + L_{opt} + 3\}$$

Bizonyítás. Ha $L_{opt} \le 10$, tekintsünk vissza a **(4.2.2)** lemmában szereplő állításokra, bizonyításokra, valamint az ott található **(4.2)** egyenletre. Ekkor számolással igazolható, hogy $FF(L) \le \lceil 7/4 \cdot L_{opt} \rceil - 1 \le 12/7 \cdot L_{opt}$, így tegyük fel, hogy $L_{opt} \ge 11$.

Abban az esetben is, ha $FF(L) \le L_{opt} + 7$, akkor $L_{opt} \ge 11$ miatt $FF(L) \le L_{opt} + 7/11 \cdot L_{opt} < 12/7 \cdot L_{opt}$, amely ellentmondana a lemma feltételének, így azt is tegyük fel, hogy $FF(L) \ge L_{opt} + 8$. Két eset szétválasztásával folytatjuk:

1. $\mathcal{N}_{ii} \le 2$. Ekkor legalább

   $$FF(L) - \mathcal{N}_i - \mathcal{N}_{ii} \ge FF(L) - L_{opt} - 2 \ge 6$$

   darab B_{III}-típusú láda van. Használva a **(4.1.2)** következményt

   $$\begin{aligned} L_{opt} &> 3/4 \cdot \big(FF(L) - L_{opt} - 2\big) + 1/2 \cdot \big(L_{opt} + 2\big) \\ &= 3/4 \cdot FF(L) - 1/4 \cdot L_{opt} - 1/2 \end{aligned}$$

   azaz $3FF(L) < 5L_{opt} + 2$, amelyből $3FF(L) \le 5L_{opt} + 1$. Viszont ekkor $L_{opt} \ge 11$ következményeként $FF(L) \le 5/3 \cdot L_{opt} + 1/33 \cdot L_{opt} < 12/7 \cdot L_{opt}$, amely ellentmond a lemma feltételének.

2. $\mathcal{N}_{ii} \ge 3$. Ha $4 \le FF(L) - \mathcal{N}_i - \mathcal{N}_{ii} = \mathcal{N}_{III}$, a **(4.1.2)** következményt és az $\mathcal{N}_i = L_{opt}$ feltételt használva

   $$\begin{aligned} L_{opt} &> \frac{1}{2}\mathcal{N}_i + \frac{2}{3}\mathcal{N}_{ii} + \frac{3}{4}\big(FF(L) - \mathcal{N}_i - \mathcal{N}_{ii}\big) \\ &= \frac{3}{4}FF(L) - \frac{1}{4}\mathcal{N}_i - \frac{1}{12}\mathcal{N}_{ii} \end{aligned}$$

   azaz $9FF(L) \le 15L_{opt} + \mathcal{N}_{ii} - 1$, ahogyan az első esetben számoltunk. 9-cel osztva és az előző lemmát alkalmazva az $1/9 \cdot \lfloor L_{opt}/2 \rfloor + 5/3 \cdot L_{opt} - 1/9$ felső becslésre jutunk.

   Ha viszont $\mathcal{N}_{ii} \ge FF(L) - \mathcal{N}_i - 3$, akkor szintén az előző lemmából adódik a másik, $FF(L) \le \lfloor L_{opt}/2 \rfloor + L_{opt} + 3$ eredmény, amellyel a bizonyítást befejeztük.

□

A következő lemma az előző lemmák alapján némi számolással és részesetek vizsgálatával bizonyítható. Fontosságát majd az abszolút közelítő hányadosról szóló tételben fogjuk látni, itt nem bizonyítjuk, ugyanúgy, mint ahogy az utána következő tételt sem.

4.2.8. Lemma. *Nem létezik olyan L lista, amelyre*

1. $L_{opt} = 11$ *és* $FF(L) = 19$.

2. $L_{opt} = 32$ *és* $FF(L) = 55$.

3. $L_{opt} = 39$ *és* $FF(L) = 67$.

4.2.9. Tétel. (diophantoszi egyenlet) *Legyenek a, b, u egész számok, ahol a, b relatív prímek. Ekkor az $a \cdot x + b \cdot y = u$ egyenletnek végtelen sok x, y egész megoldása létezik. Ha x_0, y_0 egy egész megoldás, akkor a többi megoldás előáll $x = x_0 + b \cdot v, y = y_o - a \cdot v$ alakban megfelelő v egész számmal.*

4.2.10. Tétel. *Bármilyen L listára $FF(L) \leq 12/7 \cdot L_{opt}$.*

Bizonyítás. Amennyiben $FF(L) \leq 17/10 \cdot L_{opt}$ vagy $L_{opt} \leq 10$, úgy az eredmény, a korábbi vizsgálatoknak hála, azonnal látható, így tegyük fel, hogy $FF(L) > 17/10 \cdot L_{opt}$ és $L_{opt} \geq 11$. Nézzük az alábbi diophantoszi egyenletet

$$31L_{opt} - 18FF(L) = u$$

valamely u egész számra. A **(4.2.2)** és a **(4.0.1)** lemmáknak köszönhetően azt kapjuk, hogy $u \geq 27L_{opt} + 4\mathcal{N}_i - 18FF(L) \geq -1$. Vegyük észre, hogy az $L_{opt} = 7u$ és az $FF(L) = 12u$ az egyenlet egy lehetséges megoldása, így a diophantoszi egyenletek tételével tetszőleges egész megoldás áll elő a következő alakban:

$$L_{opt} = 7u + 18v \ , \ FF(L) = 12u + 31v \tag{4.3}$$

ahol v olyan egész szám, melyre az egyenletek értelmesek lesznek. Ezeket az értékeket az aszimptotikus közelítő hányadosnál kapott $FF(L) \leq 17/10 \cdot L_{opt} + 7/10$ eredménybe behelyettesítve az egyszerűbb $u + 4v \leq 7$ egyenlőtlenséghez jutunk. Innen a bizonyítást két esetre bontjuk:

1. $u \geq 4$. Ekkor $v \leq 0$, így a **(4.3)** egyenlettel együtt
$$\frac{FF(L)}{L_{opt}} = \frac{12u + 31v}{7u + 18v} = \frac{31}{18} - \frac{1}{18 \cdot (7 + 18 \cdot v/u)} \leq \frac{31}{18} - \frac{1}{18 \cdot 7} = \frac{12}{7}$$

2. $-1 \leq u \leq 3$. Ekkor az $u + 4v \leq 7$ egyenlőtlenséggel a lehetséges (u, v) párosok és a hozzájuk tartozó $(L_{opt}, FF(L))$ értékek az alábbiak:

	(u, v)	$(L_{opt}, FF(L))$
1.	$(-1, 1)$	$(11, 19)$
2.	$(-1, 2)$	$(29, 50)$
3.	$(0, 1)$	$(18, 31)$
4.	$(1, 0)$	$(7, 12)$
5.	$(1, 1)$	$(25, 43)$
6.	$(2, 0)$	$(14, 24)$
7.	$(2, 1)$	$(32, 55)$
8.	$(3, 0)$	$(21, 36)$
9.	$(3, 1)$	$(39, 67)$

Az előző, nemlétező listákról szóló lemma kizárja **1.**, **7.** és **9.** esetét. A **2.**, **3.** és **5.** esetében a **(4.2.2)** lemmával némi számolás után

$$4\mathcal{N}_i \geq 18FF(L) - 27L_{opt} - 1 \geq 4L_{opt} - 3$$

melynek következtében a **(4.0.1)** lemmával $\mathcal{N}_i = L_{opt}$. Ekkor a **(4.2.7)** lemma kizárja ezen esetek létezését. Marad a **4.**, **6.** és a **8.** esete, melyekre $FF(L) = 12/7 \cdot L_{opt}$, és ezzel végeztünk is a tétel bizonyításával. $\square$

Az FF-ről szóló harmadik fejezetben láttuk, hogy létezik olyan L lista, amelyre $L_{opt} = 10$ és $FF(L) = 17$. Az előbbi tétel eredményeképpen az FF-re vonatkozó abszolút és aszimptotikus közelítő érték közötti különbség már kevesebb, mint $1/119 \approx 0.0149$. A relatíve kicsi eltérés miatt állítható, hogy a két közelítő érték megegyezik, ami a Bin-packing-re írt algoritmusoknál nem általános jelenség. Ezt bizonyítandó, a következő lépés egy olyan L bemenet konstrukciója lenne, amelyre $L_{opt} = 7$ és $FF(L) = 12$.

5. fejezet

További eredmények, kitekintés

5.1. First Fit Decreasing

Nem meglepő módon, jelentős javulást eredményez a használt ládák számát tekintve, ha a bemeneti L listát előzetesen csökkenő sorrendbe rendezzük. Amennyiben $PA \in AF$ és PA offline előzetesen csökkenő sorrendbe rendezi a bemenetet, akkor $PA \in AFD$-t fogunk írni. Mivel a témához kapcsolódó bizonyítások többsége hosszadalmas és nehéz, így itt csak a legfontosabbakat említjük meg, némelyiket bizonyításuk nélkül.

Mivel a szakdolgozatban az FF kapott hangsúlyt, szerepeljen itt a First Fit Decreasing (FFD), amely az eredeti algoritmustól a bemeneti lista csökkenő sorrendbe való rendezésében különbözik.

5.1.1. Tétel. *Az FFD algoritmusra $R_{FFD} = 3/2$.*

Bizonyítás. Legyen $FFD(L) = k$ és tekintsük a $j = \lceil 2/3 \cdot k \rceil$ indexű ládát. Rögtön két esetre bontjuk szét a bizonyítást:

- Ha ebben a ládában van $1/2 < b_i$ méretű tárgy, a csökkenő rendezés miatt minden $i' < i$ indexre $b_{i'} \geq b_i > 1/2$ és emiatt ezeknek a tárgyaknak mind különböző ládákba kellett kerülniük, illetve legalább j darab ilyen tárgy van, ennélfogva

$$2/3 \cdot k \leq L_{opt}$$

- A másik esetben minden, a ládában lévő b_i tárgyra igaz, hogy $1/2 \geq b_i$. Ekkor bármelyik j-nél nagyobb indexű ládában (legfeljebb az utolsó kivételével) legalább két darab tárgy van. Ez azért igaz, mert a csökkenő sorba rendezés miatt minden

$i < i'$ indexű tárgyra $1/2 \geq b_i \geq b_{i'}$, tehát két ilyen tárgy belefér a ládákba, illetve nem lehet két olyan láda, amelyben csak egy-egy ilyen tárgy van, mert az algoritmusnak akkor az utóbbi láda tárgyát az előbbibe kellett volna beletennie.

Mindezek miatt a j-től kezdve összesen legalább $2(k-j)+1$ olyan tárgy van a ládákban, amelyek nem fértek bele a j-nél kisebb indexű ládák egyikébe sem, így

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i &> \min\{j-1, 2(k-j)+1\} \\
&\geq \min\left\{\left\lceil \frac{2}{3}k \right\rceil - 1, 2 \cdot \left(k - \left(\frac{2}{3}k + \frac{2}{3}\right)\right) + 1\right\} \\
&= \min\left\{\left\lceil \frac{2}{3}k \right\rceil - 1, \frac{2}{3}k - \frac{1}{3}\right\} \\
&= \lceil 2/3 \cdot k \rceil - 1
\end{aligned}$$

azaz $\lceil (2/3) \cdot k \rceil - 1 < L_{opt}$. Kihasználva, hogy nemnegatív egészek között végeztük a becsléseket

$$2/3 \cdot k \leq L_{opt}$$

és ezzel a bizonyítást befejeztük.

□

5.1.2. Tétel. *Tetszőleges k egész szám esetén létezik olyan L lista, amelyre $L_{opt} = k$ és $FFD(L) \geq 11/9 \cdot L_{opt} - 2$, így $A_{FFD} \geq 11/9$.*

Bizonyítás. Az FF-nél látott bizonyításhoz képest itt jóval egyszerűbb lesz L lista szerkezete. Legyen $\epsilon > 0$ egy kicsi szám, $N = \lfloor k/9 \rfloor$, $m \equiv k \mod 9$ és $n = 30N + m$. Legyen L az alábbi módon definiálva:

$$a_i = \begin{cases} 1/2 + \epsilon & , 1 \leq i \leq 6N \\ 1/4 + 2\epsilon & , 6N < i \leq 12N \\ 1/4 + \epsilon & , 12N < i \leq 18N \\ 1/4 - 2\epsilon & , 18N < i \leq 30N \\ 1 & , 30N < i \leq n \end{cases}$$

Megfigyelhető, hogy a tárgyak megfelelően csoportosíthatók a következő módon:

1. m darab 1 méretű tárgy külön-külön megtölt egy ládát. Ez eddig m darab láda.

2. A $6N$ darab $1/2+\epsilon$ méretű tárgy és a $6N$ darab $1/4+\epsilon$ méretű tárgy mellé választunk $6N$ darab $1/4-2\epsilon$ méretű tárgyat. Mindegyik csoportból egy tárgyat választva összegként 1-et kapunk, így megtöltésre kerül tovább $6N$ darab láda.

3. A maradék $6N$ darab $1/4-2\epsilon$ méretű tárgy és a $6N$ darab $1/4+2\epsilon$ méretű tárgyakból kettőt-kettőt véve ismét teljesen megtöltünk egy ládát, azaz további $12N/4 = 3N$ ládát használunk fel.

Ezzel szemben az FFD valamivel több ládát használ, miután a listát csökkenő sorrendbe rendezi.

1. Mint az optimális pakolásban, az első m tárgy m ládát tölt meg.

2. A $6N$ darab $1/2+\epsilon$ méretű tárgy csak külön ládákba kerülhet. A kimaradó helyekre $6N$ darab $1/4+2\epsilon$ méretű tárgy még elfér, és ezzel egy ilyen ládában $1/4-3\epsilon$ méretű hézag marad. Ezzel további $6N$ ládát használtunk fel.

3. A következő $6N$ darab $1/4+\epsilon$ méretű tárgy hármas csoportokban tölt meg $2N$ ládát, az előző ponthoz hasonlóan itt is $1/4-3\epsilon$ méretű hézag keletkezik.

4. A $12N$ darab $1/4-2\epsilon$ méretű tárgy négyesével csoportosítva pakolható $3N$ darab ládába.

Mindebből

$$FFD(L) = 11N + m \text{ és } L_{opt} = 9N + m$$

azaz

$$FFD(L) = 11/9 \cdot L_{opt} - 2/9 \cdot m > 11/9 \cdot L_{opt} - 2$$

□

A szakdolgozat végéhez közeledve, itt szerepelnek a bebizonyításra nem kerülő eredmények. Magyarázatként megemlítjük, hogy a következő tételek bizonyítása valóban hosszadalmas, némelyik akár 10-nél több részeset megfigyelését is igényli.

- Általános eredmény az FFD-ről:

  5.1.3. Tétel. *Bármilyen L listára igaz, hogy $FFD(L) \leq 11/9 \cdot L_{opt} + 4$, így $A_{FFD} = 11/9$. Az állítás érvényben marad, ha az FFD helyett BFD algoritmust használunk.*

- Az FFD és BFD algoritmusok teljesítményének kapcsolatáról:

  5.1.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $L \subseteq (0; 1/6]$*. Ekkor* $BFD(L) \leq FFD(L)$*.*

  5.1.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $L \subseteq [1/5; 1]$*. Ekkor* $BFD(L) = FFD(L)$*.*

- A speciális L listák és az FFD kapcsolatáról:

  5.1.6. Tétel. *Legyen* L *egy tetszőleges bemenet.*

  1. *Ha* $L \subseteq (2/11; 1]$*, akkor* $FFD(L) \leq 71/60 \cdot L_{opt} + 4$*.*
  2. *Ha* $L \subseteq (0; 1/2]$*, akkor* $FFD(L) \leq 71/60 \cdot L_{opt} + 5$*.*
  3. *Ha* $L \subseteq (8/29; 1/2]$*, akkor* $A_{FFD} = 71/60$*.*
  4. *Ha* $L \subseteq (1/4; 8/29]$*, akkor* $A_{FFD} = 7/6$*.*
  5. *Ha* $L \subseteq (1/5; 1/4]$*, akkor* $A_{FFD} = 23/20$*.*

  A 2. pontban lévő aszimptotikus becslés éles is, azonban meglepően a konstruált L lista tárgyai még 1/3-nál is kisebbek.

- Végezetül pár szó az AFD algoritmusokról:

  5.1.7. Tétel. *Tetszőleges* $PA, PB \in AFD$ *algoritmusokra* $|PA(L) - PB(L)| \leq 1$*.*

  5.1.8. Tétel. *Ha* $PA \in AAF$*,* $PB \in AF$ *és* $L \subseteq (1/4; 1]$ *lista elemei csökkenő sorrendbe vannak rendezve, akkor* $PA(L) \leq PB(L) \leq PA(L) + 1$*.*

5.2. A First Fit egy implementációja

Ismerve az FF pakolási szabályát, könnyen látható, hogy a futásidő n tárgy esetén legfeljebb $c \cdot n^2 = \mathcal{O}(n^2)$. Röviden ezt megmagyarázva, mint ahogyan a szakdolgozat legelején is láttuk, a tárgyak mindenképpen beleférnek n ládába, így egy tárgy esetén legfeljebb ennyi láda közül kell keresni egyet, amibe b tárgy belefér. Annak ellenőrzése, hogy valóban belefér b tárgy egy kiválasztott ládába, c konstans időben számolható.

Azonban létezik a ládáknak egy másfajta, hatékonyabb tárolási módja. Amennyiben a ládákat *kiegyensúlyozott bináris keresőfában* (AVL-ra, Piros-Fekete-fa) tároljuk , úgy a megfelelő láda keresése lineáris idő helyett $\log n$ időre csökken. Tehát ilyen megvalósítás esetén az FF futásideje $\mathcal{O}(n \log n)$. Lentebb egy ilyen megvalósítás rövid, lényegi C++-kódját mellékeltük .

```
#include<iostream>
#include<algorithm>
using namespace std;
struct Bin{
Bin* left;
Bin* right;
int value;
int height;
Bin(int input_value); // CONSTRUCTOR
void update_height(); // UPDATING HEIGHT AFTER ROTATION, INSERTION, DELETION
int balance_factor();
Bin* left_rotate(); // BASIC ROTATION
Bin* right_rotate() // BASIC ROTATION
void in_order(); // INORDER TRACK
};
```

```
#include "Bin.h"
#include<vector>
struct BinTree{
Bin* root;
BinTree(); // CONSTRUCTOR
~BinTree(); // DESTRUCTOR
void clear(); // CLEARING AGAINST MEMORY LEAK
void tree_in_order(); // TREE INORDER TRACK
void insert_item(int input_value);
void balance(vector<Bin**> path);

// FIRST FIT FUNCTION
void First_Fit(int input_value){
Bin** indirect = &root;
vector<Bin**> path;
while (*indirect != nullptr && (100 - (*indirect)->value) < input_value){
path.push_back(indirect);
indirect = &(*indirect)->left;
```

```
}
if (*indirect == nullptr){
this->insert_item(input_value);
}
else{
path.push_back(indirect);
size_t index = path.size();
int full_content = (*indirect)->value + input_value;
if ((*indirect)->left == nullptr && (*indirect)->right == nullptr){
delete* indirect;
*indirect = nullptr;
path.pop_back();
}
else if ((*indirect)->right == nullptr){
Bin* toRemove = *indirect;
(*indirect) = (*indirect)->left;
delete toRemove;
path.pop_back();
}
else{
Bin** successor = &((*indirect)->right);
while ((*successor)->left != nullptr){
path.push_back(successor);
successor = &((*successor)->left);
}
if (*successor == (*indirect)->right){
(*successor)->left = (*indirect)->left;
Bin* toRemove = *indirect;
*indirect = *successor;
delete toRemove;
}
else{
Bin* temp = *path.back();
Bin* succ = *successor;
```

```
temp->left = (*successor)->right;
succ->left = (*indirect)->left;
succ->right = (*indirect)->right;
delete* indirect;
*indirect = succ;
path[index] = &(succ->right);
}
}
balance(path);
this->insert_item(full_content);
}
root->in_order();
cout << endl;
}
};
```

Irodalomjegyzék

[1] Binzhou Xia, Zhiyi Tan, *Tighter bound of the First Fit algorithm for the bin-packing problem*, 2010, (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X10002088)

[2] D. S. Johnson; A. Demers; J. D. Ullman; M. R. Garey; R. L. Graham, *Worst-case performance bound for simple one-dimensional packing algorithms*, 1974, (http://compalg.inf.elte.hu/ tony/Kutatas/BinPacking/JohnsonGareyUllman-WorstCase-1974-SIAM.pdf)

[3] D. S. Johnson, *Fast algorithms for Bin Packing*, 1974, (https://core.ac.uk/download/pdf/82592800.pdf)

[4] M. R. Garey; R. L. Graham; D. S. Johnson, *Resource Constrained Scheduling as Generalized Bin Packing*, 1976, (http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.112.4953&rep=rep1type=pdf)

[5] (http://ac.informatik.uni-freiburg.de/lak_teaching/ws11_12/combopt/notes/bin_packing.pdf)

[6] (https://dcg.epfl.ch/wp-content/uploads/2018/10/12-BinPacking.pdf)

[7] C. H. Papadimitriou, *Computational Complexity*, 1994