Egzotikus gömbök

Nagy Csaba
Matematika BSc.

Szakdolgozat

Témavezető: Szűcs András
Egyetemi tanár
Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Egzotikus gömbnek hívjuk azokat a differenciálható n-dimenziós sokaságokat, amelyek homeomorfak az S^n gömbbel, de nem diffeomorfak vele. Először Milnor mutatott példát ilyen 7-dimenziós sokaságra 1956-ban. Ismert, hogy minden legfeljebb 3 dimenziós topologikus sokaságon létezik differenciálható struktúra, ami diffeomorfizmus erejéig egyértelmű, tehát ebben a dimenziótartományban nincs egzotikus gömb. Nem tudjuk, hogy létezik-e 4-dimenziós egzotikus gömb, és ha létezik, akkor véges sok van-e belőle.

Azt viszont tudjuk, hogy 4-nél nagyobb dimenziókban csak véges sok egzotikus gömb van, dolgozatomban Kervaire és Milnor [3] cikke nyomán erre adok bizonyítást.

A cikkben a szerzők azt bizonyítják, hogy a homotopikus n-gömbök h-kobordizmus-osztályainak Θ_n csoportja véges. Dolgozatom 2. és 3. fejezetében kimondok két nevezetes eredményt, a h-kobordizmus-tételt és az általánosított Poincaré-sejtést, amelyek mutatják, hogy $n \geq 5$ esetén ez ugyanazt jelenti, mint az, hogy egzotikus gömbből (irányítástartó diffeomorfizmus erejéig) véges sok van.

A 2. fejezetben szerepelnek az alapvető definíciók, jelölések és a felhasznált tételek egy része. Itt szerepel az átépítés nevű konstrukció leírása is, amire a bizonyítás alapszik.

A 3. fejezetben részletesen ismertetem Θ_n végességének bizonyítását. A bizonyítás két fő lépésből áll: definiálunk egy bP_{n+1} részcsoportot, és megmutatjuk, hogy egyrészt a Θ_n/bP_{n+1} faktorcsoport, másrészt maga a bP_{n+1} részcsoport véges.

Végül a 4. fejezetben bizonyítok egy tételt, ami bizonyos n-ekre kapcsolatot teremt az eddig vizsgált Θ_n csoport, és a gömbök n. stabil homotopikus csoportja között.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Szűcs Andrásnak a dolgozat elkészítéséhez nyújtott segítséget és a tartalmas konzultációkat.

2. Előkészületek

Bevezetjük az alapvető definíciókat, jelöléseket és áttekintjük a felhasznált tételeket.

Az alapfogalmak részletes leírása megtalálható pl. a Hatcher [1], Hirsch [2], Milnor, Stasheff [8] könyvekben.

A dolgozatban, ha mást nem mondunk, sokaság alatt mindig kompakt, irányított, differenciálható sokaságot értünk, zártat és peremeset egyaránt.

Jelölés.

R^n az n-dimenziós euklideszi tér, $D^n = \{x \in R^n \mid |x| \leq 1\}$ az n-dimenziós golyó, $S^n = \{x \in R^{n+1} \mid |x| = 1\}$ az n-dimenziós gömb.

Az M sokaság pereme ∂M, a belseje $\operatorname{int} M = M \setminus \partial M$

Ha az M sokaságnak ki van jelölve egy irányítása, akkor az ellentétes irányítású sokaságot $(-M)$ jelöli

Az M és N sokaságok diszjunkt uniója $M \bigsqcup N$

$\approx$ a sokaságok közötti diffeomorfizmust jelöli

$\cong$ csoportok vagy vektornyalábok izomorfizmusát jelöli

2.1. Vektornyalábok

Jelölés. Az M feletti r-dimenziós triviális nyaláb ε^r_M.

Jelölés. Az M sokaság x pontbeli érintőtere $\mathcal{T}_x M$, érintőnyalábja $\mathcal{T} M$. Ha $M \subset V$ részsokaság (vagy beágyazott sokaság), akkor az x-beli normáltere $\mathcal{N}_x M$, normálnyalábja $\mathcal{N} M$.

Definíció. Az M sokaság parallelizálható, ha $\mathcal{T} M$ triviális, és s-parallelizálható, ha $\mathcal{T} M \oplus \varepsilon^1_M$ triviális.

Állítás. *Egy pontra húzható sokaság felett minden vektornyaláb triviális.*

1. Lemma. *Legyen ξ egy k dimenziós vektornyaláb M felett, ahol $n < k$. Ha $\xi \oplus \varepsilon^r_M$ triviális valamilyen $r \geq 1$-re, akkor ξ maga is triviális.*

2. Lemma. *Legyen V egy $(n+k)$-dimenziós s-parallelizálható sokaság, M egy n-dimenziós részsokaság V-ben, és $n < k$. M pontosan akkor s-parallelizálható, ha a normálnyalábja triviális.*

3. Lemma. *Ha M összefüggő és $\partial M \neq \emptyset$, akkor M pontosan akkor parallelizálható, ha s-parallelizálható.*

(Ld. Kervaire, Milnor [3])

4. Lemma. *Ha ξ és η rendre k és l dimenziós triviális vektornyalábok az M n-dimenziós sokaság felett, $l > n$, és a $\xi \oplus \eta = \varepsilon_M^{k+l}$ Whitney összegüknek le van rögzítve egy trivializálása, akkor ξ tetszőleges trivializálásához létezik η-nak olyan trivializálása, hogy a kettő együtt ε_M^r-nek a lerögzítettel homotóp trivializálását adja. Ha $l > n+1$, akkor ez a trivializálás homotópia erejéig egyértelmű.*

Tehát $l > n$ esetén ξ minden trivializálásának megfeleltethető η egy "duális" trivializálása (pontosabban trivializálások egy homotópiaosztálya), és ha $l > n+1$, akkor a "duális" (homotópia erejéig) egyértelmű.

(Ld. Levine [4])

2.2. A speciális ortogonális csoportok homotópiacsoportjai

Legyen B homeomorf S^n-nel. Megadunk egy megfeleltetést a B feletti k dimenziós ξ vektornyalábok és $\pi_{n-1}(SO_k)$ elemei között:

Bontsuk fel B-t két golyóra, azaz legyen $B = B_1 \cup B_2$, ahol B_1 és B_2 homeomorf D^n-nel, és $B_1 \cap B_2 = C$ homeomorf S^{n-1}-gyel. Ekkor B_1 és B_2 pontra húzható, ezért $\xi\big|_{B_1}$ és $\xi\big|_{B_2}$ triviális. Rögzítsük egy-egy trivializálásukat, így C minden pontjában megadtuk a fibrum két bázisát, nézzük a köztük lévő áttérési mátrixot. Feltehetjük, hogy a két bázis azonos irányítású, tehát egy $C \to GL_k^+$ leképezést kapunk. Ennek a homotópiaosztályát jelölje $\mathfrak{o}(\xi) \in \pi_{n-1}(GL_k^+) \cong \pi_{n-1}(SO_k)$. (Ez nem más, mint ξ parallelizálhatóságának obstrukciója.) $\mathfrak{o}(\xi)$ jóldefiniált (ξ egyértelműen meghatározza), és $\mathfrak{o}(\xi)$ is meghatározza ξ-t (izomorfizmus erejéig).

Most nézzük az $SO_{k+1} \xrightarrow{SO_k} S^k$ fibrálás homotópia egzakt sorozatát:

$$\pi_{n+1}(S^k) \xrightarrow{\partial} \pi_n(SO_k) \xrightarrow{j_*} \pi_n(SO_{k+1}) \xrightarrow{p_*} \pi_n(S^k)$$

ahol j_*-ot az $SO_k \to SO_{k+1}$ beágyazás, p_*-ot pedig az $SO_{k+1} \to S^k$ vetítés indukálja.

Ha $n+1 < k$, akkor $\pi_{n+1}(S^k) = \pi_n(S^k) = 0$, ezért $\pi_n(SO_k) \cong \pi_n(SO_k + 1)$. Tehát $\pi_n(SO_{n+2}) \cong \pi_n(SO_{n+3}) \cong \cdots \cong \pi_n(SO)$, a stabil csoportot pedig ismerjük:

Tétel (Bott-periodicitás).

$$\pi_n(SO) = \begin{cases} 0 & \textit{ha } n \equiv 2,4,5 \textit{ vagy } 6 \pmod 8 \\ Z & \textit{ha } n \equiv 3 \textit{ vagy } 7 \pmod 8 \\ Z_2 & \textit{ha } n \equiv 0 \textit{ vagy } 1 \pmod 8 \end{cases}$$

$n = k-1$ esetén a fibrálás egzakt sorozatából azt látjuk, hogy $j_* : \pi_{k-1}(SO_k) \to \pi_{k-1}(SO)$ szürjektív. Ebben az esetben a ∂ határleképezés $\pi_k(S^k) \cong Z$ generátorát az S^k érintőnyalábjának megfelelő elembe, $\mathfrak{o}(\mathcal{T}S^k)$-ba viszi (ugyanis ez az elem nem más, mint annak az obstrukciója, hogy az $i : S^k \to S^k$ identikus leképezés felemelhető SO_{k+1}-be, azaz, hogy S^k-n megadható k darab független vektormező). Ez az elem 0, ha $k = 1, 3$ vagy 7, 2 rendű a többi páratlan k esetén, és végtelen rendű, ha k páros (ld. Levine [4]).

Most nézzük ezt a $V_2(R^{k+1}) \xrightarrow{S^{k-1}} S^k$ fibrálás egzakt sorozatával együtt ($V_2(R^{k+1})$ azt a Stiefel-sokaságot jelöli, ami R^{k+1} lineárisan független vektorpárjaiból áll, $r : SO_{k+1} \to V_2(R^{k+1})$ pedig azt a leképezést, ami egy mátrixhoz az első két oszlopából álló vektorpárt rendeli):

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_k(S^k) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{k-1}(SO_k) & \xrightarrow{j_*} & \pi_{k-1}(SO_{k+1}) & \xrightarrow{p_*} & \pi_{k-1}(S^k) \\ \downarrow i_* & & \downarrow p_* & & \downarrow r_* & & \downarrow i_* \\ \pi_k(S^k) & \xrightarrow{\partial'} & \pi_{k-1}(S^{k-1}) & \xrightarrow{j'_*} & \pi_{k-1}(V_2(R^{k+1})) & \xrightarrow{p'_*} & \pi_{k-1}(S^k) \end{array}$$

Itt a ∂' határleképezés $\pi_k(S^k)$ generátorát $\pi_{k-1}(S^{k-1})$ generátorának $\chi(S^k)$-szorosába viszi (mert amikor i-t fel akarjuk emelni $V_2(R^{k+1})$-be, akkor egy sehol sem 0 vektormezőt keresünk S^k-n, ilyet 1 pont komplementerén tudunk konstruálni, abban a pontban pedig a vektormező indexe a Poincaré-Hopf tétel szerint pont $\chi(S^k)$, S^k Euler-karakterisztikája). Ebből azt fogjuk használni, hogy ha k páros, akkor a $p_* \circ \partial$ leképezés $\pi_k(S^k)$ generátorát $\pi_{k-1}(S^{k-1})$ generátorának kétszeresébe viszi.

2.3. A Pontrjagin-konstrukció és a J-homomorfizmus

Definíció. A W $(n+1)$-dimenziós sokaság (irányított) kobordizmus az M és N n-dimenziós zárt sokaságok között, ha $\partial W \approx (-M) \bigsqcup N$.

Definíció. Legyen $M \subset V$ részsokaság. M tüskézése a normálnyalábjának egy trivializálása, azaz minden $x \in M$ pontban $\mathcal{N}_x M$ egy bázisának kijelölése.

Definíció. A $W \subset V \times [0,1]$ $(n+1)$-dimenziós tüskézett részsokaság tüskézett kobordizmus az $M, N \subset V$ n-dimenziós, zárt tüskézett részsokaságok között, ha

$\partial W = M \times \{0\} \bigsqcup N \times \{1\}$,

$W \cap V \times [0, \varepsilon] = M \times [0, \varepsilon]$, $W \cap V \times [1-\varepsilon, 1] = N \times [1-\varepsilon, 1]$ (ekkor $\mathcal{N}W\big|_{\partial W}$ pont $M \times \{0\}$ és $N \times \{1\}$ normálnyalábja $V \times \{0\}$-ban és $V \times \{1\}$-ben),

és W tüskézésének leszűkítése ∂W-re kiadja M és N tüskézését.

Megjegyzés. Ha W egy kobordizmus M és N között, $\dim M = \dim N = n$, $V = R^m$ vagy S^m, ahol $m \geq 2n+1$, és M-nek és N-nek meg van adva egy beágyazása V-be, akkor W beágyazható úgy, hogy az első két feltételt teljesítse (konstruálhatunk egy megfelelő $W \to V \times [0,1]$ folytonos leképezést, majd ere alkalmazzuk Whitney tételét).

Pontrjagin-konstrukció

Adott V $(n+k)$-dimenziós zárt sokaság esetén megadhatunk egy bijekciót a $V \to S^k$ leképezések homotópiaosztályai és V n-dimenziós tüskézett részsokaságainak kobordizmusosztályai között:

Vegyünk egy $f : V \to S^k$ leképezést, és annak egy $y \in S^k$ reguláris értékét. Ekkor $f^{-1}(y)$ egy n dimenziós részsokaság V-ben, jelölje ezt M. Rögzítsünk $\mathcal{T}_y S^k$-ban egy pozitív irányítású bázist. f deriváltja egy $x \in M$ pontban egy szürjektív $\mathcal{T}_x V \to \mathcal{T}_y S^k$ homomorfizmus, ami $\mathcal{T}_x M$-t 0-ba viszi, tehát leszűkítve izomorfizmus $\mathcal{N}_x M$ és $\mathcal{T}_y S^k$ között. A $\mathcal{T}_y S^k$-ban kijelölt bázis őseképe tehát egy bázisa $\mathcal{N}_x M$-nek, minden $x \in M$ pontban véve $\mathcal{N}_x M$ így megkapható bázisát M egy tüskézését kapjuk. M ezzel a tüskézéssel az f egy Pontrjagin-sokasága.

Az így kapott M tüskézett kobordizmusosztálya független attól, hogy melyik $y \in S^k$ reguláris értéket és $\mathcal{T}_y S^k$-ban melyik pozitív irányítású bázist választjuk, vagyis f egyértelműen meghatározza Pontrjagin-sokaságának a kobordizmusosztályát.

Két függvényhez pontosan akkor tartozik ugyanaz a kobordizmusosztály, ha a függvények homotópok; és tetszőleges $M \subseteq V$ tüskézett részsokaság előáll, mint egy $V \to S^k$ leképezés Pontrjagin sokasága; tehát az így kapott megfeleltetés bijekció.

A J-homomorfizmus (Hopf-Whitehead homomorfizmus)

$S^n \subset R^{n+k}$, és S^n-nek van egy standard tüskézése. Ha rögzítünk egy $R^{n+k} \to S^{n+k}$ beágyazást (pl. a sztereografikus projekciót), akkor kapunk egy standard $S^n \to S^{n+k}$ beágyazást, egy standard tüskézéssel. Tetszőleges $\alpha : S^n \to SO_k$ esetén ha minden $x \in S^n$-ben alkalmazzuk $\alpha(x)$-et $\mathcal{N}_x S^n$ standard bázisára, akkor S^n-nek egy új, α-tól függő tüskézését kapjuk. Ennek a tüskézett kobordizmus osztálya csak α homotópiaosztályától függ. A Pontrjagin-konstrukció szerint S^n ezzel a tüskézéssel egy $f_\alpha : S^{n+k} \to S^k$ leképezés Pontrjagin-sokasága, és f_α homotópiaosztályát meghatározza a tüskézés kobordizmusosztálya. Tehát a $J([\alpha]) = [f_\alpha]$ képlettel definiálhatunk egy $J : \pi_n(SO_k) \to \pi_{n+k}(S^k)$ leképezést. Ez a leképezés homomorfizmus lesz.

Ha $k \geq n+2$, akkor $\pi_n(SO_k) \cong \pi_n(SO)$ és $\pi_{n+k}(S^k) \cong \Pi_n$ (Π_n a gömbök n. stabil homotopikus csoportját jelöli), ebben az esetben egy $J_n : \pi_n(SO) \to \Pi_n$ homomorfizmust kapunk. Fel fogjuk használni, hogy ez a homomorfizmus injektív, ha $n \equiv 0$ vagy 1 modulo 8 (ez Adams eredménye).

2.4. Homológiaelmélet

Jelölés. $H_n(A; G)$ és $H_n(A, B; G)$ az A tér ill. az (A, B) pár n-dimenziós szinguláris homológiacsoportja G csoportbeli együtthatókkal. $H^n(A; G)$ és $H^n(A, B; G)$ a megfelelő kohomológiacsoportok. $G = Z$ esetén az együtthatócsoportot nem jelöljük.

3 konkrét együtthatócsoportot fogunk használni:

Jelölés. Z az egész számok gyűrűje, Q a racionális test, Z_2 a kételemű test.

Tétel (Poincaré-dualitás). *Ha M n-dimenziós, kompakt, irányítható sokaság, R tetszőleges gyűrű, és $\partial M = N_1 \bigsqcup N_2$, akkor minden i-re*

$$H_i(M, N_1; R) \cong H^{n-i}(M, N_2; R)$$

Tétel (Kohomológiákra vonatkozó univerzális együttható formula). *Tetszőleges (A, B) pár, $i \in Z$, és G együtthatócsoport esetén van egy*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{i-1}(A, B), G) \longrightarrow H^i(A, B; G) \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}(H_i(A, B), G) \longrightarrow 0$$

egzakt sorozat. Ez a sorozat széteső, azaz $H^i(A, B; G) \cong \mathrm{Hom}(H_i(A, B), G) \oplus \mathrm{Ext}(H_{i-1}(A, B), G)$ *(de ez a felbontás nem kanonikus).*

A $G = Z$ speciális esetben ez azt jelenti, hogy $H^i(A,B) \cong \mathrm{Hom}(H_i(A,B),Z) \oplus \mathrm{Tor}(H_{i-1}(A,B))$.

Ha G test, akkor pedig $H^i(A,B;G) \cong \mathrm{Hom}(H_i(A,B),G)$.

Ha M egy n dimenziós sokaság, $0 \leq i \leq n$, akkor jelölje $B : H_i(M) \times H_{n-i}(M) \to Z$ azt bilineáris függvényt, ami két homológiaosztályhoz a metszési számukat rendeli. A λ és μ homológiaosztályok metszési számára a $\lambda \cdot \mu$ jelölést is használjuk.

Egy $\lambda \in H_i(M)$ homológiaosztály duálisához az univerzális együttható formulában szereplő g leképezés a $B(\lambda, \cdot)$ homomorfizmust rendeli, ebből látszik, hogy a B által indukált $\mathrm{F}(H_i(M)) \times \mathrm{F}(H_{n-i}(M))) \to Z$ bilineáris leképezés nemelfajuló ($\mathrm{F}(G) = G/\mathrm{Tor}(G)$ a G csoport szabad részét jelöli).

Értelmezhetünk egy $L : \mathrm{Tor}(H_i(M)) \times \mathrm{Tor}(H_{n-i-1}(M)) \to Q/Z$ bilineáris leképezést, két homológiaosztály hurkolódási számát: ha a λ k-adrendű, azaz a k-szorosának egy reprezentánsa határa egy $c \in C_{i+1}(M)$ láncnak, akkor legyen $L(\lambda, \mu) = \frac{c \text{ és } \mu \text{ metszési száma}}{k}$ modulo 1. Ez a leképezés szintén nemelfajuló.

2.5. A h-kobordizmus-tétel

Milnor [6] alapján:

Definíció. W h-kobordizmus M és N között, ha $\partial W = M \bigsqcup N$, és M és N deformációs retraktuma W-nek.

h-kobordizmus tétel. *Ha W egy kobordizmus M és N között, ahol W, M és N egyszeresen összefüggő, $H_*(W,M) = 0$, és $n \geq 5$, akkor $W \approx M \times [0,1]$, és ezért $M \approx N$.*

Ha W h-kobordizmus, akkor a $H_*(W,M) = 0$ feltétel automatikusan teljesül, mert az $M \to W$ beágyazás izomorfizmust indukál $H_*(M)$ és $H_*(W)$ között. Tehát ha két legalább 5 dimenziós, egyszeresen összefüggő sokaság h-kobordáns egymással, akkor diffeomorfak.

5. Tétel. *Ha V egyszeresen összefüggő n dimenziós sokaság, $H_*(V) \cong H_*(D^n)$, ∂V egyszeresen összefüggő, és $n \geq 6$, akkor $V \approx D^n$.*

Bizonyítás. Vegyük V egy belső pontját, ennek van egy R^n-nel diffeomorf környezete, ennek a leszűkítése egy $\varphi : D^n \to \operatorname{int} V$ beágyazás. Legyen $W = V \setminus \varphi(\operatorname{int} D^n)$, $M = \varphi(S^{n-1})$ és $N = \partial V$. Ekkor W, M és N egyszeresen összefüggő. A kivágási tétel miatt $H_*(W, M) \cong H_*(V, \varphi(D^n)) = 0$, mert $\varphi_* : H_*(D^n) \to H_*(V)$ izomorfizmus. Ezért alkalmazható a h-kobordizmus tétel, $W \approx M \times [0,1] \approx S^{n-1} \times [0,1]$, tehát $V \approx D^n$. □

6. Tétel. *Ha V egyszeresen összefüggő n dimenziós sokaság, ∂V homotopikus $(n-1)$-gömb, $H_i(V) = 0$ minden $1 \le i \le \frac{n}{2}$-re, és $n \ge 6$, akkor $V \approx D^n$.*

Bizonyítás. A Poincaré-dualitás és az univerzális együttható formula miatt $H_i(V) \cong H^{n-i}(V, \partial V) \cong \operatorname{Hom}(H_{n-i}(V, \partial V), Z) \oplus \operatorname{Tor}(H_{n-i-1}(V, \partial V)) = 0$, ha $\frac{n}{2} \le i \le n$. Ugyanis minden $j \le \frac{n}{2}$-re $H_j(V, \partial V) = 0$, mert a $(V, \partial V)$ pár

$$H_j(\partial V) \longrightarrow H_j(V) \longrightarrow H_j(V, \partial V) \longrightarrow H_{j-1}(\partial V) \longrightarrow H_{j-1}(V)$$

egzakt sorozatában

$2 \le j \le \frac{n}{2}$ esetén $H_j(V) = H_{j-1}(\partial V) = 0$

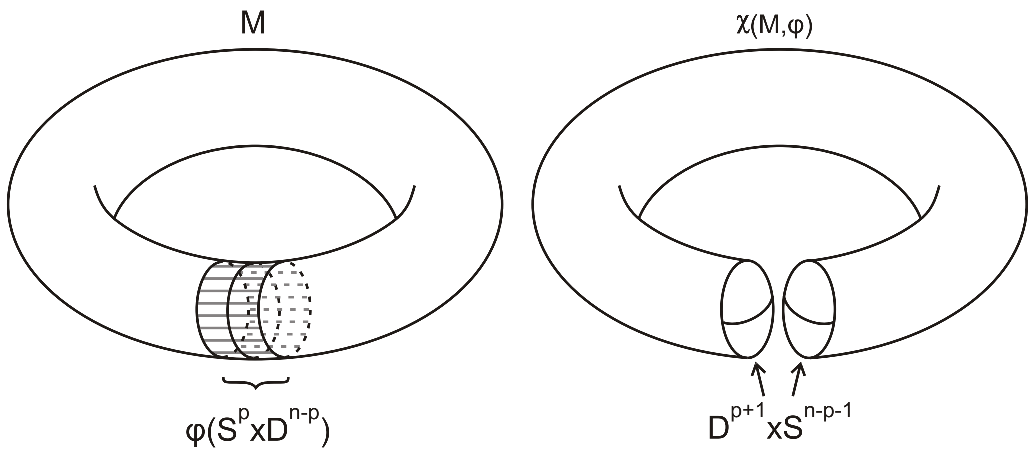
$j = 1$ esetén $H_j(V) = 0$ és a $H_{j-1}(\partial V) \longrightarrow H_{j-1}(V)$ leképezés izomorfizmus

$j = 0$ esetén $H_{j-1}(\partial V) = 0$ és $H_j(\partial V) \longrightarrow H_j(V)$ izomorfizmus.

Tehát $H_i(V) = 0$ minden $i > 0$-ra. Ebből pedig az előző tétel miatt következik, hogy $V \approx D^n$. □

2.6. Átépítések, összefüggő unió

Definíció (Átépítés). Legyen M egy n-dimenziós sokaság, és tegyük fel, hogy adott egy $\varphi : S^p \times D^{n-p} \to M$ beágyazás $(0 \le p \le n-1)$. Ekkor definiálhatunk egy új $\chi(M, \varphi)$ differenciálható sokaságot: vegyük $M \setminus \varphi(S^p \times \{0\})$ és $D^{p+1} \times S^{n-p-1}$ diszjunkt unióját, és azonosítsuk a $\varphi(x, ty)$ pontot (tx, y)-nal minden $x \in S^p, y \in S^{n-p-1}, 0 < t \le 1$ esetén (ld. 1. ábra). Az így kapott tér sokaság lesz, $M \setminus \varphi(S^p \times \{0\})$ és $D^{p+1} \times S^{n-p-1}$ egy atlasza meghatározza $\chi(M, \varphi)$ egy atlaszát.



1. ábra

Ha $p, n-p-1 \geq 1$, akkor $\chi(M,\varphi)$ is irányítható, mert M és ezért $M \setminus \varphi(S^p \times \{0\})$, és $D^{p+1} \times S^{n-p-1}$ is irányítható, és az azonosított részük összefüggő (mert diffeomorf $R \times S^p \times S^{n-p-1}$-gyel). (Hasonlóan látható, hogy $\chi(M,\varphi)$ akkor is irányítható, ha $1 \leq p = n-1$.)

$\chi(M,\varphi)$-nek azt az irányítását választjuk, ami $M \setminus \varphi(S^p \times \{0\})$-n megegyezik M-ével.

7. Lemma. *Ha $p \geq 1$, akkor M és $\chi(M,\varphi)$ (irányítottan) kobordánsak.*

Bizonyítás. Legyen

$$A = \{(\varphi(x,ty), r) \in M \times [0,2] \mid x \in S^p, y \in S^{n-p-1}, t \in [0,1), r \in (2-\sqrt{1-t^2}, 2]\}.$$

Legyen W az a sokaság, amit úgy kapunk $M \times [0,2] \setminus A$ és $D^{p+1} \times D^{n-p}$ diszjunkt uniójából, hogy azonosítjuk a $(\varphi(x,ty), 2-\sqrt{1-t^2})$ és az (x,ty) pontokat minden $x \in S^p, y \in S^{n-p-1}, t \in [0,1]$ esetén (ld. 2. ábra).

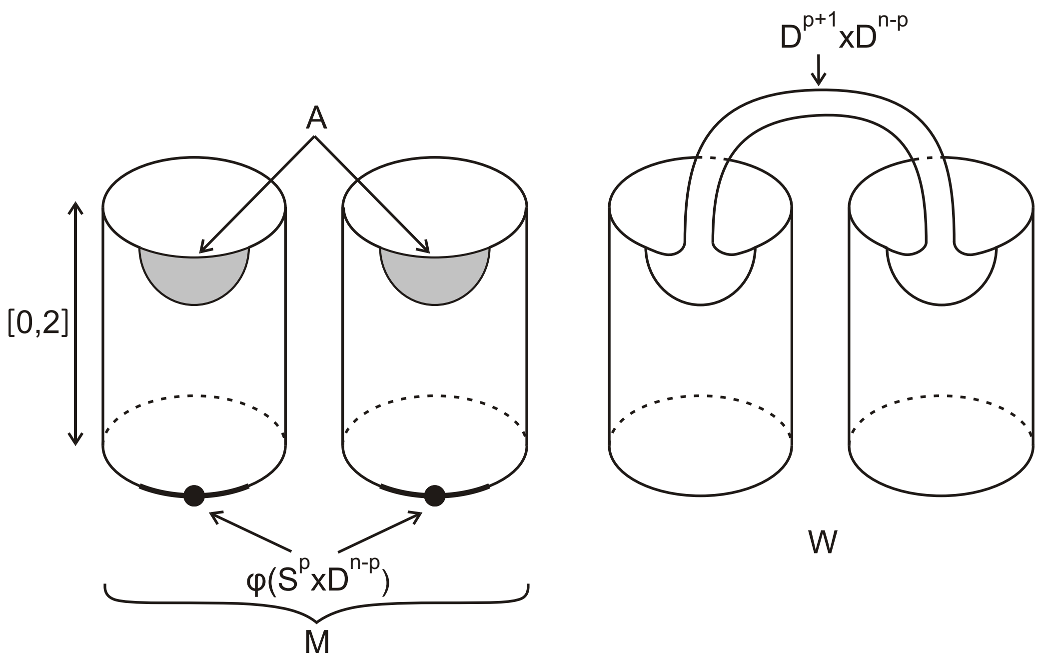
W tényleg (differenciálható) sokaság, mert $M \times [0,2] \setminus A$ és $D^{p+1} \times D^{n-p}$ atlaszából könnyen származtathatjuk W egy atlaszát:

A nem azonosított pontoknak van egy R^{n+1}-el (ill. határpont esetén R_+^{n+1}-al) diffeomorf környezetük $M \times [0,2] \setminus A$-ban vagy $D^{p+1} \times D^{n-p}$-ben.

$t < 1$ esetén a $(\varphi(x,ty), 2-\sqrt{1-t^2}) = (x,ty)$ pontnak $M \times [0,2] \setminus A$-ban és $D^{p+1} \times D^{n-p}$-ben is R_+^{n+1}-al diffeomorf környezete van, ilyeneket összeillesztve R^{n+1}-el diffeomorf környezetet kapunk W-ben.

Végül a $(\varphi(x,y),2) = (x,y)$ pontoknak R^{n+1} negyedével, $\{(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) \mid x_n, x_{n+1} \geq 0\}$-val "diffeomorf" környezetük van $M \times [0,2] \setminus A$-ban és $D^{p+1} \times D^{n-p}$-ben, ilyeneket összeillesztve R_+^{n+1}-al diffeomorf környezetet kapunk.

W határa $M \times \{0\}$ valamint $(M \setminus \varphi(S^p \times B^{n-p})) \times \{2\}$ és $D^{p+1} \times S^{n-p-1}$ összeragasztva a $(\varphi(x,y),2) = (x,y)$ pontokban, ez utóbbi pedig diffeomorf $\chi(M,\varphi)$-vel. W irányítható, mert két irányítható sokaságból van összeragasztva egy összefüggő részsokaságuk ($S^p \times D^{n-p}$) mentén. W irányítását válasszuk úgy, hogy $M \times [0,2] \setminus A$-n megeggyezzen $M \times [0,2]$-nek azzal az irányításával, amelyik $M \times \{2\}$-n M-ével egyező, $M \times \{0\}$-n pedig M-ével ellentétes irányítást indukál. Ekkor W irányított határa $(-M) \bigsqcup \chi(M,\varphi)$, tehát W egy megfelelő kobordizmus. $\square$



2. ábra

Megjegyzés. Ha M peremes, akkor feltesszük, hogy φ képe int M-ben van (tetszőleges φ átvihető ilyenbe izotópiával).

Van egy komolyabb gond a peremes esetben: ekkor W pereme valójában nem M és $\chi(M,\varphi)$ diszjunkt uniója, hanem ott van még $\partial M \times [0,2]$ is. Ez pl. akkor okoz problémát, ha a Poincaré-dualitás tételt akarjuk alkalmazni W-re. Ezt a 9.

állításban alkalmazott konstrukcióval oldhatjuk meg, legalábbis ha ∂M egy gömbbel homeomorf.

Ettől függetlenül a peremes esetben is az "M és $\chi(M, \varphi)$ közötti kobordizmus"-ként hivatkozunk W-re, és pl. a 13. lemmában semmi különbség nincs a zárt és a peremes M esete között.

Definíció. Az M és N n-dimenziós sokaságok összefüggő összege (összefüggő uniója) $M\#N = \chi(M \bigsqcup N, \varphi)$, ahol $\varphi : S^0 \times D^n \to M \bigsqcup N$ olyan beágyazás, hogy $\varphi\big|_{\{-1\}\times D^n}$ irányításváltóan képezi D^n-et M-be, $\varphi\big|_{\{1\}\times D^n}$ pedig irányítástartóan képezi D^n-et N-be.

8. Lemma. *$M\#N$-nek van egy olyan irányítása, ami megegyezik M-ével és N-ével $(M \bigsqcup N \setminus \operatorname{Im} \varphi)$-n, és ezzel az irányítással kobordáns $M \bigsqcup N$-nel.*

Bizonyítás. Vegyük a 7. lemmában konstruált W kobordizmust $M \bigsqcup N$ és $M\#N$ között. Belátjuk, hogy ez irányítható úgy, hogy $M \bigsqcup N$-en az eredetivel ellentétes irányítást indukáljon. Ekkor az $M\#N$-en indukált irányítás és a W irányított kobordizmus megfelelő lesz.

Legyen A a 7. lemmában definiált részhalmaza $(M \bigsqcup N) \times [0, 2]$-nek, $A_1 = A \cap (M \times [0, 2])$, $A_2 = A \cap (N \times [0, 2])$. Legyen

$$\varphi_1 : D^n \to M \times [0, 2] \setminus A_1, \quad \varphi_1(ty) = (\varphi(-1, ty), 2 - \sqrt{1 - t^2})$$
$$\varphi_2 : D^n \to N \times [0, 2] \setminus A_2, \quad \varphi_2(ty) = (\varphi(1, ty), 2 - \sqrt{1 - t^2}).$$

minden $y \in S^{n-1}, t \in [0, 1]$-re.

W-t úgy kapjuk, hogy $D^1 \times D^n$-et $\{-1\} \times D^n$ mentén φ_1-gyel ráragasztjuk $(M \times [0, 2] \setminus A_1)$-re, és $\{1\} \times D^n$ mentén φ_2-vel ragasztjuk $(N \times [0, 2] \setminus A_2)$-re.

$M \times [0, 2]$ irányítható, ezért $M \times [0, 2] \setminus A_1$ is, vegyük azt az irányítását, amelyik M-ével ellentétes irányítást indukál $(M \times \{0\})$-n. Hasonlóan irányítsuk $(N \times [0, 2] \setminus A_2)$-t is úgy, hogy $(N \times \{0\})$-n az eredetivel ellentétes irányítást indukáljon. Végül vegyük $(D^1 \times D^n)$-nek azt az irányítását, ami $(\{-1\} \times D^n)$-en D^n-ével egyező, $(\{1\} \times D^n)$-en pedig ellentétes irányítást indukál.

Ezzel meg is határoztuk W egy irányítását, feltéve, hogy a megadott irányítások illeszkednek a ragasztásoknál. Ehhez az kell, hogy a peremük azonosított részén $D^1 \times D^n$ ellentétes irányítást indukál, mint $M \times [0, 2] \setminus A_1$ ill. $N \times [0, 2] \setminus A_2$, azaz az $r_1 : \{-1\} \times D^n \to \varphi_1(D^n)$ ill. $r_2 : \{1\} \times D^n \to \varphi_2(D^n)$ ragasztó leképezések irányításváltóak. Legyenek $i_1 : D^n \to \{-1\} \times D^n$ és $i_2 : D^n \to \{1\} \times D^n$ a standard azonosítások, és tekintsük a következő kommutatív diagramokat:

$$\begin{tikzcd} & D^n \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\ \{-1\} \times D^n \arrow[rr, "r_1"] & & \varphi_1(D^n) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & D^n \arrow[dl, "i_2"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\ \{1\} \times D^n \arrow[rr, "r_2"] & & \varphi_2(D^n) \end{tikzcd}$$

$D^1 \times D^n$ irányítását úgy választottuk, hogy i_1 irányítástartó, i_2 pedig irányításváltó legyen. φ definíciója miatt pedig φ_1 irányításváltó és φ_2 irányítástartó. Tehát r_1 és r_2 irányításváltó, tényleg megadtuk W megfelelő irányítását. $\square$

Ha M és N összefüggő, akkor az összefüggő összegük (irányítástartó diffeomorfizmus erejéig) jóldefiniált, azaz független φ választásától. (Ellenkező esetben pedig csak attól függ, hogy φ képe melyik komponensekbe esik.)

Az összefüggő unió művelete kommutatív és asszociatív. Tetszőleges n-dimenziós M sokaság esetén $M\#S^n \approx M$.

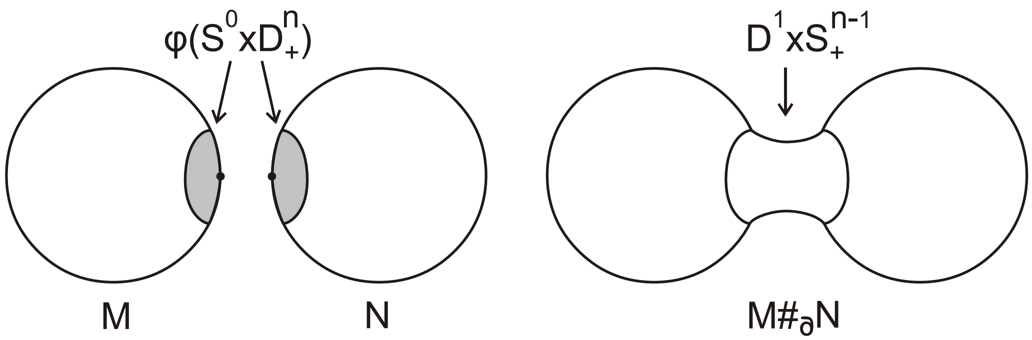
Jelölés. $R^n_+ = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mid x_n \geq 0\}$ az n-dimenziós féltér, $D^n_+ = D^n \cap R^n_+$ az n-dimenziós golyó fele, $S^n_+ = S^n \cap R^{n+1}_+$ a félgömb.

Definíció. Legyen M és N peremes sokaság, $\varphi : S^0 \times D^n_+ \to M \bigsqcup N$ olyan leképezés, amire $\varphi\big|_{\{-1\}\times D^n_+}$ egy irányításváltó $(D^n_+, D^{n-1}) \to (M, \partial M)$ beágyazás, $\varphi\big|_{\{1\}\times D^n_+}$ pedig egy irányítástaró $(D^n_+, D^{n-1}) \to (N, \partial N)$ beágyazás. Ekkor M és N perem mentén vett összefüggő összege, $M\#_\partial N$ az a sokaság, amit $M \bigsqcup N \setminus \varphi(S^0 \times \{0\})$ és $D^1 \times S^{n-1}_+$ diszjunkt uniójából a $\varphi(x, ty)$ és (tx, y) pontok (minden $x \in S^0, y \in S^{n-1}_+, 0 < t \leq 1$ esetén való) azonosítása után kapunk (ld. 3. ábra).

$M\#_\partial N$ pereme $\partial M\#\partial N$.

Ha ∂M és ∂N összefüggő, akkor $M\#_\partial N$ jóldefiniált.

A $\#_\partial$ művelet is kommutatív és asszociatív.



3. ábra

Állítás. *Ha M és N parallelizálható, akkor $M\#_\partial N$ is.*

Bizonyítás. Jelölje $\varphi : S^0 \times D^n_+ \to M \bigsqcup N$ azt a leképezést, amivel a perem menti összefüggő uniót képeztük, legyen $A = (M \setminus \{\varphi(-1,0)\}) \cup D^1 \times S^{n-1}_+$ és $B = (N \setminus \{\varphi(1,0)\}) \cup D^1 \times S^{n-1}_+$.

M parallelizálható, ezért A is az (mert diffeomorf $M \setminus \varphi(\{-1\} \times \operatorname{int} D^n_+)$-al, ahol $\operatorname{int} D^n_+$ most $(\operatorname{int} D^n \cap R^n_+)$-t jelöli, nem pedig D^n_+ belsejét). Hasonlóan B is parallelizálható. Vegyük egy-egy parallelizálásukat. Így $A \cap B = D^1 \times S^{n-1}_+$ minden pontjában két bázisát kapjuk az érintőtérnek. Feltehető, hogy ezek azonos irányításúak. Vegyünk egy olyan $D^1 \times S^{n-1}_+ \to GL^+_n$ leképezést, ami $\{1\} \times S^{n-1}_+$ egy környezetén minden pontban azt a GL^+_n-beli elemet veszi fel értékül, ami átviszi az érintőtér A parallelizálása által meghatározott bázist a B parallelizálásából származó bázisba, $\{-1\} \times S^{n-1}_+$ egy környezetén pedig a konstans identitás. Módosítsuk A érintőnyalábjának trivializálását úgy, hogy $D^1 \times S^{n-1}_+$-on pontonként alkalmazzuk rá ezt a leképezést. Ekkor A módosított parallelizálása, és $(M\#_\partial N \setminus A)$-n B parallelizálása együtt kiadja $M\#_\partial N$ parallelizálását. □

2.7. Szignatúra

Definíció. Ha M $4k$-dimenziós, akkor a szignatúrája, $\sigma(M)$ a $B : H_{2k}(M) \times H_{2k}(M) \to Z$ bilineáris leképezés (a metszési szám) szignatúrája.

Állítás. $\sigma(-M) = -\sigma(M)$, $\sigma(M \bigsqcup N) = \sigma(M) + \sigma(N)$.

Állítás. *A szignatúra kobordizmus-invariáns, vagyis ha $\partial W = M_1 \bigsqcup (-M_2)$ valamilyen W-re, akkor $\sigma(M_1) = \sigma(M_2)$.*

9. Állítás. *Ha M zárt, vagy ∂M homeomorf S^{4k-1}-gyel, akkor $\sigma(M) = \sigma(\chi(M, \varphi))$, vagyis az átépítés nem változtatja meg a szignatúrát.*

Bizonyítás. Ha M (és ezért $\chi(M, \varphi)$ is) zárt, akkor a 7. lemmában konstruált W kobordizmusra $\partial W \approx M \bigsqcup(-\chi(M, \varphi))$, tehát $\sigma(M) = \sigma(\chi(M, \varphi))$.

Ha M és $M' = \chi(M, \varphi)$ pereme homeomorf S^{4k-1}-gyel, akkor legyen egy $h : S^{4k-1} \to \partial M$ egy homeomorfizmus. M' konstrukciója miatt ez egyben tekinthető egy $S^{4k-1} \to \partial M'$ homeomorfizmusnak is. Legyen $M_* = M \cup_h D^{4k}$, azaz M és h-val a pereméhez ragasztva egy D^{4k} golyó. M_* egy topologikus sokaság. Hasonlóan legyen $M'_* = M' \cup_h D^{4k}$, és $W_* = W \cup_{h \times id_{[0,2]}} D^{4k} \times [0, 2]$, ez az M_* és M'_* közötti kobordizmus. Itt M_* és M'_* már zárt, ezért $\sigma(M_*) = \sigma(M'_*)$.

Írjuk fel az (M_*, M) pár homológia egzakt sorozatát:

$$H_{i+1}(M_*, M) \longrightarrow H_i(M) \longrightarrow H_i(M_*) \longrightarrow H_i(M_*, M)$$

A kivágási tétel miatt $H_i(M_*, M) \cong H_i(D^{4k}, S^{4k-1}) = 0$, ha $i \neq 4k$, ezért ha $i < 4k - 1$, akkor $H_i(M) \cong H_i(M_*)$. Tehát a beágyazás izomorfizmust indukál $H_{2k}(M)$ és $H_{2k}(M_*)$ között. Két $H_{2k}(M_*)$-beli homológiaosztály metszési száma ugyanannyi, mint a $H_{2k}(M)$-beli megfelelőiké (mert reprezentálhatóak M-beli ciklusokkal), ebből pedig következik, hogy $\sigma(M) = \sigma(M_*)$. Hasonlóan belátható, hogy $\sigma(M') = \sigma(M'_*)$. Tehát $\sigma(M_*) = \sigma(M'_*)$. □

Ebből következik, hogy $\sigma(M\#N) = \sigma(M \bigsqcup N) = \sigma(M) + \sigma(N)$.

Állítás. *Ha M és N peremes, akkor $\sigma(M\#_\partial N) = \sigma(M) + \sigma(N)$.*

Bizonyítás. Legyen A és B az $M\#_\partial N$ két része, mint az előző szakasz utolsó állításában. Írjuk fel az $A \cup B = M\#_\partial N$ felbontásra a Mayer-Vietoris sorozatot:

$$H_i(A \cap B) \longrightarrow H_i(A) \oplus H_i(B) \longrightarrow H_i(M\#_\partial N) \longrightarrow H_{i-1}(A \cap B)$$

Itt $H_i(A \cap B) = H_i(D^1 \times S_+^{4k-1})$, és ez 0, ha $i \geq 1$, ezért minden $i \geq 2$-re $H_i(A) \oplus H_i(B) \cong H_i(M\#_\partial N)$. Viszont $H_i(A) \cong H_i(M \setminus \{\varphi(-1, 0)\}) \cong H_i(M)$, mert az $M\setminus\{\varphi(-1, 0)\} \to A$ és az $M\setminus\{\varphi(-1, 0)\} \to M$ beágyazás homotopikus ekvivalencia. Hasonlóan B is homotopikusan ekvivalens N-nel, ezért $H_i(B) \cong H_i(N)$.

Tehát $H_{2k}(M\#_\partial N) \cong H_{2k}(M) \oplus H_{2k}(N)$. Egy $H_{2k}(M)$-belinek megfelelő és egy $H_{2k}(N)$-belinek megfelelő homológiaosztály metszési száma 0, mert az előbbi reprezentálható $(M \setminus \{\varphi(-1,0)\})$-ban, az utóbbi pedig $(N \setminus \{\varphi(1,0)\})$-ban. Ezért a $B : H_{2k}(M\#_\partial N) \times H_{2k}(M\#_\partial N) \to Z$ (metszési szám) bilineáris leképezés direkt összegre bomlik, a szignatúrája a két tag szignatúrájának összege. Tehát $\sigma(M\#_\partial N) = \sigma(M) + \sigma(N)$. $\square$

2.8. Obstrukciók

Legyen K egy CW-komplexus, L ennek egy részkomplexusa, Y tetszőleges topologikus tér. Jelölje K r-vázát K^r. Legyen $f : K^k \cup L \to Y$ tetszőleges leképezés. Legyen $\phi : D^{k+1} \to K$ egy $(k+1)$-cella karakterisztikus leképezése. f pontosan akkor terjed ki $K^k \cup L \cup \phi(D^{k+1})$-re, ha $f \circ \phi\big|_{S^k} : S^k \to Y$ kiterjed D^{k+1}-re, azaz 0-homotóp. Rendeljük hozzá a $\phi(D^{k+1})$ cellához $[f \circ \phi\big|_{S^k}] \in \pi_k(Y)$-t, $f \circ \phi\big|_{S^k}$ homotópiaosztályát. Ha ezt elvégezzük minden $(k+1)$-cellára, kapunk egy, a $(k+1)$-cellákon értelmezett $\pi_k(Y)$-beli értékű függvényt, ami egyértelműen kiterjed egy $C_{k+1}(K)$-n értelmezett $o(f)$ homomorfizmussá, vagyis egy $(k+1)$-koláncca. f pontosan akkor terjeszthető ki $K^{k+1} \cup L$-re, ha $o(f) = 0$. Tudjuk, hogy $o(f)$ kociklus, és a kohomológiaosztálya $\mathfrak{o}(f) \in H^{k+1}(K, L; \pi_k(Y))$ pontosan akkor 0, ha $f\big|_{K^{k-1} \cup L}$ kiterjeszthető $K^{k+1} \cup L$-re.

3. A Θ_n csoport végességének bizonyítása

Definíció. Homotopikus n-gömbnek hívjuk azokat az n-dimenziós zárt sokaságokat, amelyek homotopikusan ekvivalensek S^n-nel.

Ezekre vonatkozik a topológia egyik leghíresebb tétele:

Általánosított Poincaré-sejtés. *Minden homotopikus n-gömb homeomorf S^n-nel.*

Vagyis a homotopikus gömbök (nem számítva S^n-et) pontosan megegyeznek az egzotikus gömbökkel.

A tétel $n \leq 2$ esetén könnyen következik az 1 és 2 dimenziós sokaságok klasszifikációjából. Az $n \geq 5$ esetben Smale (1960), $n = 4$-re Freedman (1982), $n = 3$-ra pedig Perelman (2003) bizonyította.

A továbbiakban Kervaire és Milnor [3] cikkét követve definiáljuk a Θ_n csoportot, és bebizonyítjuk, hogy véges.

Definíció. A Θ_n csoport elemei a homotopikus n-gömbök h-kobordizmus osztályai, a művelet az összefüggő unió (pontosabban amit az összefüggő unió indukál a h-kobordizmus osztályokon)

Mi a továbbiakban csak az $n \geq 5$ esettel foglalkozunk.

A h-kobordizmus tétel miatt ekkor Θ_n elemei a homotopikus gömbök (irányított) diffeomorfizmusosztályai. Ezek pedig pontosan az egzotikus gömbök (irányítástartó diffeomorfizmus erejéig) és S^n. Tehát Θ_n végessége tényleg azt jelenti, hogy $n \geq 5$ esetén csak véges sok egzotikus gömb van.

Állítás. *Θ_n az összefüggő unió műveletével tényleg (Abel-)csoport.*

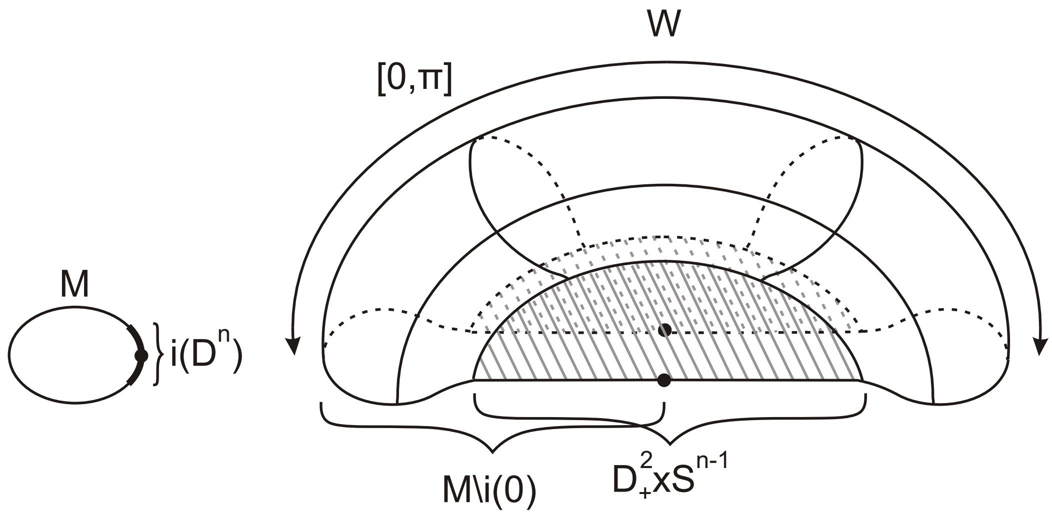
Bizonyítás. Az összefüggő unió nem vezet ki a Θ_n halmazból, mert két S^n-nel homeomorf sokaság összefüggő összege is homeomorf S^n-nel.

Ahhoz, hogy Θ_n Abel-csoport legyen, az összefüggő unió korábban felsorolt tulajdonságain kívül csak az ellentett létezésére van szükség. Bebizonyítjuk, hogy M ellentettje $(-M)$, azaz $M\#(-M) \approx S^n$.

Legyen $i : D^n \to M$ egy beágyazás, és W az a sokaság, amit $(M \setminus i(0)) \times [0, \pi]$ és $D^2_+ \times S^{n-1}$ diszjunkt uniójából kapunk, ha az $(i(tx), \vartheta)$ pontot azonosítjuk

$((t\cos\vartheta, t\sin\vartheta), x)$-el minden $x \in S^{n-1}, 0 < t \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq \pi$ esetén (ld. 4. ábra). Ekkor $\partial W \approx M\#(-M)$.

W-nek deformációs retraktuma az $(M \setminus i(0)) \times \{0\} \bigsqcup([0,1] \times \{0\}) \times S^{n-1}$-ből az $(i(tx), 0)$ és $((t, 0), x)$ pontok (minden $x \in S^{n-1}, 0 < t \leq 1$ esetén való) azonosítása után keletkező sokaság. (Egy, az identitással homotóp retrakció pl. az a leképezés, ami $(0,0) \times S^{n-1}$-t helybenhagyja, $(M \setminus i(0)) \times [0,\pi]$-n pedig az $(M \setminus i(0))$-ra való vetítés.) Ez utóbbi sokaság viszont diffeomorf $M \setminus i(\operatorname{int} D^n)$-nel, ami pedig, (mivel M homeomorf S^n-nel) homeomorf D^n-nel. Tehát W pontra húzható. Az 5. tételből következik, hogy $W \approx D^{n+1}$, tehát a pereme, $M\#(-M)$ diffeomorf S^n-nel. $\square$



4. ábra

A továbbiakban ismertetjük Θ_n végességének bizonyítását.

Szükségünk lesz a következő tételre:

10. Tétel. *Minden homotopikus gömb s-parallelizálható.*

Bizonyítás. Legyen Σ egy homotopikus n-gömb, ekkor Σ homeomorf S^n-nel. Legyen $\mathfrak{o}(\Sigma) = \mathfrak{o}(\mathcal{T}\Sigma \oplus \varepsilon^1_\Sigma) \in \pi_{n-1}(SO_{n+1}) \cong \pi_{n-1}(SO)$ Σ s-parallelizálhatóságának obstrukciója. Azt akarjuk belátni, hogy ez az obstrukció 0. A Bott-periodicitás miatt 3 eset lehet:

Ha $n-1 \equiv 2, 4, 5$ vagy 6 modulo 8, akkor $\pi_{n-1}(SO) = 0$, ezért $\mathfrak{o}(\Sigma) = 0$.

Ha $n-1 \equiv 3$ vagy 7 modulo 8, azaz $n = 4k$ valamilyen k-ra, akkor $\pi_{n-1}(SO) \cong Z$. $\mathfrak{o}(\Sigma) \in \pi_{n-1}(SO) \cong Z$ a $p_k(\mathcal{T}\Sigma \oplus \varepsilon^1_\Sigma) \in H^{4k}(\Sigma) \cong Z$ Pontrjagin-osztály nem 0 konstansszorosa. Ugyanis: (ld. Milnor, Kervaire [7], Lemma 2.)

11. Lemma. *Legyen $m > 4k$, ξ egy m-dimenziós vektornyaláb a $4k$-dimenziós M sokaság fölött, ami egy pont egy $N \approx D^{4k}$ környezetén kívül triviális. Legyen $\mathfrak{o}(\xi) \in \pi_{4k-1}(SO_m) \cong Z$ annak az obstrukciója, hogy a nyaláb trivializálása kiterjed N-re. Ekkor $p_k(\xi)$, a nyaláb k. Pontrjagin-osztálya az $\mathfrak{o}(\xi)$ obstrukció nem-nulla (k-tól függő) konstansszorosa.*

Bizonyítás. A $p_k(\xi)$ Pontrjagin osztály nem más, mint a ξ által indukált $\xi' = \xi \otimes C$ komplex vektornyaláb $c_{2k}(\xi')$ Chern-osztálya (előjeltől eltekintve). ξ trivializálva van $M \setminus N$-en, azaz $M \setminus N$ felett meg van adva m független vektormező, ez indukál ξ'-ben is m független vektormezőt, nézzük ezek közül az első $m-2k+1$-et. A $c_{2k}(\xi')$ Chern-osztály nem más, mint annak az obstrukciója, hogy ezek kiterjeszthetőek N-re. Ez az obstrukció pedig az $\mathfrak{o}(\xi)$ képe a

$$\pi_{4k-1}(SO_m) \xrightarrow{h} \pi_{4k-1}(U_m) \xrightarrow{q} \pi_{4k-1}(U_m/U_{2k-1})$$

kompozíciónál (ahol $U_m/U_{2k-1} = V_{m-2k+1}(C^m)$ a megfelelő Stiefel-sokaság). Írjuk fel az (U_m, SO_m) pár homotópia egzakt sorozatát:

$$\pi_{4k-1}(SO_m) \xrightarrow{h} \pi_{4k-1}(U_m) \longrightarrow \pi_{4k-1}(U_m/SO_m)$$

Bott eredményei alapján $\pi_{4k-1}(SO_m) \cong Z$, $\pi_{4k-1}(U_m) \cong Z$, $\pi_{4k-1}(U_m/SO_m)$ pedig véges ciklikus, tehát h egy nem nulla egésszel való szorzás. Hasonlóan az (U_m, U_{2k-1}) pár

$$\pi_{4k-1}(U_m) \xrightarrow{q} \pi_{4k-1}(U_m/U_{2k-1}) \longrightarrow \pi_{4k-2}(U_{2k-1})$$

egzakt sorozatában az első két csoport Z, a 3. pedig véges ciklikus.

Tehát $c_{2k}(\xi')$, és így $p_k(\xi)$ az $\mathfrak{o}(\xi)$ nem-nulla konstansszorosa. $\square$

$p_k(\mathcal{T}\Sigma \oplus \varepsilon^1_\Sigma) = p_k(\mathcal{T}\Sigma)$. Σ homotopikus gömb, ezért $H^i(\Sigma) = 0$, ha $0 < i < 4k$, ezért $\mathcal{T}\Sigma$ összes többi Pontrjagin osztálya 0. Ezért a Hirzebruch szignatúra tétel szerint $p_k(\mathcal{T}\Sigma)$ nem-nulla konstansszorosa a $\sigma(\Sigma)$ szignatúrának. Viszont $H^{2k}(\Sigma) =$

0 miatt $\sigma(\Sigma) = 0$. Tehát $\mathfrak{o}(\Sigma) = 0$.

Ha $n-1 \equiv 0$ vagy 1 modulo 8, akkor $\pi_{n-1}(SO) \cong Z_2$. Ágyazzuk be Σ-t R^{2n+1}-be a következőképpen:

Először vegyünk egy $i : D^n \to \Sigma$ beágyazást, legyen $i(D^n) = B_1$. Σ homeomorf S^n-nel, ezért $B_2 = \Sigma \setminus \operatorname{int} B_1$ homeomorf D^n-nel (sőt, az 5. tétel feltételei teljesülnek B_2-re ezért diffeomorf D^n-nel). B_1 diffeomorf S^n_--al, S^n "alsó" felével, ez a diffeomorfizmus legyen a $\Sigma \to R^{2n+1}$ beágyazás B_1-en. Ekkor $C = \partial B_1 = \partial B_2$ már be van ágyazva (és a képe S^{n-1}), a tüskézett kobordizmus definíciója utáni megjegyzés alapján B_2 beágyazható úgy R^{2n+1}_+-ba, hogy ez a beágyazás kiterjessze C beágyazását. Ez B_1 beágyazásával együtt kiad egy $b : \Sigma \to R^{2n+1}$ beágyazást.

A 2. lemma szerint Σ pontosan akkor s-parallelizálható, ha $\mathcal{N}b(\Sigma)$ triviális, ezt fogjuk bebizonyítnai. Vegyük $b(B_1) = S^n_-$-on a standard tüskézést, ennek a leszűkítése S^{n-1}-re S^{n-1} standard tüskézése. B_2 pontra húzható, ezért $\mathcal{N}b(B_2)$ triviális, tüskézzük akárhogyan. Ekkor S^{n-1} pontjaiban a két bázis közti átmeneti leképezés homotópiaosztálya $\mathfrak{o}(\mathcal{N}b(\Sigma))$. Ekkor $J_{n-1}(\mathfrak{o}(\mathcal{N}b(\Sigma))) = 0$, mert S^{n-1} a módosított tüskézéssel pont $b(B_2)$ tüskézett pereme. Mivel J_{n-1} injektív, ebből következik, hogy $\mathfrak{o}(\mathcal{N}b(\Sigma)) = 0$. Tehát $\mathcal{N}b(\Sigma)$ triviális. $\square$

3.1. A bP_{n+1} részcsoport

Definíció. Legyen $bP_{n+1} \subseteq \Theta_n$ azoknak a homotopikus gömböknek (pontosabban a h-kobordizmusosztályaiknak) a halmaza, amelyek előállnak, mint $(n+1)$-dimenziós parallelizálható sokaságok határai.

12. Tétel. *bP_{n+1} részcsoport Θ_n-ben, és $\Theta_n \,/\, bP_{n+1}$ véges.*

Bizonyítás. Legyen $M \in \Theta_n$ tetszőleges.

Whitney tétele szerint létezik egy $i : M \to S^{2n+2}$ beágyazás. Mivel M s-parallelizálható, ezért $i(M)$ normálnyalábja triviális (2. lemma). Legyen ϕ az M egy pozitív irányítású tüskézése, ekkor a Pontrjagin-konstrukció alapján van egy olyan $S^{2n+2} \to S^{n+2}$ leképezés, aminek a Pontrjagin-sokasága $i(M)$ a ϕ tüskézéssel, és ennek a homotópiaosztálya egyértelmű. Így tetszőleges ϕ pozitív irányítású tüskézéshez hozzárendelhetjük $\pi_{2n+2}(S^{n+2})$ egy elemét. Jelölje $p(M)$ az így megkapható elemek halmazát. Mivel $\pi_{2n+2}(S^{n+2})$ azonosítható a stabil Π_n csoporttal, $p(M)$-et a továbbiakban Π_n részhalmazának tekintjük.

$p(M)$ független i-től, ugyanis ha $j : M \to S^{2n+2}$ egy másik beágyazás, akkor i és j izotópok, ezért S^{2n+2}-nek van egy olyan diffeotópiája, ami $i(M)$-et $j(M)$-be viszi. Így $i(M)$ egy tüskézésének megfeleltethetjük $j(M)$ egy tüskézését, ami vele tüskézetten kobordáns. Mivel ugyanezt megcsinálhatjuk a fordított irányban is, ezért a Pontrjagin-konstrukcióval Π_n-nek ugyanazokat az elemeit kaphatjuk meg j-ből, mint i-ből kiindulva.

Állítás. *$0 \in p(M)$ pontosan akkor teljesül, ha $M \in bP_{n+1}$*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $0 \in p(M)$, azaz M valamilyen tüskézéssel egy 0-homotóp leképezés Pontrjagin-sokasága. Ekkor M tüskézetten nullkobordáns, azaz határa egy tüskézett $(n+1)$-dimenziós sokaságnak, ami a 2. és 3. lemma miatt parallelizálható, tehát $M \in bP_{n+1}$.

Másrészt tegyük fel, hogy $M = \partial W$, ahol W parallelizálható. Vegyünk egy $M \to S^{2n+2}$ beágyazást, és W-nek egyolyan beágyazását $S^{2n+2} \times [0,1]$-be, ami kielégíti a tüskézett kobordizmus definíciójában szereplő első két feltételt. Mivel W parallelizálható, ez a beágyazás tüskézhető. Tehát $i(M)$ (valamilyen tüskézéssel) nullkobordáns, ezért $0 \in p(M)$. □

Állítás. *Ha $M, N \in \Theta_n$, akkor $p(M) + p(N) \subseteq p(M \# N)$.*

(Itt a "+" komplexusösszeget jelöl: $p(M)+p(N) = \{x+y \mid x \in p(M), y \in p(N)\}$.)

Bizonyítás. Legyen $x \in p(M)$ és $y \in p(N)$ egy-egy Pontrjagin-sokasága $i(M)$ a ϕ és $j(N)$ a ψ tüskézéssel. Ekkor $x+y$ egy Pontrjagin-sokasága $i(M) \bigsqcup j(N)$, külön-külön ϕ-vel és ψ-vel tüskézve. Azt kell belátnunk, hogy ezzel tüskézetten kobordáns $M \# N$ (valamilyen tüskézéssel).

Vegyük a 8. lemmában konstruált W kobordizmust, és annak egy, a tüskézett kobordizmus definíciójának megfelelő beágyazását $S^{2n+2} \times [0,1]$-be (aminél $M \times \{0\}$ képe $i(M)$, $N \times \{0\}$-é $j(N)$). Megmutatjuk, hogy W-nek (így beágyazva) van egy olyan tüskézése, ami kiterjeszti ϕ-t és ψ-t. Jelölje $(M \times [0,2] \setminus A_1) \cup_{r_1} (D^1 \times D^n)$-et W_1 és $(N \times [0,2] \setminus A_2) \cup_{r_2} (D^1 \times D^n)$-et W_2. A továbbiakban W minden részsokaságát automatikusan $S^{2n+2} \times [0,1]$-be beágyazottnak tekintjük.

W_1 diffeomorf $(M \times [0,2] \setminus A_1)$-gyel, ezért s-parallelizálható (mert M az), és a 2. lemma szerint a normálnyalábja triviális. Vegyük W_1 egy tetszőleges tüskézését. Olyan tüskézést kell definiálnunk W-en, ami kiterjesztése ϕ-nek és ψ-nek, ezért az előbb W_1-en definiált tüskézést még módosítanunk kell. Vegyük azt az $M \to GL_{n+2}$ leképezést, ami ezt a tüskézést átviszi ϕ-be, és terjesszük ki W_1-re (egy M-en értelmezett leképezés triviálisan kiterjeszthető $M \times [0,2]$-re, és ezért az ennek egy részével diffeomorf W_1-re is). Így minden ponthoz hozzárendeltünk egy GL_{n+2}-beli elemet, ezt alkalmazva a meglévő tüskézésre megkapjuk W_1 egy olyan tüskézését, ami M-re leszűkítve pont ϕ-t adja. Hasonlóan definiálhatunk W_2-n egy olyan tüskézést, ami kiterjesztése ψ-nek.

A W_1-en és W_2-n megadott tüskézések $D^1 \times D^n$-en különbözhetnek, ezért még egy módosítás kell. Vegyük azt a $D^1 \times D^n \to GL_{n+2}$ leképezést, ami $[1-\varepsilon, 1] \times D^n$-en átviszi W_1 tüskézését W_2-ébe, $[-1, -1+\varepsilon] \times D^n$-en az identitás, $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon] \times D^n$-en pedig egy homotópia az $\{1-\varepsilon\} \times D^n$-en már értelmezett leképezés és az identitás között. Ilyen homotópia létezik, mert ϕ és ψ is pozitív irányítású, ezért W_1 és W_2 tüskézése is pozitív irányítású, ezért az $\{1-\varepsilon\} \times D^n$-en értelmezett leképezés képe GL^+_{n+2}-ban van, másrészt D^n pontra húzható, tehát tetszőleges $D^n \to GL^+_{n+2}$ leképezés homotóp a konstans identitással. Végül ezt a $D^1 \times D^n \to GL_{n+2}$ leképezést közelítsük simával úgy, hogy $S^0 \times D^n$ egy környezetén ne változzon, és ezt alkalmazzuk W_1 tüskézésére $D^1 \times D^n$-en. Vegyük W_1-en az így módosított tüskézést és $(N \times [0,2] \setminus A_2)$-n W_2 korábban definiált tüskézését, ezek együtt W egy megfelelő tüskézését adják. $\square$

Állítás. *$p(S^n)$ részcsoport Π_n-ben, tetszőleges $M \in \Theta_n$ esetén $p(M)$ egy $p(S^n)$ szerinti mellékosztály, és $p : \Theta_n \to \Pi_n / p(S^n)$ homomorfizmus.*

Bizonyítás. $0 \in p(S^n)$, mert $S^n = \partial D^{n+1}$, és D^{n+1} parallelizálható. Az előző állítás szerint $p(S^n) + p(S^n) \subseteq p(S^n)$, tehát zárt az összeadásra. Π_n véges, ezért $p(S^n)$ is, ezért tetszőleges $x \in p(S^n)$ esetén $x + p(S^n) = p(S^n)$, amiből következik, hogy $-x \in p(S^n)$. Tehát $p(S^n)$ részcsoport.

Ha $x \in p(M)$, akkor x egész $p(S^n)$ szerinti mellékosztálya is $p(M)$-ben van, mert $x + p(S^n) \subseteq p(M) + p(S^n) \subseteq p(M)$ az előző állítás miatt. Tehát $p(M)$ mellékosztályok uniója. Viszont $p(M) + p(-M) \subseteq p(M\#(-M)) = p(S^n)$, ezért

$p(M)$ nem tartalmazhat különböző mellékosztályba tartozó elemeket, tehát $p(M)$ egy $p(S^n)$ szerinti mellékosztály.

Emiatt viszont megerősíthetjük az előző állítást: a $\subseteq$ jel mindkét oldalán egy-egy $p(S^n)$ szerinti mellékosztály áll, ami csak úgy leheteséges, hogy $p(M) + p(N) = p(M\#N)$. Ez pedig pont azt jelenti, hogy p homomorfizmus. $\square$

Az egyik előző állításban láttuk, hogy M pontosan akkor eleme bP_{n+1}-nek, ha $0 \in p(M)$, ez pedig a legutóbbi állítás szerint ekvivalens azzal, hogy $p(M) = p(S^n)$, azaz azzal, hogy $M \in \operatorname{Ker} p$. Vagyis $\operatorname{Ker} p = bP_{n+1}$, tehát bP_{n+1} részcsoport.

Ismert, hogy Π_n véges, és ezért $\Pi_n/p(S^n)$ és $\operatorname{Im} p$ is az. Viszont a homomorfizmus-tétel szerint $\operatorname{Im} p \cong \Theta_n/\operatorname{Ker} p = \Theta_n/bP_{n+1}$. Tehát Θ_n/bP_{n+1} véges. $\square$

Megjegyzés. Azt, hogy bP_{n+1} részcsoport, könnyebben, közvetlenül is bebizonyíthattuk volna. Nyilván $S^n = \partial D^{n+1} \in bP_{n+1}$, és ha $M = \partial V$ egy parallelizálható V-re, akkor $(-M) = \partial(-V)$. Az összeadásra való zártság pedig abból következik, hogy ha $M_1 = \partial V_1$, $M_2 = \partial V_2$ ahol V_1 és V_2 parallelizálható, akkor $M_1\#M_2 = \partial(V_1\#_\partial V_2)$, és $V_1\#_\partial V_2$ is parallelizálható.

3.2. bP_{n+1} véges

A továbbiakban azt fogjuk bebizonyítani, hogy bP_{n+1} véges.

Tegyük fel, hogy adott egy M n-dimenziós ($n \geq 6$; az egyszerűbb jelölés kedvéért megváltoztattuk az indexelést) sokaságunk, ami parallelizálható, és a pereme egy homotopikus gömb. M-et megpróbáljuk átépítések sorozatával áttranszformálni D^n-be.

(Látni fogjuk, hogy páratlan n esetén ezt tetszőleges M-ből kiindulva el tudjuk érni. Mivel átépítés közben a perem nem változik, ebből következik, hogy tetszőleges M-nek ugyanaz a pereme, mint D^n-nek, vagyis S^{n-1}; ez pedig azt jelenti, hogy bP_n egyetlen eleme S^{n-1} (diffeomorfizmus erejéig).)

A 6. tételből azt látjuk, hogy elég M-et egy $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$-szeresen összefüggő sokasággá átépítenünk, az már automatikusan diffeomorf lesz D^n-nel. A következőkben tehát megpróbáljuk átépítésekkel megölni M homotopikus csoportjait.

13. Lemma. *Ha M n-dimenziós, s-parallelizálható, és $p < \frac{n}{2}$, akkor tetszőleges $\lambda \in \pi_p(M)$ reprezentálható $\varphi : S^p \times D^{n-p} \to M$ beágyazással úgy, hogy $\chi(M, \varphi)$ is s-parallelizálható legyen.*

Azon, hogy φ λ-t reprezentálja, azt értjük, hogy $\left[\varphi\big|_{S^p \times \{0\}}\right] = \lambda$.

Bizonyítás. Legyen $i_0 : S^p \to M$ λ egy reprezentánsa. Whitney tétele szerint i_0 approximálható egy vele homotóp i beágyazással. M és S^p s-parallelizálható, ezért a 2. lemma szerint $\mathcal{N}(i(S^p))$ is triviális. Ezért $i(S^p)$ egy csőszerű környezete diffeomorf $S^p \times D^{n-p}$-vel, ez a diffeomorfizmus tekinthető egy $\varphi : S^p \times D^{n-p} \to M$ beágyazásnak, amire $\varphi\big|_{S^p \times 0} = i$.

Kell még, hogy $M' = \chi(M, \varphi)$ is s-parallelizálható. Legyen W a 7. lemmában konstruált kobordizmus, M-et és M'-t azonosítjuk W peremkomponenseivel. Ekkor M normálnyalábja W-ben triviális, ezért $\mathcal{T}W\big|_M = \mathcal{T}M \oplus \mathcal{N}M \cong \mathcal{T}M \oplus \varepsilon^1$. M s-parallelizálhatósága miatt $\mathcal{T}W\big|_M$ triviális. Hasonlóan látjuk, hogy $\mathcal{T}W\big|_{M'} \cong \mathcal{T}M' \oplus \varepsilon^1$. Ebből következik, hogy ha $\mathcal{T}W\big|_M$ trivializálását ki tudjuk terjeszteni W-re, akkor M' s-parallelizálható lesz.

Definíció. M-nek $M' = \chi(M, \varphi)$-vé való átépítése tüskézett, ha a köztük lévő W kobordizmus parallelizálható.

Megvizsgáljuk, hogy mi kell ahhoz, hogy az átépítés tüskézett legyen.

Legyen $V = M \times [0, 2] \setminus A$, és $j : V \to W$ a természetes beágyazás. Vegyük $\mathcal{T}M \oplus \varepsilon^1$ egy trivializálását, ez meghatározza $\mathcal{T}(M \times [0, 2])$, és ezért $\mathcal{T}V$ egy trivializálását. Ezt dj, j deriváltja $\mathcal{T}W\big|_{j(V)}$ egy trivializálásába viszi. $j(V)$-re tehát könnyen kiterjeszthető $\mathcal{T}W\big|_M$ egy trivializálása.

D^{p+1} és D^{n-p} is parallelizálható, rögzítsük $\mathcal{T}D^{p+1}$ és $\mathcal{T}D^{n-p}$ egy trivializálását. Ezek meghatározzák $\mathcal{T}(D^{p+1} \times D^{n-p})$ egy trivializálását: tetszőleges $(x, y) \in D^{p+1} \times D^{n-p}$ pontban $\mathcal{T}_{(x,y)}(D^{p+1} \times \{y\})$ és $\mathcal{T}_{(x,y)}(\{x\} \times D^{n-p})$ bázisa együtt kiadja az érintőtér egy bázisát.

Jelölje $h : D^{p+1} \times D^{n-p} \to W$ a természetes beágyazást, ekkor dh átviszi $\mathcal{T}(D^{p+1} \times D^{n-p})$ trivializálását $\mathcal{T}W\big|_{h(D^{p+1} \times D^{n-p})}$ egy trivializálásába.

Legyen

$$B = \{(\varphi(x, ty), 2 - \sqrt{1 - t^2}) \mid x \in S^p, y \in S^{n-p-1}, t \in [0, 1]\} \subset \partial V$$

Ekkor W előbb vizsgált két részének metszete $j(B) = h(S^p \times D^{n-p})$. Definiáljuk a $g : j(B) \to GL^+_{n+1}$ függvényt úgy, hogy $j(B)$ minden pontjában vegyük azt a transzformációt, ami az érintőtér $\mathcal{T}W\big|_{h(D^{p+1}\times D^{n-p})}$ trivializálása által kijelölt bázisát átviszi $\mathcal{T}W\big|_{j(V)}$ kijelölt bázisába (feltehetjük, hogy mindkét bázis pozitív irányítású, ezért g képe GL^+_{n+1}-ban van).

Ha g kiterjed $h(D^{p+1} \times D^{n-p})$-re, akkor ezt a kiterjesztést alkalmazhatjuk $\mathcal{T}W\big|_{h(D^{p+1}\times D^{n-p})}$ trivializálására, az eredmény egy, $j(B)$-ben $\mathcal{T}W\big|_{j(V)}$-éhez illeszkedő trivializálás lesz, és ezek együtt kiadják $\mathcal{T}W$ egy trivializálását. Tehát ekkor W parallelizálható.

g pontosan akkor terjed ki $h(D^{p+1} \times D^{n-p})$-re, ha $\tilde{g} = g\big|_{j(\tilde{B})} : S^p \to GL^+_{n+1}$ nullhomotóp, ahol $\tilde{B} = \varphi(S^p \times \{0\}) \times \{1\} \approx S^p$ (ez deformációs retraktuma B-nek). ($[\tilde{g}] \in \pi_p(GL^+_{n+1}) \cong \pi_p(SO_{n+1})$ pont W parallelizálhatóságának obstrukciója.)

$[\tilde{g}] = 0$ nem feltétlenül teljesül, ezért nézzük meg, hogy mi történik, ha φ helyett λ egy másik reprezentánsát választjuk:

Legyen $\alpha : S^p \to SO_{n-p}$ tetszőleges, és definiáljuk a $\varphi_\alpha : S^p \times D^{n-p} \to M$ leképezést úgy, hogy minden $x \in S^p, y \in S^{n-p}, t \in [0,1]$ esetén

$$\varphi_\alpha(x, ty) = \varphi(x, (\alpha(x))(ty))$$

Legyen $M'_\alpha = \chi(M, \varphi_\alpha)$, W_α az M és M'_α közötti kobordizmus, $j_\alpha : V \to W_\alpha$ és $h_\alpha : D^{p+1} \times D^{n-p} \to W_\alpha$ a beágyazások, ezek meghatározzák $\mathcal{T}W_\alpha\big|_{j_\alpha(V)}$ és $\mathcal{T}W_\alpha\big|_{h_\alpha(D^{p+1}\times D^{n-p})}$ egy-egy trivializálását, az ezek közötti átmeneti leképezés ($j_\alpha(\tilde{B})$ pontjaiban) $\tilde{g}_\alpha$.

Meg akarjuk határozni a $\tilde{g}_\alpha$ leképezés $[\tilde{g}_\alpha] \in \pi_p(GL^+_n) \cong \pi_p(SO_n)$ homotópia-osztályát. Ehhez először azonosítsuk $j(V)$ és $j_\alpha(V)$ egy-egy környezetét W-ben és W_α-ban. (ld. 5. ábra)

Legyen $f_0 : [1-\varepsilon, 1]S^p \times D^{n-p} \to [1-\varepsilon, 1]S^p \times D^{n-p}$,

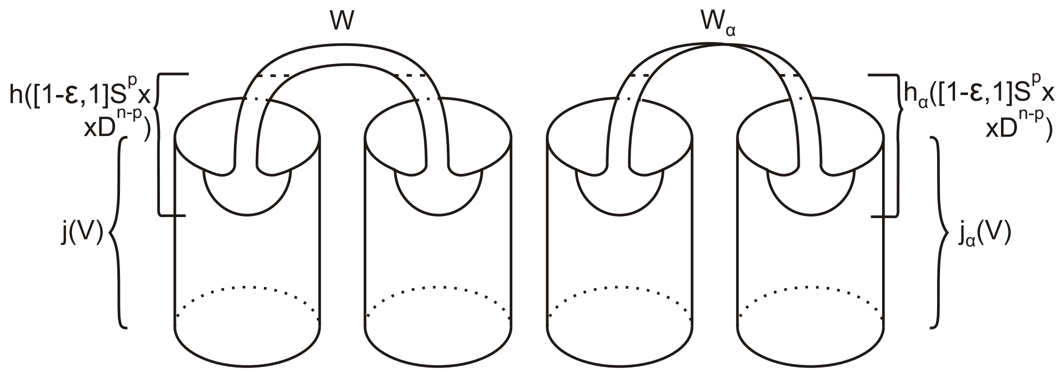
$$f_0(ux, ty) = (ux, (\alpha(x))^{-1}(ty))$$

minden $x \in S^p, y \in S^{n-p-1}, u \in [1-\varepsilon, 1], t \in [0,1]$ esetén.

Legyen $f : j(V) \cup h([1-\varepsilon, 1]S^p \times D^{n-p}) \to j_\alpha(V) \cup h_\alpha([1-\varepsilon, 1]S^p \times D^{n-p})$,

$$f(z) = \begin{cases} j_\alpha(j^{-1}(z)) & \text{ha } z \in j(V) \\ h_\alpha(f_0(h^{-1}(z))) & \text{ha } z \in h([1-\varepsilon, 1]S^p \times D^{n-p}) \end{cases}$$

Ekkor f jóldefiniált, mert ha $z = h(x,ty) \in j(B)$, akkor $h_\alpha(f_0(h^{-1}(z))) = h_\alpha(x,(\alpha(x))^{-1}(ty)) = j_\alpha(\varphi_\alpha(x,(\alpha(x))^{-1}(ty)), 2-\sqrt{1-t^2}) = j_\alpha(\varphi(x,ty), 2-\sqrt{1-t^2}) = j_\alpha(j^{-1}(z))$, és f diffeomorfizmus.



5. ábra

Így $j_\alpha(\tilde{B})$ pontjaiban definiálhatjuk 3 bázisát W_α érintőterének:

1. a $\mathcal{T}W_\alpha\big|_{h_\alpha(D^{p+1}\times D^{n-p})}$ trivializálásából származó bázis
2. a $\mathcal{T}W\big|_{h(D^{p+1}\times D^{n-p})}$ trivializálásából származó bázis képe (ha f deriváltját alkalmazzuk rá)
3. a $\mathcal{T}W_\alpha\big|_{j_\alpha(V)}$ trivializálásából származó bázis, ami f definíciója miatt egybeesik a $\mathcal{T}W\big|_{j(V)}$ trivializálásából származó bázis képével.

Az 1. és 3. bázis közötti átmeneti leképezés $\tilde{g}_\alpha$, a 2. és 3. közötti pedig $\tilde{g}$. Kiszámoljuk a 2. bázist az 1.-be vivő transzformációt. $D^{p+1} \times D^{n-p}$ kijelölt bázisának képe dh_α szerint az 1. bázis, $dh_\alpha \circ df_0$ szerint a 2. bázis.

Nézzük meg, hogy df_0 mit csinál $D^{p+1}\times D^{n-p}$ bázisával egy adott $(x,0) \in S^p\times\{0\}$ pontban. A bázis első $p+1$ vektora $D^{p+1}\times\{0\}$ érintőterét feszíti ki, és mivel f_0 $([1-\varepsilon,1]S^p\times\{0\})$-t (pontonként) fixen hagyja, ezért az első $p+1$ bázisvektor fixen marad. f_0 az $\{x\}\times D^{n-p}$ halmazt önmagába viszi, méghozzá az $(\alpha(x))^{-1}$ transzformációval, ezért az utolsó $n-p$ bázisvektoron df_0 ugyanúgy hat, mint $(\alpha(x))^{-1}$. Tehát $df_0(x,0) = s((\alpha(x))^{-1})$, ahol $s : SO_{n-p} \to SO_{n+1}$ a standard beágyazás.

Tehát a 2. bázist $s(\alpha^{-1})$ viszi az 1.-be, ezért $\tilde{g}_\alpha \circ s(\alpha^{-1}) = \tilde{g}$, azaz $\tilde{g}_\alpha = \tilde{g}\circ s(\alpha)$. Ezért $[\tilde{g}_\alpha] = [\tilde{g}][s(\alpha)] = [\tilde{g}]s_*([\alpha])$, ahol $s_* : \pi_p(SO_{n-p}) \to \pi_p(SO_{n+1})$ az s által indukált homomorfizmus.

$\tilde{g}_\alpha$ tehát pontosan akkor nullhomotóp, ha $s_*([\alpha]) = [\tilde{g}]^{-1} \in \pi_p(SO_{n+1})$. Mivel $p < \frac{n}{2}$, ezért $p < n-p$, ezért s_* szürjektív. Tehát meg tudjuk úgy választani α-t, hogy $\tilde{g}_\alpha$ nullhomotóp, és így W_α parallelizálható legyen. Tehát van olyan φ_α reprezentánsa λ-nak, amivel M'_α s-parallelizálható lesz. $\square$

Vizsgáljuk meg, hogy ha φ a $\lambda \in \pi_p(M)$ homotópiaosztályt reprezentálja, akkor az M-ről $M' = \chi(M,\varphi)$-re való áttéréskor hogyan változnak meg M homotopikus csoportjai.

M' definíció szerint $M \backslash \varphi(S^p \times \{0\})$ és $D^{p+1} \times S^{n-p-1}$ összeragasztásával keletkezik, $\varphi' : D^{p+1} \times S^{n-p-1} \to M'$ jelölje a kanonikus beágyazást.

Legyen $M_0 = M \setminus \varphi(S^p \times \operatorname{int} D^{n-p})$, ekkor M_0 tekinthető M' részhalmazának is. Jelölje $i : M_0 \to M$ és $i' : M_0 \to M'$ a beágyazásokat.

14. Lemma.

$$\begin{aligned} \pi_i(M') &\cong \pi_i(M) && \textit{ha} \quad i < \min(p, n-p-1) \\ \pi_p(M') &\cong \pi_p(M)/\Lambda && \textit{ha} \quad p \leq \frac{n}{2} - 1 \end{aligned}$$

ahol Λ egy λ-t tartalmazó részcsoport.

Bizonyítás. Írjuk fel az (M, M_0) és az (M', M_0) pár homotópia egzakt sorozatát:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{i+1}(M, M_0) & \longrightarrow & \pi_i(M_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_i(M) & \longrightarrow & \pi_i(M, M_0) \\ \pi_{i+1}(M', M_0) & \xrightarrow{\delta'_{i+1}} & \pi_i(M_0) & \xrightarrow{i'_*} & \pi_i(M') & \longrightarrow & \pi_i(M', M_0) \end{array}$$

$\pi_j(M, M_0)$ kiszámításához a homotópiacsoportokra vonatkozó kivágási tételt alkalmazzuk az $M = M_0 \cup \varphi(S^p \times D^{n-p})$ felbontásra. Ez alapján a beágyazás által indukált $\pi_j(\varphi(S^p \times D^{n-p}), \varphi(S^p \times S^{n-p-1})) \to \pi_j(M, M_0)$ leképezés izomorfizmus, ha $j < n-p-1$ és szürjektív, ha $j = n-p-1$, mert a $(\varphi(S^p \times D^{n-p}), \varphi(S^p \times S^{n-p-1}))$ pár $(n-p-1)$-szeresen összefüggő. Ebből következik, hogy $\pi_j(M, M_0) = 0$, ha $j < n-p$.

Hasonlóan látszik, hogy $\pi_j(M', M_0) = 0$, ha $j < p+1$, ugyanis a $(\varphi'(D^{p+1} \times S^{n-p-1}), \varphi'(S^p \times S^{n-p-1}))$ pár p-szeresen összefüggő. Ezeket behelyettesítve az egzakt sorozatba azt kapjuk, hogy ha $i+1 < n-p$ és $i+1 < p+1$, akkor $\pi_i(M) \cong \pi_i(M_0) \cong \pi_i(M')$. Ezzel a lemma 1. sorát igazoltuk.

A 2. sor esetében vegyük észre, hogy ha $p \leq \frac{n}{2} - 1$, akkor $\pi_{p+1}(M, M_0) = \pi_p(M, M_0) = 0$, és ezért $\pi_p(M_0) \cong \pi_p(M)$, és a köztük lévő izomorfizmus i_*. Másrészt pedig $\pi_p(M', M_0) = 0$, amiből az következik, hogy $\pi_p(M') \cong \pi_p(M_0)/\operatorname{Im}\delta'_{p+1}$.

Már csak annyit kell belátnunk, hogy $\operatorname{Im}\delta'_{p+1}$ tartalmazza $(i_*)^{-1}(\lambda)$-t. Rögzítsünk egy $x \in S^{n-p-1}$ pontot, és vegyük a $\varphi'(\cdot, x) : D^{p+1} \to M'$ leképezést. Ez $\pi_{p+1}(M', M_0)$ egy olyan $[\varphi'(\cdot, x)]$ elemét reprezentálja, amire $\delta'_{p+1}([\varphi'(\cdot, x)]) = [\varphi'(\cdot, x)\big|_{S^p}] = (i_*)^{-1}(\lambda)$. Tehát $\pi_p(M') \cong \pi_p(M_0)/\operatorname{Im}\delta'_{p+1} \cong \pi_p(M)/\Lambda$, ahol $\lambda \in \Lambda$. □

15. Tétel. *Ha M n-dimenziós és s-parallelizálható, akkor átépíthető (tüskézett átépítésekkel) egy $(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1)$-szeresen összefüggő sokasággá.*

Bizonyítás. Először megöljük M fundamentális csoportját, azaz átépítjük M-et egy egyszeresen összefüggő, s-parallelizálható $\tilde{M}$ sokasággá. Ehhez először kiválasztjuk $\pi_1(M)$ egy λ generátorát. A 13. lemma szerint ez reprezentálható egy $\varphi : S^1 \times D^{n-1} \to M$ leképezéssel úgy, hogy $M' = \chi(M, \varphi)$ s-parallelizálható lesz. A 14. lemma miatt M' fundamentális csoportja kisebb lesz, mint M-é. Ha $\pi_1(M')$ nem triviális, akkor ezt a lépést megcsinálhatjuk M'-re is (itt használjuk M' s-parallelizálhatóságát, a 13. lemmát enélkül nem alkalmazhatnánk), és ezt egészen addig ismételjük, amíg egy megfelelő $\tilde{M}$ sokaságot kapunk.

Ezután megöljük $\pi_2(M)$-et, erre ugyanazt a módszert alkalmazzuk, mint előbb. A 14. lemma biztosítja, hogy közben a fundamentális csoport triviális marad. Ugyanígy megölhetjük M 3., 4., ..., $(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1)$. homotopikus csoportját.

Így kapunk egy $(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1)$-szeresen összefüggő sokaságot. □

Meg kéne ölnünk még az $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. homotopikus csoportot. Erre különböző módszereket fogunk használni n paritásától függően.

3.2.1. bP_{2k+1} triviális

A továbbiakban legyen $k \geq 3$, M egy $(2k + 1)$-dimenziós, $(k - 1)$-szeresen összefüggő s-parallelizálható sokaság, aminek a pereme egy homotopikus gömb. Célunk, hogy M-et átépítsük k-szorosan összefüggővé. Csak "k-dimenziós" átépítéseket alkalmazunk, azaz olyanokat, ahol φ $S^k \times D^{k+1}$-et ágyazza be M-be. A 14. lemma biztosítja, hogy eközben az alacsonyabb dimenziós homotopikus csoportok triviálisak maradnak.

Tehát csak azzal kell törődnünk, hogy a k. homotópiacsoport hogyan változik. Áttérünk a k. homológiacsoport vizsgálatára (mert az egyszerűbben kezelhető). Hurewicz tétele szerint ez mindig izomorf lesz a k. homotópiacsoporttal (felhasználva, hogy a $(k-1)$-szeres összefüggőség végig megmarad). Tehát használhatjuk a 13. lemmát, tetszőleges $\lambda \in H_k(M)$-hez tudunk olyan φ reprezentánst választani, hogy az abból elkészített átépítés tüskézett lesz.

Először nézzük meg, hogy egy átépítéskor hogyan változik meg a k. homológiacsoport.

Jelölje ε ill. ε' a $\varphi(S^k \times \{x\})$-nek ($x \in S^k$ tetszőleges), ill. $\varphi'(\{x\} \times S^k)$-nak megfelelő homológiaosztályt $H_k(M_0)$-ban, ekkor $\lambda = i_*(\varepsilon)$.

16. Lemma. $H_k(M)/\langle\lambda\rangle \cong H_k(M')/\langle i'_*(\varepsilon')\rangle$.

($\langle\cdot\rangle$ a generált részcsoportot jelöli)

Bizonyítás. Az (M, M_0) és az (M', M_0) pár egzakt sorozata:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{k+1}(M, M_0) & \xrightarrow{\delta} & H_k(M_0) & \xrightarrow{i_*} & H_k(M) & \longrightarrow & H_k(M, M_0) \\ H_{k+1}(M', M_0) & \xrightarrow{\delta'} & H_k(M_0) & \xrightarrow{i'_*} & H_k(M') & \longrightarrow & H_k(M', M_0) \end{array}$$

A relatív homológia csoportokat meghatározhatjuk a kivágási tétel segítségével: minden j-re

$$H_j(M, M_0) \cong H_j(\varphi(S^k \times D^{k+1}), \varphi(S^k \times S^k)) \cong$$
$$\cong H_j(S^k \times D^{k+1}, S^k \times S^k) \cong \begin{cases} Z & \text{ha } j = k+1 \\ 0 & \text{ha } j \neq k+1 \end{cases}$$

Tehát $H_k(M, M_0) \cong 0$, ezért i_* szürjektív, $H_k(M) \cong H_k(M_0)/\operatorname{Im}\delta$.

Másrészt $H_{k+1}(M, M_0) \cong Z$, és egy generátora a $\tilde{\varphi} : (D^{k+1}, S^k) \to (M, M_0)$, $\tilde{\varphi} = \varphi\big|_{\{x\}\times D^{k+1}}$ leképezésnek megfelelő homológiaosztály. Ebből látszik, hogy $\operatorname{Im}\delta = \langle\varepsilon'\rangle$. Tehát $H_k(M) \cong H_k(M_0)/\langle\varepsilon'\rangle$, és az izomorfizmust i_* indukálja. Ezért $H_k(M)/\langle\lambda\rangle = H_k(M)/\langle i_*(\varepsilon)\rangle \cong (H_k(M_0)/\langle\varepsilon'\rangle)/\langle\varepsilon + \langle\varepsilon'\rangle\rangle \cong H_k(M_0)/\langle\varepsilon', \varepsilon\rangle$.

Hasonlóan $H_j(M', M_0) \cong H_j(\varphi'(D^{k+1} \times S^k), \varphi'(S^k \times S^k))$, és $H_{k+1}(M', M_0) \cong Z$ egy generátora a $\varphi'\big|_{D^{k+1}\times\{x\}}$-nek megfelelő homológiaosztály. Ezért $H_k(M') \cong H_k(M_0)/\left<\varepsilon\right>$, és $H_k(M')/\left<i'_*(\varepsilon')\right> \cong H_k(M_0)/\left<\varepsilon, \varepsilon'\right>$.

Tehát $H_k(M)/\left<\lambda\right> \cong H_k(M_0)/\left<\varepsilon, \varepsilon'\right> \cong H_k(M')/\left<i'_*(\varepsilon')\right>$. $\square$

17. Lemma. *$H_k(M)$ szabad része megölhető tüskézett átépítésekkel.*

Bizonyítás. Írjuk fel $H_k(M)$-et $Z \oplus Z \oplus \cdots \oplus Z \oplus T$ alakban, ahol T véges, és legyen φ az egyik Z komponens egy λ generátorának egy reprezentánsa, ezzel végezzük el az átépítést. Be fogjuk bizonyítani, hogy ekkor $\varepsilon' = 0$, és ezért $H_k(M') \cong H_k(M)/\left<\lambda\right>$. Az (M, M_0) pár egzakt sorozatából még egy elemet felírva:

$$H_{k+1}(M) \xrightarrow{\cdot\lambda} H_{k+1}(M, M_0) \xrightarrow{\delta} H_k(M_0)$$

A $(\cdot\lambda) : H_{k+1}(M) \to H_{k+1}(M, M_0)$ leképezés egy $H_{k+1}(M)$-beli μ homológiaoszályhoz $H_{k+1}(M, M_0) \cong Z$ generátorának $(\mu\cdot\lambda)$-szorosát rendeli (előjeltől eltekintve), hiszen a generátor (a $\varphi\big|_{\{x\}\times D^{k+1}}$-nek megfelelő homológiaosztály) metszési száma $\varphi(S^k \times \{0\})$-vel, λ reprezentánsával ± 1.

Elég azt belátnunk, hogy $(\cdot\lambda)$ szürjektív, mert akkor $\delta = 0$ és ezért $\left<\varepsilon'\right> = \operatorname{Im}\delta = 0$. Ehhez pedig az kell, hogy valamilyen $\mu \in H_{k+1}(M)$-re $\mu \cdot \lambda = 1$.

Mivel ∂M homotopikus $2k$-gömb, ezért minden $0 < i < 2k$ esetén $H_i(\partial M) = 0$. Ezért a $(M, \partial M)$ pár egzakt sorozata és a Poincaré-dualitás tétel alapján $H_k(M) \cong H_k(M, \partial M) \cong H^{k+1}(M)$. λ nem torzió elem, ezért a duálisa sem, ezért $B(\lambda, \cdot) \neq 0$. Ha $\operatorname{Im} B(\lambda, \cdot) \leq Z$ nem Z, hanem annak egy valódi $\left<t\right>$ részcsoportja, akkor $\frac{1}{t}B(\lambda, \cdot)$ is egy $H_{k+1}(M) \to Z$ homomorfizmus, legyen egy neki megfelelő kohomológiaosztály $\eta \in H^{k+1}(M)$. Ekkor λ duálisa és $t\eta$ csak egy torzióelemben térnek el egymásól, ezért ugyanez igaz λ-ra és $t\eta$ duálisára. Ez pedig ellentmond annak, hogy λ az egyik Z komponens generátora $H_k(M)$-ben. Tehát $\operatorname{Im} B(\lambda, \cdot) = Z$, ezért van egy olyan $\mu \in H_{k+1}(M)$ homológiaosztály, amire $B(\lambda, \mu) = 1$.

A korábbiak szerint ebből következik, hogy $\varepsilon' = 0$, és így az, hogy $H_k(M)$ λ által generált Z komponensét megöltük. Ezt megcsináljuk az összes Z komponensre. $\square$

Szükségünk lesz a következő algebrai lemmára:

18. Lemma. *Legyen*

$$A_1 \xrightarrow{h_1} A_2 \xrightarrow{h_2} A_3 \xrightarrow{h_3} \cdots \xrightarrow{h_{m-1}} A_m \xrightarrow{h_m} A_{m+1} = 0$$

azonos test feletti, véges dimenziós vektorterek egzakt sorozata, és $\dim A_i = a_i$*. Ekkor* $\operatorname{rk} h_1 = \sum_{i=2}^m (-1)^i a_i$*.*

Bizonyítás. Legyen $b_i = \dim(\operatorname{Ker} h_i)$ és $c_i = \dim(\operatorname{Im} h_i) = \operatorname{rk} h_i$. Az egzaktság miatt $b_i = c_{i-1}$. A homomorfizmus-tétel szerint pedig $a_i = b_i + c_i$. Ezért $\sum_{i=2}^m (-1)^i a_i = \sum_{i=2}^m (-1)^i (b_i + c_i) = \sum_{i=2}^m (-1)^i (c_{i-1} + c_i) = c_1 + (-1)^m c_m = c_1$, hiszen $c_m \leq a_{m+1} = 0$. □

A következő lemmában legyen M zárt, $M' = \chi(M, \varphi)$ az M egy átépítése, és W az M és M' közötti kobordizmus. Legyen F egy rögzített test, ekkor $H_{k+1}(W; F)$ véges dimenziós vektortér F felett. Tekintsük azt a $B : H_{k+1}(W; F) \times H_{k+1}(W; F) \to F$ bilineáris leképezést, ami két $H_{k+1}(W; F)$-beli homológiaosztályhoz hozzárendeli a metszési számukat.

19. Lemma. *Ha* $\operatorname{rk} B$ *páros, akkor* $\dim H_k(M'; F) \neq \dim H_k(M; F)$*.*

Bizonyítás. Vegyük a $(W, \partial W)$ párhoz tartozó hosszú egzakt sorozatot.

$$\begin{aligned}
H_{k+1}(W;F) \xrightarrow{h} H_{k+1}(W,\partial W;F) \longrightarrow H_k(\partial W;F) \longrightarrow& \\
\longrightarrow H_k(W;F) \longrightarrow H_k(W,\partial W;F) \longrightarrow H_{k-1}(\partial W;F) \longrightarrow& \\
\dots& \\
\longrightarrow H_0(W;F) \longrightarrow H_0(W,\partial W;F) \longrightarrow 0&
\end{aligned}$$

$\partial W = M \bigsqcup M'$, ezért $H_i(\partial W; F) \cong H_i(M; F) \oplus H_i(M'; F) = 0$ ha $i < k$.

A Poincaré-féle dualitás tétel és az univerzális együttható formula miatt $H_i(W, \partial W; F) \cong H^{2k+2-i}(W; F) \cong \operatorname{Hom}(H_{2k+2-i}(W; F), F) \cong H_{2k+2-i}(W; F)$. (Az utolsó izomorfizmus nem kanonikus.)

Ezért az előző lemmát alkalmazva, az előjelek figyelmen kívül hagyásával azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{rk} h \equiv \dim H_k(\partial W; F) + \sum_{i=0}^{2k+2} \dim H_i(W; F) \pmod 2.$$

$\operatorname{rk} h$ páros, mert $\operatorname{rk} h = \operatorname{rk} B$. Ugyanis B rangja annak a $b : H_{k+1}(W; F) \to \operatorname{Hom}(H_{k+1}(W; F), F)$ leképezésnek a rangja, ami egy μ homológiaosztályhoz a $\nu \mapsto \mu \cdot \nu$ homomorfizmust rendeli. Ez pedig nem más, mint a következő kompozíció:

$$H_{k+1}(W;F) \xrightarrow{h} H_{k+1}(W,\partial W;F) \xrightarrow{D} H^{k+1}(W;F) \xrightarrow{g} \operatorname{Hom}(H_{k+1}(W;F),F)$$

Itt a Poincaré-dualitás és az univerzális együttható formula miatt D és g izomorfizmus, ezért $\operatorname{rk} h = \operatorname{rk}(g \circ D \circ h) = \operatorname{rk} b$.

W homotopikusan ekvivalens azzal a térrel, amit úgy kapunk M-ből, hogy hozzáragasztjuk D^{k+1}-et a $\varphi\big|_{S^k \times \{0\}} : S^k \to M$ leképezéssel. M egy páratlan dimenziós zárt sokaság, ezért az Euler-karakterisztikája 0, tehát $\chi(W) = (-1)^{k+1}$. Mivel $\chi(W) = \sum_{i=0}^{2k+2} (-1)^i \dim H_i(W; F)$,

$$\sum_{i=0}^{2k+2} \dim H_i(W; F) \equiv 1 \pmod 2.$$

Tehát $\dim H_k(\partial W; F) = \dim H_k(M; F) + \dim H_k(M'; F)$ páratlan. Tehát $\dim H_k(M; F) \neq \dim H_k(M'; F)$. □

A következő esetben legyen M pereme egy homotopikus gömb, $M' = \chi(M, \varphi)$ az M egy átépítése, és W az M és M' közötti kobordizmus. Legyen $B : H_{k+1}(W; F) \times H_{k+1}(W; F) \to F$ a metszési szám.

20. Lemma. *Ha* $\operatorname{rk} B$ *páros, akkor* $\dim H_k(M'; F) \neq \dim H_k(M; F)$.

Bizonyítás. A 9. állításban leírt konstrukciót alkalmazzuk: legyen M_* az a topologikus sokaság, amit úgy kapunk, hogy M peremére ragasztunk egy D^{2k+1} golyót, M'_*-ot ugyanígy kapjuk M'-ből, W_* a köztük lévő kobordizmus. Legyen $B_* : H_{k+1}(W_*; F) \times H_{k+1}(W_*; F) \to F$ a W_*-beli metszési szám. A (W_*, W) pár egzakt sorozatát felírva azt látjuk, hogy a beágyazás egy $H_{k+1}(W; F) \cong H_{k+1}(W_*; F)$ izomorfizmust indukál. Ebből következik, hogy $\operatorname{rk} B_* = \operatorname{rk} B$ páros. Ezért az előző lemma szerint $\dim H_k(M'_*; F) \neq \dim H_k(M_*; F)$. Viszont az (M_*, M) pár egzakt sorozatát felírva azt látjuk, hogy $H_k(M; F) \cong H_k(M_*; F)$, ebből következik, hogy $\dim H_k(M; F) = \dim H_k(M_*; F)$. Hasonlóan kijön, hogy $\dim H_k(M'; F) = \dim H_k(M'_*; F)$. Ezeket összerakva azt kapjuk, hogy $\dim H_k(M'; F) \neq \dim H_k(M; F)$. □

Ahhoz, hogy ezeket a lemmákat alkalmazhassuk, szükségünk lesz a következőre:

21. Lemma. *Ha* V *véges dimenziós vektortér* F *felett,* $B : V \times V \to F$ *olyan bilineáris függvény, amire* $B(v, v) = 0$ *minden* $v \in V$ *esetén, akkor* $\operatorname{rk} B$ *páros.*

Bizonyítás. Legyen $\dim V = m$, és B mátrixa egy rögzített bázisban $(b_{ij})_{i,j=1}^m$. B antiszimmetrikus, mert minden $v_1, v_2 \in V$-re $B(v_1, v_2) = B(v_1 + v_1, v_2 + v_2) - B(v_1, v_1) - B(v_2, v_2) - B(v_2, v_1) = -B(v_2, v_1)$, tehát $b_{ij} = -b_{ji}$.

Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy $\operatorname{rk} B = r$ páratlan.

B legnagyobb nemszinguláris részmátrixa $r \times r$-es, feltehetjük, hogy ez $(b_{ij})_{i,j=1}^{r}$. Ennek a determinánsa $\sum_{\pi \in S_r} (-1)^{\operatorname{sgn} \pi} \prod_{i=1}^{r} b_{i,\pi(i)}$.

Ha a π permutációnak van fixpontja, akkor $\prod_{i=1}^{r} b_{i,\pi(i)} = 0$, mert ha i fixpont, akkor $b_{i,\pi(i)} = 0$.

Ha π-nek nincs fixpontja, akkor $\pi \neq \pi^{-1}$ mert r páratlan, és így π nem állhat csupa 2 hosszú ciklusból. Ezért az ilyen permutációkat párba állíthatjuk az inverzükkel, és egy ilyen párra

$$(-1)^{\operatorname{sgn} \pi} \prod_{i=1}^{r} b_{i,\pi(i)} + (-1)^{\operatorname{sgn} \pi^{-1}} \prod_{i=1}^{r} b_{i,\pi^{-1}(i)} = (-1)^{\operatorname{sgn} \pi} \left[\prod_{i=1}^{r} b_{i,\pi(i)} + \prod_{i=1}^{r} b_{\pi(i),i} \right] =$$
$$= (-1)^{\operatorname{sgn} \pi} \left[\prod_{i=1}^{r} b_{i,\pi(i)} + (-1)^{r} \prod_{i=1}^{r} b_{i,\pi(i)} \right] = 0$$

Tehát a determináns nem 0 tagjai párokba állíthatók úgy, hogy egy pár összege 0. Tehát a determináns értéke 0, ez pedig ellentmond annak, hogy $(b_{ij})_{i,j=1}^{r}$ nemszinguláris. □

Páros k esetén az eddig szerepelt lemmákból már összerakható a bizonyítás:

22. Tétel. *Ha k páros, akkor $bP_{2k+1} = 0$.*

Bizonyítás. Legyen M egy $(2k+1)$-dimenziós s-parallelizálható sokaság, aminek a határa, $\partial M \in \Theta_{2k}$ egy homotopikus gömb. Bebizonyítjuk, hogy ekkor $\partial M = S^{2k}$. És mivel ez tetszőleges M-re igaz lesz, ez azt jelenti, hogy bP_{2k+1} egyetlen eleme S^{2k} (diffeomorfizmus erejéig).

A 15. tétel szerint M-et át tudjuk építeni $(k-1)$-szeresen összefüggővé, a 17. lemma szerint pedig azt is feltehetjük, hogy $H_k(M)$ véges.

Vegyünk egy 0-tól különböző $\lambda \in H_k(M)$ elemet, ennek egy φ reprezentánsával készítsük el az $M' = \chi(M, \varphi)$ sokaságot. Legyen W az M és M' közötti kobordizmus, $B : H_{k+1}(W; Q) \times H_{k+1}(W; Q) \to Q$ a két homológiaosztályhoz a metszési számukat rendelő leképezés. $k+1$ páratlan, ezért B antiszimmetrikus. A 21. lemma miatt ebből következik, hogy B rangja páros.

A 20. lemma szerint $\dim H_k(M'; Q) \neq \dim H_k(M; Q)$, azaz $\operatorname{rk} H_k(M') \neq \operatorname{rk} H_k(M)$, tehát $H_k(M')$ végtelen. A 16. lemma szerint viszont $H_k(M)/\langle \lambda \rangle \cong H_k(M')/\langle i'_*(\varepsilon') \rangle$, ez pedig véges, mert $H_k(M)$ is az. Ezért $H_k(M') \cong Z \oplus T$ alakban írható, ahol T véges, és $i'_*(\varepsilon') \neq 0$ a Z komponensben van. Ezért

$$|T| \leq |H_k(M')/ \langle i'_*(\varepsilon') \rangle| = |H_k(M)/ \langle \lambda \rangle| < |H_k(M)|$$

Ha M'-re alkalmazzuk a 17. lemmát, akkor egy olyan M'' sokaságot kapunk, amire $H_k(M'') \cong T$ egy $H_k(M)$-nél szigorúan kisebb elemszámú csoport.

Ezzel az eljárással tehát sikerült csökkentenünk $H_k(M)$ méretét. Ezt egészen addig ismételjük, amíg egy olyan $\hat{M}$ sokaságot kapunk, amire $H_k(\hat{M}) = 0$. A 6. tétel szerint $\hat{M} \approx D^{2k+1}$. Mivel az átépítések során a perem nem változott, $\partial M \approx \partial \hat{M} \approx S^{2k}$. $\square$

A továbbiakban legyen k páratlan. Ebben az esetben is azt fogjuk belátni, hogy bP_{2k+1} triviális. A 17. lemmáig minden ugyanúgy működik, mint páros k esetén, tehát feltehetjük, hogy M $(k-1)$-szeresen összefüggő, és $H_k(M)$ véges. Nézzük meg, hogy páratlan k esetén hogyan lehet tovább csökkenteni a véges $H_k(M)$ csoportot.

Válasszunk ki egy $\lambda \in H_k(M)$, $\lambda \neq 0$ homológiaosztályt, és annak egy, a 13. lemma alapján konstruált φ reprezentánsát. Ebből kiindulva definiáljuk M_0-t, ε-t, ε'-t ugyanúgy, mint korábban. Legyen λ rendje l. Ekkor $0 = l\lambda = li_*(\varepsilon) = i_*(l\varepsilon)$. Mivel $H_k(M) \cong H_k(M_0)/ \langle \varepsilon' \rangle$, és az izomorfizmust i_* indukálja, ez azt jelenti, hogy $l\varepsilon \in \langle \varepsilon' \rangle$, tehát $l\varepsilon = l'\varepsilon'$ valamilyen l'-re.

23. Lemma. *Ha l nem osztója l'-nek, akkor van olyan α, hogy φ-t a 13. lemmában leírt módon α-val módosítva olyan reprezentánst kapunk, amiből ha elkészítjük az M'_α átépített sokaságot, az s-parallelizálható lesz (az átépítés tüskézett), és $|H_k(M'_\alpha)| < |H_k(M)|$.*

Bizonyítás. A 13. lemma bizonyítása alapján M'_α s-parallelizálhatóságát olyan α választásával tudjuk biztosítani, amire $s_*([\alpha]) = [\tilde{g}]^{-1} \in \pi_k(SO_{2k+2})$. Mivel φ-t eleve a 13. lemmával konstruáltuk, ezért $[\tilde{g}] = 0$, tehát olyan α kell, amire $s_*([\alpha]) = 0$, azaz $[\alpha] \in \operatorname{Ker} s_*$.

Legyenek $s_1 : SO_{k+1} \to SO_{k+2}$ és $s_2 : SO_{k+2} \to SO_{2k+2}$ a beágyazások, ekkor $s = s_2 \circ s_1$, és ezért $s_* = (s_2)_* \circ (s_1)_*$. Tudjuk, hogy $(s_2)_* : \pi_k(SO_{k+2}) \to \pi_k(SO_{2k+2})$ izomorfizmus, ezért $\operatorname{Ker} s_* = \operatorname{Ker}(s_1)_*$.

Az $SO_{k+2} \xrightarrow{SO_{k+1}} S^{k+1}$ fibrálás egzakt sorozata:

$$\pi_{k+1}(S^{k+1}) \xrightarrow{\delta} \pi_k(SO_{k+1}) \xrightarrow{(s_1)_*} \pi_k(SO_{k+2})$$

Ezért $\mathrm{Ker}(s_1)_* = \mathrm{Im}\,\delta$. Tehát olyan α-t keresünk, amire $[\alpha] \in \mathrm{Im}\,\delta$.

Egy ilyen α-val készítsük el M'_α-t, és nézzük meg, hogy mi lesz $H_k(M'_\alpha)$. Ehhez a 16. lemmát akarjuk alkalmazni.

$M_0 = M \setminus \varphi(S^k \times \mathrm{int}\, D^{k+1}) = M \setminus \varphi_\alpha(S^k \times \mathrm{int}\, D^{k+1})$ nem változik. Jelölje i'_α az $M_0 \to M'_\alpha$ beágyazást. A $\varphi_\alpha(\{x\} \times S^k)$-nak megfelelő homológiaosztály M_0-ban ugyanaz, mint a $\varphi(\{x\} \times S^k)$-nak megfelelő, azaz ε'. A 16. lemma szerint tehát $H_k(M)/\left<\lambda\right> \cong H_k(M'_\alpha)/\left<(i'_\alpha)_*(\varepsilon')\right>$.

$H_k(M'_\alpha)$ tehát akkor lesz kisebb elemszámú, ha $|\left<(i'_\alpha)_*(\varepsilon')\right>| < |\left<\lambda\right>| = l$. Meg kell tehát határoznunk $(i'_\alpha)_*(\varepsilon')$ rendjét.

Legyen a $\varphi_\alpha(S^k \times \{x\})$-nek megfelelő homológiaosztály ε_α. Ekkor $(i'_\alpha)_*(\varepsilon_\alpha) = 0$.

Azt is tudjuk, hogy $\varepsilon_\alpha = \varepsilon + j_*([\alpha])\varepsilon'$, ahol $j_* : \pi_k(SO_{k+1}) \to \pi_k(S^k) \cong Z$ a $j : SO_{k+1} \to S^k$ projekció által indukált homomorfizmus.

Ezért $(l' + lj_*([\alpha]))\varepsilon' = l'\varepsilon' + l(\varepsilon_\alpha - \varepsilon) = l\varepsilon_\alpha$, mert $l\varepsilon = l'\varepsilon'$. Tehát $(l' + lj_*([\alpha]))(i'_\alpha)_*(\varepsilon') = (i'_\alpha)_*((l' + lj_*([\alpha]))\varepsilon') = (i'_\alpha)_*(l\varepsilon_\alpha) = 0$.

Tehát $(i'_\alpha)_*(\varepsilon')$ rendje $(l' + lj_*([\alpha]))$, ezért ha $0 < |l' + lj_*([\alpha])| < l$, akkor sikerült $H_k(M)$ méretét csökkenteni.

Mivel $j_*(\mathrm{Im}\,\delta) = 2Z$ (itt használjuk, hogy k páratlan), ezért $l' + lj_*([\alpha])$ tetszőleges értéket felvehet, ami kongruens l'-vel modulo $2l$ (olyan α választása mellet, amivel M'_α is s-parallelizálható lesz). Mivel l nem osztója l'-nek, ezért meg tudjuk választani α-t úgy, hogy $H_k(M)$ mérete csökkenjen. $\square$

Tehát ha van olyan $\lambda \in H_k(M)$, amire a fenti módon definiált l nem osztja l'-t, akkor tudjuk csökkenteni $H_k(M)$ méretét. Nézzük meg, hogy fordulhat elő az, hogy nincs ilyen λ.

24. Lemma. *Ha minden λ esetén l osztója l'-nek, akkor $2H_k(M) = 0$.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy minden λ esetén $L(\lambda, \lambda) = 0$. ($L : H_k(M) \times H_k(M) \to Q/Z$ a hurkolódási szám.)

Válasszunk egy tetszőleges λ-t, annak egy φ reprezentánsát, ahhoz definiáljuk M_0-t, ε-t, ε'-t.

Legyen $C_k(M_0)$-ban ε és ε' egy-egy reprezentáns ciklusa e és e'. $l\varepsilon - l'\varepsilon' = 0$, ezért van egy olyan c lánc $C_{k+1}(M_0)$-ban, aminek a határa $le - l'e'$. Legyen c_1 a $\varphi(\{x\} \times D^{k+1})$-nek megfelelő lánc $C_{k+1}(M)$-ben, ekkor $\partial c_1 = e'$ ($C(M_0)$-t $C(M)$ részhalmazának tekintjük). Ezért $\partial(c - l'c_1) = le$.

Mivel M-ben $i_*(\varepsilon) = \lambda$, ezért e a λ egy reprezentánsa, ezért $L(\lambda, \lambda) = \frac{1}{l}[(c - l'c_1)] \cdot \lambda = \frac{l'}{l}[c_1] \cdot \lambda = 0$, mert $[c] \cdot \lambda = 0$ (hiszen c M_0-beli, és így diszjunkt $\varphi(S^k \times \{0\})$-tól, λ reprezentánsától), és $\frac{l'}{l}$ egész.

Tehát $L(\lambda, \lambda) = 0$.

Ezért tetszőleges $\lambda, \mu \in H_k(M)$ esetén $2L(\lambda, \mu) = L(\lambda, \mu) + L(\mu, \lambda) = L(\lambda + \mu, \lambda + \mu) - L(\lambda, \lambda) - L(\mu, \mu) = 0$.

Tehát tetszőleges λ esetén minden μ-re $L(2\lambda, \mu) = 0$, ebből pedig, mivel L nemelfajuló, következik, hogy $2\lambda = 0$. $\square$

Tehát már csak azt kéne megoldani, hogy hogyan lehet csökkenteni $H_k(M)$ méretét akkor, ha $2H_k(M) = 0$. Lényegében erről szól a következő tétel bizonyítása:

25. Tétel. *Ha k páratlan, akkor $bP_{2k+1} = 0$.*

Bizonyítás. Legyen M egy $(2k + 1)$-dimenzió s-parallelizálható sokaság, aminek a pereme egy homotopikus gömb. A 15. tétel szerint feltehetjük, hogy M $(k - 1)$-szeresen összefüggő, a 17. lemma szerint pedig azt, hogy $H_k(M)$ véges. A 23. lemma alapján ha van olyan λ, amire l nem osztja l'-t, akkor tudjuk csökkenteni $H_k(M)$ méretét.

Ha nincs ilyen λ, akkor az előző lemma szerint $2H_k(M) = 0$, vagyis $H_k(M) \cong Z_2 \oplus \cdots \oplus Z_2 = sZ_2$. Nézzük meg, hogy mi történik, ha kiválasztjuk $H_k(M)$ egy nem 0 elemét, és annak egy reprezentánsával végrehajtunk egy átépítést. Legyen M' az átépített sokaság. A 16. lemma szerint $H_k(M)/Z_2 \cong H_k(M')/\langle i'_*(\varepsilon')\rangle$. A 23. lemmában láttuk, hogy $i'_*(\varepsilon')$ rendje a reprezentáns megfelelő választásával tetszőleges l'-vel kongruens érték lehet modulo $2l$. Most $l = 2$, és l' páros, ezért elérhetjük, hogy $i'_*(\varepsilon')$ rendje 0 vagy 2 legyen.

Tehát $H_k(M)/Z_2 \cong H_k(M')/Z_2$ vagy $H_k(M)/Z_2 \cong H_k(M')/Z$. Mivel $H_k(M)/Z_2 \cong (s - 1)Z_2$, ez azt jelenti, hogy $H_k(M')$ a következő csoportok közül valamelyik:

$$sZ_2, \quad Z_4 \oplus (s-2)Z_2, \quad Z \oplus (s-1)Z_2, \quad Z \oplus (s-2)Z_2.$$

(A következő rész a Steenrod-operációk és a Wu formula Milnor, Stasheff [8]-ban megtalálható leírására támaszkodik:)

Legyen W az M és M' közötti kobordizmus. A 20. lemmát szeretnénk alkalmazni (Z_2-beli együtthatókkal). A 21. lemma alapján ehhez az kéne, hogy minden $\beta \in H_{k+1}(W; Z_2)$ esetén $\beta \cdot \beta = 0$, azaz (a duálisokra áttérve) minden $x \in H^{k+1}(W, \partial W; Z_2)$ esetén $x \cup x = 0$. Ez pedig azzal ekvivalens, hogy a Steenrod-féle

$$Sq^{k+1} : H^{k+1}(W, \partial W; Z_2) \to H^{2k+2}(W, \partial W; Z_2)$$

leképezés 0.

Nézzük a $h_i : H^{2k+2-i}(W, \partial W; Z_2) \to Z_2$, $h_i(x) = Sq^i(x)[W]$ homomorfizmust ($Sq^i(x) \in H^{2k+2}(W, \partial W; Z_2)$ kiértékelve W fundamentális homológiaosztályán). Az univerzális együttható formula és a Poincaré-dualitás miatt egyértelműen létezik egy $\gamma_i \in H_{2k+2-i}(W, \partial W; Z_2)$ homológiaosztály, amire $h_i(x) = \langle x, \gamma_i \rangle$ minden x-re. Legyen γ_i duálisa $v_i \in H^i(W; Z_2)$, az i. Wu-osztály, erre teljesül, hogy minden $x \in H^{2k+2-i}(W, \partial W; Z_2)$-re $h_i(x) = (x \cup v_i)[W]$, tehát $Sq^i(x) = x \cup v_i$.

Legyen $v = 1 + v_1 + \cdots + v_{2k+2} \in H^*(W; Z_2)$ a teljes Wu-osztály, $Sq = Sq^0 + \cdots + Sq^{2k+2}$ a teljes Steenrod négyzet operáció, és $w = 1 + w_1 + \cdots + w_{2k+2}$ W teljes Stiefel-Whitney osztálya.

A Wu-formula (egyik alakja) szerint $Sq(v) = w$. Mivel W parallelizálható, ezért $w = 1$, tehát $v = 1$. Ez pedig azt jelenti, hogy $v_{k+1} = 0$, azaz minden $x \in H^{k+1}(W, \partial W; Z_2)$-re $Sq^{k+1}(x) = x \cup v_{k+1} = 0$. Tehát $Sq^{k+1} = 0$.

Ezek szerint alkalmazhatjuk a 20. lemmát, $\dim H_k(M'; Z_2) \neq \dim H_k(M; Z_2)$. Mivel $H_{k-1}(M') = 0$, az univerzális együttható formula miatt $H_k(M'; Z_2) \cong H_k(M') \otimes Z_2$. Ez azt jelenti, hogy $H_k(M')$ már csak $Z_4 \oplus (s-2)Z_2$ vagy $Z \oplus (s-2)Z_2$ lehet. Az előbbi esetben a 23. és a 24. lemma miatt tudjuk csökkenteni $H_k(M')$ méretét, az utóbbi esetben pedig a 17. lemma alkalmazásával kaphatunk egy olyan M'' sokaságot, amire $H_k(M'') \cong (s-1)Z_2$.

Tehát $H_k(M)$ méretét akkor is tudjuk csökkenteni, ha $2H_k(M) = 0$. Ezért véges sok lépés után kapunk egy k-szorosan összefüggő sokaságot, a 6. tétel miatt ez diffeomorf D^{2k+1}-gyel. Mivel a sokaság pereme az átépítések során nem változik, ezért a kiindulási sokaság pereme is csak S^{2k} lehetett. Tehát bP_{2k+1} egyetlen eleme S^{2k}. $\square$

3.2.2. bP_{2k} véges

Legyen $k \geq 3$ és M $2k$-dimenziós, $(k-1)$-szeresen összefüggő sokaság. Az előző esethez hasonlóan most is megpróbáljuk átépítésekkel megölni $H_k(M)$-et. Ez azonban nem fog tetszőleges M-re sikerülni, a 28. lemma ad majd elégséges feltételt. A következő két lemma ezt készíti elő.

26. Lemma. *Ha M $(k-1)$-szeresen összefüggő $2k$-dimenziós sokaság, $k \geq 3$, akkor minden $\lambda \in H_k(M)$ homológiaosztály reprezentálható egy $\varphi_0 : S^k \to M$ beágyazással.*

Bizonyítás. (ld. Milnor [5], Lemma 6.)

A Hurewicz-tétel szerint $H_k(M) \cong \pi_k(M)$, ezért $H_k(M)$ tetszőleges eleme reprezentálható $f : S^k \to M$ leképezéssel. Whitney tétele alapján feltehetjük, hogy f immerzió, és csak véges sok dupla pontja van, azaz az $\{a_1, a_1', \ldots, a_m, a_m'\}$ pontokon kívül injektív, és az $f(a_1) = f(a_1'), \ldots, f(a_m) = f(a_m')$ értékek egymástól és a többi helyen felvett értékektől különböznek. Ekkor van olyan közös környezete a_1-nek és a_1'-nek, ami $f(a_1) = f(a_1')$-nek egy R^{2k}-val diffeomorf környezetébe képződik. Erre alkalmazhatjuk a Whitney-trükköt, ezzel eltüntetve a dupla pontot. Ha ugyanezt megcsináljuk a többi dupla ponttal is, kapunk egy megfelelő beágyazást. □

Legyen $B : H_k(M) \times H_k(M) \to Z$ a homológiák metszési száma által megadott bilineáris leképezés.

27. Lemma. *$H_k(M)$ szabad Abel-csoport és* $|\det B| = 1$

Bizonyítás. ∂M homotopikus $(2k-1)$-gömb, ezért $(M, \partial M)$ egzakt sorozatából, a Poincaré-dualitásból és az univerzális együttható formulából a következő izomorfizmusokat kapjuk:

$$H_k(M) \cong H_k(M, \partial M) \cong H^k(M) \cong Hom(H_k(M), Z).$$

Tehát $H_k(M)$ szabad Abel-csoport.

Vegyük $H_k(M)$ egy $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ szabad generátorrendszerét (bázisát). Ekkor $Hom(H_k(M), Z)$-nek definiálhatjuk két bázisát: az egyik $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*$, ahol $\lambda_i^*(\lambda_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} a Kronecker-delta), a másik $B(\lambda_1, \cdot), B(\lambda_2, \cdot), \ldots, B(\lambda_m, \cdot)$, a λ-k Poincaré-duálisainak megfelelő homomorfizmusok. B mátrixa pont a két bázis közti áttérési mátrix, ezért invertálható, és B^{-1} is egész elemű. Viszont mivel $\det B^{-1} = (\det B)^{-1}$, ez csak úgy lehet, ha $|\det B| = 1$. □

Definíció. $H_k(M)$ egy $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r)$ bázisa szimplektikus, ha minden i, j-re $\lambda_i \cdot \lambda_j = \mu_i \cdot \mu_j = 0$ és $\lambda_i \cdot \mu_j = \delta_{ij}$.

28. Lemma. *Ha M $(k-1)$-szeresen összefüggő, $H_k(M)$-nek van egy szimplektikus bázisa és minden olyan M-be beágyazott gömbnek triviális a normálnyalábja, ami $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_r \rangle$ egy elemét reprezentálja, akkor $H_k(M)$ átépítésekkel megölhető.*

Bizonyítás. A 26. lemma szerint λ_r reprezentálható egy $\varphi_0 : S^k \to M$ beágyazással. Ekkor $\varphi_0(S^k)$ normálnyalábja triviális, ezért egy csőszerű környezete diffeomorf $S^k \times D^k$-val, legyen $\varphi : S^k \times D^k \to M$ ez a diffeomorfizmus ($\varphi\big|_{S^k \times \{0\}} = \varphi_0$). Készítsük el az $M' = \chi(M, \varphi)$ átépített sokaságot. Legyen $\varphi' : D^{k+1} \times S^{k-1} \to M'$ a standard beágyazás. Legyen $M_0 = M \backslash \varphi(S^k \times \operatorname{int} D^k) = M' \backslash \varphi'(\operatorname{int} D^{k+1} \times S^{k-1})$, a beágyazásai $i : M_0 \to M$ és $i' : M_0 \to M'$.

A 14. lemma szerint M' $(k-2)$-szeresen összefüggő lesz.

Az (M, M_0) pár egzakt sorozata:

$$H_{k+1}(M, M_0) \longrightarrow H_k(M_0) \xrightarrow{i_*} H_k(M) \xrightarrow{\cdot \lambda_r}$$
$$\xrightarrow{\cdot \lambda_r} H_k(M, M_0) \xrightarrow{\delta_k} H_{k-1}(M_0) \longrightarrow H_{k-1}(M) = 0$$

Ahol a kivágási tétel alapján

$$H_j(M, M_0) \cong H_j(\varphi(S^k \times D^k), \varphi(S^k \times S^{k-1})) \cong \begin{cases} Z & \text{ha } j = k \\ 0 & \text{ha } j \neq k \end{cases}$$

Tehát $H_{k+1}(M, M_0) = 0$, ezért $i_* : H_k(M_0) \to H_k(M)$ injektív. $(\cdot \lambda_r) : H_k(M) \to H_k(M, M_0) \cong Z$ egy homológiaosztályhoz a λ_r-rel vett metszési számát rendeli, ezért $\operatorname{Ker}(\cdot \lambda_r) = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_{r-1} \rangle$. Ebből következik, hogy i_* izomorfizmus $H_k(M_0)$ és $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_{r-1} \rangle$ között.

$(\cdot \lambda_r)$ szürjektív, mert $\lambda_r \cdot \mu_r = 1$, ezért $\delta_k = 0$. Tehát $H_{k-1}(M_0) = 0$.

Az (M', M_0) pár egzakt sorozata:

$$H_{k+1}(M', M_0) \xrightarrow{\delta'_{k+1}} H_k(M_0) \xrightarrow{i'_*} H_k(M') \longrightarrow H_k(M', M_0) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_{k-1}(M_0) \longrightarrow H_{k-1}(M') \longrightarrow H_{k-1}(M', M_0)$$

Megint a kivágási tételből következik, hogy

$$H_j(M', M_0) \cong H_j(\varphi'(D^{k+1} \times S^{k-1}), \varphi'(S^k \times S^{k-1})) \cong \begin{cases} Z & \text{ha } j = k+1 \\ 0 & \text{ha } j \neq k+1 \end{cases}$$

Ezért $H_k(M', M_0) = H_{k-1}(M', M_0) = 0$, tehát $H_{k-1}(M') \cong H_{k-1}(M_0) = 0$, azaz M' is $(k-1)$-szeresen összefüggő.

Másrészt pedig $H_k(M', M_0) = 0$, ezért i'_* szürjektív, ami azt jelenti, hogy $H_k(M') \cong H_k(M_0)/\operatorname{Im}\delta'_{k+1}$. $H_{k+1}(M', M_0)$ egy generátora a $\varphi'(D^{k+1} \times \{x\})$-nek megfelelő homológiaosztály ($x \in S^{k-1}$ tetszőleges), ezért $\operatorname{Im}\delta'_{k+1}$ egy generátora a $\varphi'(S^k \times \{x\})$-nek megfelelő homológiaosztály $H_k(M_0)$-ban, ami nem más, mint $i_*^{-1}(\lambda_r)$. Tehát $H_k(M') \cong \langle \lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_{r-1} \rangle / \langle \lambda_r \rangle$, és az izomorfizmust $i'_* \circ i_*^{-1}$ indukálja.

Tehát sikerült $H_k(M)$ rangját 2-vel csökkenteni. Ahhoz, hogy ezt az eljárást alkalmazhassuk M'-re is, le kell ellenőriznünk, hogy erre is teljesülnek a lemma feltételei.

Legyen $i'_*(i_*^{-1}(\lambda_j)) = \lambda'_j$, $i'_*(i_*^{-1}(\mu_j)) = \mu'_j \in H_k(M')$ $(j = 1, \dots, r-1)$. Az előbbiek szerint ez egy bázisa $H_k(M')$-nek, belátjuk, hogy szimplektikus. Ehhez az kell, hogy bármely két báziselem metszési száma ugyanannyi, mint $H_k(M)$ megfelelő báziselemeié. Legyen tehát $\eta_1, \eta_2 \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, \mu_1, \dots, \mu_{r-1}\}$. Ekkor $i_*^{-1}(\eta_1)$, $i_*^{-1}(\eta_2) \in H_k(M_0)$ reprezentálhatóak M_0-ba beágyazott gömbökkel (26. lemma). Ezek egyben reprezentánsai η_1-nek és η_2-nek, ezért a metszési számuk $\eta_1 \cdot \eta_2$. Másrészt reprezentánsai η'_1-nek és η'_2-nek is, és ebből következik, hogy $\eta_1 \cdot \eta_2 = \eta'_1 \cdot \eta'_2$.

Ezenkívül le kell ellenőriznünk, hogy ha $b : S^k \to M'$ egy $\langle \lambda'_1, \dots, \lambda'_{r-1} \rangle$-beli homológiaosztályt reprezentál, akkor a normálnyalábja triviális. Legyen $p : D^{k+1} \times S^{k-1} \to D^{k+1}$ a vetítés. Sard tétele szerint $p((\varphi')^{-1}(b(S^k)))$ nullmértékű, ezért van olyan $x \in D^{k+1}$, hogy $b(S^k) \cap \varphi'(\{x\} \times S^{k-1}) = \emptyset$. $M_0 \setminus \varphi'(S^k \times S^{k-1})$ diffeomorf $M' \setminus \varphi'(\{x\} \times S^{k-1})$-el, sőt, olyan diffeomorfizmus is van köztük, ami izotóp $id_{M_0 \setminus \varphi'(S^k \times S^{k-1})}$-el, ezért $b : S^k \to M' \setminus \varphi'(\{x\} \times S^{k-1})$ izotóp egy $b_0 : S^k \to M_0 \setminus \varphi'(S^k \times S^{k-1})$ beágyazással. $b_0(S^k)$ ugyanazt a homológiaosztályt reprezentálja M'-ben, mint $b(S^k)$, és az izotópia miatt a normálnyalábjuk izomorf. Elég tehát azt belátnunk, hogy $b_0(S^k)$ normálnyalábja triviális.

$b_0(S^k)$ egy olyan $\gamma \in H_k(M_0)$ homológiaosztályt reprezentál, amire $i'_*(\gamma) \in \left\langle \lambda'_1, \ldots, \lambda'_{r-1} \right\rangle$, ezért $\gamma \in \langle i_*(\lambda_1), \ldots, i_*(\lambda_{r-1}), i_*(\lambda_r) \rangle$. $b_0(S^k)$ egyben reprezentálja az $i_*^{-1}(\gamma) \in H_k(M)$ homológiaosztályt is, ami $\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}, \lambda_r \rangle$-ben van. Ezért a lemma feltétele biztosítja, hogy $b_0(S^k)$ normálnyalábja triviális. $\square$

Ezután esetszétválasztást csinálunk k paritása szerint

Ha k páros

Keresünk olyan sokaságokat, amelyekre tudjuk alkalmazni az előbb bizonyított lemmát. Ehhez először is találnunk kell egy szimplektikus bázist $H_k(M)$-ben.

29. Lemma. *Ha k páros, B szignatúrája $\sigma(M) = 0$, és minden $\lambda \in H_k(M)$-re $\lambda \cdot \lambda$ páros, akkor $H_k(M)$-nek van egy szimplektikus bázisa.*

Bizonyítás. (ld. Milnor [5], Lemma 9.)

Van olyan (nem 0) $\lambda_1 \in H_k(M)$, amire $\lambda_1 \cdot \lambda_1 = 0$ (ld. Milnor [5], Lemma 8.). Feltehetjük, hogy λ_1 nem többszöröse $H_k(M)$ egyetlen elemének sem (mert ha $\lambda_1 = a_1\eta_1 + \cdots + a_m\eta_m$, ahol $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ $H_k(M) \cong Z^m$ egy bázisa, akkor egyszerűsíthetünk $a_1, \ldots, a_m$ legnagyobb közös osztójával).

Ekkor $\operatorname{Im} B(\lambda_1, \cdot) = Z$, ugyanis ha $\operatorname{Im} B(\lambda_1, \cdot) = \langle t \rangle$, akkor minden i-re megcsinálhatjuk a következőt: írjuk fel B mátrixát az $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ bázisban, és ha $\lambda_1 = a_1\eta_1 + \cdots + a_m\eta_m$, akkor az i. oszlopát szorozzuk meg a_i-vel és minden $j \neq i$-re adjuk hozzá a j. oszlop a_j-szeresét. Az így kapott mátrix determinánsa $\pm a_i$, másrészt az i. oszlopban a $\lambda_1 \cdot \eta_j$ értékek állnak, ezért a determináns osztható t-vel. Tehát t minden a_i-t oszt, ezért $t = \pm 1$. Tehát van olyan μ, amire $\lambda_1 \cdot \mu = 1$.

Legyen $\mu_1 = \mu - \frac{\mu \cdot \mu}{2}\lambda_1$ (ez a kifejezés értelmes, mivel $\mu \cdot \mu$ páros). Ekkor $\lambda_1 \cdot \mu_1 = 1$ és $\mu_1 \cdot \mu_1 = 0$. Ezért minden $\eta \in H_k(M)$ egyértelműen felírható $\eta = a\lambda_1 + b\mu_1 + \eta'$ alakban, ahol $\lambda_1 \cdot \eta' = \mu_1 \cdot \eta' = 0$ (nevezetesen $a = -\mu_1 \cdot \eta, b = \lambda_1 \cdot \eta, \eta' = \eta - a\lambda_1 - b\mu_1$). Tehát $H_k(M) = \langle \lambda_1 \rangle \oplus \langle \mu_1 \rangle \oplus G$ ahol $G = \{\eta \mid \lambda_1 \cdot \eta = \mu_1 \cdot \eta = 0\}$.

Ezután már csak G-nek kell meghatároznunk egy szimplektikus bázisát. $B\big|_G$-re is teljesül, hogy a determinánsa ± 1 és a szignatúrája 0 (mert $B\big|_{\langle \lambda_1 \rangle \oplus \langle \mu_1 \rangle}$ determinánsa -1, szignatúrája 0), ezért G-ből kiválaszthatunk egy megfelelő λ_2-t és μ_2-t. Ekkor $G = \langle \lambda_2 \rangle \oplus \langle \mu_2 \rangle \oplus G_2$, ahol G_2 egy G-hez hasonló tulajdonságú részcsoport.

A báziselemek kiválasztását egészen addig folytathatjuk, amíg megkapjuk $H_k(M)$ egy teljes bázisát, ez a bázis pedig szimplektikus lesz. $\square$

30. Lemma. *Ha k páros és a $\varphi_0 : S^k \to M$ beágyazás a $\lambda \in H_k(M)$ homológiaosztályt reprezentálja, akkor*

1. *$\lambda \cdot \lambda$ páros*
2. *$\mathcal{N}\varphi_0(S^k)$ pontosan akkor triviális, ha $\lambda \cdot \lambda = 0$.*

Bizonyítás. (ld. Milnor [5], Lemma 7.)

S^k s-parallelizálható, ezért $\mathcal{T}\varphi_0(S^k) \oplus \varepsilon^1_{\varphi_0(S^k)}$ triviális, M s-parallelizálhatósága miatt pedig $(\mathcal{T}M \oplus \varepsilon^2_M)\big|_{\varphi_0(S^k)} \cong (\mathcal{N}\varphi(S^k) \oplus \varepsilon^1_{\varphi_0(S^k)}) \oplus (\mathcal{T}\varphi_0(S^k) \oplus \varepsilon^1_{\varphi_0(S^k)})$ triviális, tehát $\mathcal{N}\varphi_0(S^k) \oplus \varepsilon^1_{\varphi_0(S^k)}$ is az (1. lemma). Ezért $j_*(\mathfrak{o}(\mathcal{N}\varphi_0(S^k))) = 0$, ahol $j_* : \pi_{k-1}(SO_k) \to \pi_{k-1}(SO_{k+1})$ a beágyazás által indukált homomorfizmus. Mivel k páros, $\operatorname{Ker} j_* \cong Z$, és egy generátora $\mathfrak{o}(\mathcal{T}S^k)$. Tehát $\mathfrak{o}(\mathcal{N}\varphi_0(S^k)) = r\mathfrak{o}(\mathcal{T}S^k)$ valamilyen $r \in Z$-re.

k páros, ezért $\mathcal{T}S^k$ Euler-osztálya $e(\mathcal{T}S^k) = \chi(S^k) = 2$ (a $H^k(S^k) \cong Z$ azonosítás után). Mivel a $\pi_{k-1}(SO_k) \to H^k(S^k) \cong Z$, $\mathfrak{o}(\xi) \mapsto e(\xi)$ leképezés homomorfizmus, ezért $e(\mathcal{N}\varphi_0(S^k)) = re(\mathcal{T}S^k) = 2r$. Tehát $e(\mathcal{N}\varphi_0(S^k))$ páros, és pontosan akkor 0, ha $r = 0$, vagyis ha $\mathfrak{o}(\mathcal{N}\varphi_0(S^k)) = 0$, azaz $\mathcal{N}\varphi_0(S^k)$ triviális. Viszont $\varphi_0(S^k)$ normálnyalábjának Euler-osztálya azonosítható a $\lambda \cdot \lambda$ önmetszési számmal.

Tehát $\lambda \cdot \lambda$ páros, és pontosan akkor 0, ha $\mathcal{N}\varphi_0(S^k)$ triviális. $\square$

Az eddigieket összerakva kapjuk a következőt:

31. Tétel. *Legyen M $2k$-dimenziós s-parallelizálható sokaság, ahol $k > 2$ páros, és ∂M egy homotopikus gömb. Ha $\sigma(M) = 0$, akkor $\partial M \approx S^{2k-1}$.*

Bizonyítás. A 15. tétel szerint M-ből (tüskézett) átépítésekkel kaphatunk egy M' $(k-1)$-szeresen összefüggő sokaságot. Mivel az átépítés nem változtatja meg a szignatúrát, $\sigma(M') = 0$. A 28. lemmát alkalmazzuk, a 26., 30. és 29. lemma biztosítja, hogy a feltételek teljesülnek. Tehát M'-t átépíthetjük egy k-szorosan összefüggő M'' sokasággá. A 6. tételből következik, hogy $\partial M'' \approx S^{2k-1}$, és mivel a perem az átépítések során nem változott, ez azt jelenti, hogy $\partial M \approx S^{2k-1}$. $\square$

Megjegyzés. A 28. lemma alkalmazásakor is elég tüskézett átépítéseket használni. Ugyanis, ahogy azt a 13. lemmában láttuk, ahhoz, hogy mindig találhassunk olyan α-t, amivel módosítva az aktuális φ leképezést tüskézett átépítést kapunk, az kell, hogy $s_* : \pi_{2k}(SO_{2k}) \to \pi_{2k}(SO_{2k+1})$ szürjektív legyen. Ez pedig teljesül, mivel $\pi_{2k}(SO_{2k})$

elemei azonosíthatóak az S^{2k+1} feletti $2k$-dimenziós nyalábokkal, $\pi_{2k}(SO_{2k+1})$ elemei azonosíthatóak az S^{2k+1} feletti $(2k+1)$-dimenziós nyalábokkal, és az s_* leképezésnek a nyalábok között a $\oplus\varepsilon^1_{S^{2k+1}}$ operáció felel meg. Azt pedig tudjuk, hogy minden S^{2k+1} feletti $(2k+1)$-dimenziós nyaláb előáll, mint egy $2k$-dimenziós és egy 1-dimenziós triviális nyaláb összege, hiszen egy ilyen nyaláb Euler-osztálya 0, tehát van sehol sem 0 szelése.

32. Lemma. *Ha $k = 2m$ páros, akkor van olyan $4m$-dimenziós, s-parallelizálható M_0 sokaság, amire $\partial M_0 \approx S^{4m-1}$ és $\sigma(M_0) \neq 0$.*

Bizonyítás. (ld. Milnor, Kervaire [7])

Nézzük a $J_{4m-1} : \pi_{4m-1}(SO) \to \Pi_{4m-1}$ homomorfizmust. $\pi_{4m-1}(SO) \cong Z$, Π_{4m-1} véges, tehát van olyan $\alpha \in \pi_{4m-1}(SO)$, amire $\alpha \neq 0$, de $J_{4m-1}(\alpha) = 0$.

Rögzítsük le a dimenziót, nézzük az $S^{8m} \to S^{4m+1}$ leképezéseket, pontosabban ezek Pontrjagin-sokaságait. A $J_{4m-1}(\alpha) = 0$ feltétel azt jelenti, hogy S^{4m-1} azzal a tüskézéssel, amit a standard tüskézésből α alkalmazása után kapunk, egy nullhomotóp leképezés Pontrjagin-sokasága, tehát nullkobordáns. Vagyis van egy $W \subset R^{8m}_+$ $4m$-dimenziós tüskézett sokaság, aminek a tüskézett pereme S^{4m-1} a szóban forgó tüskézéssel. W-t ragasszuk össze S^{4m-1} mentén $N = S^{4m}_-$-al, így kapunk egy (R^{8m}-be beágyazott) $4m$-dimenziós V sokaságot.

W tüskézett, azaz $\mathcal{N}V\big|_W$ triviális, a trivializálás V-re való kiterjesztésének obstrukciója pont α. A 11. lemma szerint α a $p_m(\mathcal{N}V)$ Pontrjagin-osztály nem-nulla konstansszorosa. Mivel $\alpha \neq 0$, ebből következik, hogy $p_m(\mathcal{N}V) \neq 0$.

$\mathcal{N}W$ triviális, ezért $\mathcal{T}W$ is az (2., 3. lemma). Ezért minden $1 \leq i \leq m$-re $p_i(\mathcal{T}W) = 0$. Nézzük a $j : W \to V$ beágyazást, a (W, V) pár egzakt sorozatából látszik, hogy a kohomológiacsoportokon indukált $j^* : H^i(V) \to H^i(W)$ izomorfizmus, ha $1 \leq i \leq 4m-1$. Ebből következik, hogy $p_i(\mathcal{T}V) = (j^*)^{-1}(p_i(\mathcal{T}W)) = 0$, ha $1 \leq i \leq m-1$. Mivel $\mathcal{T}V \oplus \mathcal{N}V = \varepsilon^{8m}_V$, ezért a Whitney-összeg Pontrjagin-osztályaira vonatkozó formula miatt $p_m(\mathcal{T}V) + p_m(\mathcal{N}V) = 0$. Tehát $p_m(\mathcal{T}V) \neq 0$. A Hirzebruch szignatúra tételből következik, hogy $\sigma(V) \neq 0$.

$\sigma(W) = \sigma(V)$ (ez ugyanúgy látható be, mint a 9. állítás bizonyításában $\sigma(M) = \sigma(M_*)$), tehát $\sigma(W) \neq 0$. W-t úgy definiáltuk, hogy a pereme S^{4m-1} legyen, és láttuk, hogy parallelizálható. Tehát W egy megfelelő M_0. $\square$

Ezután vegyük az összes olyan $4m$ dimenziós, s-parallelizálható sokaságot, aminek a pereme S^{4m-1}, és nézzük ezek szignatúráinak halmazát. Ez részcsoport Z-ben, mert tartalmazza a 0-t (ami $\sigma(D^{4m})$), zárt az ellentettképzésre (ha $\partial M \approx S^{4m-1}$, akkor $\partial(-M) \approx -S^{4m-1} \approx S^{4m-1}$, és $\sigma(-M) = -\sigma(M)$), és zárt az összeadásra. Ugyanis ha $M = M_1 \#_\partial M_2$, akkor $\partial M \approx \partial M_1 \# \partial M_2 \approx S^{4m-1} \# S^{4m-1} \approx S^{4m-1}$, $\sigma(M) = \sigma(M_1) + \sigma(M_2)$, és M is s-parallelizálható. Az előző lemma miatt ez a csoport nem 0, jelölje σ_m a generátorát.

33. Lemma. *Legyen M_1 és M_2 két $4m$-dimenziós s-parallelizálható sokaság, amelyek peremei homotopikus gömbök. $\partial M_1 \approx \partial M_2$ pontosan akkor teljesül, ha $\sigma(M_1) \equiv \sigma(M_2)$ modulo σ_m.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\sigma(M_1) - \sigma(M_2) = t\sigma_m$ valamilyen $t \in Z$-re. Ekkor van egy olyan M_0 s-parallelizálható sokaság, amire $\partial M_0 \approx S^{4m-1}$ és $\sigma(M_0) = t\sigma_m$.

Legyen $M = -M_1 \#_\partial M_2 \#_\partial M_0$. Ekkor $\partial M \approx -\partial M_1 \# \partial M_2 \# \partial M_0 \approx -\partial M_1 \# \partial M_2$, ez egy homotopikus gömb $\sigma(M) = -\sigma(M_1) + \sigma(M_2) + \sigma(M_0)$, és M s-parallelizálható. A 31. tétel szerint $-\partial M_1 \# \partial M_2 \approx S^{2k-1}$, tehát $\partial M_1 \approx \partial M_2$.

Másrészt tegyük fel, hogy $\partial M_1 \approx \partial M_2$. Ekkor $M = -M_1 \#_\partial M_2$ s-parallelizálható és a pereme $-\partial M_1 \# \partial M_2 \approx S^{4m-1}$. Ezért a szignatúrája a σ_m által generált részcsoportban van, tehát $\sigma(M) = -\sigma(M_1) + \sigma(M_2)$ osztható σ_m-mel. □

34. Tétel. *bP_{4m} véges.*

Bizonyítás. Legyen $\Sigma \in bP_{4m}$ egy homotopikus gömb, ami határa az M (s-)parallelizálható sokaságnak. Az előző lemma szerint Σ-t (irányítástartó diffeomorfizmus erejéig) meghatározza $\sigma(M) \mod \sigma_m$, ez pedig csak véges sok féle lehet. □

Megjegyzés. Az is látható, hogy bP_{4m} ciklikus.

Ha k páratlan

A következőkben a páratlan k esetét vizsgáljuk. A helyzet hasonló lesz a páros k esetéhez: tudunk definiálni egy invariánst a $(k-1)$-szeresen összefüggő, s-parallelizálható, homotopikus gömb által határolt sokaságokon. Ez az invariáns csak véges sok (2) értéket vehet fel, és látni fogjuk, hogy ha két sokaságra ugyanaz az értéke, akkor azoknak a sokaságoknak a pereme diffeomorf. Ebből következik, hogy bP_{2k} véges.

35. Lemma. *Ha k páratlan, akkor $H_k(M)$-nek van egy szimplektikus bázisa.*

Bizonyítás. Mivel k páratlan, B antiszimmetrikus. Vegyük $H_k(M)$ egy tetszőleges bázisát, λ_1 legyen egy tetszőleges báziselem. Ekkor $\operatorname{Im} B(\lambda_1, \cdot) = Z$ (mert ha $B(\lambda_1, \cdot)$ képe $\langle t \rangle$ valamilyen $t \in Z$-re, akkor a determináns t-vel osztható, és tudjuk, hogy $|\det B| = 1$). Ezért van egy olyan $\mu_1 \in H_k(M)$, amire $\lambda_1 \cdot \mu_1 = 1$. Mivel B antiszimmetrikus, $\lambda_1 \cdot \lambda_1 = \mu_1 \cdot \mu_1 = 0$.

A 29. lemma bizonyításához hasonlóan ebből következik, hogy $H_k(M) = \langle \lambda_1 \rangle \oplus \langle \mu_1 \rangle \oplus G$ ahol $G = \{\eta \mid \lambda_1 \cdot \eta = \mu_1 \cdot \eta = 0\}$. $B\big|_G$ antiszimmetrikus, és a determinánsa ± 1 ezért a báziselemek kiválasztását ugyanígy folytathatjuk G-ben. □

Van két kivételes eset, ezekre nem működik a későbbi konstrukciónk, de ez a tétel mutatja, hogy arra nincs is szükség:

36. Tétel. *Ha $k = 3$ vagy 7, akkor bP_{2k} triviális.*

Bizonyítás. Legyen M egy $2k$-dimenziós parallelizálható sokaság, aminek a pereme egy homotopikus gömb. A 15. tétel szerint M átépíthető egy $(k-1)$-szeresen összefüggő M' sokasággá. Az előző lemma szerint $H_k(M')$-nek van egy szimplektikus bázisa. Mivel S^3 és S^7 parallelizálható, S^k tetszőleges M'-be való beágyazásának normálnyalábja triviális. Ezért alkalmazható a 28. lemma, $H_k(M')$ megölhető átépítésekkel. Így kapunk egy k-szorosan összefüggő sokaságot, a 6. tétel szerint ez diffeomorf D^{2k}-val, tehát a pereme S^{2k-1}. Ezért a kiindulási sokaságunk pereme is $\partial M \approx S^{2k-1}$. Tehát bP_{2k} triviális. □

Definíció. Nevezzünk egy (K, L) CW-komplexus párt egyszerűnek, ha $H^i(K, L; G) = 0$ minden $k < i < 2k$ és G együtthatócsoport esetén.

Definiálni fogunk egy $\psi : H^k(K, L) \to H^{2k}(K, L; \pi_{2k-1}(S^k))$ kohomologikus operációt egyszerű CW-párokra.

Legyen e_0 az S^k gömb bázispontja, és legyen $s \in H^k(S^k, e_0) \cong Z$ egy generátor. Legyen (K, L) egy egyszerű CW-pár, jelölje K r-vázát K^r.

37. Állítás. *Tetszőleges $x \in H^k(K, L)$-hez van olyan $f_x : (K^{2k-1} \cup L, L) \to (S^k, e_0)$ leképezés, amire $f_x^*(s) = x$, és $f_x\big|_{K^{2k-2} \cup L}$ homotópia erejéig egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyen $K(Z,k)$ a következőképpen konstruált CW-komplexus (egy Eilenberg-MacLane tér, aminek minden homotopikus csoportja triviális a k. kivételével, ami Z):

Vegyük S^k-t, és $\pi_{k+1}(S^k)$ egy generátorát, amit az $i_1 : S^{k+1} \to S^k$ leképezés reprezentál. Ragasszunk S^k-ra egy $(k+2)$-cellát az i_1 leképezéssel, ez megöli $[i_1(S^{k+1})]$-et. (Az $(X \cup_i D^l, X)$ pár homotópia egzakt sorozatából látjuk, hogy egy l-cella ragasztása nem változtatja meg az $(l-1)$-nél kisebb dimenziójú homotopikus csoportokat, $\pi_{l-1}(X)$-ben pedig megöli a peremének képe által reprezentált osztályt). Ha $\pi_{k+1}(S^k \cup_{i_1} D_1^{k+2})$ még nem triviális, akkor vegyük ennek is egy $i_2(S^{k+1})$ generátorát, és öljük meg. Ezt egészen addig folytatjuk, amíg egy olyan $S^k \cup_{i_1} D_1^{k+2} \cup_{i_2} D_2^{k+2} \cup \cdots \cup_{i_j} D_j^{k+2}$ CW-komplexust nem kapunk, aminek a $(k+1)$. homotópiacsoportja triviális. Ezután erre $(k+3)$-cellákat ragasztunk, amivel megöljük a $(k+2)$. homotópikus csoportot. A cellák ragasztgatását ugyanígy folytatjuk magasabb dimenziókban. Az így kapott (végtelen dimenziós) CW-komplexus lesz $K(Z,k)$.

Ekkor $H^k(K(Z,k),e_0) = Z$, legyen egy generátora t. Az $i : (S^k, e_0) \to (K(Z,k), e_0)$ beágyazás egy $i^* : H^k(K(Z,k),e_0) \to H^k(S^k, e_0)$ izomorfizmust indukál, feltehetjük, hogy a generátorokat úgy választottuk, hogy $i^*(t) = s$.

Tudjuk, hogy tetszőleges $x \in H^k(K,L)$ előáll $g_x^*(t)$ alakban, ahol $g_x : (K,L) \to (K(Z,k),e_0)$ homotópia erejéig egyértelmű. $g_x\big|_{(K^{k+1}\cup L, L)}$ homotóp egy $h_x : (K^{k+1} \cup L, L) \to (S^k, e_0) \subset (K(Z,k), e_0)$ leképezéssel (mert a $(K(Z,k), S^k)$ pár $(k+1)$-szeresen összefüggő). Ekkor $h_x^*(s) = x$.

Már csak annyit kell tennünk, hogy h_x-et kiterjesztjük egy $(K^{2k-1} \cup L, L) \to (S^k, e_0)$ leképezéssé. Az i-vázra való kiterjesztés obstrukciója a $H^i(K, L; \pi_{i-1}(S^k))$ kohomológiacsoportban van, ami 0, ha $k < i < 2k$. Tehát h_x kiterjed a $(2k-1)$-vázra, a kiterjesztés egy megfelelő f_0.

Induktívan beláthatjuk, hogy minden $\leq i \leq 2k-2$ esetén homotópia erejéig egyetlen olyan i-vázra való kiterjesztés van, ami kiterjed az $(i+1)$-vázra is, ebből következik $f_x\big|_{K^{2k-2}\cup L}$ egyértelműsége. □

Definíció. f_x $2k$-vázra való kiterjesztésének obstrukciója $\psi(x) \in H^{2k}(K, L; \pi_{2k-1}(S^k))$.

Mivel a $(2k-2)$-vázra való kiterjesztés egyértelmű volt, $\psi(x)$ jóldefiniált.

38. Lemma. *Ha (K,L) és (K',L') egyszerű CW-párok, $g : (K',L') \to (K,L)$ és $x \in H^k(K,L)$ tetszőleges, akkor $\psi(g^*(x)) = g^*(\psi(x))$.*

Bizonyítás. Vegyünk egy $f_x : (K^{2k-1} \cup L, L) \to (S^k, e_0)$ leképezést, amire $f_x^*(s) = x$, $\psi(x)$ az f_x kiterjesztésének obstrukciója. g-ről feltehetjük, hogy $(K'^{2k-1} \cup L', L')$-t $(K^{2k-1} \cup L, L)$-be képezi (mert homotóp egy ilyen leképezéssel), legyen $f'_x = g \circ f_x : (K'^{2k-1} \cup L', L') \to (S^k, e_0)$, ekkor $f'^*_x(s) = g^*(x)$. f'_x $K'^{2k} \cup L'$-re való kiterjesztésének obstrukciója $\psi(g^*(x)) = g^*(\psi(x))$. □

Jelölje $i : S^k \to S^k$ az identikus leképezést, $[i, i] \in \pi_{2k-1}(S^k)$ az i homotópiaosztályának önmagával vett Whitehead-szorzatát.

39. Lemma. *Minden $x, y \in H^k(K, L)$-re $\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y) + [i, i](x \cup y)$.*

Bizonyítás. A $K(Z, k)$ tér mintájára konstruálunk egy U CW-komplexust: vegyük az S^k gömböt, erre ragasszunk $2k$-cellákat úgy, hogy megöljük $\pi_{2k-1}(S^k)$-t, majd $(2k + 1)$-cellákat, amivel megöljük a $2k$. homotopikus csoportot, stb.

$H^k(U, e_0) \cong Z$, legyen egy generátora u, feltehetjük, hogy a $j : S^k \to U$ beágyazásra $j^*(u) = s$. U-nak és $U \times U$-nak nincs k-nál nagyobb és $2k$-nál kisebb dimenziós cellája, ezért egyszerűek. Jelölje $1 \in H^0(U) \cong Z$ az egyik generátort. Kiszámoljuk $\psi(u \times 1 + 1 \times u) \in H^{2k}(U \times U; \pi_{2k-1}(S^k))$-t.

$U \times U$ $(2k + 1)$-váza $U^{2k+1} \times e_0 \cup e_0 \times U^{2k+1} \cup S^k \times S^k$, ezért a Mayer-Vietoris sorozat felírásával azt látjuk, hogy

$$H^{2k}(U \times U; \pi_{2k-1}(S^k)) \cong H^{2k}((U \times U)^{2k+1}; \pi_{2k-1}(S^k)) \cong$$
$$\cong H^{2k}(U^{2k+1} \times e_0; \pi_{2k-1}(S^k)) \oplus H^{2k}(e_0 \times U^{2k+1}; \pi_{2k-1}(S^k)) \oplus H^{2k}(S^k \times S^k; \pi_{2k-1}(S^k)) \cong$$
$$\cong H^{2k}(U \times e_0; \pi_{2k-1}(S^k)) \oplus H^{2k}(e_0 \times U; \pi_{2k-1}(S^k)) \oplus H^{2k}(S^k \times S^k; \pi_{2k-1}(S^k)),$$

és $H^{2k}(U \times U; \pi_{2k-1}(S^k))$ vetítése a 3 komponensre j_1^*, j_2^* és j_3^*, ahol j_1, j_2, j_3 a megfelelő beágyazások. Kiszámoljuk $\psi(u \times 1 + 1 \times u)$ vetületeit, ezek már egyértelműen meg fogják határozni $\psi(u \times 1 + 1 \times u)$-t.

Ha a $j_1 : U \times e_0 \to U \times U$ beágyazásra alkalmazzuk a 38. lemmát, azt kapjuk, hogy $j_1^*(\psi(u \times 1 + 1 \times u)) = \psi(j_1^*(u \times 1 + 1 \times u)) = \psi(u \times 1)$.

A $j_2 : e_0 \times U \to U \times U$ beágyazásra ugyanez: $j_2^*(\psi(u \times 1 + 1 \times u)) = \psi(1 \times u)$.

Végül a $j_3 = j \times j : S^k \times S^k \to U \times U$ beágyazásra ($S^k \times S^k$ is egyszerű) $j_3^*(\psi(u \times 1 + 1 \times u)) = \psi(j_3^*(u \times 1 + 1 \times u)) = \psi(s \times 1 + 1 \times s)$. Ez nem más, mint annak az obstrukciója, hogy egy olyan $f : \mathrm{sk}_{2k-1}(S^k \times S^k) = (S^k \times e_0 \cup e_0 \times$

$S^k) \to S^k$ leképezés kiterjed $(S^k \times S^k)$-ra, amire teljesül, hogy $f^*(s) = s \times 1 + 1 \times s$. Az $i \vee i$ leképezés (vagyis ami az (x, e_0) és (e_0, x) pontokhoz x-et rendel minden $x \in S^k$ esetén) ilyen, ennek a homotópiaosztálya, ha $S^k \times S^k$ $2k$-cellájának paramén értelmezett leképezésnek tekintjük, definíció szerint az $[i, i]$ Whitehead-szorzat. Tehát a szóban forgó obstrukció $[i, i](s \times s)$.

Ebből következik, hogy $\psi(u \times 1 + 1 \times u) = \psi(u \times 1) + \psi(1 \times u) + [i, i](u \times u)$.

Most legyen (K, L) egyszerű CW-pár, $x, y \in H^k(K, L)$ tetszőleges. Konstruálunk egy $g_1 : (K, L) \to (U, e_0)$ leképezést, amire $g_1^*(u) = x$. A 37. állítás szerint van egy $f_1 : (K^{k+1} \cup L, L) \to (S^k, e_0)$ leképezés, amire $f_1^*(s) = x$. Úgy kaphatunk egy megfelelő g_1-et, ha f_1-et kiterjesztjük, ezt pedig meg tudjuk csinálni, mivel az i-vázra való kiterjesztés obstrukciója a $H^i(K, L; \pi_{i-1}(U))$ csoportban van, ami $i \leq 2k - 1$ esetén a (K, L)-re vonatkozó feltétel miatt triviális, $i \geq 2k$ esetén pedig azért, mert $\pi_{i-1}(U)) = 0$.

Hasonlóan konstruálhatunk egy $g_2 : (K, L) \to U$ leképezést is, amire $g_2^*(u) = y$. Legyen ezek után $g = g_1 \times g_2 : (K, L) \to (U \times U, e_0 \times e_0)$, erre teljesül, hogy $g^*(u \times 1) = x$ és $g^*(1 \times u) = y$. Alkalmazzuk a 38. lemmát g-re: $\psi(x + y) = \psi(g^*(u \times 1 + 1 \times u)) = g^*(\psi(u \times 1 + 1 \times u)) = g^*(\psi(u \times 1) + \psi(1 \times u) + [i, i](u \times u)) = g^*(\psi(u \times 1)) + g^*(\psi(1 \times u)) + [i, i]g^*((u \times 1) \cup (1 \times u)) = \psi(g^*(u \times 1)) + \psi(g^*(1 \times u)) + [i, i](g^*(u \times 1) \cup g^*(1 \times u)) = \psi(x) + \psi(y) + [i, i](x \cup y)$. □

A továbbiakban legyen k páratlan, és nem 1, 3 vagy 7.

Legyen M $2k$-dimenziós, s-parallelizálható, $(k - 1)$-szeresen összefüggő sokaság. Ekkor $H^i(M, \partial M; G) \cong H_{n-i}(M; G) = 0$, ha $k < i < 2k$ és G tetszőleges, tehát $(M, \partial M)$ egyszerű.

40. Lemma. *Legyen a $\varphi : S^k \to M$ beágyazás a $\lambda \in H_k(M)$ homológiaosztály egy reprezentánsa, λ duálisa $v \in H^k(M, \partial M)$. $\varphi(S^k)$ normálnyalábja pontosan akkor triviális, ha $\psi(v) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi(S^k)$ egy csőszerű környezete N és $M_0 = M \setminus \operatorname{int} N$. Ekkor $(N, \partial N)$ is egyszerű, a kivágási tétel miatt pedig (M, M_0) is. Tekintsük a következő kommutatív diagramot:

$$\begin{array}{ccccc} H^k(N,\partial N) & \cong & H^k(M,M_0) & \longrightarrow & H^k(M,\partial M) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ H^{2k}(N,\partial N;\pi_{2k-1}(S^k)) & \cong & H^{2k}(M,M_0;\pi_{2k-1}(S^k)) & \cong & H^{2k}(M,\partial M;\pi_{2k-1}(S^k)) \end{array}$$

(A baloldali izomorfizmusok a kivágási tételből jönnek, a jobb oldali az $(M, M_0, \partial M)$ hármas egzakt sorozatából.)

Legyen $w \in H^k(N, \partial N) \cong H_k(N) \cong Z$ a $\varphi(S^k)$ által reprezentált homológiaosztály duálisa, ezt a felső sor leképezései $v \in H^k(M, \partial M)$-be viszik. Ezért az alsó sorban $\psi(w)$ megfelelője $\psi(v)$. Az alsó sorban minden kohomológiacsoport izomorf $\pi_{2k-1}(S^k)$-val, és az izomorfizmust a fundamentális homológiaosztályon való kiértékelés adja. Tehát $\psi(w)[N] = \psi(v)[M]$.

A 30. lemmához hasonlóan M és S^k s-parallelizálhatóságából következik, hogy $\mathcal{N}\varphi(S^k) \oplus \varepsilon^1_{\varphi(S^k)}$ triviális. Tehát $\nu = \mathfrak{o}(\mathcal{N}\varphi(S^k)) \in \pi_{k-1}(SO_k)$-t a beágyazás által indukált $j_* : \pi_{k-1}(SO_k) \to \pi_{k-1}(SO_{k+1})$ homomorfizmus 0-ba viszi. Mivel k páratlan, és nem 1, 3 vagy 7, ezért $\operatorname{Ker} j_*$ kételemű, a nemtriviális eleme $\mathfrak{o}(\mathcal{T}S^k)$. Tehát két eset van:

1. $\nu = 0$, vagyis $\mathcal{N}\varphi(S^k)$ triviális, ekkor $N \approx S^k \times D^k$. Legyen $H^k(D^k, \partial D^k)$ generátora d, ekkor w képe a diffeomorfizmus által indukált izomorfizmus szerint $(1 \times d)$. Tehát $\psi(w)[N] = \psi(1 \times d)[S^k \times D^k]$, és a $\psi(1 \times d)$ obstrukció pedig 0, mivel az $S^k \times D^k \to D^k$ vetítés és a kanonikus $(D^k, \partial D^k) \to (S^k, e_0)$ leképezés kompozíciója egy olyan f leképezés, amire $f^*(s) = 1 \times d$. Tehát ebben az esetben $\psi(v)[M] = 0$, azaz $\psi(v) = 0$.

2. $\nu = \mathfrak{o}(\mathcal{T}S^k)$, azaz $\mathcal{N}\varphi(S^k) \cong \mathcal{T}S^k$. Legyen $\varphi' : S^k \to S^k \times S^k$ a diagonális beágyazás ($\varphi'(x) = (x, x)$ minden $x \in S^k$-ra), ekkor $\mathcal{N}\varphi'(S^k) \cong \mathcal{T}S^k$. Legyen N' a $\varphi'(S^k)$ átló egy környezete $S^k \times S^k$-ban, az eddigiek szerint $N \approx N'$. Legyen a $\varphi'(S^k)$ által reprezentált homológiaosztály duálisa $H^k(N', \partial N')$-ben w'. Mivel N és N' diffeomorf, $\psi(w')[N'] = \psi(w)[N]$.

Legyen $M' = S^k \times S^k$, $M'_0 = M' \setminus \operatorname{int} N'$. A $\varphi'(S^k)$ által reprezentált homológiaosztály duálisa $H^k(M')$-ben $(s \times 1 + 1 \times s)$. M', $(N', \partial N')$ és (M', M'_0) egyszerű, ezért megismételhetjük a korábbi gondolatmenetünket, azt látjuk, hogy $\psi(w')[N'] =$

$\psi(s\times 1+1\times s)[M']$. A 39. lemma szerint $\psi(s\times 1+1\times s)=\psi(s\times 1)+\psi(1\times s)+[i,i]((s\times 1)\cup(1\times s))=[i,i](s\times s)$, hiszen a $\psi(s\times 1)$ és a $\psi(1\times s)$ obstrukció 0. Az eddigieket összerakva: $\psi(v)[M]=[i,i](s\times s)[S^k\times S^k]=[i,i]$. Ez a Whitehead-szorzat pedig nem 0, ha $k\neq 1,3$ vagy 7 (ez levezethető Adams Hopf-invariánsra vonatkozó tételének felhasználásával). $\square$

$[i,i]=-[i,i]$, ugyanis ha $t: S^k\vee S^k\to S^k\vee S^k$ jelöli a két S^k-t felcserélő transzformációt, akkor $f\circ(i\vee i)$ homotópiaosztálya (ha $S^k\times S^k$ $2k$-cellájának peremén értelmezett leképezésnek tekintjük) $i\vee i$ homotópiaosztályának ellentettje, vagyis $-[i,i]$. Viszont $f\circ(i\vee i)=i\vee i$, tehát ez egyben $[i,i]$ is.

Tehát az $[i,i]$ által generált részcsoport $\pi_{2k-1}(S^k)$-ban 2 rendű, legyen $\phi:\langle[i,i]\rangle\to Z_2$ a kanonikus azonosítása Z_2-vel.

Definíció. Legyen $\psi_0: H_k(M)\to Z_2$ az a függvény, ami egy λ-hoz $\phi(\psi(v)[M])$-et rendeli, ahol $v\in H^k(M,\partial M)$ a λ duálisa. Ez értelmes, mert a 26. lemma szerint λ reprezentálható beágyazással, és az előbb láttuk, hogy ekkor $\psi(v)[M]=0$ vagy $\psi(v)[M]=[i,i]$.

A 39. lemma alapján, ha $\lambda,\mu\in H_k(M)$ duálisait x és y jelöli: $\psi_0(\lambda+\mu)=\phi(\psi(x+y)[M])=\phi(\psi(x)[M]+\psi(y)[M]+[i,i](x\cup y)[M])=\psi_0(\lambda)+\psi_0(\mu)+\lambda\cdot\mu$.

Az előző lemmából pedig az következik, hogy $\psi_0(\lambda)$ pontosan akkor 0, ha egy tetszőleges λ-t reprezentáló beágyazott gömb normálnyalábja triviális.

Legyen $H_k(M)$ egy szimplektikus bázisa $(\lambda_1,\dots,\lambda_r,\mu_1,\dots,\mu_r)$.

Definíció. $c(M)=\psi_0(\lambda_1)\psi_0(\mu_1)+\cdots+\psi_0(\lambda_r)\psi_0(\mu_r)$

Állítás. *$c(M)$ jóldefiniált, azaz független a szimplektikus bázis választásától.*

Bizonyítás. Legyen $h: H_k(M)\to H_k(M,Z_2)$ a természetes $Z\to Z_2$ homomorfizmus által indukált homomorfizmus a homológiacsoportokon. $H_k(M)$ egy bázisának képe h-nál bázisa $H_k(M,Z_2)$-nek, és mivel tetszőleges $\lambda,\mu\in H_k(M)$ esetén $\lambda\cdot\mu=h(\lambda)\cdot h(\mu)$ modulo 2, ezért egy szimplektikus bázis képe szimplektikus $H_k(M,Z_2)$-ben.

Ha $h(\lambda)=h(\mu)$, akkor $\psi_0(\lambda)=\psi_0(\mu)$, ugyanis $\lambda-\mu=2\eta$ valamilyen $\eta\in H_k(M)$-re, ezért $\psi_0(\lambda)=\psi_0(\mu+2\eta)=\psi_0(\mu)+\psi_0(2\eta)+\mu\cdot 2\eta=\psi_0(\mu)+2\psi_0(\eta)+\eta\cdot\eta=\psi_0(\mu)$ (mod 2), hiszen $\eta\cdot\eta=0$. Tehát ψ_0 értelmezhető $H_k(M,Z_2)$-n a $\psi_0(h(\lambda))=\psi_0(\lambda)$ képlettel.

$\psi_0(h(\lambda)+h(\mu)) = \psi_0(\lambda+\mu) = \psi_0(\lambda)+\psi_0(\mu)+\lambda\cdot\mu = \psi_0(h(\lambda))+\psi_0(h(\mu))+h(\lambda)\cdot h(\mu) \pmod 2$, tehát ugyanaz a formula érvényes $H_k(M,Z_2)$-ben.

Legyen $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r,\mu_1,\ldots,\mu_r)$ egy tetszőleges szimplektikus bázis $H_k(M)$-ben. Ennek a képe $a_1 = h(\lambda_1)$, $\ldots$, $a_r = h(\lambda_r)$, $b_1 = h(\mu_1)$, $\ldots$, $b_r = h(\mu_r)$. Minden $1 \le t \le r$-re jelölje $\langle a_1,\ldots,a_t,b_1,\ldots,b_t\rangle$-t (az első t báziselem-pár által kifeszített alteret) A_t, és legyen $C(t) = \psi_0(a_1)\psi_0(b_1)+\cdots+\psi_0(a_t)\psi_0(b_t) \in Z_2$.

$H_k(M,Z_2)$ véges dimenziós vektortér Z_2 felett, tehát véges (mint halmaz). Adott $S \subseteq H_k(M,Z_2)$ esetén legyen $N(S) \in Z$ azoknak a $\lambda \in S$ elemeknek a száma, amelyekre $\psi_0(\lambda) = 0$.

t szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy ha $C(t) = 0$, akkor $N(A_t) = 2^{2t-1}+2^{t-1}$ és ha $C(t) = 1$, akkor $N(A_t) = 2^{2t-1}-2^{t-1}$.

Ha $t = 1$: $\psi_0(a_1+b_1) = \psi_0(a_1)+\psi_0(b_1)+a_1\cdot b_1$. Mivel $a_1\cdot b_1 = 1$, ez azt jelenti, hogy $\psi_0(a_1+b_1), \psi_0(a_1), \psi_0(b_1)$ között páratlan sok 1 értékű van. 2 eset lehet:
ha 1 db 1-es van, akkor $N(A_1) = 1$ ($\psi_0(0) = 0$, mert $\psi(0) = 0$), és $C(1) = 0$.
ha 3 db 1-es van, akkor $N(A_1) = 3$ és $C(1) = 1$.
Tehát $t = 1$-re az állítás igaz.

Most tegyük fel, hogy $(t-1)$-re már tudjuk, hogy teljesül az állítás, belátjuk t-re. Bontsuk fel A_t-t 4 részre, aszerint, hogy egy elemnek mi az $\langle a_t,b_t\rangle$ altérre vett vetülete, ez alapján $N(A_t) = N(A_{t-1})+N(A_{t-1}+a_t)+N(A_{t-1}+b_t)+N(A_{t-1}+a_t+b_t)$.

Legyen $\alpha \in \langle a_t,b_t\rangle$ és $\beta \in A_{t-1}$. Ekkor $\psi_0(\alpha+\beta) = \psi_0(\alpha)+\psi_0(\beta)+\alpha\cdot\beta = \psi_0(\alpha)+\psi_0(\beta)$. Ezért, ha $\psi_0(\alpha) = 0$, akkor minden β-ra $\psi_0(\alpha+\beta) = \psi_0(\beta)$, ezért $N(A_{t-1}+\alpha) = N(A_{t-1})$, és hasonlóan, ha $\psi_0(\alpha) = 1$, akkor $N(A_{t-1}+\alpha) = 2^{2t-2} - N(A_{t-1})$.

$\psi_0(a_t), \psi_0(b_t), \psi_0(a_t+b_t)$ között páratlan sok 1-es van (ez a korábbihoz hasonlóan látható), ezért megint 2 eset van:
ha 1 db 1-es van, akkor $N(A_t) = 3N(A_{t-1})+2^{2t-2}-N(A_{t-1}) = 2^{2t-2}+2N(A_{t-1})$, és $\psi_0(a_t)\psi_0(b_t) = 0$, ezért $C(t) = C(t-1)$.
ha 3 db 1-es van, akkor $N(A_t) = N(A_{t-1})+3(2^{2t-2}-N(A_{t-1})) = 3\cdot 2^{2t-2}-2N(A_{t-1})$, és $\psi_0(a_t)\psi_0(b_t) = 1$, ezért $C(t) = C(t-1)+1$.
Ebből pedig $C(t-1)$ értéke szerinti esetszétválasztással, felhasználva az indukciós hipotézist, következik az állítás.

Tehát tetszőleges $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r)$ szimplektikus bázis esetén, ha $\psi_0(\lambda_1)\psi_0(\mu_1) + \dots + \psi_0(\lambda_r)\psi_0(\mu_r) = C(r) = 0$, akkor $N(A_r) = N(H_k(M, Z_2)) = 2^{2r-1}+2^{r-1}$, és ha $C(r) = 1$, akkor $N(H_k(M, Z_2)) = 2^{2r-1}-2^{r-1}$. Mivel $N(H_k(M, Z_2))$ értéke a bázis választásától független, ezért $\psi_0(\lambda_1)\psi_0(\mu_1)+\dots+\psi_0(\lambda_r)\psi_0(\mu_r)$-nek is minden bázisra ugyanannyinak kell lennie. Tehát $c(M)$ jóldefiniált. $\square$

41. Lemma. *Ha $c(M) = 0$, akkor $\partial M \approx S^{2k-1}$.*

Bizonyítás. Legyen $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r)$ egy szimplektikus bázis. Feltehetjük, hogy minden i-re teljesül, hogy ha $\psi_0(\lambda_i) = 1$, akkor $\psi_0(\mu_i) = 1$ (ellenkező esetben ugyanis kicserélhetjük λ_i-t és μ_i-t). Az indexeket permutáljuk úgy, hogy előre kerüljenek azok a λ-k, amelyekre $\psi_0(\lambda) = 1$. Tehát valamilyen $1 \le s \le r$-re $\psi_0(\lambda_i) = \psi_0(\mu_i) = 1$, ha $i \le s$ és $\psi_0(\lambda_i) = 0$ ha $i > s$. Ekkor $c(M) \equiv s \pmod 2$, tehát s páros.

Definiáljunk egy új bázist: minden $1 \le i \le \frac{s}{2}$-re legyen $\lambda'_{2i-1} = \lambda_{2i-1} + \lambda_{2i}$, $\lambda'_{2i} = \mu_{2i-1} - \mu_{2i}$, $\mu'_{2i-1} = \mu_{2i-1}$, $\mu'_{2i} = \lambda_{2i}$. Az s-nél nagyobb i-kre pedig $\lambda'_i = \lambda_i, \mu'_i = \mu_i$.

Ekkor a $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_r, \mu'_1, \dots, \mu'_r)$ bázis szimplektikus (ehhez csak azt kell ellenőrizni, hogy minden $i \le \frac{s}{2}$-re $(\lambda'_{2i-1}, \lambda'_{2i}, \mu'_{2i-1}, \mu'_{2i})$ szimplektikus az általa generált részcsoportban). $\psi_0(\lambda'_{2i-1}) = \psi_0(\lambda_{2i-1}) + \psi_0(\lambda_{2i}) + \lambda_{2i-1} \cdot \lambda_{2i} = 0$ és $\psi_0(\lambda'_{2i}) = \psi_0(\mu_{2i-1}) + \psi_0(\mu_{2i}) + \mu_{2i-1} \cdot \mu_{2i} = 0$ (ha $i \le \frac{s}{2}$). Ezért tetszőleges $\lambda = n_1\lambda'_1 + \dots + n_r\lambda'_r$ esetén $\psi_0(\lambda) = n_1\psi_0(\lambda'_1) + \dots + n_r\psi_0(\lambda'_r) = 0$, ami azt jelenti, hogy egy tetszőleges λ-t reprezentáló gömb normálnyalábja triviális.

Tehát a 28. lemma feltételei teljesülnek, ezért $H_k(M)$ megölhető átépítésekkel. A 6. tétel szerint a keletkező sokaság diffeomorf D^{2k}-val, tehát a pereme S^{2k-1}. Mivel a perem az átépítések során nem változik, ez azt jelenti, hogy $\partial M \approx S^{2k-1}$. $\square$

42. Lemma. *Ha $c(M_1) = c(M_2)$, akkor $\partial M_1 \approx \partial M_2$.*

Bizonyítás. Legyen $M = M_1 \#_\partial (-M_2)$. Jelölje $\varphi : S^0 \times D^{2k}_+ \to M_1 \bigsqcup M_2$ azt a leképezést, amivel a perem menti összefüggő uniót képeztük, legyen $A = (M_1 \setminus \{\varphi(-1, 0)\}) \cup D^1 \times S^{2k-1}_+$ és $B = (M_2 \setminus \{\varphi(1, 0)\}) \cup D^1 \times S^{2k-1}_+$ (A homotopikusan ekvivalens M_1-gyel, B pedig M_2-vel).

Az $M = A \cup B$ felbontáshoz tartozó Mayer-Vietoris sorozatot felírva látjuk, hogy M $(k-1)$-szeresen összefüggő. Mivel M_1 és M_2 s-parallelizálható volt, ezért M is az. Tehát $c(M)$ definiálható. Belátjuk, hogy $c(M) = c(M_1) + c(M_2) = 0$.

Legyen $H_k(M_1)$ egy szimplektikus bázisa $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r)$, ez tekinthető $H_k(A)$ bázisának is. Hasonlóan legyen $H_k(M_2) \cong H_k(B)$ szimplektikus bázisa $(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_q, \tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_q)$. Ekkor $H_k(M)$ egy bázisa $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_r, \tilde{\lambda}'_1, \dots, \tilde{\lambda}'_q, \mu'_1, \dots, \mu'_r, \tilde{\mu}'_1, \dots, \tilde{\mu}'_q)$, ahol λ'_1 a λ_1 képe az $(M_1 \setminus \{\varphi(-1,0)\}) \to M$ beágyazás által indukált homomorfizmusnál, stb.

Ez a bázis szimplektikus, mivel $H_k(M_1)$ báziselemeinek képei reprezentálhatók $(M_1 \setminus \{\varphi(-1,0)\})$-ban, ezért a metszési számaik ugyanazok, mint M_1-ben; ugyanez igaz M_2-re is; és ebből látszik az is , hogy egy M_1-ből származó és egy M_2-ből származó báziselem metszési száma 0.

Tehát $c(M) = \psi_0(\lambda'_1)\psi_0(\mu'_1) + \dots + \psi_0(\tilde{\lambda}'_q)\psi_0(\tilde{\mu}'_q)$. Mivel $c(M_1) = \psi_0(\lambda_1)\psi_0(\mu_1) + \dots + \psi_0(\lambda_r)\psi_0(\mu_r)$ és $c(M_2) = \psi_0(\tilde{\lambda}_1)\psi_0(\tilde{\mu}_1) + \dots + \psi_0(\tilde{\lambda}_q)\psi_0(\tilde{\mu}_q)$, már csak annyit kell bebizonyítanunk, hogy $\psi_0(\lambda'_1) = \psi_0(\lambda_1)$, stb. Ez viszont következik abból, hogy $\psi_0(\lambda'_1)$ pontosan akkor 0, ha egy λ'_1-t reprezentáló gömb normálnyalábja triviális, hasonló igaz $\psi_0(\lambda_1)$-re, és λ'_1-nek és λ_1-nek van közös reprezentánsa M_1-ben (és ugyanez elmondható a többi báziselemre is).

Tehát $c(M) = 0$, az előző lemma szerint ebből következik, hogy $\partial M \approx \partial M_1 \# (-\partial M_2) \approx S^{2k-1}$. Tehát $\partial M_1 \approx \partial M_2$. □

43. Tétel. *Ha $k > 2$ páratlan, és nem 3 vagy 7, akkor bP_{2k} legfeljebb 2 elemű.*

Bizonyítás. Legyen M egy $2k$-dimenziós parallelizálható sokaság, aminek a pereme egy homotopikus gömb. A 15. tétel szerint M tüskézetten átépíthető egy $(k-1)$-szeresen összefüggő, s-parallelizálható M' sokasággá. Az előző lemma szerint $c(M')$ meghatározza $\partial M'$-t (irányítástartó diffeomorfizmus erejéig). $c(M') \in Z_2$ legfeljebb 2 féle lehet, ezért $\partial M'$ is, tehát bP_{2k}-nak legfeljebb 2 eleme van. □

4. A Θ_n/bP_{n+1} és $\Pi_n/\operatorname{Im} J_n$ csoportok izomorfiája

Szűcs András javaslata alapján megvizsgáltam, hogy mi a helyzet akkor, ha az eddig ismertetett módszerrel nem egy homotopikus gömbbel határolt s-parallelizálható sokaság, hanem egy $S^{k+n} \to S^k$ leképezés Pontrjagin sokaságának homotopikus csoportjait próbáljuk megölni. Ebből a következő ismert tétel adódik:

44. Tétel. *Ha $n \geq 5$, és $n \not\equiv 2$ modulo 4, akkor $\Theta_n/bP_{n+1} \cong \Pi_n/\operatorname{Im} J_n$.*

Bizonyítás. A 12. tétel bizonyításában láttuk, hogy van egy $p : \Theta_n \to \Pi_n/p(S^n)$ homomorfizmus. Vegyük észre, hogy $p(S^n)$ definíció szerint megegyezik $\operatorname{Im} J_n$-nel, tehát p valójában egy $\Theta_n \to \Pi_n/\operatorname{Im} J_n$ homomorfizmus. Azt is láttuk, hogy p magja bP_{n+1}, tehát p indukál egy injektív $\tilde{p} : \Theta_n/bP_{n+1} \to \Pi_n/\operatorname{Im} J_n$ homomorfizmust. Be fogjuk bizonyítani, hogy (a tétel feltételei mellett) $\tilde{p}$ szürjektív, ebből már következik a tétel állítása.

$\tilde{p}$ pontosan akkor szürjektív, ha az őt indukáló p homomorfizmus az. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha Π_n minden eleme benne van egy $p(\Sigma)$-ban valamilyen $\Sigma \in \Theta_n$ esetén, vagyis ha minden Π_n-beli homotópiaosztályhoz tartozó tüskézett kobordizmusosztályban van homotopikus gömb.

Rögzítsük le a dimenziót: nézzük a $\pi_{2n+3}(S^{n+3})$-beli homotópiaosztályokat. Azt fogjuk belátni, hogy tetszőleges S^{2n+3}-beli n-dimenziós, tüskézett, zárt részsokaság tüskézetten kobordáns egy homotopikus gömbbel.

Először nézzük meg a 13. lemmát. A bizonyításból az ott kimondottnál kicsit erősebb állítás is kiolvasható:

Állítás. *Ha $\mathcal{T}M \oplus \varepsilon^1_M$-nek rögzítettük egy trivializálását, akkor a φ reprezentáns úgy is megválasztható, hogy W (egy) parallelizálásának leszűkítése M-re egybeessen $\mathcal{T}M \oplus \varepsilon^1_M$ rögzített trivializálásával.*

Ehhez csak annyi kell, hogy amikor $\mathcal{T}M \oplus \varepsilon^1_M$ egy trivializálását próbáljuk kiterjeszteni W-re, akkor ne egy véletlenszerűen választott trivializálást vegyünk, hanem az előre rögzítettet.

Most vegyünk egy M egy n-dimenziós, zárt, s-parallelizálható sokaságot. Megmutatjuk, hogy M tüskézett átépítésekkel átépíthető egy homotopikus gömbbé.

Pontosabban az előző állítás miatt az is igaz lesz, hogy ha rögzítjük $\mathcal{T}M \oplus \varepsilon^1_M$ egy trivializálását, akkor van egy olyan $(M = M_1, M_2, \ldots, M_t = M'')$ sorozat, amire teljesül, hogy

M egy olyan tüskézett átépítéssel vihető át M_2-be, aminél W egy parallelizálása kiterjeszti $\mathcal{T}M \oplus \varepsilon^1_M$ trivializálását. $\mathcal{T}M_2 \oplus \varepsilon^1_{M_2}$-nek rögzítjük azt a trivializálását, ami $\mathcal{T}W$ M_2-re való leszűkítéséből adódik.

M_2 egy olyan tüskézett átépítéssel vihető át M_3-ba, aminél W egy parallelizálása kiterjeszti a $\mathcal{T}M_2 \oplus \varepsilon^1_{M_2}$-nek az előbb megkapott trivializálását

stb.

és $M_t = M''$ homotopikus gömb.

A 15. tétel szerint M átépíthető egy $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$-szeresen összefüggő M' sokasággá (vegyük észre, hogy a tétel bizonyításában minden ugyanúgy működik a peremes és a zárt esetben). Ezután esetszétválasztást csinálunk:

Ha $n = 2k + 1$, akkor a 17. lemma szerint feltehető, hogy $H_k(M')$ véges. Ezután k paritásától függően a 22. vagy 25. tételben leírt módszerrel csökkenthetjük tovább $H_k(M')$-t. Az egyetlen különbség, hogy a 20. helyett a 19. lemmát alkalmazzuk.

Ha $n = 4k$, akkor mivel M' s-parallelizálható, ezért minden Pontrjagin-osztálya 0, következésképpen $\sigma(M') = 0$. Ezért a 31. tételben leírt módon megölhetjük $H_k(M')$-t. A tétel utáni megjegyzésből látszik, hogy használhatunk tüskézett átépítéseket.

Tehát M mindkét esetben átépíthető egy $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-szeresen összefüggő M'' sokasággá. A Poincaré-dualitás és az univerzális együttható formula alapján $H_i(M'') \cong H^{n-i}(M'') \cong \mathrm{Tor}(H_{n-i-1}(M'')) \oplus \mathrm{Hom}(H_{n-i}(M''), Z) = 0$ ha $\frac{n}{2} < i < n$. $H_n(M'') = Z$, ezért a Hurewicz-tétel miatt $\pi_n(M'') = Z$, legyen $f : S^n \to M''$ a generátor egy reprezentánsa. Ekkor f izomorfizmust indukál $H_*(S^n)$ és $H_*(M'')$ között, S^n és M'' is egyszeresen összefüggő, tehát f homotopikus ekvivalencia. Tehát M'' homotopikus gömb.

Most vegyünk egy $M \subset S^{2n+3}$ n-dimenziós, tüskézett, zárt részsokaságot. Rögzítsük le $\mathcal{T}S^{2n+3} \oplus \varepsilon^1_{S^{2n+3}}$ egy trivializálását. Ennek a leszűkítése M-re $\mathcal{N}M \oplus \mathcal{T}M \oplus \varepsilon^1_M$

egy trivializálása. Meg van adva M egy tüskézése, azaz $\mathcal{N}M$ egy trivializálása. A 4. lemma alapján létezik $\mathcal{T}M \oplus \varepsilon^1_M$-nek egy "duális" trivializálása (de ez nem feltétlenül egyértelmű), rögzítsünk le egy ilyet.

Ekkor az előbbiek szerint van egy $(M = M_1, M_2, \ldots, M_t = M'')$ sorozat tüskézett átépítésekből M és egy M'' homotopikus gömb között, ráadásul minden M_i-hez meg van adva $\mathcal{T}M_i \oplus \varepsilon^1_{M_i}$ egy trivializálása úgy, hogy az M_i és M_{i+1} közötti kobordizmus (egy) parallelizálásának leszűkítése M_i-re és M_{i+1}-re a megadott trivializálás.

Már csak annyit kell tennünk, hogy ebből a sorozatból egy tüskézett kobordizmus sorozatot csinálunk.

Ágyazzunk be minden M_i-t S^{2n+3}-be, ekkor $\mathcal{N}M_i$ triviális, vegyük M_i-nek azt a tüskézését, ami $\mathcal{T}M_i \oplus \varepsilon^1_{M_i}$ megadott trivializálásának duálisa. Ilyen létezik, és homotópia erejéig egyértelmű; az egyértelműség miatt $\mathcal{T}M \oplus \varepsilon^1_M$ trivializálásának duálisa szükségképpen megegyezik (homotópia erejéig) M eredeti tüskézésével.

Az M_i és M_{i+1} között lévő W kobordizmust ágyazzuk be $S^{2n+3} \times [0,1]$-be a tüskézett kobordizmus definíciójának megfelelően. Rögzítsük $\mathcal{T}(S^{2n+3} \times [0,1])$-nek azt a trivializálását, ami minden $x \in [0,1]$ esetén $S^{2n+3} \times \{x\}$-re leszűkítve $\mathcal{T}S^{2n+3} \oplus \varepsilon^1_{S^{2n+3}}$ korábban lerögzített trivializálását adja. Erre vonatkozóan vegyük W parallelizálásának duálisát, ez létezik és egyértelmű. Ez W egy olyan tüskézése lesz, ami M_i-n és M_{i+1}-en megegyezik az előbb definiált tüskézéssel (homotópia erejéig, de W peremének egy környezetén megváltoztatható a tüskézés úgy, hogy ténylegesen megegyezzenek). Tehát W egy tüskézett kobordizmus M_i és M_{i+1} között.

Tehát M tüskézetten kobordáns egy M'' homotopikus gömbbel. Ez a kobordizmus tetszőleges M-re megkonstruálható az előbb leírt módon, a korábban mondottak szerint ebből következik, hogy $\Theta_n / bP_{n+1} \cong \Pi_n / \operatorname{Im} J_n$. □

Irodalomjegyzék

[1] A. Hatcher, *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 559 pp., 2002.

[2] M. W. Hirsch, *Differential Topology.* Springer-Verlag, New york, Berlin, Heidelberg, 222 pp., 1976.

[3] M. A. Kervaire, J. W. Milnor, *Groups of Homotopy Spheres: I.* The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 77,No. 3, pp. 504-537, 1963.

[4] J. P. Levine, *Lectures on groups of homotopy spheres.* In: Algebraic and Geometric Topology, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1126, Springer-Verlag, New york, Berlin, Heidelberg, pp. 62-95, 1985.

[5] J. W. Milnor, *A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds.* Symposia in Pure Math. A.M.S., vol. III, pp 39-55, 1961.

[6] J. W. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem.* Princeton University Press, Princeton, New Yersey, 116 pp., 1965.

[7] J. W. Milnor, M. A. Kervaire, *Bernoulli numbers, homotopy groups, and a theorem of Rohlin.* Proc. Int. Congress of Math., Edinburgh, pp. 454-456, 1958.

[8] J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic classes.* Princeton University Press, Princeton, New Yersey and University of Tokyo Press, 330 pp., 1974.