A rendszámok aritmetikája

Nemes Antal
Matematika BSc.

Szakdolgozat

Témavezető: Komjáth Péter
Egyetemi tanár
Számítógéptudományi Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

1.1. Végtelen halmazok, rendezés, rendszámok 4

1.2. Rendszámok fogalma, rendezése 6

Egzisztenciatétel 9

2. Alapműveletek **10**

2.1. Összeadás és szorzás 10

Rákövetkező rendszámok, limeszrendszámok 13

Rendszámok különbsége, maradékos osztás 15

2.2. Hatványozás 18

3. Oszthatóság **21**

3.1. Bal- és jobbosztók 21

3.2. Közös osztók, legnagyobb közös osztó 24

3.3. Közös többszörös 27

4. Rendszámok normálalakja **29**

4.1. Rendszámrendszerek 29

4.2. A normálalak 32

5. Felbonthatatlanok, prímek **35**

5.1. Felbonthatatlan rendszámok 35

5.2. Prímrendszámok 37

Rendszámelmélet alaptétele 39

6. Felcserélhetőség és kommutativitás **41**

6.1. Felcserélhetőség 41

6.2. Kommutativitás 42

7. Epszilon-rendszámok **47**

8. Hidra-játék **49**

1. fejezet

Bevezetés

Szakdolgozatom a Neumann rendszámok alapvető számelméleti tulajdonságait vizsgálja. A témát az [1], [2] irodalmak segítségével dolgoztam fel.

Az első fejezetben bevezetem a rendszámok fogalmát. A második fejezetben definiálom a rendszámok összegét, szorzatát és hatványát. Belátom, hogy az összeadás és a szorzás nem kommutatív, viszont asszociatív, a szorzás az összeadásra nézve jobboldalról disztributív. Definiálom a rákövetkező és limeszrendszámokat, valamint rendszámok szuprémumát. Megvizsgálom, hogy az aritmetikai műveletek hogyan kapcsolódnak össze a rendszámok rendezésével.

A szorzás miatt értelmezhető a rendszámok közötti oszthatóság, közös többszörös, legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös fogalma. Mivel a szorzás nem kommutatív, külön vizsgálom a bal illetve jobboldali oszthatóságot és a közös többszörösöket. A harmadik fejezet ezeket a fogalmakat tárgyalja.

A negyedik fejezetben definiálom a rendszámrendszereket, és megadom a rendszámok egy hasznos kanonikus előállítását.

Az ötödik fejezetben a rendszámok kisebb rendszámok összegére vagy szorzatára való felbonthatóságát vizsgálom. Ha egy rendszám nem bomlik fel kisebb rendszámok összegére, akkor azt a rendszámot felbonthatatlannak hívom, szorzat esetén pedig prímnek. Belátom, hogy a rendszámok bizonyos értelemben egyértelműen írhatók fel felbonthatatlanok összegeként illetve prímek szorzataként.

Bár az összeadás és a szorzás általában nem kommutatív, van olyan eset, amikor a tagok vagy tényezők sorrendjét mégis fel lehet cserélni. Ezeket az eseteket jellemzem a hatodik fejezetben.

Az epszilon rendszámok alaptulajdonságait a hetedik fejezetben tárgyalom. Segítségükkel jól lehet jellemezni a hatványozás egyfajta kommutativitását, pontosabban azt az esetet, amikor a hatványalapot és a kitevőt fel lehet cserélni.

Az utolsó fejezetben a rendszámok egy alkalmazásaként a hidra-játékot [3] mutatom be. A témához olyan állítás kapcsolódik, melyet rendszámok segítségével könnyen be lehet látni, ugyanakkor a Peano rendszerben nem is bizonyítható.

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Komjáth Péternek, akinek a segítségével és tanácsaival a szakdolgozatom elkészült.

1.1. Végtelen halmazok, rendezés, rendszámok

Első célunk megadni a természetes számoknak egy olyan általánosítását, amely kiterjed végtelen halmazokra is, a szokásos műveleteket pedig ki lehet rájuk terjeszteni úgy, hogy ezek a végtelen „számok” bizonyos szempontból hasonlóképpen viselkedjenek, mint a véges számok. Ezt a bővebb osztályt fogjuk rendszámoknak hívni.

Mielőtt azonban végtelen halmazokról beszélnénk, tisztázzuk először, hogy mit is értünk az alatt, hogy egy halmaz véges. Halmazok segítségével definiálhatók a természetes számok oly módon, hogy az $\underline{n}$ természetes számnak intuitív értelemben pontosan n eleme legyen. Miután tudjuk, hogy mik a természetes számok, mondhatjuk azt, hogy egy halmaz legyen pontosan akkor n elemű, ha a halmaz elemei párba állíthatók az $\underline{n}$ természetes szám elemeivel. Ez a kézenfekvő definíció azzal a tulajdonsággal is rendelkezni fog, hogy ha egy halmaz egyszerre n és m elemű, akkor $m = n$ kell, hogy teljesüljön. Ezután könnyű definiálni a végtelen halmazokat: legyenek azok a halmazok végtelenek, amelyek nem végesek, azaz semmilyen n-re sem n eleműek.

A végtelenségi axióma biztosítja, hogy valóban létezik végtelen halmaz, és hogy nem csak egy végtelen halmaz van, következik a hatványhalmaz axiómából.

Felmerül a kérdés, hogy ha több végtelen halmaz is van, akkor azok vajon mennyiben különbözhetnek egymástól?

Mivel a végtelen halmazokat az intuitív nagyságfogalom formalizálásával definiáltuk, célszerű lenne ennek a fogalomnak a segítségével megvizsgálni a kérdést. Azt mondjuk, hogy két halmaz ugyanannyi elemű vagy ekvivalens, ha létezik a két halmaz elemei között bijektív megfeleltetés. Véges halmazokra ez a megegyezés nem mond újat, és az is igaz lesz, hogy egy véges és egy végtelen halmaz nem lehet ekvivalens.

Bár ez a definíció sok szempontból megközelíti azt, amit a végtelen halmazoktól elvárunk, magában hordoz azonban néhány anomáliát is. Gyakran használt rendezett halmazokról, mint $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, kiderült, hogy ugyanakkorák, holott nem érezzük őket ugyanannyi eleműnek. Emiatt célszerű, amikor két rendezett halmazt összehasonlítunk, figyelembe venni a rajtuk levő rendezést is.

Nevezzünk két rendezett halmazt hasonlónak, ha létezik közöttük olyan bijekció, ami egyben rendezéstartó is. Mind az ekvivalencia, mind a hasonlóság ekvivalencia-reláció, így ekvivalenciaosztályokat határoznak meg.

Egy halmazon definiált rendezést jólrendezésnek nevezünk, ha bármely nemüres részhalmazában van a rendezés szerint minimális elem. Könnyen látható, hogy tetszőleges véges halmazon definiált rendezés jólrendezés, így egy természetes számon, mint halmazon definiált rendezés is az lesz. Jólrendezett halmaz részhalmaza is jólrendezett erre a részhalmazra megszorított rendezéssel.

A rendszámokat jólrendezett halmazoknak fogjuk definiálni a könnyebb kezelhetőség érdekében. Felmerül a kérdés, hogy ekkor viszont a rendszámok segítségével tudunk-e majd nem jólrendezett halmazokat is jellemezni. A jólrendezési tétel azt mondja ki, hogy tetszőleges halmazhoz létezik olyan rendezés, mely a halmazon jólrendezés. Ebből a szempontból a megszorítás tehát nem lényeges, hiszen a vizsgálandó halmazt, ha az nem jólrendezett, előbb jólrendezhetjük az említett tétel segítségével, majd azután vetjük vizsgálat alá.

A rendszámok a jólrendezett halmazok egy olyan részosztályát fogják alkotni, melyekre a hasonlóság reláció által meghatározott ekvivalenciarelációkhoz egyértelműen hozzá lehet rendelni egy-egy rendszámot, ami ráadásul hozzá is tartozik az adott ekvivalenciaosztályhoz, tehát képviseli azt. Ezért a rendszámok vizsgálatával a hasonlóság erejéig jellemezhetjük a jólrendezett halmazokat. A rendszámoknak számos szép tulajdonsága van, amit halmazok vizsgálatainál ki lehet használni. Segítségükkel például lehet rendezést definiálni a hasonlóság ekvivalenciaosztályai között, azaz a jólrendezett halmazokat lehet részbenrendezni, sőt a segítségükkel jellemezni lehet az ugyanannyi eleműség ekvivalenciaosztályait is, és azokon is be lehet vezetni rendezést. Rendszámokkal tehát jól lehet jellemezni, hogy egy halmaz mekkora.

Ha két jólrendezett halmazt egymás után „írunk”, jólrendezett halmazt kapunk, sőt ha jólrendezett halmaznyi példányát írjuk egymás után, szintén jólrendezett halmazt kapunk. A jólrendezett halmazok ezen tulajdonsága lehetőséget ad arra, hogy a rendszámok között összeadást és szorzást definiáljunk, ami analógja a természetes számok összeadásának és szorzásának. Bár az összeadás- és szorzás definíció kiterjeszti a természetes számok feletti műveleteket, nem örökli azok összes tulajdonságát. Rendszámokon például az összeadás és a szorzás nem lesz feltétlenül kommutatív.

Szorzás segítségével definiálhatunk oszthatóságot, hatványozást, felbonthatóságot és további számelméleti fogalmakat is.

A szakdolgozatom témája ezen műveletek és tulajdonságok vizsgálata lesz. A következő szakaszban bevezetem az alapvető definíciókat és téma tárgyalásához szükséges tételeket.

1.2. Rendszámok fogalma, rendezése

Rendszámok bevezetése

Az alábbiakban a rendszámokat fogjuk definiálni. Amint már a bevezetőben említettem, rendszámoknak bizonyos jólrendezett halmazokat fogunk tekinteni. Egy rendszámon a rendezés megfogalmazását segíti a következő definíció:

1.2.1. Definíció. *Az $\in$ eleme reláció A halmazra való megszorítását jelölje*

$$\in_A = \{\langle x, y\rangle : x \in A, y \in A, x \in y\}$$

A rendszámok osztályán később rendezést is definiálunk, amit szintén az eleme relációval szeretnénk megfogalmazni. Pontosabban azt szeretnénk elérni, hogy egy rendszám pont az összes nála kisebb rendszámból álljon, mert akkor pusztán az *eleme* reláció ellenőrzésével el lehetne dönteni, hogy két rendszám közül melyik a nagyobb. Ennek a tulajdonságnak a teljesüléséhez járul hozzá az alábbi definíció:

1.2.2. Definíció. *Egy A halmazt* ***tranzitív****nak nevezzük, ha bármely eleme egyben részhalmaza is, azaz ha $B \in A$, akkor $B \subset A$.*

Ezzel előkészítettük a rendszám definícióját.

1.2.3. Definíció (Rendszámok definíciója)**.** *Egy A halmazt* ***rendszám****nak nevezünk, ha A tranzitív, és az $\in_A$ reláció jólrendezi A-t, azaz $\langle A, \in_A\rangle$ jólrendezett halmaz.*

Példa. *Az $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\,\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\,\}$ mind rendszámok.*

1.2.4. Tétel. *Rendszámok metszete rendszám.*

Bizonyítás. Ha A és B rendszámok, akkor a metszetük tranzitív. Valóban, ha $u \in A \cap B$, akkor $u \in A$ és $u \in B$, ezért $u \subset A$ és $u \subset B$. Tehát $u \subset A \cap B$. Az $\in_{A\cap B}$ jólrendezés, hiszen ez az $\in_A$ jólrendezés megszorításából származik. □

1.2.5. Tétel. *Rendszám minden eleme rendszám.*

Bizonyítás. Legyen A rendszám, $x \in A$. Ekkor $x \subset A$, ezért $\in_x$ jólrendezi x-et. Legyen $v \in u \in x$. Ekkor $x \subset A$ miatt $u \in A$, tehát $u \subset A$, ezért $v \in A$. De $\in_A$ rendezés az A halmazon, $v, u, x \in A$, így a $\in_A$ tranzitivitása miatt $v \in_A x$, tehát $v \in x$. Ezért $u \subset x$. □

1.2.6. Definíció. *Legyen* $\langle A, < \rangle$ *rendezés és* $B \subset A$.

- B *kezdőszelete* A*-nak, ha* $x < y$, $y \in B$ *esetén* $x \in B$.
- B *elem általi kezdőszelet, ha van olyan* $y \in A$, *hogy* $x \in B$ *pontosan akkor, ha* $x < y$. *Jelölés:* $A|_{<}y$

Megjegyzés. *Természetesen az elem általi kezdőszelet is kezdőszelet, ám a két fogalom általában nem esik egybe, például az* $(-\infty, a] \subset \mathbb{R}$ *a szokásos rendezéssel kezdőszelet, de nem elem általi. Fontos viszont megjegyezni, hogy ha* $\langle A, < \rangle$ *jólrendezett, akkor a valódi kezdőszeletek már elem általiak is.*

1.2.7. Tétel. *Legyen* A *tranzitív halmaz az* $\in_A$ *rendezéssel.* $B \subset A$ *akkor és csak akkor kezdőszelete* A*-nak, ha* B *is tranzitív halmaz.*

Bizonyítás. Legyen B az A kezdőszelete. Ha $x \in y \in B$, akkor $y \in A$, ezért $y \subset A$, vagyis $x \in A$. De ekkor $x \in_A y$, és mivel B kezdőszelet, $x \in B$.

Legyen most B tranzitív, $y \in B$ és $x \in_A y$. B tranzitivitása miatt ekkor $x \in B$ is teljesül. □

1.2.8. Tétel. *Ha* A *rendszám,* $B \subset A$ *és* B *tranzitív, akkor vagy* $B = A$, *vagy* $B \in A$, *és így az* 1.2.5. *tétel következtében* B *is rendszám.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint B kezdőszelet. Feltehető, hogy valódi kezdőszelet, különben $B = A$. Ekkor megjegyzésünk szerint B elem általi kezdőszelet, vagyis van olyan $x \in A$, melyre $B = A|_{\in_A}x$. Az állítás bizonyításához elég megmutatni, hogy $B = x$. Legyen először $y \in B$. Mivel B az x elem általi kezdőszelet, $y \in_A x$, és így $y \in x$. Legyen most $z \in x$. A tranzitivitása miatt $z \in A$ is teljesül, ezért $z \in_A x$, így $z \in A|_{\in_A}x = B$ □

1.2.9. Következmény. *Rendszámok kezdőszelete rendszám.*

Rendszámok rendezése

A következőkben bevezetünk egy rendezést a rendszámok osztályán.

1.2.10. Definíció. *Ha* A *és* B *rendszámok, akkor*

$$A < B \Leftrightarrow A \in B$$

1.2.11. Tétel. *A fent definiált reláció irreflexív, tranzitív és trichotóm, sőt a rendszámok osztályán jólrendezés.*

Bizonyítás. Ha $A < B$ és $B < A$, akkor $A \in B$ és $B \in A$. A tranzitivitásának kétszeri alkalmazásával először $A \in A$, majd az $A \in A \in A$ összefüggést kapjuk. Ezért $A \in_A A$, ami ellentmondás.

A tranzitivitás következik a rendszámok tranzitivitási tulajdonságából.

Most belátjuk, hogy a rendezés trichotóm. Legyenek $A \neq B$ rendszámok. Ekkor az 1.2.4. tétel következtében $A \cap B$ is rendszám, és így tranzitív részhalmaza A-nak és B-nek is. Az 1.2.8. tétel miatt a következő esetek állhatnak fenn:

$A \cap B = A$ vagy $A \cap B \in A$

$A \cap B = B$ vagy $A \cap B \in B$

Ha mindkétszer a második eset áll fenn, abból $A \cap B \in A \cap B$-t kapnánk, ami ellentmond a már bizonyított irreflexivitásnak. Ha pedig például $A \cap B = A$ és $A \cap B \in B$ áll fenn, tehát $A < B$.

Végül megmutatjuk, hogy $<$ jólrendezés a rendszámokon. Legyen A rendszám és $\Phi(x)$ egy formula. Legyen $C = \{x \in A : \Phi(x)\}$. Feltehető, hogy C nemüres. Mivel $\in_A$ jólrendezi A-t, van $\in_A$ szerint minimális eleme C-nek, legyen ez y. Mivel $y \in A$, az 1.2.5. tétel szerint y is rendszám, emellett $\Phi(y)$ igaz. Ha $z < y$ rendszám, akkor $z \in y$ és A tranzitivitása miatt $z \in A$, és így y minimalitása miatt csak az lehet, $\Phi(z)$ hamis. □

Az alábbi következmény a rendszámok egy nagyon hasznos tulajdonságáról szól, erre a későbbiekben többször hivatkozni fogunk.

1.2.12. Következmény. *Nem létezik rendszámokból álló csökkenő végtelen sorozat.*

Bizonyítás. Valóban, ha $f(n)$ végtelen csökkenő sorozatot valósítana meg, akkor $\operatorname{Ran} f$-nek nem volna minimális eleme. □

1.2.13. Tétel. *A rendszámok nem alkotnak halmazt.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A olyan halmaz, aminek az elemei pontosan a rendszámok. Ekkor persze A tranzitiv, és $<$ jólrendezi A-t. Következésképpen A is rendszám volna, emiatt $A \in A$ teljesülne, ami ellentmond az irreflexivitásnak. □

A következőkben egy módszert mutatunk be, melynek segítségével el lehet dönteni két rendszámról, hogy melyik a nagyobb.

1.2.14. Lemma. *Ha f az $\langle A, < \rangle$ jólrendezett halmazt önmagába képezi le rendezéstartó módon, akkor $\forall x \in A$-ra $x \leq f(x)$*

Bizonyítás. Legyen $B = \{x \in A : f(x) < x\}$. Azt kell megmutatnunk, hogy $B = \emptyset$. Ha B nemüres, akkor a jólrendezés miatt van egy x_0 minimális eleme B-nek. Erre B definíciója szerint $f(x_0) < x_0$ teljesül. Ebből f rendezéstartása miatt $f(f(x_0)) < f(x_0)$ következik. Azaz $f(x_0) \in B$, de $f(x_0) < x_0$, ami ellentmond x_0 minimalitásának. □

1.2.15. Tétel. *Ha $\alpha < \beta$, akkor $\langle \beta, <_\beta \rangle$ nem képezhető le monoton módon $\langle \alpha, <_\alpha \rangle$ egy részhalmazára.*

Bizonyítás. Ha volna olyan f és $A \subset \alpha$, melyre $\langle \beta, <_\beta \rangle$ hasonló $\langle A, <_\alpha \rangle$-hoz, akkor $A \subset \alpha \subset \beta$ miatt f β-t önmagába képezi le rendezéstartó módon. Ekkor f az $\alpha \in \beta$ elemet α részhalmazába képezi, emiatt $f(\alpha) < \alpha$, ami ellentmond az előző lemmának. □

1.2.16. Következmény. *Ha tehát α-t be tudjuk ágyazni rendezéstartó módon β-ba, akkor $\alpha \leq \beta$.*

Egzisztenciatétel

1.2.17. Definíció. *$\langle A, < \rangle$ és $\langle B, < \rangle$ rendezett halmazok* ***hasonlók****, ha létezik A és B között rendezéstartó bijekció. Könnyen bizonyítható, hogy a hasonlóság ekvivalenciareláció.*

A bevezetőben megjegyeztem, hogy a rendszámok képviselni a tudják a jólrendezett halmazok hasonlóság szerinti ekvivalenciaosztályait. Ezt fogalmazza meg a következő tétel:

1.2.18. Tétel (Egzisztenciatétel)**.** *Tetszőleges $\langle A, < \rangle$ jólrendezett halmazhoz egyértelműen létezik olyan rendszám, amihez $\langle A, < \rangle$ hasonló. Jelöljük $\operatorname{tip} A|_<$-val ezt a rendszámot, és nevezzük őt az $\langle A, < \rangle$ rendtípusának.*

Megjegyzés. *Létezik injektív operáció az összes rendezett halmaz hasonlóság szerinti ekvivalenciaosztályain is, mely kiterjesztése az imént bevezetett operációnak. Ennek segítségével tetszőleges rendezett halmaznak is lehetne definiálni a rendtípusát.*

2. fejezet

Alapműveletek

2.1. Összeadás és szorzás

Az előző fejezetben bevezettük a rendszámok fogalmát, és bizonyítottunk néhány rájuk vonatkozó tételt. A következő fejezetekben más oldalról vizsgáljuk a rendszámokat, úgy gondolunk majd rájuk, mint a természetes számok fogalmának általánosítására. Értelmezünk a rendszámokon összeadást és szorzást, majd ezen műveletek tulajdonságaira helyezzük a hangsúlyt.

A továbbiakban a rendszámok jelölésére $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varrho$ stb. görög kisbetűket használunk.

Könnyen megadható olyan egyváltozós formula, ami pontosan akkor teljesül, ha az argumentuma rendszám. Halmazok definiálásakor azzal az egyszerűsítő jelöléssel fogok élni, hogy ha a meghatározásban olyan változó szerepel, ami csak rendszám lehet, akkor azt a változót kis görög betűvel fogom jelölni, és azt a formulát, ami megmondja, hogy az adott változó rendszám, el fogom hagyni a definícióból a könnyebb olvashatóság kedvéért.

2.1.1. Definíció (Rendezett unió)**.** *Legyenek* $\{\langle A_x, <_x\rangle : x \in \Gamma\}$ *diszjunkt rendezett halmazok, valamint* $<_\Gamma$ *a* Γ *indexhalmaz egy rendezése.*
Ekkor a $\{\langle A_x, <_x\rangle : x \in \Gamma\}$ *halmazrendszer* $<_\Gamma$ *szerinti* ***rendezett unió****ján azt a rendezett halmazt értjük, melynek alaphalmaza* $A = \bigcup_{x\in\Gamma} A_x$*, a rendezés pedig a következő:*

Legyen $x \in A_u$ *és* $y \in A_v$*. Ha* $u \neq v$*, akkor* $x < y \Leftrightarrow u <_\Gamma v$*. Ha pedig* $u = v$*, akkor* $x < y \Leftrightarrow x <_u y$*.*

Könnyen látható, hogy $<$ *valóban rendezés* A*-n.*

A definíció alapján a halmazok rendezett unióját úgy képzelhetjük el, mintha a rendezett halmazokat egymás mellé írtuk volna a $<_\Gamma$ által meghatározott sorrendben.

Megjegyzés. *Nemdiszjunkt halmazok esetén először diszjunktizálunk, majd azután vesszük a rendezett összeget. Bár különböző diszjunktizáció esetén különbözni fog a rendezett összeg is, adódik egy természetes rendezéstartó bijekció a rendezett összegek között, vagyis rendezés szempontjából nem különböznek az összegek.*

2.1.2. Definíció (Antilexikografikus szorzat). *Legyenek $\langle A, <_A\rangle$ és $\langle B, <_B\rangle$ rendezett halmazok. Ezek* ***antilexikografikus szorzat****án azt a rendezett halmazt értjük, aminek az alaphalmaza $A \times B$, a rendezés pedig: $\langle a_1, b_1\rangle < \langle a_2, b_2\rangle$ pontosan akkor, ha $b_1 < b_2$, vagy ha $b_1 = b_2$ és $a_1 < a_2$. Könnyen látható, hogy $<$ valóban rendezés.*

Az A és B rendezett halmazok antilexikografikus szorzatát úgy képzelhetjük el, mintha az A halmazt B példányban írtuk volna le egymás mellé.

Az imént bevezetett halmazkonstrukciókat fogjuk alkalmazni rendszámokra. Ennek kivitelezésében segít a következő állítás:

2.1.3. Állítás. *Jólrendezett halmazok antilexikografikus szorzata és jólrendezett halmaz szerint vett rendezett uniója is jólrendezett halmaz.*

Bizonyítás. Valóban, a definíciókban szereplő jelöléssel élve a rendezett összeg esetén egy C nemüres részhalmaz esetén megkeressük azt az A_x ($<_\Gamma$ szerint) legkisebb indexű halmazt, melyet C még metsz, majd $A_x \cap C$ elemei közül keressük ki a minimálisat.

Az antilexikografikus szorzat egy C nemüres részhalmaza esetén pedig a minimális elem az az $\langle a, b\rangle$ lesz, ahol b a C-beli elemek B-re vett vetületei közül a minimális, a pedig azon C-beli elemek első koordinátái közül a minimális, ahol a második koordináta b. □

2.1.4. Definíció. *A $\{\varrho_i : i \in \gamma\}$ rendszámok összege a $\{\varrho_i : i \in \gamma\}$ halmazok rendezett összegének rendtípusa. Jelölés: $\sum_{i\in\gamma} \varrho_i$, vagy két tag esetén $\varrho_1 + \varrho_2$.*

Az α és β rendszámok szorzata az α és β halmazok antilexikografikus szorzatának rendtípusa. Jelölés: $\alpha \cdot \beta$

Ez a két operátor a diszjunktizációról szóló megjegyzésünk, az előző állítás és az egzisztenciatétel következtében jóldefiniált.

Megjegyzés. *Gyakran kell majd rendszámösszegek és -szorzatok elemére hivatkoznunk. Ilyenkor eljárhatnánk a következőképpen: Felveszünk olyan diszjunkt halmazokat, melyek rendtípusai az adott rendszámok, majd ezeknek a halmazoknak vesszük a rendezett összegét vagy szorzatát. Könnyen látható, hogy szorzat esetén sem függ az eredmény rendtípusa a diszjunkt halmazok megválasztásától. Ilyenkor a rendszámösszegek és -szorzatok elemeire az így konstruált halmazok segítségével rendezéstartó bijektív függvények bevezetésével hivatkozhatunk. Bár ez technikailag kivitelezhető, azzal az egyszerűsítő jelöléssel fogok élni, hogy magukat az elemeket a* *képeikkel fogom azonosítani. Így például értelmesnek tekintjük az amúgy pontatlan* $\langle a, b\rangle \in \alpha \cdot \beta \quad a \in \alpha, b \in \beta$ *jelölést. Ez általában nem okoz félreértést, ugyanakkor a jelölés lényegesen egyszerűsödik.*

2.1.5. Állítás. *Mind a rendszámösszeadás, mind a rendszámszorzás asszociatív.*

Az állítást csak három tagú összegre vázoljuk, de a bizonyítás könnyen kiterjeszthető tetszőleges tagú összegre.

Bizonyítás. Rendszámösszeadás esetén az $(\alpha + \beta) + \gamma$ és $\alpha + (\beta + \gamma)$ alaphalmazai megegyeznek az unió asszociativitása miatt, és az is könnyen látható, hogy a rendezés is megegyezik a két halmazon.

Rendszámok szorzása esetén az $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ és $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ alaphalmazai között az $\langle\langle a, b\rangle, c\rangle \mapsto \langle a, \langle b, c\rangle\rangle$ egy rendezéstartó bijekciót határoz meg. □

2.1.6. Állítás. *A rendszámszorzás jobbról disztributív, azaz*

$$\gamma \cdot \sum_{\xi \in \lambda} \alpha_\xi = \sum_{\xi \in \lambda} \gamma \cdot \alpha_\xi .$$

Bizonyítás. A két kifejezés alaphalmaza a halmazokra vonatkozó disztributivitási törvényből következik.

A rendezés vizsgálatához legyenek $x_1, x_2 \in \gamma,\ y_1 \in \alpha_{\xi_1},\ y_2 \in \alpha_{\xi_2}$.

Mindkét kifejezésben $\langle x_1, y_1\rangle < \langle x_2, y_2\rangle$ pontosan akkor,

- $\xi_1 < \xi_2$
- $\xi_1 = \xi_2$ esetén $y_1 <_{\xi_1} y_2$
- $\xi_1 = \xi_2$ és $y_1 = y_2$ esetén $x_1 <_\gamma x_2$

□

Aritmetikai műveletek és a rendezés

2.1.7. Tétel. *Rendszámok összeadása az első változóban monoton, a másodikban szigorúan monoton. Rendszámok szorzása az első változóban monoton, ha pedig az első tényező nemnulla, akkor a második változóban szigorúan monoton.*

Bizonyítás. Legyenek $\alpha, \beta, \gamma \quad \beta < \gamma$ rendszámok. Ekkor β az identitással beágyazható rendezéstartó módon γ-ba. Ezért léteznek a következő rendezéstartó beágyazások $\alpha + \beta \to \alpha + \gamma$, $\beta + \alpha \to \gamma + \alpha$, $\alpha \cdot \beta \to \alpha \cdot \gamma$ és $\beta \cdot \alpha \to \gamma \cdot \alpha$ az alaphalmazok között, amiből a gyenge monotonitás már következik mindkét argumentumban.

A szigorú monotonitás bizonyításához legyen $x \in \gamma$, melyre $\beta = \gamma|_{<}x$. Ekkor $\alpha + \beta = (\alpha + \gamma)|_{<}x$, amiből $\alpha + \beta \in \alpha + \gamma$, tehát teljesül a szigorú monotonitás is.

Szorzat esetén pedig $\alpha \cdot \beta = (\alpha \cdot \gamma)|_{<}\langle 0, x\rangle$, tehát $\alpha \cdot \beta \in \alpha \cdot \gamma$, amiből a szorzatra is adódik az állítás. $\square$

Megjegyzés. *Az első argumentumokra a szigorú monotonitás nem teljesül. Ellenpéldát a 2.1.15. következményben mutatunk.*

Rákövetkező rendszámok, limeszrendszámok

2.1.8. Definíció (Természetes számok). *Vezessük be a következő jelöléseket:*

$0 = \emptyset$

$1 = \{0\} = \{\emptyset\}$

$2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$3 = \{0, 1, 2\} = \{\, \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\,\}$

$\vdots$

$n = \{0, 1, \ldots, n - 1\}$

$\vdots$

Ezek a halmazok az $\in$ relációra nézve jólrendezettek és tranzitívak, tehát rendszámok.

Az összes természetes számból álló halmazt jelöljük ω-val. Mivel ω rendszámokból áll, tranzitív, és az eleme reláció jólrendezi, ezért ω is rendszám. Valójában ez a legkisebb nem véges alaphalmazú rendszám.

A rendezett összeg és szorzat definíciója alapján látható, hogy a rendszám-összeadás és -szorzás a természetes számokon megfelel az intuitív értelemben vett összeadásnak és szorzásnak. Ezért gondolhatunk úgy is ezekre az operátorokra, mint a természetes számokon tekintett aritmetikai műveletek egyfajta kiterjesztésére. Ez a kiterjesztés a természetes számokon ismert tulajdonságok egy részét megtartja, példa erre az asszociativitás, a jobbról szorzás disztributivitása. Ugyanakkor még az összeadás sem kommutatív, például $\omega + 1 \neq 1 + \omega$, hiszen a baloldali kifejezésnek van legnagyobb eleme, a jobboldalinak pedig nincs.

2.1.9. Tétel. *Az α-nál nagyobb rendszámok közül a legkisebb rendszám az*

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

Bizonyítás. Mivel α beágyazható rendezéstartó módon $\alpha + 1$-be, a 1.2.16. következmény miatt $\alpha \leq \alpha + 1$, de $\alpha \neq \alpha \cup \{\alpha\}$, ezért $\alpha < \alpha + 1$

Legyen most $\gamma < \alpha + 1$, ekkor $\gamma \in \alpha + 1$. Ha $\gamma \neq \alpha$, akkor $\gamma \in \alpha$, vagyis $\gamma < \alpha$. Összefoglalva $\gamma \leq \alpha$. $\square$

2.1.10. Tétel. *Tetszőleges A rendszámokból álló halmazhoz létezik olyan rendszám, mely az A-beli rendszámok felső korlátja. Ezek közül a legkisebb az $\bigcup A$. A legkisebb felső korlátot jelölje:* $\sup A$.

Bizonyítás. $\bigcup A$ tranzitív, hiszen tranzitív halmazok uniója. Mivel $\bigcup A$ elemei rendszámok, ezért $\bigcup A$ valóban rendszám. Ha $\alpha \in A$, akkor $\alpha \subset \bigcup A$ az unió definíciója miatt, így α-t be lehet ágyazni $\bigcup A$-ba rendezéstartó módon. Így az 1.2.16. következmény miatt $\alpha \leq \bigcup A$, tehát $\bigcup A$ valóban felső korlát. Már csak azt kell megmutatni, hogy A bármely β felső korlátjára $\bigcup A \leq \beta$. Legyen tehát β felső korlát. Ha $\gamma' \in \bigcup A$, akkor az unió definíciója miatt létezik olyan $\gamma \in A$ rendszám, melyre $\gamma' \in \gamma$. Mivel β felső korlát, $\gamma \leq \beta$, amiből $\gamma \subset \beta$, és így $\gamma' \in \beta$. Ezért teljesül $\bigcup A \subset \beta$, így $\bigcup A \leq \beta$. □

2.1.11. Definíció. *Egy γ rendszámot* ***rákövetkező rendszám****nak nevezünk, ha létezik olyan α rendszám, melyre $\gamma = \alpha + 1$.*

Ha egy nemnulla rendszám nem rákövetkező, akkor ***limeszrendszám****nak nevezzük.*

2.1.12. Állítás. *Ha α limeszrendszám, akkor $\alpha = \sup \alpha = \bigcup\{\gamma : \gamma < \alpha\}$. Ha α rákövetkező rendszám, akkor $\alpha = \sup \alpha + 1$.*

Bizonyítás. Legyen α limeszrendszám. Világos, hogy α-nál kisebb rendszámoknak az α felső korlátja. Legyen most $\gamma < \alpha$, megmutatjuk, hogy γ nem felső korlát. Ugyanis $\gamma + 1$ a legkisebb a γ-nál nagyobb rendszámok közül, amiből $\gamma + 1 \leq \alpha$. De α nem rákövetkező, ezért $\gamma + 1 < \alpha$. Ezzel megkaptuk, hogy γ valóban nem lehet felső korlát.

Legyen α rákövetkező rendszám. Ekkor $\alpha = \beta + 1$ valamilyen β rendszámra. Mivel β és $\beta + 1 = \alpha$ között nincs rendszám, α legnagyobb eleme β, tehát $\sup \alpha = \beta$. Ez alapján $\sup \alpha + 1 = \beta + 1 = \alpha$. □

Az állítás szerint limeszrendszám esetén $\sup \alpha \notin \alpha$, ezért a limeszrendszámokat olyan rendezett halmazoknak képzelhetjük el, amelyeknek nincsen „vége". Rákövetkező esetben viszont $\sup \alpha \in \alpha$, tehát a rákövetkező rendszámoknak van.

Vegyünk egy limeszrendszámot, és szorozzuk össze bármelyik oldalról egy másik rendszámmal. Érezzük, hogy ha egy „vég nélküli" számot írunk le valahányszor egymás után, vagy valamit „vég nélküliszer" írunk le, akkor ismét vég nélküli számot kapunk. Ezért a szorzat várhatóan limeszrendszám. Ezt igazolja az alábbi lemma.

2.1.13. Lemma.

- *Legyen β limeszrendszám. Ekkor tetszőleges $\alpha \neq 0$ rendszám esetén $\alpha \cdot \beta$ szintén limeszrendszám. Sőt, $\xi < \alpha \cdot \beta$ esetén létezik olyan $\gamma < \beta$, melyre $\xi < \alpha \cdot \gamma$.*
- *Legyen α limeszrendszám, $\beta \neq 0$. Ekkor $\alpha \cdot \beta$ limeszrendszám.*

Bizonyítás. Az első állítás bizonyítása. Ha $\xi < \alpha \cdot \beta$, akkor $\xi = \alpha \cdot \beta|_{<}\langle a, b\rangle$ valamely $a \in \alpha$ és $b \in \beta$-ra. Mivel β limeszrendszám, $b + 1 < \beta$. Ekkor viszont ξ valódi kezdőszelete $\alpha \cdot (b + 1)$-nek, amiből $\gamma = b + 1$ választással $\xi < \alpha \cdot \gamma$.
Ekkor $\xi < \xi + 1 \leq \alpha \cdot \gamma < \alpha \cdot \beta$, vagyis β valóban limeszrendszám.

A második állítás bizonyításához az előző eset szerint elég azt vizsgálni, amikor β rákövetkező rendszám. Ez pedig az $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\beta' + 1) = \alpha \cdot \beta' + \alpha$ összefüggés alapján limeszrendszám, hiszen ha tetszőleges rendszámhoz hozzáadunk egy limeszrendszámot, ismét limeszrendszámot kapunk. □

Rendszámok különbsége, maradékos osztás

Ebben a részben az argumentumokban való monotonitás néhány tulajdonságát és következményét tárgyaljuk.

2.1.14. Állítás. *Tetszőleges végtelen α rendszámra és n természetes számra $n+\alpha = \alpha$, valamint $n \neq 0$ esetén $n \cdot \omega = \omega$.*

Bizonyítás. Tekintsük következő $f : n + \alpha \to \alpha$ bijekciót:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in n \\ n + x & x \in \alpha \text{ és } x \text{ véges} \\ x & x \in \alpha \text{ és } x \text{ végtelen} \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy f rendezéstartó.

$n \cdot \omega$ és ω között pedig a $\langle k, m\rangle \mapsto nm + k$ lesz rendezéstartó bijekció. □

2.1.15. Következmény. *A jobboldali egyszerűsítés általában nem igaz, hiszen például $1 + \omega = \omega = 2 + \omega$ és $1 \cdot \omega = 2 \cdot \omega$, pedig $1 \neq 2$.*

Ugyanez a tény más szemszögből azt mutatja, hogy az első argumentumban a monotonitás általában nem teljesül, mint azt a 2.1.7. tétel utáni megjegyeztük.

Mivel $2 \cdot \omega = \omega$ és $\omega = \omega \cdot 2|_{<}\langle 0, 1\rangle$, ezért $2 \cdot \omega < \omega \cdot 2$. Ezzel tehát azt is beláttuk, hogy rendszámok szorzatára sem igaz a kommutativitás, és ugyanez a példa mutatja azt is, hogy a balról szorzás általában nem disztributív: $(1 + 1) \cdot \omega = \omega < \omega + \omega$.

A baloldali egyszerűsíthetőség viszont egyszerű következménye a 2.1.7. tételnek:

2.1.16. Állítás. *Ha $\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2$, akkor $\beta_1 = \beta_2$. Ha $\alpha \cdot \beta_1 = \alpha \cdot \beta_2$ és $\alpha \neq 0$, akkor $\beta_1 = \beta_2$.*

Bizonyítás. Valóban, ha például $\beta_1 < \beta_2$, akkor az 2.1.7 tétel következtében első esetben $\alpha + \beta_1 < \alpha + \beta_2$, második esetben $\alpha \cdot \beta_1 < \alpha \cdot \beta_2$ állna, ami ellentmond a feltételeknek. □

Érdekes viszont, hogy egyenlőtlenség esetén mindig lehet egyszerűsíteni.

2.1.17. Állítás. *Az $\alpha+\beta_1 < \alpha+\beta_2$, $\beta_1+\alpha < \beta_2+\alpha$, $\alpha\cdot\beta_1 < \alpha\cdot\beta_2$, $\beta_1\cdot\alpha < \beta_2\cdot\alpha$ összefüggések bármelyikéből következik, hogy $\beta_1 < \beta_2$*

Bizonyítás. Ha $\beta_1 \geq \beta_2$ volna, akkor a fent szereplő esetek mindegyikében $<$ helyett $\geq$ szerepelne a műveletek monotonitása miatt. □

2.1.18. Tétel. *Legyenek $\beta \leq \alpha$ rendszámok. Ekkor egyértelműen létezik olyan ξ, melyre $\alpha = \beta + \xi$. Ezt a ξ számot az α és β* ***különbség****ének nevezzük.*

Bizonyítás. Az egyértelműség következik a baloldali egyszerűsíthetőségből.

Mivel az összeadás az első változóban monoton, $\alpha = 0 + \alpha \leq \beta + \alpha$. Ha itt egyenlőség áll, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor van olyan $x \in \beta + \alpha$, melyre $\alpha = (\beta + \alpha)|_{<}x$. Ez az x nem lehet β-ban, mert abból $\alpha < \beta$ következne. Legyen $\xi = \alpha|_{<}x$. Ekkor $\alpha = (\beta + \alpha)|_{<}x = \beta + \xi$, így valóban létezik megoldása az egyenletnek. □

Mivel a megfordítás nyilvánvaló, azonnal adódik az alábbi állítás:

2.1.19. Következmény. $\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow \exists\xi \quad \beta = \alpha + \xi$

Megjegyzés. *A tétel az $\alpha = \xi + \beta$ alakú egyenletre már nem áll. Ha például α limeszrendszám, β pedig rákövetkező, akkor a jobboldalon álló kifejezés tetszőleges ξ-re rákövetkező rendszám, ezért az egyenletnek nincs megoldása. Még ha feltesszük, hogy van megoldás, a 2.1.14. állítás alapján az sem feltétlenül egyértelmű.*

Az alábbi lemma a szuprémumot kapcsolja össze az aritmetikai műveletekkel.

2.1.20. Lemma. *Legyen $\{\eta_\lambda : \lambda \in \alpha\}$ rendszámokból álló halmaz.*

- $\sup\{\gamma + \eta_\lambda : \lambda \in \alpha\} = \gamma + \sup\{\eta_\lambda : \lambda \in \alpha\}$
- $\sup\{\gamma \cdot \eta_\lambda : \lambda \in \alpha\} = \gamma \cdot \sup\{\eta_\lambda : \lambda \in \alpha\}$

Bizonyítás. Legyen $\xi = \sup\{\gamma + \eta_\lambda : \lambda \in \alpha\}$. Mivel $\xi \geq \gamma$, a 2.1.18 tétel miatt miatt egyértelműen létezik olyan δ, melyre $\xi = \gamma + \delta$. Azt kell megmutatunk, hogy $\delta = \sup\{\eta_\lambda : \lambda \in \alpha\}$

A szuprémum definíciójából tetszőleges $\lambda \in \alpha$-ra $\gamma + \eta_\lambda \leq \xi$, amiből következik, hogy $\eta_\lambda \leq \delta$. Ellenkező esetben az összeadás második argumentumban való szigorú monotonitása miatt $\xi = \gamma + \delta < \gamma + \eta_\lambda \leq \xi$, ami ellentmondás. Ezért δ felső korlátja az $\{\eta_\lambda : \lambda \in \alpha\}$ halmaznak. Ha most β tetszőleges felső korlát, akkor a monotonitás miatt $\gamma + \eta_\lambda \leq \gamma + \beta$. Vagyis $\gamma + \beta$ felső korlátja $\{\gamma + \eta_\lambda : \lambda \in \alpha\}$-nak, amiből $\xi \leq \gamma + \beta$. Ezért $\delta \leq \beta$, ellenkező esetben ugyanis $\xi \leq \gamma + \beta < \gamma + \delta = \xi$. Tehát δ a legkisebb felső korlát, ezzel az első formulát beláttuk.

A második bizonyításához legyen $\xi = \sup\{\gamma \cdot \eta_\lambda : \lambda \in \alpha\}$. A monotonitásból $\gamma \cdot \eta_\lambda \leq \gamma \cdot \sup\{\eta_\lambda : \lambda \in \alpha\}$, tehát $\xi \leq \gamma \cdot \sup\{\eta_\lambda : \lambda \in \alpha\}$. A másik irányú egyenlőség bizonyításához tegyük fel indirekt, hogy $\xi < \gamma \cdot \sup\{\eta_\lambda : \lambda \in \alpha\}$. Ekkor van olyan $\langle c, \varrho\rangle \in \gamma \cdot \sup\{\eta_\lambda : \lambda \in \alpha\}$, melyre $\xi = \gamma \cdot \sup\{\eta_\lambda : \lambda \in \alpha\}|_<\langle c, \varrho\rangle$. Mivel $\varrho \in \sup\{\eta_\lambda : \lambda \in \alpha\}$, $\varrho < \sup\{\eta_\lambda : \lambda \in \alpha\}$, ezért nem lehet korlát, így létezik olyan $\mu \in \alpha$, melyre $\varrho < \eta_\mu$. Ekkor viszont az imént megadott kezdőszelet $\gamma \cdot \eta_\mu$-nek valódi kezdőszelete, amiből $\xi < \gamma \cdot \eta_\mu$ következne. Ezért ξ nem felső korlát. $\square$

A lemma a másik oldali összeadásra és szorzásra nem áll. Például

$$\sup\{n + \omega : n \in \omega\} = \sup\{\omega : n \in \omega\} = \omega \neq \omega + \omega = \sup\{n \in \omega\} + \omega$$
$$\sup\{n \cdot \omega : n \in \omega\} = \sup\{\omega : n \in \omega\} = \omega \neq \omega \cdot \omega = \sup\{n \in \omega\} \cdot \omega$$

2.1.21. Tétel (Maradékos osztás tétele)**.** *Legyen α tetszőleges, $\beta > 0$ rendszám. Ekkor az $\alpha = \beta \cdot \zeta + \xi$ egyértelműen megoldható ζ és ξ-re, ahol $\xi < \beta$*

Bizonyítás. Megkeressük azt a ζ rendszámot, mely a legnagyobb azon rendszámok között, melyekre $\beta \cdot \zeta \leq \alpha$. Azt kellene megmutatni, hogy $C = \{\xi : \beta \cdot \xi \leq \alpha\}$-nek létezik legnagyobb eleme. Ez valóban halmaz, hiszen ha $\alpha < \xi$, akkor $\alpha = 1 \cdot \alpha \leq \beta \cdot \alpha < \beta \cdot \xi$, és nem üres, például $0 \in C$. Alkalmazzuk az előző lemmát: $\alpha \geq \sup\{\beta \cdot \xi : \xi \in C\} = \beta \cdot \sup\{\xi : \xi \in C\} = \beta \cdot \sup C$. Ezért $\sup C \in C$, így C-nek valóban létezik legnagyobb eleme, legyen ez ζ.

Mivel $\beta \cdot \zeta \leq \alpha$ a 2.1.18. tétel miatt létezik olyan ξ, melyre $\beta \cdot \zeta + \xi = \alpha$. Nem lehet, hogy $\xi \geq \beta$, hiszen ekkor $\beta + \delta = \xi$ valamely δ-ra, és ezzel $\alpha = \beta \cdot \zeta + \beta + \delta = \beta(\zeta + 1) + \delta$, amiből $\alpha \geq \beta(\zeta + 1)$, és ez ellentmondana ζ maximalitásának.

Egyértelműség. Tegyük fel, hogy $\alpha = \beta \cdot \zeta + \xi$, ahol $\xi < \beta$. Ekkor $\alpha = \beta \cdot \zeta + \xi < \beta \cdot \zeta + \beta \leq \beta \cdot (\zeta + 1) \leq \beta \cdot (\zeta + \delta)$ tetszőleges $\delta \neq 0$ esetén, amiből következik, hogy ζ valóban csak a C halmaz legnagyobb eleme lehet, és emiatt egyértelmű. ξ egyértelműsége pedig a 2.1.18. tételből következik. $\square$

2.2. Hatványozás

Rendszámok hatványozását rekurzióval szeretnénk definiálni, azaz egy rendszám rendszámadik hatványát a kisebb kitevőjű hatványok segítségével fogjuk meghatározni. Véges kitevőre a hatványozást értelemszerűen definiálhatjuk, ha viszont a definíciót végtelen rendszámokra is ki szeretnénk terjeszteni, szükségünk van a következő technikai tételre:

2.2.1. Lemma (Transzfinit rekurzió tétele)**.** *Legyen G operáció, mely minden f függvényhez egy $G(f)$ halmazt rendel. Ekkor egyértelműen létezik az összes rendszámon értelmezett F operáció, mely minden α rendszámra az $F(\alpha) = G(F|\alpha)$ halmazt rendeli.*

Ha egy operációt megszorítunk egy halmazra, függvényt kapunk, tehát a meghatározás értelmes.

A feltétel pontosan azt fejezi ki, mint amit használni szeretnénk, az $F(\alpha)$ halmaz csak az F kisebb rendszámokon felvett értékeitől függ.

Transzfinit rekurzióval definiált operátorokra vonatkozó tulajdonságok igazolására hatékony eszköz a következő tétel:

2.2.2. Tétel (Transzfinit indukció tétele)**.** *Legyen $\Phi(\alpha)$ tetszőleges formula. Tegyük fel, hogy minden α rendszámra igaz a következő állítás:*

–Ha minden $\beta < \alpha$-ra $\Phi(\beta)$ igaz, akkor $\Phi(\alpha)$ is igaz.

Ekkor $\Phi(\alpha)$ minden rendszámra teljesül.

A tétel a matematikai indukció általánosítása. Most azonban az $\alpha = 0$ esetet nem kell külön feltenni, hiszen ekkor a feltétel üres.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy van olyan β', melyre $\Phi(\beta')$ hamis. Ekkor van olyan legkisebb β is, melyre $\Phi(\beta)$ hamis. A minimalitásból $\alpha < \beta$ esetén $\Phi(\alpha)$ igaz. A feltétel szerint ekkor $\Phi(\beta)$-nak igaznak kéne lennie. Ez ellentmondás. □

2.2.3. Definíció (Rendszámhatványozás)**.** *Legyen $\gamma > 0$ tetszőleges rendszám.*

- $\gamma^0 = 1$
- $\gamma^{\alpha+1} = \gamma^\alpha \cdot \gamma$
- *Ha α limeszrendszám, akkor $\gamma^\alpha = \sup\{\gamma^\beta : \beta < \alpha\}$*

A definícióban szereplő rendszámhatványok csak a kisebb kitevőjű hatványok függvényei, ezért a transzfinit rekurzió tétele szerint valóban létezik a rendszámhatványozás-operáció.

2.2.4. Állítás (Hatványozás alaptulajdonságai)**.** *Legyen* $\gamma > 1$ *rendszám.*

(i) $\gamma^\alpha \cdot \gamma^\beta = \gamma^{\alpha+\beta}$

(ii) $(\gamma^\alpha)^\beta = \gamma^{\alpha\cdot\beta}$

(iii) Ha $\alpha < \beta$*, akkor* $\gamma^\alpha < \gamma^\beta$

(iv) $\alpha \leq \gamma^\alpha$*. Nem állítható szigorú egyenlőtlenség.*

Bizonyítás. A bizonyítást transzfinit indukcióval végezzük.

Először a monotonitást látjuk be. Rögzítsük az $\alpha < \beta$ rendszámokat. Ha $\beta = 0$, akkor a feltétel üres. Ha β limeszrendszám, akkor $\alpha + 1 < \beta$. A szorzás monotonitásából és a sup definíciójából

$$\gamma^\alpha = \gamma^\alpha \cdot 1 < \gamma^\alpha \cdot \gamma = \gamma^{\alpha+1} \leq \gamma^\beta.$$

Ha β rákövetkező rendszám, akkor $\beta = \zeta + 1$, valamilyen $\alpha \leq \zeta$-ra. Ekkor az indukciós feltevés szerint

$$\gamma^\alpha \leq \gamma^\zeta = \gamma^\zeta \cdot 1 < \gamma^\zeta \cdot \gamma = \gamma^{\zeta+1} = \gamma^\beta.$$

Teljesül tehát a transzfinit indukció feltétele, ezzel igazoltuk a monotonitást.

Most belátjuk az (i) állítást. $\beta = 0$-ra ez nyilvánvaló.

Ha β rákövetkező rendszám, azaz $\beta = \zeta + 1$, akkor az indukciós feltevésből és a szorzás asszociativitásából

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^{\alpha+\zeta+1} = \gamma^{\alpha+\zeta} \cdot \gamma = (\gamma^\alpha \cdot \gamma^\zeta) \cdot \gamma = \gamma^\alpha \cdot (\gamma^\zeta \cdot \gamma) = \gamma^\alpha \cdot \gamma^{\zeta+1} = \gamma^\alpha \cdot \gamma^\beta.$$

Ha β limeszrendszám, akkor $\alpha + \beta$ is az, és ekkor

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \sup\{\gamma^\xi : \xi < \alpha + \beta\} = \sup\{\gamma^{\alpha+\xi} : \xi < \beta\} = \gamma^\alpha \cdot \sup\{\gamma^\xi : \xi < \beta\} = \gamma^\alpha \cdot \gamma^\beta.$$

ahol a második egyenlőségnél a már bizonyított monotonitást használtuk ki, az utána következő egyenlőségnél pedig a 2.1.20. lemmát alkalmaztuk.

Következzék a (ii) állítás bizonyítása. Ha $\beta = 0$, akkor az állítás ismét teljesül. Ha β rákövetkező rendszám, azaz $\beta = \zeta + 1$, akkor

$$(\gamma^\alpha)^\beta = (\gamma^\alpha)^\zeta \cdot \gamma^\alpha = \gamma^{\alpha\cdot\zeta} \cdot \gamma^\alpha = \gamma^{\alpha\cdot\zeta+\alpha} = \gamma^{\alpha\cdot(\zeta+1)} = \gamma^{\alpha\cdot\beta}.$$

Legyen most β limeszrendszám.

Először megmutatjuk, hogy $\sup\{\gamma^{\alpha\cdot\zeta} : \zeta < \beta\} = \sup\{\gamma^\xi : \xi < \alpha \cdot \beta\}$. Legyen

$\xi < \alpha \cdot \beta$. A 2.1.13. lemma alapján létezik olyan $\zeta < \beta$, melyre $\xi < \alpha\zeta$. Mivel a hatványfüggvény monoton és a szorzatfüggvény a második változóban szigorúan monoton, így a kompozíciójuk szigorúan monoton, ezért $\gamma^{\xi} < \gamma^{\alpha \cdot \zeta} \leq \sup\{\gamma^{\alpha \cdot \zeta} : \zeta < \beta\}$. Ebből:

$$\sup\{\gamma^{\xi} : \xi < \alpha \cdot \beta\} \leq \sup\{\gamma^{\alpha \cdot \zeta} : \zeta < \beta\}$$

A másik irányú egyenlőtlenség következik abból, hogy a jobboldali halmaz részhalmaza a baloldalinak. Ez alapján:

$$(\gamma^{\alpha})^{\beta} = \sup\{(\gamma^{\alpha})^{\xi} : \xi \in \beta\} = \sup\{\gamma^{\alpha \cdot \xi} : \xi \in \beta\} = \sup\{\gamma^{\xi} : \xi < \alpha \cdot \beta\} = \gamma^{\alpha \cdot \beta}.$$

A (iv) állítás belátásához vegyük a következő leképezést: $f(\beta) = \gamma^{\beta}$, $\beta < \alpha$. Ez az α-t rendezéstartóan beágyazza γ^{α}-ba a (iii) tulajdonság szerint. Ebből megkaptuk az $\alpha \leq \gamma^{\alpha}$ öszefüggést.

Legyen $\alpha = \omega, \gamma = 2$. Ekkor $\sup\{2^k : k \in \omega\} = \omega$, ezért $\omega = 2^{\omega}$ áll. A példa mutatja, hogy valóban nem állíthatunk szigorú egyenlőtlenséget. $\square$

2.2.5. Állítás. *γ-hatványok szuprémuma is γ-hatvány.*

Bizonyítás. Ha létezik a γ-hatványok között legnagyobb, akkor készen vagyunk, ezért feltehető, hogy nem ez az eset áll fenn.

Ha szerepel az alaphalmazban egy γ^{ξ} hatvány, akkor a monotonitási tulajdonság miatt a szuprémumon nem változtatunk, ha az alaphalmazba belevesszük a ξ-nél kisebb kitevőjű hatványokat is. Ezért az alaphalmazról feltehető, hogy $\{\gamma^{\zeta} : \zeta < \alpha\}$ alakú valamilyen α limeszrendszámra. De ekkor a szuprémum γ^{α}. $\square$

3. fejezet

Oszthatóság

3.1. Bal- és jobbosztók

Láttuk, hogy rendszámok körében a szorzás nem kommutatív művelet, így ha az oszthatóságot a természetes számok oszthatóságához hasonlóan szeretnénk bevezetni, különbséget kell tennünk bal- és jobboldali osztók között.

3.1.1. Definíció (Bal- és jobboldali osztók)**.**

- *Azt mondjuk, hogy az α rendszám a γ rendszámot **balról osztja**, vagy **baloldali osztója**, ha létezik olyan β rendszám, melyre $\alpha \cdot \beta = \gamma$. Ilyenkor azt is mondhatjuk, hogy γ az α-nak **jobboldali többszöröse**.*
- *Hasonlóan, a β rendszám a γ rendszámot **jobbról osztja**, vagy **jobboldali osztója**, ha létezik olyan α rendszám, melyre $\alpha \cdot \beta = \gamma$. Ilyenkor azt is mondhatjuk, hogy γ a β-nak **baloldali többszöröse**.*

A természetes számoknál megszoktuk, hogy az n-nel osztható számok összege és különbsége is osztható n-nel. Ez a tulajdonság a következő állítás szerint kiterjed a baloldali oszthatóságra. Ennek oka a balról szorzás disztributivitása. Mivel a másik oldali disztributivitás nem teljesül, azt várhatjuk, hogy az állítás jobbosztókra nem igaz. Valóban, könnyen ellenőrizhető, hogy $\omega + \omega = \omega \cdot 2 = x \cdot \omega$ nem oldható meg x-re.

3.1.2. Állítás. *Legyenek $\beta \leq \alpha$ és γ rendszámok. Ha γ az α és β balosztója, akkor balosztója az összegüknek és a különbségüknek is.*

Bizonyítás. $\gamma = 0$ esetén az állítás triviális. Legyen $\gamma \neq 0$.

A feltétel szerint $\alpha = \gamma \cdot \alpha_1$ és $\beta = \gamma \cdot \beta_1$. Ekkor $\alpha + \beta = \gamma \cdot (\alpha_1 + \beta_1)$ és $\beta + \alpha = \gamma \cdot (\beta_1 + \alpha_1)$.

Legyen $\alpha = \beta + \xi$, és meg szeretnénk mutatni, hogy ξ is osztható γ-val. A maradékos osztás tétele szerint $\xi = \gamma \cdot \delta + \zeta$, $\zeta < \gamma$. Ekkor $\gamma \cdot \alpha_1 = \alpha = \gamma \cdot \beta_1 + (\gamma \cdot \delta + \zeta) = \gamma \cdot (\beta_1 + \delta) + \zeta$, $\zeta < \gamma$. Ezzel α két felbontásához jutottunk, ami a maradékos osztás tétele értelmében egyértelmű. Ezért $\zeta = 0$. □

A következő tétel a limeszrendszámok egy hasznos karakterizációját adja.

3.1.3. Tétel. *Egy $\alpha > 0$ rendszám pontosan akkor limeszrendszám, ha ω balról osztja őt.*

Bizonyítás. Ha ω balról osztja α-t, akkor a 2.1.13. lemma miatt α limeszrendszám.

Megfordítás: A maradékos osztás tétele alapján léteznek olyan β és ξ rendszámok, melyre $\alpha = \omega \cdot \beta + k$, $k < \omega$. Ha $k \neq 0$, akkor a jobboldalon rákövetkező rendszám lenne, ami ellentmondás. Ezért $k = 0$, és α balról osztható ω-val.

□

3.1.4. Következmény. *Tetszőleges β rendszám egyértelműen felírható $\alpha + n$ alakban, ahol α limeszrendszám vagy 0, n pedig természetes szám.*

Ezt a felbontást β ***limeszes felbontás****ának nevezzük.*

Bizonyítás. A maradékos osztás értelmében $\beta = \omega \cdot \gamma + n \quad n < \omega$. Az előző tétel szerint $\alpha = \omega \cdot \gamma$ limeszrendszám vagy 0.

Az egyértelműséghez legyen $\alpha_1 = \omega \cdot \gamma_1$, $\alpha_2 = \omega \cdot \gamma_2 \quad \omega \cdot \gamma_1 + n_1 = \beta = \omega \cdot \gamma_2 + n_2$. Az állítás következik a maradékos osztás egyértelműségéből. □

3.1.5. Következmény. *Tetszőleges α limeszrendszámra és $0 < k < \omega$-ra $k \cdot \alpha = \alpha$.*

Bizonyítás. $\alpha = \omega \cdot \beta$ valamilyen β rendszámra. Ekkor a 2.1.14. állítást felhasználva $k \cdot \alpha = k \cdot (\omega \cdot \beta) = (k \cdot \omega) \cdot \beta = \omega \cdot \beta = \alpha$. □

A következő lemma a rendszámokkal való számolásban alapvető fontosságú lesz.

3.1.6. Lemma. *Legyen α limeszrendszám, n természetes szám.*

- *Ha β limeszrendszám, akkor $(\alpha + n) \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$.*
- *Ha β rákövetkező, akkor $(\alpha + n) \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + n$*

Bizonyítás. Az első esetben az asszociativitás és a 2.1.14. állítás következtében

$$(\alpha + n) \cdot \beta = \underbrace{(\alpha + n) + (\alpha + n) + \dots}_{\text{„ } \beta \text{ db”}} = \alpha + \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (1 + \beta) = \alpha \cdot \beta.$$

A második összefüggés bizonyításához vegyük a $\beta = \gamma + k$ felbontást, ahol γ limeszrendszám vagy 0, $k > 0$ természetes szám.

$$(\alpha+n)\beta = (\alpha+n)(\gamma+k) = (\alpha+n)\gamma+(\alpha+n)\cdot k = \alpha\cdot\gamma+\big(\alpha+(n+\alpha)(k-1)+n\big) = \alpha\beta+n$$

□

Láttuk, hogy a balról egyszerűsítés általában nem teljesül. A következő lemmában megmutatjuk, hogy rákövetkező rendszámokra viszont igen.

3.1.7. Lemma. *Legyen β rákövetkező rendszám. Ekkor $\alpha_1\cdot\beta = \alpha_2\cdot\beta$ esetén $\alpha_1 = \alpha_2$ is fennáll.*

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy $x_1 < x_2$ esetén $x_1 \cdot \beta < x_2 \cdot \beta$.

Tegyük fel először, hogy $x_1 = k$ véges rendszám, és vegyük a $\beta = \beta' + b$ limeszes felbontást. Ekkor

$$k(\beta'+b) = k\beta'+kb \leq (k+1)\beta'+kb < (k+1)\beta'+(k+1)b = (k+1)(\beta'+b) \leq x_2\cdot\beta$$

Ha $x_1 = \xi + k$ végtelen, akkor

$$(\xi+k)\cdot\beta = \xi\cdot\beta+k < \xi\cdot\beta+k+1 = (\xi+k+1)\beta \leq x_2\beta.$$

□

Megjegyzés. *Bár általában a szorzás az első argumentumban szigorúan nem monoton, a fenti tétel bizonyításában pont azt láttuk be, hogyha a második tényező rákövetkező rendszám, akkor már igen.*

3.1.8. Állítás. *α pontosan akkor osztható balról $\omega+2$ és $\omega+3$-mal, ha balról osztható ω^2-tel is.*

Bizonyítás. Az $\alpha = 0$ eset triviális. Legyen $\alpha \neq 0$.

Először tegyük fel, hogy α osztható balról $\omega+2$ és $\omega+3$-mal, azaz vannak olyan nemnulla α_1 és α_2 rendszámok, melyekre $\alpha = (\omega+2)\cdot\alpha_1 = (\omega+3)\cdot\alpha_2$. Ekkor nem lehet, hogy α_1 is és α_2 is rákövetkező rendszám legyen, hiszen a 3.1.6. lemma miatt ekkor $\alpha = \beta_1 + 2 = \beta_2 + 3$ teljesülne valamilyen β_1 és β_2 limeszrendszámokra, ami a 3.1.4. következmény egyértelműségi része miatt miatt lehetetlen.

Ha például α_1 limeszrendszám, akkor $\alpha_1 = \omega\cdot\gamma$, és ezzel $\alpha = (\omega+2)\cdot\omega\cdot\gamma$. Mivel $(\omega+2)\cdot\omega = \omega^2$, ezért ω^2 balról osztja α-t.

A megfordítás következik abból, hogy mind $\omega+2$, mind $\omega+3$ balosztója ω^2-nek. □

3.1.9. Tétel. *Tetszőleges $\alpha \neq 0$ rendszámnak csak véges sok jobbosztója lehet.*

Bizonyítás. Jelölje α jobbosztóinak a halmazát R, és tegyük fel indirekt, hogy R végtelen. Az R halmaz jólrendezett, így az egzisztenciatétel következtében hasonló egy végtelen rendszámhoz, és hasonlóságot megadó függvény meghatároz egy, az R elemeiből álló növekvő sorozatot. Minden jobbosztóhoz válasszunk egy tetszőleges balosztót. Nagyobb jobbosztóhoz kisebb balosztó tartozik. Ugyanis $\varrho_1, \varrho_2 \in R$, $\varrho_1 < \varrho_2$ és $\delta_1\varrho_1 = \alpha = \delta_2\varrho_2$ esetén $\delta_1 \leq \delta_2$-ből $\alpha = \delta_1 \cdot \varrho_1 < \delta_1 \cdot \varrho_2 \leq \delta_2 \cdot \varrho_2 = \alpha$ következne. Ez azt jelenti, hogy volna a balosztókból álló végtelen csökkenő sorozat, ami lehetetlen. □

Láttuk, hogy $n \cdot \omega = \omega$, ezért a fenti állítás teljes általánosságban nem igaz a balosztókra. A következő tétel azt mutatja, hogy rákövetkező rendszámokra viszont teljesül.

3.1.10. Tétel. *Tetszőleges α rákövetkező rendszámnak csak véges sok balosztója lehet.*

Bizonyítás. Mivel α-nak csak véges sok jobbosztója lehet, elég megmutatni, hogy minden jobbosztóhoz egy balosztó tartozhat. Tekintsük tehát rögzített β jobbosztóra az alábbi egyenletet: $\alpha = x \cdot \beta$. Mivel α rákövetkező, β-nak is annak kell lennie. A 3.1.7. lemma miatt ennek a megoldása egyértelmű.

Ezért valóban csak véges sok balosztó lehetséges. □

3.2. Közös osztók, legnagyobb közös osztó

3.2.1. Definíció. *Legyen A rendszámokból álló halmaz. Ha γ balról osztja A minden elemét, akkor γ-t az A halmaz **közös balosztó**jának nevezzük. Ha γ a legnagyobb ilyen tulajdonságú rendszám, akkor γ az A halmaz **legnagyobb közös balosztó**ja. A közös jobbosztót értelemszerűen definiáljuk.*

3.2.2. Tétel. *Tetszőleges A rendszámokból álló nemüres halmaznak létezik legnagyobb közös balosztója. Bármely baloldali közös osztó balról osztja a legnagyobb közös balosztót.*

Bizonyítás. Először azt fogjuk megmutatni, hogy két rendszámnak, α és β-nak létezik legnagyobb közös balosztója. Ehhez az Euklidészi algoritmust alkalmazzuk rendszámokra. Az algoritmus végességét az fogja garantálni, hogy a maradékos osztás tétele értelmében a maradékok szigorúan monoton csökkenő sorozatot alkotnak, ezért ennek a sorozatnak végesnek kell lennie. Léteznek tehát olyan $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_k$ és $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{k-1}$ rendszámok melyekre

$$\alpha = \beta \cdot \varrho_1 + \delta_1 \text{ és } \delta_1 < \beta$$

$$\beta = \delta_1 \cdot \varrho_2 + \delta_2 \text{ és } \delta_2 < \delta_1$$

$$\delta_1 = \delta_2 \cdot \varrho_3 + \delta_3 \text{ és } \delta_3 < \delta_2$$

$$\vdots$$

$$\delta_{k-3} = \delta_{k-2} \cdot \varrho_{k-1} + \delta_{k-1} \text{ és } \delta_{k-1} < \delta_{k-2}$$

$$\delta_{k-2} = \delta_{k-1} \cdot \varrho_k$$

Azt állítjuk, hogy δ_{k-1} az α és β legnagyobb baloldali közös osztója. Alulról kifejte az egyenleteket, látható, hogy mind α, mind β előáll $\delta_{k-1} \cdot \gamma$ alakban alkalmas γ-ra.

Legyen ξ tetszőleges közös osztója α-nak és β-nak. Ekkor az első sorból a 3.1.2. tétel következtében ξ δ_1-nek is balosztója. A második sorból hasonlóan következik, hogy ξ balosztója δ_2-nek is. Lefele haladva látható, hogy ξ balosztója δ_{k-1}-nek is.

Ebből már következik, hogy δ_{k-1} a legnagyobb közös osztó.

Legyen most A rendszámokból álló halmaz. Feltehető, hogy A legalább kételemű. Legyen A tetszőleges két elemének, α_0 és α_1-nek a legnagyobb közös osztója γ_1. Ha γ_1 balról osztja A minden elemét, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor legyen $\alpha_2 \in A$, melyet γ_1 nem oszt balról. Legyen γ_2 a γ_1 és α_2 legnagyobb közös balosztója. Nyilván γ_2 a $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ rendszámok legnagyobb közös balosztója, valamint $\gamma_2 < \gamma_1$. Ha γ_2 osztható A minden elemével, akkor készen vagyunk. Ha nem folytassuk az eljárást. Ez az algoritmus biztosan véget ér, hiszen a (γ_k) sorozat monoton csökkenő. Végül az A halmaz legnagyobb közös balosztójához jutunk. □

Hasonló állítást szeretnénk megfogalmazni a legnagyobb közös jobbosztókra is. Ehhez szükségünk van a következő tételre:

3.2.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy α és β jobbosztója $\gamma > 0$-nak. Ekkor az alábbiak valamelyike teljesülni fog:*

- *α jobbosztója β-nak*
- *β jobbosztója α-nak*
- *Létezik olyan ξ limeszrendszám vagy 0, és léteznek olyan $p > 0, q > 0$ természetes számok, melyekre $\alpha = \xi + p$, $\beta = \xi + q$.*

  Ebben az esetben, ha $[p, q]$-vel jelöljük a p és q legkisebb közös többszörösét, akkor $\xi + [p, q]$ a legkisebb baloldali többszöröse α-nak és β-nak, és $\xi + [p, q]$ jobbról osztja γ-t.

Bizonyítás. A feltétel szerint $\varrho \cdot \alpha = \delta \cdot \beta$ valamilyen ϱ, δ rendszámokra. A következőkben α és β közös baloldali többszörösein haladva keresünk minél egyszerűbb alakú ϱ-t és δ-t.

Először is feltehető, hogy ϱ és δ legnagyobb közös balosztója 1, különben kiemelhetnénk azt, majd egyszerűsíthetnénk vele. Ezért a $\varrho = \omega \cdot \varrho_1 + r_1$ és $\delta = \omega \cdot \delta_1 + d_1$ felbontások esetén r_1 és d_1 közül legalább az egyik nem nulla.

Megmutatjuk, hogy ha ϱ és δ egyike sem véges, azaz sem ϱ_1, sem δ_1 nem nulla, akkor a balosztókat tovább lehet egyszerűsíteni. A feltétel szerint $(\omega \cdot \varrho_1 + r_1)\alpha = (\omega \cdot \delta_1 + d_1)\beta$. Ekkor a 3.1.6. lemma alapján

$$\omega \cdot \varrho_1 \cdot \alpha + r_1' = \omega \cdot \delta_1 \cdot \beta + d_1',$$

ahol $r_1' = r_1$ vagy $r_1' = 0$, és $d_1' = d_1$ vagy $d_1' = 0$ a szerint, hogy α és β rákövetkező vagy limeszrendszámok. Mindenesetre a maradékos osztás egyértelműségéből következik, hogy $\varrho_1 \cdot \alpha = \delta_1 \cdot \beta$. Ha $r_1 \neq 0$, akkor $\varrho = \omega \cdot \varrho_1 + r_1 > \omega \cdot \varrho_1 \geq \varrho_1$, és hasonlóan $d_1 \neq 0$-ból $\delta > \delta_1$ következik, vagyis legalább az egyik jobbosztó biztosan csökkent. Ismét, ha ϱ_1 és δ_1 egyike sem véges, akkor ϱ_2, δ_2 párhoz jutunk, ahol $\varrho_1 > \varrho_2$ vagy $\delta_1 > \delta_2$. Folytassuk az eljárást. Mivel a párok minimumai csökkenő sorozatot alkotnak, végül egy olyan párhoz jutunk, aminek legalább az egyik tagja nemnulla természetes szám lesz.

Legyen tehát $m \cdot \alpha = \zeta \cdot \beta$, valamint $\alpha = \omega \cdot \alpha_1 + a$ és $\zeta = \omega \cdot \zeta_1 + z$, ahol a, z természetes számok.

Először nézzük azt az esetet, amikor ζ nem véges, vagyis $\zeta_1 \neq 0$. Ha α limeszrendszám, azaz $a = 0$, akkor $\alpha = m\alpha = \zeta \cdot \beta$ miatt β jobbosztója α-nak. Ha $a \neq 0$, akkor a bal oldal rákövetkező, amiért a β-nak is rákövetkező rendszámnak kell lennie. Ekkor

$$\omega \cdot \alpha_1 + ma = \omega \cdot \zeta_1 \cdot \beta + z,$$

amiből azt kapjuk, hogy $z = ma$. Ekkor $\zeta = \omega \cdot \zeta_1 + z = m\omega \cdot \zeta_1 + ma = m(\omega \cdot \zeta_1 + a)$ miatt m-mel való egyszerűsítés után ismét azt kapjuk, hogy β jobbosztója α-nak.

Legyen most ζ is véges, azaz $m \cdot \alpha = k \cdot \beta$, és feltehető, hogy $(m, k) = 1$. $m \cdot (\omega \cdot \alpha_1 + a) = k(\omega\beta_1 + b)$-ből $\omega \cdot \alpha_1 + ma = \omega\beta_1 + kb$, ezért $\alpha_1 = \beta_1$ és $ma = kb$. Az $\xi = \omega \cdot \alpha_1$ választással valóban eljutottunk az $\alpha = \xi + a$ és $\beta = \xi + b$ előállításokhoz. Az is látható, hogy a és b egyszerre lehet nulla, amikor $\alpha = \beta$ áll fenn.

Tegyük fel, hogy sem a, sem b nem nulla. Legyenek a_1 és b_1 olyan természetes számok, melyekre $a_1 \cdot a = [a, b]$ és $b_1 \cdot b = [a, b]$. Ekkor $a_1 \cdot (\xi + a) = b_1 \cdot (\xi + b) = \xi + [a, b]$, és hasonló számolással látható, hogy más közös többszörös nincs ξ és $\xi + [a, b]$ között.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy $\xi + [a,b]$ jobbról osztja γ-t.

$$\varrho_k \cdot \alpha = m \cdot \alpha = \frac{m \cdot a}{[a,b]} \cdot (\xi + [a,b])$$

azaz $\xi+[a,b]$ jobbról osztja $\varrho_k \cdot \alpha$-t ($ma/[a,b]$ egész, hiszen ma az a és b többszöröse). Legyen tehát $\varrho_k \cdot \alpha = \lambda_k \cdot (\xi + [a,b])$. Ez alapján visszafele léphetük:
($a \neq 0$ miatt α rákövetkező)

$\varrho_{k-1} \cdot \alpha = \omega \cdot \varrho_k \cdot \alpha + r'_k = \omega \cdot \lambda_k \cdot (\xi + [a,b]) + r'_k = (\omega \cdot \lambda_k + r_k) \cdot (\xi + [a,b]) = \lambda_{k-1} \cdot (\xi + [a,b])$. Tehát $\xi + [a,b]$ jobbról osztja $\varrho_{k-1} \cdot \alpha$-t is. A k-adik lépés után megkapjuk, hogy $\xi+[a,b]$ jobbról osztja $\varrho\alpha = \gamma$-t. Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

Megjegyzés. *A tétel a jobbosztókra elég szigorú feltételt szab ki. Ha a jobbosztók nem osztják egymást, akkor nem lehetnek „messze" egymástól.*

3.2.4. Következmény. *Tetszőleges A rendszámokból álló nemüres halmaznak létezik legnagyobb közös jobbosztója. Bármely jobboldali közös osztó jobbról osztja a legnagyobb közös jobbosztót.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in A$ tetszőleges rendszám. Mivel α-nak csak véges sok jobbosztója lehet, olyan jobbosztóból is csak véges sok van, ami jobbról osztja A összes elemét, így van közöttük legnagyobb is, legyen ez δ, emellett legyen $\varrho \neq \delta$ tetszőleges közös jobbosztó. Tegyük fel indirekt, hogy ϱ nem osztja δ-t jobbról. δ nem oszthatja ϱ-t jobbról, mert akkor volna δ-nál nagyobb közös jobbosztó is. Ekkor viszont tetszőleges $\alpha' \in A$ elemre felírva az előző tételt, kapjuk, hogy α'-t jobbról osztja a δ és ϱ legkisebb baloldali többszöröse, ebből megint az következne, hogy δ nem a legnagyobb jobbosztó. □

3.3. Közös többszörös

3.3.1. Tétel. *Tetszőleges nemnulla rendszámokból álló A halmaznak van nemnulla legkisebb jobboldali többszöröse, és ez a legkisebb jobboldali többszörös balról oszt tetszőleges közös jobboldali többszöröst.*

Bizonyítás. Legyen $\gamma = \sup A$, $\alpha \in A$. Ekkor

$$\gamma^\omega = 1 \cdot \gamma^\omega \leq \alpha \cdot \gamma^\omega \leq \gamma \cdot \gamma^\omega = \gamma^{1+\omega} = \gamma^\omega,$$

tehát mindenhol egyenlőség van, ezért γ^ω közös jobboldali többszörös. A jólrendezés miatt ebből már következik, hogy létezik legkisebb közös jobboldali többszörös is, legyen ez γ'.

Legyen γ'' tetszőleges közös jobboldali többszörös, és osszuk el γ''-t γ'-vel maradékosan:

$$\gamma'' = \gamma' \cdot \delta + \xi,$$

ahol $\xi < \gamma'$. Megmutatjuk, hogy $\xi = 0$. Legyen $\alpha \in A$ tetszőleges. Ekkor α osztja balról γ' és γ''-t, így a 3.1.2. állítás szerint osztja ξ-t is. Mivel α tetszőleges volt, ξ vagy 0, vagy közös többszörös. De $\xi < \gamma'$ és γ' minimalitása miatt ez utóbbi nem állhat fenn. Tehát $\xi = 0$. $\square$

Megjegyzés. *Baloldali többszörös nem feltétlenül létezik, például ω-nak és $\omega 2 + 1$-nek nincs baloldali közös többszörösük. Ezt a jobbosztókra vonatkozó tétel segítségével látjuk be. $\omega 2 + 1$ nem osztható jobbról ω-val, hiszen az $\omega 2 + 1 = \omega \cdot \xi$ egyenlet jobboldalán limeszrendszám vagy 0 áll. Az is látható, hogy $\omega 2 + 1$ sem osztja jobbról $\omega - t$. Így ha volna közös többszörös, akkor az említett tételből azt kapnánk, hogy létezik ξ limeszrendszám vagy 0 és p, q természetes számok, melyekre $\omega 2 + 1 = \xi + p$ és $\omega = \xi + q$. Pedig ilyenek nem létezhetnek.*

4. fejezet

Rendszámok normálalakja

4.1. Rendszámrendszerek

Ebben a fejezetben célunk felírni a rendszámokat hatványösszeg alakban. Ennek segítségével a rendszámok egy jól kezelhető előállításához jutunk.

Az alábbi tétel egy szemléletes képet ad a rendszámhatványokról.

4.1.1. Tétel. *Legyen $\Phi_{\alpha,\gamma}$ azon $f : \alpha \to \gamma$ leképezések halmaza, $\gamma \neq 0$, melyek véges sok koordinátán kívül a 0 értéket veszik fel. Definiáljuk a $\prec$ relációt $\Phi_{\alpha,\gamma}$ elemein. $f \neq g$ esetén:*

$$f \prec g \Leftrightarrow f(\xi) < g(\xi) \text{ azon } \xi < \alpha\text{-k közül a legnagyobbra, melyre } f(\xi) \neq g(\xi).$$

Ekkor a $\prec$ reláció jólrendezés és $\langle \Phi_{\alpha,\gamma}, \prec \rangle$ rendtípusa γ^α.

Bizonyítás.

$\prec$ nyilvánvalóan irreflexiv.

Legyen $f, g \in \Phi_{\alpha,\gamma}$. Mivel f és g is csak véges helyen vesz fel nemnulla értéket, így legfeljebb véges sok helyen térhetnek el egymástól, ezért van ezen helyek között legnagyobb is. Ebből $\prec$ trichotóm.

Ha $f \prec g \prec h$, akkor legyen ξ_1 a legnagyobb koordináta, ahol f és g eltérnek, ξ_2 pedig az a legnagyobb koordináta, ahol g és h eltérnek. Ha $\xi_1 < \xi_2$, akkor f és h ξ_2 felett már megegyeznek és $f(\xi_2) = g(\xi_2) < h(\xi_2)$. Ha $\xi_1 > \xi_2$, akkor f és h ξ_1 felett egyeznek meg, és $f(\xi_1) < g(\xi_1) = h(\xi_1)$. Ezért ezekben az esetekben $f \prec h$. $f \prec h$ nyilván teljesül a $\xi_1 = \xi_2$ esetben is, tehát $\prec$ tranzitív.

A jólrendezést a hasonlósággal együtt bizonyítjuk α-ra vonatkozó transzfinit indukcióval. $\Phi_{0,\alpha} = \{0\}$, ezért az állítás 0-ra fennáll.

Legyen $\alpha = \beta + 1$ rákövetkező rendszám. Jelölje H_ξ azon leképezések halmazát, ahol a β-adik koordináta ξ, azaz $H_\xi = \{f \in \Phi(\alpha, \gamma) : f(\beta) = \xi\}$. Világos, hogy H_ξ

hasonló $\Phi_{\beta,\gamma}$-hoz, és $\Phi_{\alpha,\gamma}$ a H_ξ halmazok rendezett összege. Azaz $\Phi(\alpha,\gamma)$ hasonló $\Phi_{\beta,\gamma}\cdot\gamma$-hoz, és így az indukciós feltevés szerint $\gamma^\beta\cdot\gamma=\gamma^\alpha$-hoz is.

Legyen α limeszrendszám, és legyen $\beta<\alpha$. Ekkor tetszőleges $f\in\Phi(\beta,\gamma)$ függvényre tekinthetünk úgy, mint egy $\Phi(\alpha,\gamma)$-belire, ha a maradék koordinátáját 0-nak választjuk. Ekkor viszont $\Phi(\alpha,\gamma)$ pont a $\Phi(\beta,\gamma)$-k úniójaként áll elő, ahol a kisebb indexű Φ-k kezdőszeletei a nagyobbaknak. Ekkor az indukcós feltevést alkalmazva $\Phi(\alpha,\gamma)$ hasonló $\sup\{\gamma^\beta:\beta<\alpha\}=\gamma^\alpha$-hoz.

Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

Megjegyzés. *Természetes számok esetén a helyiértékes írásmód értelmében úgy hasonlítjuk össze a számokat, hogy vesszük azt a legnagyobb helyiértéket, ahol a két szám különbözik, és ezen helyiérték alapján döntjük el, hogy melyik szám a nagyobb. Ezért az is következik a tételből, hogy bármely természetes számnak létezik tetszőleges k számrendszerben felírt helyiértékes alakja. Az előzőek szerint ugyanis a k-as számrendszerbeli számok hasonlóak $\Phi_{\omega,k}\sim k^\omega=\omega$-hoz.*

A tétel egy másik fontos következménye, hogy a hatványozás a hatványalapban is monoton:

4.1.2. Következmény. *$\alpha\le\beta$ és γ esetén $\alpha^\gamma\le\beta^\gamma$.*

Bizonyítás. Valóban, $\alpha^\gamma\sim\Phi_{\gamma,\alpha}$ és $\beta^\gamma\sim\Phi_{\gamma,\beta}$, valamint tudjuk, hogy $\Phi_{\gamma,\alpha}$ a $\Phi_{\gamma,\beta}$-nak megszorítása. Ebből $\alpha^\gamma\le\beta^\gamma$. $\square$

4.1.3. Állítás. *Legyen $n>1$ tetszőleges természetes szám. Ekkor*

(a) $n^{\omega^\omega}=\omega^{\omega^\omega}$

(b) $(\omega+n)^\omega=\omega^\omega$

Bizonyítás. Az első állítás: $n^{\omega^\omega}=\sup\{n^{\omega^k}:k\in\omega\}=\sup\{(n^\omega)^{\omega^{k-1}}:k\in\omega\}=\sup\{\omega^{\omega^{k-1}}:k\in\omega\}=\omega^{\omega^\omega}$

A második állítás adódik az $(\omega+n)^\omega=\sup\{(\omega+n)^k:k\in\omega\}$ és $\omega^k\le(\omega+n)^k\le(\omega\cdot 2)^k=\omega^k\cdot 2\le\omega^{k+1}$ összefüggésekből. $\square$

4.1.4. Állítás. *Tetszőleges α limeszrendszámra $1^\alpha+2^\alpha=3^\alpha$.*

Bizonyítás. Ha α limeszrendszám, akkor $\alpha=\omega\cdot\beta$, valamilyen rendszámra. Ekkor

$$1^\alpha+2^\alpha=1+(2^\omega)^\beta=1+\omega^\beta=\omega^\beta=(3^\omega)^\beta=3^\alpha.$$

$\square$

4.1.5. Tétel. *Legyen $\gamma > 1$ rögzített rendszám. Ekkor tetszőleges $\alpha > 0$ rendszámhoz egyértelműen létezik olyan $\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n$ sorozat valamint $\eta_j < \gamma$ nemnulla rendszámok $(j \leq n)$, melyekre*

$$\alpha = \gamma^{\xi_n} \cdot \eta_n + \gamma^{\xi_{n-1}} \cdot \eta_{n-1} + \cdots + \gamma^{\xi_0} \cdot \eta_0$$

A fenti előállítást az α rendszám γ ***rendszámrendszerbeli alak****jának nevezzük.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy létezik γ-nak olyan legnagyobb kitevőjű hatványa, mely nem nagyobb α-nál. Legyen $C = \{\beta : \gamma^\beta \leq \alpha\}$. Tudjuk, hogy $\alpha < \alpha + 1 \leq \gamma^{\alpha+1}$, ezért C halmaz. A hatványozás monotonitása miatt C rendszámokból álló tranzitív halmaz, tehát maga is rendszám. Tegyük fel indirekt, hogy C limeszrendszám. Ekkor $\gamma^\beta \leq \alpha$ minden $\beta < C$ rendszámra, vagyis α felső korlátja ezeknek a hatványoknak. Ezért $\sup\{\gamma^\beta : \beta < C\} \leq \alpha$, amiből $\gamma^C \leq \alpha$. Azt kaptuk, hogy $C \in C$, ami ellentmond a rendezés irreflexivitásának.

Ha α γ-hatvány, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor α-t osszuk maradékosan ezzel a legnagyobb kitevőjű hatvánnyal:

$$\alpha = \gamma^{\mu_1} \cdot \zeta_1 + \vartheta_1$$

μ_1 maximalitása miatt $0 < \zeta_1 < \gamma$-nak kell teljesülnie. Emellett tudjuk, hogy $\vartheta_1 < \gamma^{\mu_1}$.

Ha ϑ_1 γ-hatvány, akkor készen vagyunk, ha nem, μ_2-t válasszuk ϑ_1-hez, majd osszunk maradékosan γ^{μ_2}-vel. A hányados legyen ζ_2, a maradék ϑ_2. Ismét $0 < \zeta_2 < \gamma$, valamint $\vartheta_2 < \vartheta_1$.

Folytassuk az eljárást, ami biztosan véges, hiszen a (ϑ_k) sorozat csökkenő. Végül eljutunk a kivánt előállításhoz, hiszen az eljárás mindaddig folytatható, amíg a maradék nagyobb, mint 0.

Az egyértelműséghez először azt látjuk be, hogy tetszőleges $\mu_0 > \mu_1 > \cdots > \mu_n$ sorozatra és $\zeta_j < \gamma$ $(j \leq n)$ rendszámokra $\gamma^{\mu_0} > \gamma^{\mu_1} \cdot \zeta_2 + \cdots + \gamma^{\mu_n} \cdot \zeta_n$. Ezt bizonyíthatjuk n-re vonatkozó indukcióval.

$n = 1$-re az állítás: $\gamma^{\mu_1} \cdot \zeta_1 < \gamma^{\mu_1+1} \leq \gamma^{\mu_0}$.

$n \geq 2$-re: $\gamma^{\mu_1} \cdot \zeta_1 + (\gamma^{\mu_2}\zeta_2 + \cdots + \gamma^{\mu_n} \cdot \zeta_n) < \gamma^{\mu_1}\zeta_1 + \gamma^{\mu_1} = \gamma^{\mu_1} \cdot (\zeta_1 + 1) \leq \gamma^{\mu_1+1} \leq \gamma^{\mu_0}$.

Ha tehát veszünk egy előállítást, akkor $\alpha < \gamma^{\mu_0} \cdot (\zeta_0 + 1) \leq \gamma^{\mu_0} \cdot \gamma$. Ez alapján μ_0-nak a legnagyobb olyan kitevőnek kell lennie, melyre $\gamma^{\mu_0} \leq \alpha$, tehát ez egyértelműen meg van határozva. Ugyanebből az egyenlőtlenségből az is adódik, hogy ζ_0-nak pedig annak a legnagyobb rendszámnak kell lennie, melyre $\gamma^{\mu_0} \cdot \zeta_0 \leq \alpha$. A 2.1.20. lemma miatt tehát ζ_0 is egyértelműen meghatározott. Balról való egyszerűsítés után egy rövidebb sorozatot kapunk, innen indukcióval látható, hogy az állítás egyértelműségi része is teljesül. $\square$

Például az $\omega^\omega + \omega^6 \cdot 5 + \omega^2 \cdot 3 + \omega + 9$ kettes rendszámrendszerbeli alakja

$$2^{\omega\cdot\omega} + 2^{\omega 6+2} + 2^{\omega 6} + 2^{\omega 2+1} + 2^{\omega 2} + 2^{\omega} + 2^3 + 2^0.$$

4.2. A normálalak

4.2.1. Definíció. *Az α rendszám ω rendszámrendszerbeli alakját α **normálalak**jának nevezzük.*

Könnyen látható, hogy α akkor és csak akkor rákövetkező, ha a legutolsó tag kitevője nulla.

A következőkben megvizsgáljuk, hogy a normálalakjukkal adott rendszámoknak mi lesz az összege és a szorzata.

4.2.2. Lemma. *Ha $\alpha = \omega^{\xi_n} \cdot a_n + \dots + \omega^{\xi_0} \cdot a_0$ az α normálalakja, akkor $\alpha < \omega^{\xi_n+1}$, valamint tetszőleges $\omega^{\xi_n+1} \leq \beta$-ra $\alpha + \beta = \beta$.*

$(\omega^{\xi_n} \cdot a_n + \dots + \omega^{\xi_0} \cdot a_0)k = \omega^{\xi_n} \cdot a_n k + \omega^{\xi_{n-1}} a_{n-1} + \dots + \omega^{\xi_1} a_1 + \omega^{\xi_0} \cdot a_0$

Bizonyítás. Az $\alpha < \omega^{\xi_n+1}$ egyenlőtlenséget az előző tétel bizonyításában beláttuk. A második állításhoz megmutatjuk, hogy $\omega^\alpha n + \omega^\beta = \omega^\beta$, ha $\alpha < \beta, n \in \omega$.

A feltétel alapján létezik olyan $\xi > 0$, melyre $\beta = \alpha + \xi$. Ekkor $\omega^\alpha \cdot n + \omega^{\alpha+\xi} = \omega^\alpha(n + \omega^\xi) = \omega^\alpha \cdot \omega^\xi = \omega^\beta$

Az első állítás innen úgy adódik, hogy β normálalakjában a legelső tag kitevője legalább $\xi_n + 1$, ezért magába olvasztja az α normálalakjában szereplő összes tagot.

A második állítás hasonlóan bizonyítható. $\square$

4.2.3. Lemma. *Legyen $\omega^{\xi_n} \cdot a_n + \dots + \omega^{\xi_0} \cdot a_0 \neq 0$ valamint $\beta \neq 0$ rendszám. Ekkor $(\omega^{\xi_n} \cdot a_n + \dots + \omega^{\xi_0} \cdot a_0) \cdot \omega^\beta = \omega^{\xi_n+\beta}$.*

Bizonyítás. $\omega^{\xi_n} \cdot \omega^\beta \leq (\omega^{\xi_n} \cdot a_n + \dots + \omega^{\xi_0} \cdot a_0) \cdot \omega^\beta \leq \omega^{\xi_n}(a_n + \dots a_0)\omega^\beta = \omega^{\xi_n} \cdot \omega^\beta$ $\square$

A fenti két lemma segítségével az alábbi módon adhatjuk meg két normálalakkal adott rendszám összegét és szorzatát:

4.2.4. Állítás. *Az $\alpha = \omega^{\alpha_n} \cdot a_n + \dots + \omega^{\alpha_0} \cdot a_0$ és $\beta = \omega^{\beta_m} \cdot b_k + \dots + \omega^{\beta_0} \cdot b_0$ rendszámokra:*

- *Ha $\alpha_i < \beta_m < \alpha_{i+1}$, akkor $\alpha + \beta = \omega^{\alpha_n} a_n + \dots + \omega^{\alpha_{i+1}} a_{i+1} + \omega^{\beta_m} b_m + \dots + \omega^{\beta_0} b_0$.*
  Ha $\alpha_i = \beta_m$, akkor $\alpha + \beta = \omega^{\alpha_n} a_n + \dots + \omega^{\alpha_{i+1}} a_{i+1} + \omega^{\beta_m}(a_i + b_m) + \dots + \omega^{\beta_0} b_0$
  Ha $\beta_m > \alpha_n$, akkor $\alpha + \beta = \beta$

- *Ha $\alpha, \beta_0 \neq 0$, akkor $\alpha \cdot \beta = \omega^{\alpha_n+\beta_m} b_n + \cdots + \omega^{\alpha_n+\beta_0} b_0$. Ha pedig $\beta_0 = 0$, akkor $\alpha \cdot \beta = \omega^{\alpha_n+\beta_m} b_n + \cdots + \omega^{\alpha_n+\beta_1} b_1 + \omega^{\alpha_n} a_n b_0 + \omega^{\alpha_{n-1}} a_{n-1} + \cdots + \omega^{\alpha_0} a_0$.*

4.2.5. Következmény. *Legyen $\alpha = \omega^{\alpha_n} \cdot a_n + \cdots + \omega^{\alpha_0} \cdot a_0$ $(n+1)$ tagú rendszám, $m \in \omega, m \neq 0$. Ha α limeszrendszám, akkor α^k normálalakja szintén $n+1$ tagú. Ha α rákövetkező, akkor α^m $mn+1$ tagú.*

Bizonyítás. Ha α limeszrendszám, akkor $\alpha_0 \neq 0$, ha α rákövetkező rendszám, akkor $\alpha_0 = 0$. Innen az állítás a szorzásra vonatkozó formula alapján teljes indukcióval adódik. □

Az előző fejezetben láttuk, hogy tetszőleges rendszámnak csak véges sok jobbosztója lehet, ellenben balosztókból lehet végtelen is. Új eszközeinkkel ezen az eredményen a következőképpen finomíthatunk:

4.2.6. Tétel. *Legyen $\delta = \omega^{\gamma_m} \cdot c_m + \cdots + \omega^{\gamma_0} \cdot c_0$. Tetszőleges $0 < \alpha < \omega^{\gamma_0}$ rendszám balosztója δ-nak, viszont ω^{γ_0} felett már csak véges sok balosztó van.*

Bizonyítás. Legyen $0 < \alpha < \omega^{\gamma_0}$. Vegyük észre, hogy ω^{γ_0} balosztója δ-nak, hiszen balosztója minden, a normálalakban szereplő tagnak, δ pedig ezek összege. Ha az α normálalakjában a legnagyobb kitevőjű tag $\omega^{\alpha_k} a_k$ és $\alpha_k + \xi = \gamma_0$, akkor $\alpha \cdot \omega^{\xi} = \omega^{\gamma_0}$, vagyis α balosztója ω^{γ_0}-nak. Ekkor balosztója δ-nak is.

Most azt vizsgáljuk, hogy a $\delta = \alpha \cdot \beta$ mely $\alpha \geq \omega^{\gamma_0}$-ra oldható meg. Legyen α_n az α normálalakjában szereplő legnagyobb kitevő. Erre a kitevőre $\alpha_n \geq \gamma_0$ nyilvánvalóan teljesül. Ha $\beta_0 \neq 0$ volna, akkor a szorzat $\omega^{\alpha_n+\beta_m} b_n + \cdots + \omega^{\alpha_n+\beta_0} b_0$ alakú lenne. A legutolsó tagnak a normálalak egyértelműsége miatt $\omega^{\gamma_0} c_0$-nak kellene lennie, viszont $\alpha_n + \beta_0 > \gamma_0$ miatt ez nem teljesülhet.

Megoldás tehát csak a $\beta_0 = 0$ esetben lehet. Ekkor a szorzat $\omega^{\alpha_n+\beta_m} b_n + \cdots + \omega^{\alpha_n+\beta_1} b_1 + \omega^{\alpha_n} a_n b_0 + \omega^{\alpha_{n-1}} a_{n-1} + \cdots + \omega^{\alpha_0} a_0$ alakú. Ismét a normálalak egyértelműségéből kapjuk, hogy $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n, a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$, valamint az $a_n \cdot b_0$ szorzat értéke is adott. Ez utóbbi szorzatnak csak véges sok megoldása lehet a természetes számok felett, ezért a_n legfeljebb véges sok értéket vehet fel. Vagyis δ-nak valóban csak véges sok ω^{γ_0}-nál nagyobb balosztója lehet. □

Egész részre osztás

A normálalak segítségével vizsgálhatjuk az $\alpha = \beta \cdot k$ alakú egyenleteket is. Láttuk, hogy $(\omega^{\xi_n} \cdot a_n + \cdots + \omega^{\xi_0} \cdot a_0)k = \omega^{\xi_n}(a_n k) + \cdots + \omega^{\xi_{n-1}} a_{n-1} + \omega^{\xi_0} \cdot a_0$, ami miatt a normálalak egyértelműségéből a fenti egyenlet pontosan akkor oldható meg rögzített α-ra és k-ra, ha α legnagyobb kitevőjű tagjának az együtthatója osztható

k-val. Ebből az is következik, hogy ha egy rendszám jobbról osztható az n és m természetes számokkal, akkor jobbról osztható azok legkisebb közös többszörösével is, ami speciális esete a jobbosztókról szóló tételünknek.

Az $\alpha = m\beta$ egyenletet a korábbi eredményeinkkel is vizsgálhatjuk. Vegyük a $\beta = \xi + k$ limeszes felbontást. Ekkor $m\beta = \xi + mk$. A febontás egyértelműségének felhasználásával látható, hogy az $\alpha = k\beta$ egyenlet β-ra akkor és csak akkor oldható meg, ha α véges része osztható m-mel.

5. fejezet

Felbonthatatlanok, prímek

A fejezetben olyan rendszámok tulajdonságait vizsgáljuk, amik nem írhatók fel kisebb rendszámok összegeként vagy szorzataként. Természetes számokon az additív felbonthatóság nem túl mély fogalom, hiszen tetszőleges egynél nagyobb természetes szám felírható két kisebb természetes szám összegeként. Minden egynél nagyobb rendszámra ez az állítás már nem teljesül, például ω felbonthatatlan.

5.1. Felbonthatatlan rendszámok

5.1.1. Definíció. *Egy $\alpha > 0$ rendszámot (additív)* ***felbonthatatlan****nak nevezünk, ha nem lehet felírni két nála kisebb rendszám összegeként.*

5.1.2. Állítás. *Egy rendszám pontosan akkor felbonthatatlan, ha ω-hatvány.*

Bizonyítás. Ha a rendszám normálalakjának legalább két tagja van, vagy egy tagja, de egynél nagyobb együtthatóval, akkor felbontható. Vegyünk most egy ω^α rendszámot $\alpha > 0$-ra. Az ω^α-nál kisebb rendszámok normálalakjában szereplő legnagyobb kitevőnek kisebbnek kell lennie, mint α, de ekkor két ilyen összegében is kisebb lesz a legnagyobb kitevő α-nál. Ezért nem tudjuk előállítani ω^α-t nála kisebb rendszámok összegeként. □

5.1.3. Következmény. *Ha egy felbonthatatlan rendszám nem egy, akkor limeszrendszám.*

Az előző tétel egy szép jellemzése a felbonthatatlan rendszámoknak. Az alábbiakban néhány további tulajdonságot vizsgálunk.

5.1.4. Állítás. *Bármely rendszámnál létezik nagyobb felbonthatatlan rendszám.*

Bizonyítás. Valóban, $\alpha \leq \omega^\alpha$ miatt $f(\gamma) = \omega^\gamma$ nem lehet korlátos. □

5.1.5. Állítás. *Legyen α tetszőleges rendszám. Ha γ azon rendszámok között a legkisebb, melyekre létezik olyan β, hogy $\alpha = \beta + \gamma$, akkor γ felbonthatatlan.*

Bizonyítás. Ha $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2,\ \ \gamma_1, \gamma_2 < \gamma$, akkor $\alpha = (\beta + \gamma_1) + \gamma_2$, $\gamma_2 < \gamma$, ez pedig ellentmond γ minimalitásának. □

Az alábbiakban megadunk a felbonthatlan rendszámok újabb két jellemzését.

5.1.6. Tétel. *Egy α nemnulla rendszám pontosan akkor felbonthatatlan, ha nincs egynél nagyobb rákövetkező jobbosztója.*

Bizonyítás. Ha létezik egynél nagyobb rákövetkező jobbosztó, akkor erre teljesül, hogy $\alpha = \alpha'(\gamma + 1),\ \ \alpha' \neq 0, \gamma \neq 0$. Azaz $\alpha = \alpha'\gamma + \alpha'$. Mivel $\alpha', \alpha'\gamma < \alpha$, kapjuk, hogy α felbontható.

Tegyük fel, hogy α felbontható. Ekkor a normálalakjának legalább két tagból kell állnia, vagy egy tagból, de egynél nagyobb együtthatóval. Ha $\omega^{\xi_0} a_0$ a legkisebb kitevőjű tag, akkor kiemelhetünk balra ω^{ξ_0}-t. Ha megjegyezzük azt, hogy az $\alpha = \beta \cdot \gamma$ egyenleteknek γ-ra legfeljebb egy megoldása lehet, akkor a normálalak egyértelműségéből kapjuk, hogy a kiemelés után a legkisebb kitevőjű tagnak $\omega^0 a_0$-nak kell lennie, ezért rákövetkező rendszámot kapunk. Találtunk tehát egy egynél nagyobb rákövetkező jobbosztót. □

5.1.7. Tétel. *α pontosan akkor felbonthatatlan, ha minden $\xi < \alpha$-ra $\xi + \alpha = \alpha$.*

Bizonyítás. Ha α felbonthatatlan, akkor ω-hatvány, így $\xi < \alpha$-ra $\xi + \alpha = \alpha$ igaz a 4.2.2. lemma szerint.

Ha α felbontható a $\xi, \zeta < \alpha$ rendszámok összegére, akkor $\alpha = \xi + \zeta < \xi + \alpha$ □

5.1.8. Állítás. *Felbonthatatlan rendszámok szuprémuma is felbonthatatlan.*

Bizonyítás. Következik abból, hogy ω-hatványok szuprémuma is ω-hatvány. □

5.1.9. Állítás. *Ha α felbonthatlan, akkor tetszőleges $\beta > 0$ esetén $\beta \cdot \alpha$ is felbonthatlan.*

Bizonyítás. Rögtön adódik a 4.2.3. lemmából. □

5.1.10. Állítás. *Ha α felbonthatatlan, akkor balról osztható minden $1 \leq \beta < \alpha$-val.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk $\delta = \alpha$-ra a 4.2.6. tételt. □

5.1.11. Állítás. *Ha α felbontható, akkor a nála nagyobb felbonthatatlanok közül a legkisebb $\alpha \cdot \omega$.*

Bizonyítás. Az $\alpha \cdot \omega$ felbonthatatlansága következik az 5.1.9. lemmából ω felbonthatatlansága miatt. Ha α normálalakjában a legnagyobb kitevő α_n, akkor $\omega^{\alpha_n} < \alpha < \omega^{\alpha_n+1} = \alpha \cdot \omega$. Ezért α és $\alpha \cdot \omega$ között nincs több ω-hatvány. □

5.1.12. Tétel. *Minden egynél nagyobb rendszám egyértelműen felírható nemnövekvő felbonthatatlanok véges összegeként.*

Bizonyítás. Egy ilyen sorozat létezése és egyértelműsége leolvasható α normálalakjából. □

A fenti tételben szereplő összeg az α felbontásait jól meghatározzák:

5.1.13. Tétel. *Legyen $\alpha = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$ a fenti tétel szerinti felbontás. Ekkor $\alpha = \beta + \gamma$ valamilyen $\beta, \gamma \neq 0$ rendszámokra pontosan akkor, ha van olyan $m \leq n$, melyre $\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_{m-1} + \delta$ és $\gamma = \beta_m + \beta_{m+1} + \cdots + \beta_n$, ahol δ tetszőleges β_m-nél kisebb rendszám.*

A bizonyítás a normálalakokra vonatkozó összegformulából és a felbonthatatlanok összegére való felbontás egyértelműségből könnyen látható.

5.2. Prímrendszámok

5.2.1. Definíció. *Egy $\alpha > 1$ rendszámot **prímrendszám**nak vagy röviden **prím**nek nevezünk, ha nem írható fel két kisebb rendszám szorzataként.*

A számelméleti értelemben vett prímek továbbra is azok, ezért a definíció kiterjesztése a fogalomnak. A legkisebb végtelen prímrendszám az ω.

Egy ekvivalens megfogalmazása a prímrendszámoknak:

5.2.2. Állítás. *$\alpha > 1$ pontosan akkor prím, ha $\alpha = \beta \cdot \gamma \quad \gamma > 1$-ből következik, hogy $\gamma = \alpha$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\alpha > 1$ prím, és vegyünk egy $\alpha = \beta \cdot \gamma \quad \gamma > 1$ felbontást. Ha $\alpha \leq \beta$, akkor $\alpha \leq \beta < \beta \cdot \gamma = \alpha$ következne. Ezért $\beta < \alpha$. De akkor $\gamma \geq \alpha$-nak kell következnie α prímsége miatt. Ekkor viszont $\gamma = \alpha$ is teljesül.

A másik irány rögtön adódik a prímrendszámok definíciójából. □

5.2.3. Állítás. *Ha α felbonthatatlan, akkor $\alpha + 1$ prím.*

Bizonyítás. Ha $\alpha = 1$, akkor $\alpha + 1 = 2$ prím. Egyébként α limeszrendszám.

Tegyük fel, hogy létezik olyan $\alpha + 1 = (\xi_1 + n_1)(\xi_2 + n_2)$ felbontás, ahol mindkét tényező kisebb $\alpha + 1$-nél. Mivel $\alpha + 1$ normálalakjának egyik együtthatója sem osztható semmilyen egynél nagyobb természetes számmal, ezt a rendszámot nem lehet egész részre osztani, amiből ξ_1-nek és ξ_2-nek limeszrendszámnak kell lennie, valamint n_1 és n_2 egyike sem lehet nulla, különben a szorzat limeszrendszám lenne. Elvégezve a szorzást, azt kapjuk, hogy $\alpha + 1 = (\xi_1 + n_1)\xi_2 + \xi_1 n_2 + n_1 n_2 = \xi_1\xi_2 + \xi_1 n_1 + n_1 n_2$. A limeszes felbontás egyértelműségéből kapjuk, hogy $n_1 = n_2 = 1$ és $\alpha = \xi_1\xi_2 + \xi_1$. Mivel α felbonthatlan, az összeg egyik tagja legalább α, viszont az első tag legalább akkora, mint a második. Ezért $\xi_1\xi_2 \geq \alpha$ biztosan teljesül. De akkor a különbségnek nullának kellene lennie, tehát $\xi_1 = 0$, ami nem lehet, hiszen ξ_1 limeszrendszám. □

5.2.4. Tétel.

Egy végtelen rákövetkező rendszám pontosan akkor prím, ha $\omega^\xi + 1$ alakú.

Egy limeszrendszám pontosan akkor prím, ha ω^{ω^ξ} alakú.

Bizonyítás. Az előző állítás szerint az $\omega^\xi + 1$ alakú rendszámok valóban prímek. Legyen most α tetszőleges rákövetkező prímrendszám. Legyen $\alpha = \omega^{\xi_n} a_n + \cdots + \omega^{\xi_1} a_1 + a_0$, ahol a_0 nemnulla természetes szám. Vezessük be a ζ_k $(k = 1, \ldots, n)$ rendszámokat, melyekre $\xi_k = \xi_1 + \zeta_k$. Ekkor $(\omega^{\xi_1} + a_0) \cdot (\omega^{\zeta_n} a_n + \cdots + \omega^{\zeta_2} a_2 + a_1) = \omega^{\xi_n} a_n + \cdots + \omega^{\xi_2} a_2 + (\omega^{\xi_1} + a_0) a_1 = \alpha$, ahol a második tényező kisebb α-nál. α prímségéből tehát $\omega^{\xi_1} + a_0 = \alpha$-nak kell fennállnia. De az $a_0 \cdot (\omega^{\xi_1} + 1)$ összefüggés miatt ismét α prímségét felhasználva kapjuk, hogy $a_0 = 1$. Vagyis $\alpha = \omega^{\xi_1} + 1$.

Legyen most $\alpha = \omega^{\omega^\xi}$. Ha α nem volna prím, akkor felbomlana két olyan rendszám szorzatára, melyek normálalakjának legnagyobb kitevőjére $\beta_n < \omega^\xi$ és $\gamma_k < \omega^\xi$ teljesül. Ekkor a szorzatban a legnagyobb kitevő $\omega^{\beta_n + \gamma_k}$ volna, amiből $\omega^\xi = \beta_n + \gamma_k$ kell, hogy következzen. Ez ellentmondana ω^ξ felbonthatatlanságának.

Ha α limesz prímrendszám, akkor emeljünk ki belőle balra ω^{ξ_0}-t $(\xi_0 \neq 0)$. A normálalak egyértelműségéből a megmaradó rendszám legkisebb tagjának kitevője nulla lesz, azaz annak rákövetkező rendszámnak kell lennie. Ezért ez nem egyezhet meg α-val. Így a prímtulajdonság miatt α biztosan ω^{ξ_0} alakú. Ha ξ_0 felbontható volna, azaz $\xi_0 = \delta + \varrho \quad \delta, \varrho < \xi_0$, akkor $\alpha = \omega^\delta \cdot \omega^\varrho \quad \omega^\delta, \omega^\varrho < \alpha$. Emiatt α nem lehetne prím. Ezért ξ_0 ω^ξ alakú, amivel igazoltuk az állítást. □

5.2.5. Tétel. *Bármely rendszámnak legfeljebb egy olyan végtelen jobbosztója lehet, ami prím.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy α-nak van két különböző végtelen jobboldali prímosztója: β, γ. Ezek egymást nem oszthatják egymást jobbról a prímtulajdonságuk miatt. Ezért a jobbosztókról szóló tétel szerint csak az lehet, hogy $\beta = \xi + p, \gamma = \xi + q, (\xi \text{ limesz}, p > 0, q > 0)$, de ezen feltételek mellett az előző tétel szerint

$p = q = 1$-nek kell teljesülnie. Ezért $\beta = \gamma$, ami ellentmond a kezdeti feltevésnek. $\square$

5.2.6. Tétel. *Minden rákövetkező rendszámnak legfeljebb egy végtelen baloldali prímosztója lehet. Limeszrendszámoknak lehet végtelen sok végtelen baloldali prímosztója.*

Bizonyítás. Legyen α rákövetkező rendszám, melyre $\alpha = \beta \cdot \delta = \gamma \cdot \varrho$, és β, γ végtelen prímek. Ekkor $\beta, \delta, \gamma, \varrho$ rákövetkező rendszámok. Eszerint $\beta = \omega^{\beta'} + 1, \gamma = \omega^{\gamma'} + 1, \delta = \omega \cdot \delta' + d, \varrho = \omega \cdot \varrho' + r$, ahol β', γ' nemnulla rendszámok, d, r nemnulla természetes számok. Elvégezve a szorzást: $\omega^{\beta'+1}\delta' + \omega^{\beta'}d + 1 = \omega^{\gamma'+1}\varrho' + \omega^{\gamma'}r + 1$. A két oldalon a második tagoknak meg kell egyezniük, hiszen ha mindkét oldalt felírjuk normálalakban, ezek a tagok a második legkisebb kitevőjű tagoknak felelnek meg. Ezért $\beta' = \gamma'$, vagyis $\beta = \gamma$.

Olyan limeszrendszámra, melynek végtelen sok végtelen baloldali prímosztója van, példa az ω^ω, hiszen $(\omega^n + 1)\omega^\omega = \omega^\omega$ minden n természetes számra. $\square$

A rendszámelmélet alaptétele

Bármely természetes szám felírható prímek szorzataként, ráadásul a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű. A prímrendszámok bevezetése után felmerül a kérdés, hogy meg lehet-e fogalmazni hasonló állítást rendszámokra is. Az egzisztencia a véges esethez hasonlóan könnyen adódik, csak a matematikai indukció helyett transzfinit indukciót kell alkalmaznunk. A nehezebb természetű kérdés az egyértelműség, hiszen például tetszőleges $p \in \omega$ prímre $p\omega = \omega$ az ω prímfelbontásait adják. A felbontásra vonatkozó további megkötésekkel azonban el lehet érni, hogy egyértelmű felbontásról is beszélhessünk.

5.2.7. Tétel. *Tetszőleges $\alpha > 1$ rendszám felírható véges sok prímrendszám szorzataként. Az egyértelműséghez viszont azt sem elég kikötni, hogy a felbontás olyan szempontból legyen minimális, hogy ne lehessen egyik tényezőt sem elhagyni a szorzat értékének megváltozása nélkül.*

Bizonyítás. Az állítást transzfinit indukcióval bizonyítjuk. Ha α prím, akkor készen vagyunk. Ha nem prím, akkor felbomlik két kisebb tényező szorzatára, amiket már felbonthatunk az indukciós feltevés szerint. Ezért minden rendszám felbontható prímek szorzatára.

Az egyértelműségi részre egy ellenpélda az $\omega^2 = \omega \cdot \omega = (\omega + 1)\omega$ felbontás. $\square$

5.2.8. Tétel (Alaptétel). *Tetszőleges $\alpha > 1$ rendszámhoz egyértelműen léteznek olyan $a_1 \geq \cdots \geq a_m$ limesz prímek, $c_1 \ldots c_k$ végtelen rákövetkező prímek és $b_1 \ldots b_{k+1}$ nemnulla természetes számok, melyekre*

$$\alpha = a_1 \cdots a_m \cdot b_1 c_1 \cdot b_2 c_2 \cdots b_k c_k \cdot b_{k+1}$$

Bizonyítás. A normálalak egyértelműségéből következik, hogy α egyértelműen felírható az $\omega^\beta \cdot \gamma$ alakban, ahol γ rákövetkező. Így ha találunk egy olyan felbontást, ahol a limesz prímek megelőzik a rákövetkező prímeket, akkor a limeszek szorzatának ω^β-nak kell lennie, a rákövetkezőknek pedig γ-nak. Ezért elegendő az állítást külön ω-hatványokra és rákövetkező rendszámokra belátni.

Tegyük fel először, hogy $\alpha = \omega^\beta$. Ha $\beta = \omega^{\zeta_n} b_n + \cdots + \omega^{\zeta_0} b_0$, akkor ez alapján kapunk egy felbontást:

$$\omega^\beta = \underbrace{\left(\omega^{\omega^{\xi_n}} \cdots \omega^{\omega^{\xi_n}}\right)}_{b_n \text{ db}} \cdots \underbrace{\left(\omega^{\omega^{\xi_0}} \ldots \omega^{\omega^{\xi_0}}\right)}_{b_0 \text{ db}}.$$

Az egyértelműség adódik β normálalakjának egyértelműségéből.

Legyen α most rákövetkező prím. Először az unicitást látjuk be. Tegyük fel, hogy $\alpha = a_n \cdot a_{n-1} \cdots a_0$, ahol a_i-k rákövetkező prímek (most lehet köztük véges is). Tegyük fel, hogy $a_0, \ldots a_k$-k véges számok, de a_{k+1} már végtelen. Mivel $a_n \cdots a_{k+1}$ normálalakjának a főegyütthatója 1, ezért a teljes szorzat főegyütthatóját az $a_0, \ldots a_k$-k szorzata adja meg. Ezért ennek a szorzatnak az értéke egyértelműen meghatározott. Így a 3.1.7. lemma miatt elhagyhatjuk azt.

Láttuk, hogy rákövetkező rendszámnak legfeljebb egy végtelen jobboldali prímosztója lehet, ezért a_k is egyértelműen meghatározott. Ekkor az imént említett lemma miatt ezzel is egyszerűsíthetünk. Innen a teljes szorzat egyértelműsége adódik indukcióval.

Most megmutatjuk, hogy a rákövetkező rendszámoknak valóban létezik ilyen felbontása. Legyen $\alpha = \omega^{\xi_n} a_n + \cdots + \omega^{\xi_0} a_0$ $(\xi_0 = 0)$, és legyen ζ_n olyan rendszám, melyre $\xi_n = \xi_{n-1} + \zeta_n$. Ekkor $(\omega^{\xi_{n-1}} a_{n-1} + \omega^{\xi_{n-2}} a_{n-2} + \cdots + \omega^{\xi_0} a_0)(\omega^{\zeta_n} + 1) \cdot a_n = (\omega^{\xi_n} + \omega^{\xi_{n-1}} a_{n-1} + \cdots + \omega^{\xi_0} a_0) a_n = \omega^{\xi_n} a_n + \omega^{\xi_{n-1}} a_{n-1} + \cdots + \omega^{\xi_0} a_0 = \alpha$. Folytassuk az eljárást az $\omega^{\xi_{n-1}} a_{n-1} + \omega^{\xi_{n-2}} a_{n-2} + \cdots + \omega^{\xi_0} a_0$ rendszámmal. A kiemelést mindaddig el lehet végezni, amíg a maradék nem $\omega^\xi + 1$ alakú, és ez legfeljebb n lépésben biztosan bekövetkezik, hiszen a tagok száma mindig egyel csökken. $\square$

6. fejezet

Felcserélhetőség és kommutativitás

Ebben a fejezetben olyan rendszámokat vizsgálunk, melyek összege vagy szorzata nem függ a tagok illetve tényezők sorrendjétől.

6.1. Felcserélhetőség

6.1.1. Definíció. *$\alpha > 0$ és $\beta > 0$* ***felcserélhető****, ha $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ teljesül.*

6.1.2. Tétel. *Legyen $\alpha = \omega^{\xi_n} a_n + \cdots + \omega^{\xi_0} a_0$. Ekkor α-t pontosan az $\omega^{\xi_n} C + \omega^{\xi_{n-1}} a_{n-1} + \cdots + \omega^{\xi_0} a_0$ normálalakú rendszámokkal lehet felcserélni.*

Bizonyítás. Keressük az $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ egyenlet megoldásait. Legyenek a normálalakok: $\alpha = \omega^{\alpha_n} a_n + \cdots + \omega^{\alpha_0} a_0$ és $\beta = \omega^{\beta_k} b_k + \cdots + \omega^{\beta_0} b_0$. Feltehető, hogy $\alpha_n = \beta_k$, különben például $\alpha_n > \beta_k$ esetén $\beta + \alpha = \beta < \beta + \alpha$. Ekkor

$$\omega^{\alpha_n} a_n + \omega^{\beta_k} b_k + \omega^{\beta_{k-1}} b_{k-1} + \cdots + \omega^{\beta_0} b_0 = \omega^{\beta_k} b_k + \omega^{\alpha_n} a_n + \omega^{\alpha_{n-1}} a_{n-1} + \cdots + \omega^{\alpha_0} a_0.$$

Tehát $n = k$, valamint $\alpha_l = \beta_l, a_l = b_l \quad l = 0, 1 \ldots, n-1$-re. Ezért szabadságunk csak b_k választásában van, és tetszőleges $b_k \neq 0$ esetén fel is lehet cserélni őket. □

6.1.3. Következmény. *Minden α rendszámhoz megszámlálható sok olyan rendszám létezik, mellyel α felcserélhető.*

6.1.4. Következmény. *A felcserélhetőség tranzitív reláció, azaz ha α felcserélhető β-val, és β felcserélhető γ-val, akkor α is felcserélhető γ-val.*

6.1.5. Állítás. *α és β pontosan akkor felcserélhető, ha tetszőleges m, k természetes számokra $\alpha \cdot m$ és $\beta \cdot k$ is felcserélhető.*

Bizonyítás. $\alpha \cdot m$ és $\beta \cdot k$ pontosan akkor felcserélhető, ha csak a legnagyobb kitevőjű tag együtthatóiban térnek el, ez pedig pontosan akkor igaz, ha α és β is csak ezekben térnek el, azaz ha α és β felcserélhető. □

6.1.6. Állítás. *α és β pontosan akkor felcserélhetők, ha léteznek olyan m, k természetes számok, melyekre $\alpha k = \beta m$*

Bizonyítás. Ha $\alpha \cdot k = \beta \cdot m$, akkor α és β csak a legnagyobb kitevőjű tag együtthatójában, a_n és b_n-ben térhetnek el. Ha pedig csak ott térnek el, akkor m-et és k-t válasszuk úgy, hogy $a_n k = b_n m = [a_n, b_k]$ teljesüljön. □

6.1.7. Tétel. *α és β pontosan akkor felcserélhető, ha létezik olyan ξ rendszám és m, n természetes számok, melyekre $\alpha = \xi \cdot m$ és $\beta = \xi \cdot n$*

Bizonyítás. Ha $\alpha = \xi \cdot m$ és $\beta = \xi \cdot n$, akkor $\alpha n = \xi nm = \beta m$ miatt α és β felcserélhető.

Ha pedig α és β felcserélhetők, ξ legyen az a rendszám, melynek a normálalakját α normálalakjából úgy kapjuk, hogy a legnagyobb kitevőjű tag együtthatóját átírjuk 1-re. Ekkor $\alpha = \xi \cdot a_n$ és $\beta = \xi \cdot b_n$ teljesül. □

6.1.8. Következmény. *Az α-val felcserélhető rendszámok pontosan a $\beta n \quad n \in \omega$ alakú rendszámok, ahol β a legkisebb olyan rendszám, mely felcserélhető α-val.*

Bizonyítás. β-t válasszuk az előző tétel bizonyításában szereplő ξ-nek. Erre a β-ra teljesül az állítás. □

6.1.9. Tétel. *Az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ rendszámok összege pontosan akkor független a tagok sorrendjétől, ha létezik olyan ξ rendszám, és léteznek olyan $m_1, m_2, \ldots, m_n$ természetes számok, melyekre $\alpha_1 = \xi \cdot m_1,\ \alpha_2 = \xi \cdot m_2, \ldots, \alpha_n = \xi \cdot m_n$.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy bármely két α_i és $\alpha_j \quad i \neq j$ felcserélhető. Vegyük az alábbi két összeget: $\Gamma + \alpha_i + \alpha_j = \Gamma + \alpha_j + \alpha_i$, ahol Γ a többi rendszám összege egy adott sorrendben. Γ-val való egyszerűsítés után adódik a felcserélhetőség.

Eszerint α_1 magával és a többi rendszámmal is felcserélhető, így az előző következmény szerint léteznek olyan m_i $(i = 1, \ldots, n)$ természetes számok, melyekre $\alpha_i = \xi \cdot m_i$, ahol ξ a legkisebb olyan rendszám, mellyel α_1 felcserélhető. □

6.2. Kommutativitás

6.2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy $\alpha > 1$ és $\beta > 1$ **kommutatív**, ha $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$*

6.2.2. Állítás. *Véges rendszám végtelen rendszámmal, rákövetkező rendszám limeszrendszámmal, sosem kommutatív.*

Bizonyítás. Legyen α végtelen rendszám, és osszuk el maradékosan ω-val: $\alpha = \omega\xi + n$, ahol ξ nemnulla rendszám, n természetes szám. Ekkor tetszőleges $k > 1$-re

$$k \cdot \alpha = k \cdot \omega\xi + kn = \omega\xi + kn < \omega\xi + \omega\xi \leq \omega\xi \cdot k + n = (\omega\xi + n)k = \alpha k.$$

Legyen α limeszrendszám, β rákövetkező rendszám, α normálalakja $n+1$ tagú, β normálalakja $m+1$ tagú. Feltehető, hogy β is végtelen, ekkor $m > 0$. Mivel $\alpha \cdot \beta$ normálalakja $m+n+1$, $\beta \cdot \alpha$ normálalakja $n+1$ tagú, $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$. □

Először megvizsgáljuk a kommutativitást abban az esetben, amikor a két rendszám limeszrendszám.

6.2.3. Tétel. *Az $\alpha < \beta$ limeszrendszámok pontosan akkor kommutatívak, ha létezik olyan ξ rendszám és r természetes szám, melyre $\beta = \omega^{\xi \cdot r}\alpha$, és α normálalakjának legnagyobb kitevője $\xi \cdot p$, ahol p természetes szám.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \omega^{\alpha_n}a_n + \cdots + \omega^{\alpha_0}a_0$ és $\beta = \omega^{\beta_k}b_k + \cdots + \omega^{\beta_0}b_0$. Ekkor $\alpha \cdot \beta = \omega^{\alpha_n+\beta_k}b_k + \cdots + \omega^{\alpha_n+\beta_0}b_0$ és $\beta \cdot \alpha = \omega^{\beta_k+\alpha_n}a_n + \cdots + \omega^{\beta_k+\alpha_0}a_0$.

A két rendszám pontosan akkor egyenlő, ha $n = k$, $a_i = b_i$ és $\alpha_n + \beta_i = \beta_n + \alpha_i$. Speciálisan $\alpha_n + \beta_n = \beta_n + \alpha_n$ is teljesül, tehát ezek felcserélhetőek. Ekkor létezik olyan ξ rendszám és r_1, r_2 természetes számok, melyekre $\alpha_n = \xi r_1$ és $\beta_n = \xi r_2$. Válasszuk ξ mellé $r = r_2 - r_1$ és $p = r_1$-et. Megmutatjuk, hogy ezekre a rendszámokra teljesül az állítás. $\beta > \alpha$ miatt $r \geq 0$, és α normálalakjában a legnagyobb kitevő valóban ξp. Átírva az $\alpha_n + \beta_i = \beta_n + \alpha_i$ egyenletet: $\alpha_n + \beta_i = (\alpha_n + \xi r) + \alpha_i$, amiből $\beta_i = \xi r + \alpha_i$. Ezért β_i-ből ξr-et kiemelve valóban α-t kapjuk.

A megfordításhoz ellenőrizzük a kommutativitást definíció szerint. Legyen:
$\alpha = \omega^{\xi \cdot p}a_n + \omega^{\alpha_{n-1}}a_{n-1} + \cdots + \omega^{\alpha_0}a_0$
$\beta = \omega^{\xi \cdot r}\alpha = \omega^{\xi \cdot (r+p)}a_n + \omega^{\xi \cdot r + \alpha_{n-1}}a_{n-1} + \cdots + \omega^{\xi \cdot r + \alpha_0}a_0$.

Ekkor
$\alpha \cdot \beta = \omega^{\xi \cdot (p+r+p)}a_n + \omega^{\xi \cdot (p+r)+\alpha_{n-1}}a_{n-1} + \cdots + \omega^{\xi \cdot (p+r)+\alpha_0}a_0$
$\beta \cdot \alpha = \omega^{\xi \cdot (r+p+p)}a_n + \omega^{\xi \cdot (r+p)+\alpha_{n-1}}a_{n-1} + \cdots + \omega^{\xi \cdot (r+p)+\alpha_0}a_0$.

Valóban ugyanazt az eredményt kaptuk. □

6.2.4. Tétel. *Ha α végtelen rákövetkező rendszám és ξ a legkisebb olyan rendszám, mely kommutatív α-val, akkor az α-val kommutatív rendszámok pontosan a ξ^m alakú rendszámok, ahol m természetes szám.*

Bizonyítás. Mivel rákövetkező rendszámmal csak rákövetkező rendszám lehet kommutatív, ξ is végtelen rákövetkező rendszám. Először megmutatjuk, hogy α előáll ξ véges hatványaként.

Az alaptétel szerint bontsuk fel α-t és ξ-t

$$\alpha = p_1 a_1 \cdot p_2 a_2 \cdots p_k a_k \cdot p_{k+1} \quad \text{és} \quad \xi = q_1 b_1 \cdot q_2 b_2 \cdots q_m b_m \cdot q_{m+1}$$

ahol p_i, q_i-k természetes számok, a_i, b_i-k végtelen rákövetkező prímek.

Mivel $\alpha \cdot \xi$ legnagyobb kitevőjű tagjának az együtthatója q_{m+1}, $\xi \cdot \alpha$-nak pedig p_{k+1}, ezért $p_{k+1} = q_{m+1}$. Mivel ezek rákövetkező rendszámok is egyben, egyszerűsíthetünk velük:

$$p_1 a_1 \cdot p_2 a_2 \cdots p_k a_k (p_{k+1} q_1) b_1 q_2 b_2 \cdots q_m b_m = q_1 b_1 q_2 b_2 \cdots q_m b_m (q_{m+1} p_1) a_1 \cdot p_2 a_2 \cdots p_k a_k.$$

Mivel a rákövetkező rendszámoknak csak egy jobboldali prímosztója lehet, ezért $b_m = a_k$. Tehát ezzel is egyszerűsíthetünk. Folytassuk addig az egyszerűsítést, amíg valamelyik oldalon el nem érünk az egyik oldalon a zárójeles rendszámhoz. Mivel azok a tényezők, amelyekkel eddig egyszerűsítettünk, megegyeztek, azt kapjuk, hogy $m = k$ esetén $\alpha = \xi$, ekkor ugyanis az összes megfelelő tényező megegyezik és azt láttuk, hogy $p_{k+1} = q_{m+1}$. Ha pedig $m \neq k$, akkor α és ξ közül az egyik balosztója a másiknak. Mivel $\xi \leq \alpha$, létezik tehát egy olyan α_1 rendszám, melyre $\xi \cdot \alpha_1 = \alpha$. α és ξ kommutativitásából $\xi\alpha_1 \cdot \xi = \xi \cdot \xi\alpha_1$, amiből ξ-vel való egyszerűsítés után $\alpha_1\xi = \xi\alpha_1$.

Két eset lehetséges: $\alpha_1 < \xi$ vagy $\alpha_1 \geq \xi$. Az utóbbi esetben megismételhetjük az előbbi eljárást, és kapunk egy α_2 rendszámot, melyre $\xi \cdot \alpha_2 = \alpha_1$, és α_2 kommutatív ξ-vel. Ha $\alpha_2 < \xi$, álljunk meg, egyébként folytassuk az eljárást. Kapunk egy α_i szigorúan monoton csökkenő sorozatot, ezért lesz egy olyan legkisebb k index, melyre $\alpha_k < \xi$ fog bekövetkezni. Megmutatjuk, hogy α_k kommutatív α-val. Mivel $\alpha = \xi^k \cdot \alpha_k$ és α_k kommutatív ξ-vel, így kommutatív annak bármely véges hatványával, emellett kommutatív önmagával is, ezért $\alpha_k \cdot \alpha = \alpha \cdot \alpha_k$. ξ minimalitása miatt csak az lehet, hogy $\alpha_k = 1$. Tehát $\alpha = \xi^k$.

Legyen most β tetszőleges rendszám, ami α-val kommutatív. A bizonyítást β-ra vonatkozó transzfinit indukcióval fejezzük be. Vegyük észre, hogy ξ és β jobbosztója az $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ rendszámnak, ezért alkalmazhatjuk a jobbosztókra vonatkozó tételt.

Ha β jobbról osztja ξ-t, akkor ξ minimalitása miatt $\beta = \xi$

Ha ξ jobbosztója β-nak, akkor $\beta = \gamma \cdot \xi$ valamilyen $\gamma < \beta$ rendszámra. Ekkor $\alpha \cdot \gamma \cdot \xi = \gamma \cdot \xi \cdot \alpha = \gamma \cdot \alpha \cdot \xi$, és egyszerűsítsünk ξ-vel, hiszen rákövetkező. Tehát γ is felcserélhető α-val, ezért alkalmazhatjuk rá az indukciós feltevést. Ebből látható, hogy β ekkor is ξ véges kitevőjű hatványa.

Azt az esetet kell már csak leellenőriznünk, ha $\beta = \zeta + p$, $\xi = \zeta + q$ valamilyen ζ limeszrendszámra és p, q különböző nemnulla természetes számok.

Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ξ^m limeszes felbontásában $m > 0$ esetén a véges tag q. Az $m = 1$ eset nyilvánvaló. Ha $m > 1$, akkor felhasználva az indukciós feltevést:

$$(\zeta+q)^m = (\zeta+q)^{m-1}(\zeta+q) = (\xi'+q)(\zeta+q) = \xi'(\zeta+q)+q.$$

Ez alapján számolhatunk:

$$\alpha\cdot\beta = (\zeta+q)^k\cdot(\zeta+p) = \tau_1+q,$$

ahol τ_1 limeszrendszám.

$$\beta\cdot\alpha = (\zeta+p)\cdot(\zeta+q)^k = \tau_2+p,$$

ahol τ_2 limeszrendszám. A kettő $p\neq q$ miatt nem egyezhet meg, így ez az eset nem áll fenn. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

A tétel alapján a 6.1.7. tételéhez hasonló kritériumot kapunk két rákövetkező rendszám kommutativitására.

6.2.5. Következmény. *Az α és β rákövetkező rendszámok pontosan akkor kommutatívak, ha létezik olyan ξ rákövetkező rendszám és m,n természetes számok, melyekre $\alpha=\xi^m$, $\beta=\xi^n$*

Ezt az állítást limeszrendszámokra nem lehet élesíteni. Vegyük ugyanis az $\omega^2+\omega$ és $\omega^3+\omega^2$ rendszámokat. Ezek kommutatívak, hiszen

$$(\omega^2+\omega)(\omega^3+\omega^2) = \omega^5+\omega^3 = (\omega^3+\omega^2)(\omega^2+\omega).$$

Nézzük, hogy mely rendszámok hatványaként állhat elő ez a két rendszám! ξ-t elég csak az ωa_1+a_0 alakú rendszámok között keresni. Ekkor ha $\xi^n=\omega^3+\omega^2$, és $\xi^m=\omega^2+\omega$, akkor $n=3, m=2$. De ebben az esetben $a_0=0$-nak kell lennie, hogy limeszrendszámokat kapjuk. ωa_1 hatványainak a normálalakja pedig csak egy tagból áll, ezért nem létezik ilyen előállítás.

Az eddigi tételeinkkel a kommutativitást külön a limeszrendszámokra és rákövetkező rendszámokra vizsgáltunk. Most megadunk egy, ebből a szempontból univerzális jellemzést.

6.2.6. Tétel. *Az α és β rendszámok pontosan akkor kommutatívak, ha léteznek olyan m,n természetes számok, melyekre $\alpha^n=\beta^m$.*

Bizonyítás. Nézzük először azt az esetet, amikor α és β rákövetkező rendszámok. Ha kommutatívak, akkor létezik olyan ξ rendszám és k,l természetes számok, melyekre $\alpha=\xi^k$, $\beta=\xi^l$. Ekkor $\alpha^l=\beta^k$.

Ha $\alpha^n = \beta^m$, akkor jelölje $\xi > 1$ azt a legkisebb rendszámot, mely ezzel a közös értékkel kommutatív. Mivel α is kommutatív ezzel a közös értékkel, $\alpha = \xi^k$ valamilyen k természetes számra. Ugyanígy, $\beta = \xi^l$ egy l természetes számra. Ekkor α és β kommutatív.

Legyen most α és β limeszrendszám, $\alpha < \beta$. Ha kommutatívak, akkor $\beta = \omega^{\xi \cdot r}\alpha$, ahol r természetes szám, és α normálalakjának legnagyobb kitevője $\xi \cdot p$, ahol p természetes szám. Ezek alapján, felhasználva, hogy α limeszrendszám,

$$\alpha^{p+r} = \omega^{\xi p(p+r-1)} \cdot \alpha = \omega^{\xi(p-1)(p+r)} \cdot \omega^{\xi r}\alpha = \beta^p.$$

Tegyük fel most, hogy $\alpha^n = \beta^m$, és legyen $\omega^{\alpha_k}a_k$ és $\omega^{\beta_l}b_l$ a legnagyobb kitevőjű tag α és β normálalakjában. Ekkor viszont α^n-ben és β^m-ben a legnagyobb kitevőjű tagok kitevői $\alpha_k n$ és $\beta_l m$, amiből $\alpha_k n = \beta_l m$. Ekkor viszont a 6.1.6. tétel szerint felcserélhetőek, így a 6.1.7. tétel szerint van olyan ξ és p, q természetes számok, melyekre $\alpha_k = \xi p$ és $\beta_l = \xi q$. A hatványokat tehát a következőképpen írhatjuk, mivel limeszrendszámokról van szó: $\omega^{\xi p(n-1)}\alpha = \alpha^n = \beta^m = \omega^{\xi q(m-1)}\beta$. Namost, ha $\alpha < \beta$, akkor $\xi q(m-1) \leq \xi p(n-1)$ következik. Emiatt balról egyszerűsíthetünk az $\omega^{\xi q(m-1)}$ rendszámmal, amivel megkaptuk, hogy $\beta = \omega^{\xi(p(n-1)-q(m-1))}\alpha$, és α normálalakjának legnagyobb kitevője ξp. Ezért α és β kommutatív. □

6.2.7. Következmény. *α és β pontosan akkor kommutatív., ha tetszőleges m, n természetes számra α^m és β^n kommutatív.*

Bizonyítás. Ha α és β kommutatív, akkor tetszőleges hatványuk is az.

Ha α^n és β^m kommutatív, akkor az előző tétel szerint vannak olyan $k.l$ természetes számok, melyekre $(\alpha^n)^k = (\beta^m)^l$. De ekkor $\alpha^{nk} = \beta^{ml}$ igazolja, hogy α és β kommutatívak. □

6.2.8. Állítás. *Tetszőleges egynél nagyobb rendszámhoz megszámlálható sok olyan rendszám van, mellyel az kommutatív.*

Bizonyítás. Valóban, limeszrendszám esetén a 6.2.3. tétel szerint csak r-ben van szabad választásunk (az egész részre osztás miatt ξ csak véges sok rendszám lehet), végtelen rákövetkező rendszám esetén pedig a 6.2.4. tétel szerint m-et választhatjuk szabadon. A véges eset nyilvánvaló. □

Szintén a 6.2.3. és 6.2.4. tételek következménye az alábbi állítás:

6.2.9. Állítás. *A kommutativitás tranzitív reláció, azaz ha α kommutatív β-val, β kommutatív γ-val, akkor α kommutatív γ-val.*

7. fejezet

Epszilon-rendszámok

7.0.1. Definíció. *Egy α rendszámot **epszilon-rendszám**nak nevezünk, ha $\omega^\alpha = \alpha$.*

A hatványozás tulajdonságainak vizsgálatánál láttuk, hogy $\alpha \leq \omega^\alpha$ mindig teljesül, ezért ekvivalens feltétel az $\omega^\alpha \leq \alpha$.

Vegyük észre azt is, hogy minden epszilon-rendszám limeszrendszám.

7.0.2. Állítás. *Ha $\omega \leq \beta$-ra $\alpha = \beta^\alpha$, akkor α epszilon-rendszám.*

Bizonyítás. A 4.1.1. következmény szerint a hatványozás a hatványalapban monoton. Ezért $\omega^\alpha \leq \beta^\alpha = \alpha$ □

7.0.3. Állítás. *Legyen α epszilon rendszám. Ekkor α „elnyeli" a nála kisebb rendszámokat, pontosabban:*

(i) $\xi + \alpha = \alpha$*, ha* $\xi < \alpha$

(ii) $\xi \cdot \alpha = \alpha$*, ha* $0 < \xi < \alpha$

(iii) $\xi^\alpha = \alpha$*, ha* $1 < \xi < \alpha$

Bizonyítás.

Ha $\xi < \alpha = \omega^\alpha$, akkor ξ normálalakjában szereplő legnagyobb kitevő kisebb, mint α, ezért $\xi + \alpha = \xi + \omega^\alpha = \omega^\alpha = \alpha$.

Az előző állítás felhasználásával: $\xi \cdot \alpha \leq \omega^\xi \cdot \omega^\alpha = \omega^{\xi+\alpha} = \omega^\alpha = \alpha$.

A második rész felhasználásával: $\xi^\alpha \leq (\omega^\xi)^\alpha = \omega^{\xi \cdot \alpha} = \omega^\alpha = \alpha$.

Mindkét esetben a másik irányú egyenlőtlenség nyilvánvaló. □

7.0.4. Tétel. *α pontosan akkor epszilon-rendszám, ha $\omega < \alpha$ és tetszőleges $\beta, \gamma < \alpha$ rendszámokra $\beta^\gamma < \alpha$.*

Bizonyítás. Legyen α epszilon rendszám. Ekkor $\beta > 1$ esetén $\beta^\gamma < \beta^\alpha = \alpha$ az előző állítás harmadik pontjának felhasználásával. A $\beta = 1$ eset nyilvánvaló.

Következzék a megfordítás. Válasszuk β-t ω-nak. Ekkor $\omega^\gamma < \alpha$ tetszőleges $\gamma < \alpha$-ra, De akkor a szuprémumra $\omega^\alpha \leq \alpha$. Ezért α valóban epszilon-rendszám. □

7.0.5. Állítás. *Tetszőleges α rendszámnál létezik nagyobb epszilon-rendszám.*

Bizonyítás. Tekintsük a következő f függvényt: $f(0) = \alpha$, $f(n+1) = \omega^{f(n)}$. Ez a függvény a transzfinit rekurzió tétele értelmében létezik. Ekkor az $f(n)$ $n \in \omega$ rendszámok halmazt alkotnak, hiszen ez az f értékkészlete. Jelölje ennek szuprémumát μ, ami biztosan limeszrendszám, hiszen limeszrendszámok szuprémuma (esetleg $f(0)$ kivételével). Mivel $\mu = \sup\{f(k+1) : k+1 \in \omega\} = \sup\{\omega^{f(k)} : k \in \omega\} = \omega^\mu$, ezért a μ epszilon rendszám, és világos, hogy $\alpha \leq \mu$. □

Megjegyzés.

- *Bár a dolgozatban a számosságok fogalmát nem tárgyaltuk, megjegyezzük, hogy az állítás azonnal adódik abból, hogy minden ω-nál nagyobb számosság epszilon-rendszám. A bizonyításban szereplő konstrukció viszont azt is mutatja, hogy létezik α-nál nagyobb ugyanolyan számosságú epszilon-rendszám is.*

- *A legkisebb epszilon-rendszám az $\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$. Valóban, legyen ξ tetszőleges epszilon rendszám. Erre nyilván $\omega \leq \xi$. Végezzük el a fenti konstrukciót az $\alpha = \omega$ választással. Teljes indukcióval adódik, hogy $\zeta_{n+1} = \omega^{\zeta_n} \leq \omega^\xi = \xi$. Ezért az egyenlőtlenség igaz a szuprémumra is.*

Mivel az $\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$ rendszám epszilon rendszám, szokás ezt ϵ_0-val jelölni.

Az epszilon-rendszámok alkalmazásaként megemlítjük, hogy segítségükkel jól lehet jellemezni azokat a rendszámokat, melyekre a hatványozás „kommutatív” [2]:

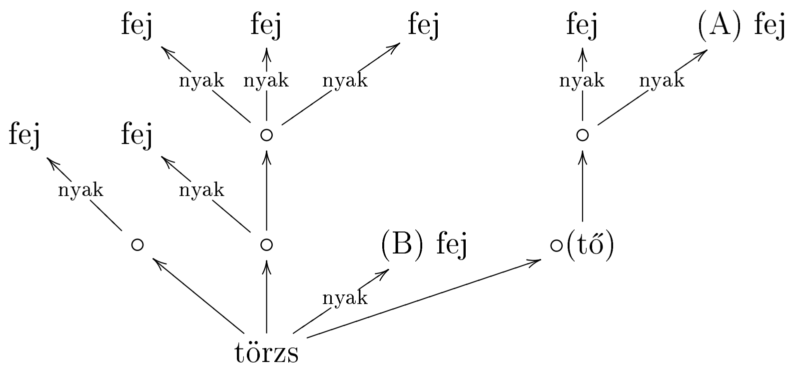
7.0.6. Tétel. *Végtelen $\alpha < \beta$ rendszámokra $\alpha^\beta = \beta^\alpha$ pontosan akkor teljesül, ha α limeszrendszám és $\beta = \gamma \cdot \alpha$, ahol γ epszilon rendszám.*

8. fejezet

Hidra-játék

A rendszámok alkalmazásaként Héraklész és a hidra küzdelmét, a hidra-játékot vizsgáljuk meg.

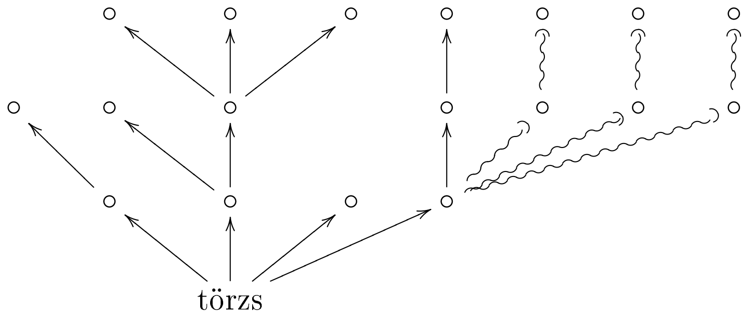
A hidrát fenyőgráfként ábrázoljuk, azaz a hidra olyan irányított fa lesz, melyben van olyan csúcs, ahonnan az összes többi csúcs elérhető irányított úton. Ezt a csúcsot nevezzük a hidra törzsének. A hidra fejei azok a csúcsok, melyekből nem indul ki él, egy fejhez tartozó él pedig a hidra nyaka.



A küzdelem során Héraklész az n-edik lépésben a hidra egyik fejét levágja. Ha ez a fej közvetlenül a törzshöz kapcsolódik, akkor a hidra nem növeszt új nyakat helyette. Képzelhetjük azt, hogy egy ilyen fejnek kitüntetett szerepe van, például vezérli a hidra törzsét, emiatt pótolhatatlan a hidra számára.

Tegyük fel, hogy az n-edik lépésben levágott fej nem a törzshöz kapcsolódott. Attól a csúcstól, amihez a levágott fej kapcsolódott, lépjünk a törzs felé egy csúcsot, nevezzük ezt tőnek. Ekkor a hidra abból a részgráfból, mely a vágás után a tő felett marad, n példányt növeszt ki a tőből.

Ha tehát Héraklész az ábrán látható (B) fejet vágja le, akkor a hidra marad a levágás utáni állapotban. Ha azonban az (A) fejet választja például a harmadik lépésben, akkor a hidra a következőképpen fog kinézni a növesztés után:



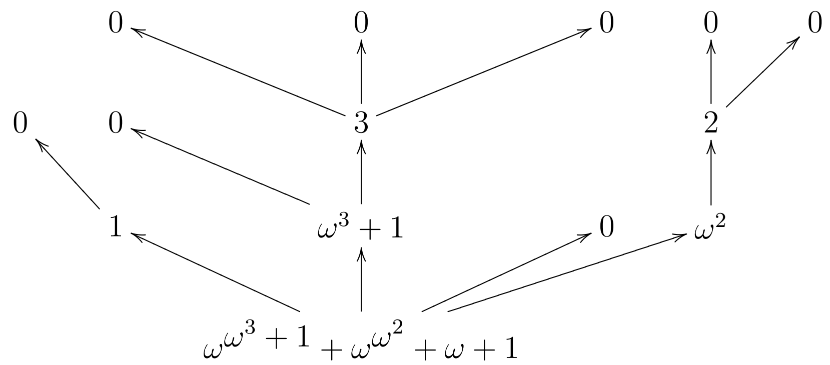
Ilyen fej esetén a hidra tehát n növekedésével egyre több példányt másol le a csonkított fejéből.

Felmerül a kérdés, hogy Héraklész le tudja-e győzni a hidrát, azaz van-e olyan nyerő stratégia, melyet követve tetszőleges hidrából indulva véges sok lépésben el tudja érni, hogy a hidrának csak a törzse maradjon. A következő tétel azt mondja ki, Héraklész valójában nem tud hibázni, azaz tetszőlegesen vagdosva a fejeket, végül legyőzi a Hidrát [3].

8.0.1. Tétel. *Tetszőleges stratégia nyerő stratégia.*

Bizonyítás. A bizonyítás ötlete a következő: Minden hidrához hozzárendelünk egy rendszámot, és megmutatjuk azt, hogy a tetszőleges vágás után ez a rendszám csökken. Mivel nincs végtelen csökkenő sorozat a rendszámokon, végül a fejeinek el kell fogynia.

A rendszámokat a következőképpen rendeljük a hidrához: Rendeljünk minden fejhez 0-t, egy tetszőleges közbülső csúcshoz pedig az $\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$ rendszámot, ahol az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ rendszámok ebből a csúcsból kiinduló élek végén található csúcsokhoz rendelt rendszámok nemnövekvő sorrendben. A hidrához tartozó rendszám legyen a törzsnek a rendszáma. Példánk esetében tehát:



Így minden hidrához hozzárendeltünk egy ϵ_0-nál kisebb rendszámot.

Ha Héraklész törzsből induló fejet vág, akkor azonnal adódik, hogy ez a rendszám csökken. Tegyük fel, hogy az n-edik lépésben nem ilyet vág. Ekkor annak a csúcsnak, amihez a fej kapcsolódik, a vágást követve csökken a rendszáma, így az alatta levő csúcshoz (tőhöz) tartozó egyik α_i csökken, legyen ez α'_i. Ekkor a tőhöz rendelt rendszám is csökken, hiszen $\omega^{\alpha'_i} \cdot n < \omega^{\alpha_i}$ teljesül tetszőleges $\alpha'_i < \alpha_i$ esetén.

Ezért a tő alatt elhelyezkedő csúcshoz tartozó egyik α_j is csökkent, ezért az ahhoz a csúcshoz tartozó rendszám is csökkent. Hasonlóan az alatta lévő csúcshoz rendelt rendszám is csökken, stb. Véges sok lépésben eljutunk a törzshöz, amihez rendelt rendszám szintén csökken. Vagyis a csonkítás után a hidrához rendelt rendszám valóban csökkent, ezzel a tételt beláttuk. □

Végezetül a tételnek egy bizonyításelméleti vonatkozását is megemlítjük. Ez az, ami igazán érdekessé teszi ezt a problémát.

A tételt a rendszámok felhasználásával láttuk be. Feltehető a kérdés, hogy van-e a tételnek pusztán számelméleti bizonyítása is, tehát ami csak a Peano axiómarendszert használja fel.

Mivel a stratégia egy végtelen fogalom, ezért a kérdést egy kicsit pontosítanunk kell: Szorítkozzunk csak a rekurzív stratégiákra. Ekkor igaz az alábbi tétel [3]:

8.0.2. Tétel. *A „tetszőleges rekurzív stratégia a hidra-játékban nyerő stratégia" állítás a Peano axiómarendszerben nem bizonyítható.*

A rendszámok elméletével tehát ebből a szempontból erős eszközhöz jutottunk.

Irodalomjegyzék

[1] Hajnal András, Hamburger Péter, *Halmazelmélet.* Nemzeti Tankönyvkiadó, 3. kiadás, 1994.

[2] Komjáth Péter, Totik Vilmos, *Problems and Theorems in Classical Set Theory* Springer, 2006.

[3] Laurie Kirby, Jeff Paris. *Accessible independence results for Peano arithmetic.* Bulletin London Mathematical Society 14: 285–293, 1982.