Lineáris terek

Szakdolgozat

Szűcs Gábor

Témavezető: Szőnyi Tamás
Számítógéptudományi tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Tartalomjegyzék

1. Lineáris terek **2**

1.1. Bevezetés 2

1.2. Azonosságok lineáris terekben 3

1.3. A De Bruijn–Erdős tétel 4

1.4. Lineáris algebrai módszer 5

2. Kevés egyenest tartalmazó lineáris terek klasszifikálása **9**

2.1. Alapfogalmak 9

2.2. Segédtételek 9

2.3. Totten bizonyításának első lépése 13

2.4. Totten bizonyításának második lépése 16

3. Három páronként párhuzamos egyenes nélküli lineáris terek klasszifikálása **22**

3.1. Alapfogalmak 22

3.2. A 3.1 tétel bizonyítása 22

4. A feladatok megoldásai **29**

1. Lineáris terek

1.1. Bevezetés

A dolgozatban a lineáris terekkel kapcsolatos néhány alapvető eredményt szeretnék bemutatni.

A lineáris terekkel kapcsolatos vizsgálatokat Erdős és De Bruijn eredménye ([1]) indította el. 1948-ban bebizonyították, hogy egy lineáris térnek legalább annyi egyenese van, mint pontja. Erre a tételre később több bizonyítást is adtak (Hanani, Bouten, De Witte, Conway), ezek közül kettőt ismertetünk. Az egyik leszámlálást, a másik lineáris algebrai eszközöket használ. Lényegében ez a két módszer az, amelyeket a lineáris terekkel kapcsolatos vizsgálatokban alkalmaznak.

Már Erdősék is megmutatták, hogy azok a lineáris terek, amelyeknek ugyanannyi pontjuk van, mint egyenesük, vagy projektív síkok, vagy degenerált terek. Totten 1976-ban azokat a tereket is klasszifikálta, amiknek nincs sokkal több egyenesük, mint pontjuk ($(b-v)^2 \leq v$, ahol b az egyenesek, v a pontok száma). Ezt az eredményt ismertetjük bővebben.

Másik jelentős eredmény a Dowling-Wilson sejtés igazolása, amely azt mondja ki, hogy ha egy egyeneshez adott ponton keresztül t párhuzamos egyenest húzhatunk, akkor $b \geq v + t$. Ezt Metsch bizonyította. Mi azonban nem ezt, hanem Metsch egy másik eredményét fogjuk bemutatni, amely jellemzést ad az olyan terekről, amelyek nem tartalmaznak három páronként párhuzamos egyenest.

A lineáris tér egy egyszerű illeszkedési struktúra, amire az alábbi három tulajdonság érvényes:

1.1. Definíció. Az $\mathcal{L} = (V, E)$ hipergráf *lineáris tér,* ha teljesülnek a következő feltételek:

(1) Minden pontpárhoz pontosan egy él létezik, ami a pontokat tartalmazza,

(2) Minden él legalább két pontot tartalmaz,

(3) Legalább két él van.

A definíció megenged végtelen gráfokat is, de a dolgoztban csak a véges esettel foglalkozunk. A továbbiakban egyenest mondunk él helyett. A nem-metsző egyenesek helyett használjuk a *párhuzamos egyenesek* kifejezést is. A pontok halmazát $\mathbf{P}$, az egyenesek halmazát $\mathbf{L}$ jelöli. Legyen $|\mathbf{P}| = \mathrm{v}$, $|\mathbf{L}| = \mathrm{b}$.

1.2. Definíció. Az $\mathcal{L}$ lineáris tér *véges projektív sík,* ha a tér bármely két egyenese metszi egymást. S minden egyenese legalább három pontot tartalmaz.

Megjegyzés. Egy véges projektív sík minden egyenese ugyanannyi pontot tartalmaz. Ha $(n+1)$-pontú egyenesek alkotják a síkot, akkor a projektív sík *rendje* n.

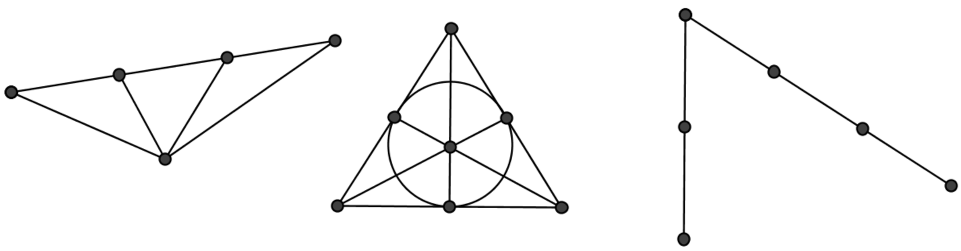
1.3. Definíció. Az $\mathcal{L}$ lineáris tér *véges affin sík,* ha $\mathcal{L}$-et úgy kapjuk, hogy egy projektív sík egy egyenesét, s annak pontjait töröljük.

1.1. Példa. Néhány egyszerű példa lineáris terekre:

A degenerált lineáris tér $v-1$ pontja egy egyenesen van, s egy ezen kívül. Ezt a pontot a többivel kétpontú egyenesek kötik össze.

A Fano-sík másodrendű projektív sík. Minden egyenes hárompontú, mindegyik metszi mindegyiket, s minden pont foka három.

A Lin-kereszt egy négypontú, s egy ezt metsző hárompontú egyenesből áll, a többi egyenes kétpontú (az ábrán ezeket nem jelöltük).



Degenerált tér Fano-sík Lin-kereszt

1.2. Azonosságok lineáris terekben

Különböző elemi leszámlálásokat alkalmazva, a következő azonosságokat kapjuk:

Illeszkedő pont-egyenes párokat vizsgálva:

$$\sum_{p\in\mathbf{P}} \deg(p) = \sum_{L\in\mathbf{L}} |L|. \tag{1}$$

Illeszkedő pontpár-egyenes hármasokra:

$$v(v-1) = \sum_{L\in\mathbf{L}} |L|(|L|-1). \tag{2}$$

Adott p ponton átmenő egyenesen lévő pontokat számolva:

$$v-1 = \sum_{L:p\in L} (|L|-1). \tag{3}$$

Adott L egyenes, $\mathbf{M}$ az ezzel párhuzamos egyenesek halmaza. $\mathbf{M}$-ben a pont-egyenes illeszkedéseket számolva:

$$\sum_{p:p\notin L} (\deg(p) - |L|) = \sum_{M\in \mathbf{M}} |M|. \quad (4)$$

Feladatok

1.1. Feladat. Legyen $\mathcal{L}$ egy lineáris tér. Adottak L, L' egyenesek és p pont úgy, hogy p nem illeszkedik egyikre sem, t azon p-n átmenő egyenesek száma, amelyek metszik L-et, de nem metszik L'-t. Mutassuk meg, hogy $t + |L'| - |L|$ azon p-n átmenő egyenesek száma, amik metszik L'-t, de nem metszik L-et.

1.2. Feladat. *(Transfer-lemma)* Legyen $\mathcal{L}$ egy lineáris tér, benne H, L és L' egyenesek úgy, hogy H metszi L-t, de nem metszi L'-t. Ekkor legalább $(|H|-1)(1+|L'|-|L|)$ olyan egyenes van, amely H-t és L'-t metszi, de nem metszi L-et.

1.3. Feladat. *(Parallel-lemma)* Adott egy $\mathcal{L}$ lineáris tér, benne N egy n pontú egyenes, valamint L_1 és L_2 olyan egymást metsző egyenesek, amik nem metszik N-et. $d_j = n+1-|L_j| \quad (j=1,2)$-re, továbbá $t = \sum_{p\in N} (\deg(p) - n - 1)$. Ekkor

$$d_1 d_2 \geq n - t.$$

1.4. Feladat. Adjunk felső becslést egy n-edrendű projektív síkon a maximális teljes ív méretére. A teljes ív olyan (tartalmazásra nézve) maximális ponthalmaz, amelynek nincs 3 kollineáris pontja.

1.5. Feladat. Egy $\mathcal{L}$ lineáris térben v pont van. Adjunk felső becslést a legalább $\sqrt{2v}$ pontot tartalmazó egyenesek számára!

1.6. Feladat. Egy $\mathcal{L}$ lineáris térben v pont és b egyenes van. Bizonyítsuk, hogy egy teljes ív kevesebb mint $2\frac{b\sqrt{2v}}{v} + 4$ pontból áll!

1.3. A De Bruijn–Erdős tétel

A témakörben alapvető tétel a következőképpen szól:

1.1. Tétel. *Lineáris térben az egyenesek száma legalább annyi, mint a pontok száma ($b \geq v$). Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a tér degenerált, vagy projektív sík.*

Bizonyítás (Conway). A bizonyítás leszámolást fog használni. Tegyük fel, hogy $b \leq v$. Be fogjuk látni, hogy ekkor egyenlőségnek kell teljesülnie. Ehhez a következő lemmát fogjuk használni:

1.1. Lemma. *Egy lineáris térben p és L nem illeszkedő pont, illetve egyenes. Ekkor* $\deg(p) \geq |L|$*. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha minden p-n átmenő egyenes metszi L-et.*

Bizonyítás. Egy lineáris térben bármely két pont pontosan egy egyenessel van összekötve, így p-t L minden pontjával páronként különböző egyenesek kötik össze, ezért $\deg(p) \geq |L|$. Ha van ezen kívül más (p-n átmenő) egyenes, akkor nem teljesülhet az egyenlőség. Tehát a lemmát beláttuk. $\square$

Az indirekt feltevés és a lemma állítása miatt a következő egyenlőtlenségek teljesülnek: $b \leq v$, illetve $|L| \leq \deg(p)$ minden nem-illeszkedő pont-egyenes párra. Azaz az alábbi egyenlőtlenség is teljesül minden nem-illeszkedő (p, L) párra:

$$\frac{|L|}{v - |L|} \leq \frac{\deg(p)}{b - \deg(p)}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget szeretnénk összegezni minden nem-illeszkedő (p, L)-párra. A baloldal:

$$\sum_{L \in \mathbf{L}} \left(\sum_{p : p \notin L} \frac{|L|}{v - |L|} \right) = \sum_{L \in \mathbf{L}} \left((v - |L|) \frac{|L|}{v - |L|} \right) = \sum_{L \in \mathbf{L}} |L|.$$

A jobboldalt is hasonlóan számoljuk, csak itt először a pontok szerint összegzünk:

$$\sum_{p \in \mathbf{P}} \left(\sum_{L : p \notin L} \frac{\deg(p)}{b - \deg(p)} \right) = \sum_{p \in \mathbf{P}} \left((b - \deg(p)) \frac{\deg(p)}{b - \deg(p)} \right) = \sum_{p \in \mathbf{P}} \deg(p).$$

Tehát az egyenlőtlenség:

$$\sum_{L \in \mathbf{L}} |L| \leq \sum_{p \in \mathbf{P}} \deg(p).$$

Viszont az (1)-beli elemi leszámolás szerint,

$$\sum_{L \in \mathbf{L}} |L| = \sum_{p \in \mathbf{P}} \deg(P).$$

Ekkor viszont a feltett egyenlőtlenségekben mindenhol egyenlőség teljesül: $v = b$ és $\deg(p) = |L|$ minden nem-illeszkedő $(p, |L|)$-párra. Azaz az 1.1 lemma szerint bármely két egyenes metszi egymást. Ezek a tulajdonságok már majdnem elégségesek ahhoz, hogy a sík projektív sík legyen.

Vizsgáljuk meg először azokat a lineáris tereket, amelyekben vannak kétpontú egyenesek. Jelölje egy ilyen egyenes két pontját a és b. Tegyük fel, hogy mindkét ponton átmegy legalább egy-egy legalább hárompontú egyenes (E és F). Ezek metszete m. Ekkor van két olyan pont ($e \in E$, $f \in F$), amelyek összekötő egyenese sem a-n, sem b-n nem mehet át, hiszen az ef egyenes nem metszheti két pontban sem E-t, sem F-et. Tehát az indirekt feltevés hamis, azaz az egyik ponton (a-n) csak kétpontú egyenesek mennek át. Ezt a pontot a rajta átmenő egyenesekkel együtt törölve szintén egy lineáris teret kapunk, azaz ezeket a tereket könnyen visszavezethetjük egyszerűbb lineáris terekre. Ha $b = v$ és van a térben kétpontú egyenes, akkor a fentiek miatt ez a tér degenerált lineáris tér.

Ha az $\mathcal{L}$ lineáris térben minden egyenes legalább hárompontú, akkor $\mathcal{L}$ projektív sík.

Tehát beláttuk, hogy a $b \leq v$ egyenlőtlenség csak egyenlőséggel teljesülhet (azaz $b \geq v$), s egyenlőség akkor és csak akkor lehetséges, ha a tér degenerált vagy projektív sík. ■

Feladatok

1.7. Feladat. Fogalmazzuk meg a tétel duálisát!

1.4. Lineáris algebrai módszer

A következőkben vázolunk egy másik bizonyítást, amely lineáris algebrát használ. A bizonyítás ötlete (az incidencia-mátrixok használata) Majumdartól származik.

Egy lineáris tér incidencia-mátrixa (illeszkedési mátrixa) v sorból és b oszlopból áll. Az alábbi lemmát fogjuk használni:

1.2. Lemma. *Ha A egy $m \times n$-es mátrix, és AA^T invertálható, akkor $n \geq m$.*

Legyen $\mathcal{L}$ lineáris tér incidencia-mátrixa $A^{v \times b}$. A sorok a pontoknak, az oszlopok az egyeneseknek felelnek meg. Tehát két különböző sor skalárszorzata 1 (hiszen két ponthoz pontosan egy egyenes tartozik), egy sor önmagával vett skalárszorzata a pont foka. Legyenek a tér pontjai $p_1, p_2, p_3, \dots p_v$. Kérdés, hogy hogyan néz ki az AA^T mátrix.

$(AA^T)_{i,j} = 1$, ha $i \neq j$, hiszen ez az i-dik és a j-edik sor skalárszorzata, ugyanezért $(AA^T)_{i,i} = \deg(p_i) = a_i$. Ha ez a mátrix nem-szinguláris, akkor a lemma szerint megkaptuk, hogy $b \geq v$.

Ezt fogjuk ellenőrizni. Szegélyezzük ezt a mátrixot egy csupa 1-es sorral és az első elemet kivéve egy csupa 0-ás oszloppal, így kapjuk a B mátrixot. Erről fogjuk belátni, hogy invertálható, s akkor ez igaz az eredetire is (ezt hívják "bordering trick"-nek), hiszen $\det(AA^T) = \det(B)$. Az első sort levonjuk az összes többiből, így kapjuk az alábbi mátrixot, amit tovább alakítunk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & a_1 - 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 - 1 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & a_v - 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 - \sum_{i=1}^{v} \frac{-1}{a_i - 1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & a_1 - 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 - 1 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & a_v - 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát $\det(B) = \det(AA^T) = \left(1 + \sum_{i=1}^{v} \frac{1}{a_i - 1}\right)(a_1 - 1)(a_2 - 1)\cdots(a_v - 1)$, ami nagyobb, mint 0, hiszen $a_i - 1 = \deg(p_i) - 1 \geq 2 - 1 = 1$.

Alkalmazva az A incidencia-mátrixra az 1.2 lemmát, valóban azt kaptuk, hogy $b \geq v$.

Azonban ez a bizonyítás nem segít abban, hogy az egyenlőség esetében mondjunk valamit a térről. Ehhez többet kell dolgoznunk.

Az ötlet, hogy hagyjunk el a térből egy pontot és néhány rá illeszkedő egyenest (az elhagyott pont legyen p_v, és töröljünk ω egyenest). Ez már nem lineáris tér, az incidencia-mátrixa $B^{v-1 \times b-\omega}$. A BB^T mátrixot viszont ebben az esetben is leírhatjuk.

Egy nem főátlóbeli elem 0, ha a sorának, illetve oszlopának megfelelő pont egy törölt egyenesen helyezkedett el, és 1, ha a két megfelelő pont egyenesét nem töröltük. Egy főátlóbeli elemre $\left(BB^T\right)_{i,i} = \deg(p_i) = b_i$, ha a $p_i p_v$ egyenest nem töröltük, ha töröltük, akkor $\left(BB^T\right)_{j,j} = \deg(p_j) - 1 = b_j$.

Ha a pontok sorrendjét megfelelően választjuk, akkor olyan blokkok keletkeznek, amelyeken belül - a főátlóbeli elemeket kivéve - minden elem 0, a a blokkokon kívüli elemek egyesek. Erre a mátrixra alkalmazzuk először a "bordering trick"-et, a beírt első sort le is vonjuk a mátrix minden sorából (a determináns eközben nem változik). Ezek után az első blokkra még egyszer elvégezzük a "bordering trick"-et. A mátrixot a keretezett sor-oszlop párral bővítjük, így kapjuk az M márixot (ellenőrizhető, hogy $\det(M) = \det(BB^T)$ teljesül).

$$M = \left(\begin{array}{c|c|cccccccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
-1 & 0 & b_1 - 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\
-1 & 0 & -1 & b_2 - 1 & -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\
-1 & 0 & -1 & -1 & b_3 - 1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
-1 & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & b_k - 1 & 0 & \dots & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{k+1} - 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_{v-1} - 1
\end{array}\right)$$

Ezután a keretezett sort levonjuk az elsőből, majd hozzáadjuk az összes többihez, majd a főátlóban maradt elemek segítségével kinullázzuk az egyeseket a keretezett sorból, így kapjuk a következő mátrixot:

$$\left(\begin{array}{c|c|cccccccc}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\
\hline
\sum \frac{1}{b_i} & 1-\sum \frac{1}{b_i} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
-1 & 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-1 & 1 & 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & b_3 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_k & 0 & \dots & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{k+1}-1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_{v-1}-1
\end{array}\right)$$

Ezt a trükköt elvégezzük minden blokkra, a trükk akkor is működik, ha egy egypontú blokkra végezzük el. Majd a kapott mátrix determinánsát kifejtjük azon oszlopok szerint, amelyekben csak a főátlóban áll nem-nulla elem. Így elég a következő mátrix determinánsát meghatározni (hiszen ez pontosan akkor nem-szinguláris, amikor az eredeti; egy B_i blokkhoz tartozó reciprokösszeg $\sum_i$):

$$\begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & -1 & \dots \\
\sum_1 & 1-\sum_1 & 0 & 0 & \dots \\
\sum_2 & 0 & 1-\sum_2 & 0 & \dots \\
\sum_3 & 0 & 0 & 1-\sum_3 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}
1+\sum \frac{\sum_i}{1-\sum_i} & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\sum_1 & 1-\sum_1 & 0 & 0 & \dots \\
\sum_2 & 0 & 1-\sum_2 & 0 & \dots \\
\sum_3 & 0 & 0 & 1-\sum_3 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

A fenti átalakítás csak akkor működik, ha $\sum_i \neq 1$ (minden i-re), akkor a determináns $(1+\sum \frac{\sum_i}{1-\sum_i})(1-\sum_1)\cdots(1-\sum_k) \neq 0$. Ha egy darab indexre igaz, hogy $\sum_j = 1$, akkor a determináns nem-nulla, viszont ha többre, akkor 0. Ez a determináns megegyezik az eredeti BB^T mátrix determinánsával, tehát az eredményeket összefoglalva: ha úgy törlünk egyeneseket, hogy az így kialakult blokkokra igaz, hogy a főátlóbeli elemek reciprokösszege legfeljebb egy helyen egyenlő eggyel, akkor ez a mátrix nem-szinguláris. Ha a mátrix nem-szinguláris, akkor az 1.2 lemma szerint $v-1 \leq b-\omega$, azaz a $b=v$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\omega = 1$. Ez azt jelenti, hogy nem tudunk úgy elhagyni egyenest, hogy a keletkező blokkban a reciprokösszegek ne eggyel legyenek egyenlők (ez minden egyelemű blokkra teljesül).

Megvizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett teljesül, hogy a reciprokösszeg $S_k = \sum_{p_i \in L_k \setminus p_v} \frac{1}{\deg(p_i)-1} = 1$, ahol L_k egy p_v-t tartalmazó egyenes.

A reciprokösszeg egy, ha egy kétpontú egyenest töröltünk, és a megmaradt pont foka kettő. Ez azt jelenti, hogy a tér degenerált. A továbbiakban ezt zárjuk ki, azaz csak olyan blokkokat vizsgáljunk, ahol a törölt egyenes legalább hárompontú.

1.3. Lemma. *Legyen a p_k-t tartalmazó maximális méretű egyenes L_r. Legyen $|L_j| > 2$. Ekkor $S_j = 1$ pontosan akkor, ha $|L_j| = |L_r|$, továbbá* $\deg(p_i) = |L_r|$ *minden $p_v \neq p_i \in L_j$ pontra.*

Bizonyítás. Az egyik irány triviális. A másik irányhoz az 1.1 lemmát használjuk, $p_i \in L_j \neq L_r$ pontra: $\deg(p_i) \geq |L_r|$. Mivel L_r a maximális egyenes, ezért $|L_j| \leq |L_r|$. Így a blokkbeli reciprokösszegre

$$S_j \leq \sum_{p_i \neq p_v} \frac{1}{\deg(p_i) - 1} \leq \sum_{p_i \neq p_v} \frac{1}{|L_r| - 1} \leq (|L_r| - 1)\frac{1}{|L_r| - 1} = 1.$$

Egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha mindenhol egyenlőség áll, ez pedig pontosan azt jelenti, hogy teljesülnek a lemma állításai. □

Térjünk most rá a $b = v$ esetre. Mivel a fentiek szerint tudjuk, hogy $v \geq b + \omega - 1$, tehát nem lehet olyan egyenes, aminek megfelelő blokkban a reciprokösszeg nem 1. Tehát a lineáris tér egy tetszőleges q pontján átmenő egyenesekre teljesülnie kell a lemma feltételeinek. Azaz minden q-n átmenő egyenes azonos méretű ($|L_r|$), s minden pont foka ugyanannyi (szintén $|L_r|$). Ezt elmondhatjuk minden pontra, azaz minden pont foka és minden egyenes mérete ugyanakkora. Továbbá, mivel feltettük, hogy minden egyenes mérete legalább három, így adódik, hogy ez a tér projektív sík. Tehát a tételt beláttuk. ■

Feladatok

1.8. Feladat. *(Bose-Fisher)* Legyen $|H| = n$, $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m \subseteq H$, és $k \geq 1$! Ha minden $1 \leq i < j \leq m$ esetén $|A_i \cap A_j| = k$, akkor $m \leq n$.

1.9. Feladat. Bizonyítsuk, hogy egy lineáris térben legfeljebb v darab olyan egyenes lehet, amik páronként metszik egymást!

2. Kevés egyenest tartalmazó lineáris terek klasszifikálása

2.1. Alapfogalmak

Jim Totten 1975-ös eredményét mutatjuk be ([7]). Azokat a lineáris tereket jellemzi, amire teljesül, hogy $(b-v)^2 \leq v$. Azokat a lineáris tereket, amire ez teljesül a továbbiakban RLS-nek nevezzük.

Egy lineáris tér rendje n, ha teljesül, hogy $n^2 \leq v < (n+1)^2$.

A következőkben néhány típusát definiáljuk a lineáris tereknek.

A *Lin-kereszt* egy hatpontú lineáris tér, aminek van egy három- és egy négypontú egyenese (lásd 1.1 példa).

Szemi-affin síknak (FSP) nevezzük azt a lineáris teret, amit úgy kapunk, hogy egy affin síkhoz hozzáveszünk egy végtelen pontot (s a többi ponttal kétpontú egyenesek kötik össze). Ha ebből elhagyunk egy "véges" pontot, akkor *lyukas szemi-affin síknak* nevezzük. A *bővített affin síkot* a következőképpen definiáljuk:

Pontjainak egy $\mathcal{L}^*$ részhalmaza egy affin sík (a sík egyenesei azok, amik a ponthalmaz legalább két pontján átmennek). $\mathcal{L}^*$ komplementere $\mathcal{L}'$. Ha egy egyenes két pontban metszi $\mathcal{L}'$-t, akkor minden pontja $\mathcal{L}'$-ben van (tehát ezekkel az egyenesekkel $\mathcal{L}$ lineáris teret alkot). Ha egy egyenesnek mindkét halmazban van pontja, akkor $\mathcal{L}^*$-ban legalább két pontja van. Például, ha $\mathcal{L}'$ mindössze egy pont, akkor egy szemi-affin síkot kapunk.

Ha $\mathcal{L}'$ s darab kollineáris pont ($2 \leq s \leq n+1$), akkor egy olyan projektív síkot kapunk, amiből töröltünk $n+1-s$ kollineáris pontot.

Ha $\mathcal{L}'$ degenerált lineáris tér, akkor *egyszerűen bővített affin síkot* kapunk.

Végül, ha $\mathcal{L}'$ egy projektív sík, akkor *projektíven bővített affin síkot* kapunk.

A fenti definícók segítségével megfogalmazhatjuk Totten tételét:

2.1. Tétel. *Ha $\mathcal{L}$ RLS, akkor a következők közül valamelyik:*

(i) *degenerált tér,*

(ii) *Lin-kereszt,*

(iii) *Affin sík, FSP, lyukas FSP vagy egy n rendű projektív sík, aminek legfeljebb n pontját töröljük, s egyetlen egyenesét sem.*

(iv) *egyszerűen bővített affin sík, vagy projektíven bővített affin sík.*

Megjegyzés. Ezek a terek RLS-ek, ennek ellenőrzése triviális.

2.2. Segédtételek

A következő tételeket a bizonyítás során használni fogjuk. A bizonyítások megtalálhatók a [4], [5], [6], [9] cikkekben. Bizonyítani csak a 2.3 tételt fogjuk. Ezek kimondásához bevezetünk néhány jelölést.

Az egyeneseket méretük alapján sorba rakjuk, a legkisebb indexű a legnagyobb méretű: $L_1, L_2, L_3 \dots$ Hasonlóan a pontokat is rendezzük a fokszámuk szerinti csökkenő sorrendbe: $v_1, v_2, \dots$.

Ha tudjuk L_1-et és L_2-t úgy választani, hogy párhuzamosak legyenek, akkor a lineáris tér *laza,* ha nem tudjuk, akkor *feszes.*

Az L_j-vel párhuzamos egyenesek halmaza: $S_j = S_{L_j}$, az egyenesek száma: $s_j = s_{L_j}$.

2.2. Tétel. *Egy laza RLS véges affin sík.*

2.3. Tétel. *Ha $\mathcal{L}$ egy n-edrendű RLS, akkor $|L_2|$ értéke:*

(i) *2, ha $\mathcal{L}$ degenerált,*

(ii) *n, ha $\mathcal{L}$ affin sík,*

(iii) *n+1, máskor.*

Bizonyítás. Először azt látjuk be, hogy $|L_2| \leq n + 1$. Tegyük fel, hogy ez nem teljesül, azaz $|L_2| \geq n + 2$. Ekkor $\mathcal{L}$ feszes. Hiszen ha laza lenne (használva azt, hogy laza lineáris térre $b \geq |L_1| \cdot |L_2| + 2$):

$$v + n \geq b \geq |L_1| \cdot |L_2| + 2 \geq n^2 + 4n + 6 \geq v + 2n + 6,$$

ami lehetetlen. Ha $\mathcal{L}$ feszes és $w = L_1 \cap L_2$, akkor igaz, hogy $b \geq (|L_1| - 1)(|L_2| - 1) + \deg(w)$, ezt használva:

$$v \geq b - n \geq (|L_1| - 1)(|L_2| - 1) + \deg(w) - n \geq (|L_1| - 1)(n + 1) + \deg(w) - n.$$

Ezért $|L_1| \leq n + 2$. Így $|L_1| = |L_2| = n + 2$. Az előzőek szerint $v \geq n^2 + n + 1 + \deg(w)$, így $v \geq n^2 + n + 3$. Továbbá $\deg(w) \leq n - 1$, s tudjuk, hogy minden w-n átmenő egyenes mérete legfeljebb $n + 2$, tehát $v \leq 1 + (n - 1)(n + 1)$. Ez ellentmodás, ezért $|L_2| \leq n + 1$. □

Meg kell mutatnunk, ha $\mathcal{L}$ nem degenerált tér, vagy affin sík, akkor $|L_2| = n + 1$. Tegyük fel, hogy ez nincs így, azaz $|L_2| \leq n$. Felhasználjuk a következőt (lásd [10]):

$$v \geq 2|L_1| \implies |L_2|(|L_2| - 1) \geq 2v - b - 1. \tag{5}$$

Ebből már következik, hogy $|L_2| \geq n$, így $|L_2| = n$. De Witte eredménye, hogy $|L_1| \geq n+1$ és $v \geq n^2+1$. Az (5) egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$n^2+1 \leq v \leq |L_2|(|L_2|-1)+b-v+1 \leq n^2-n+n+1.$$

Ezért $v = n^2+1$ és $b = n^2+n+1$. $\mathcal{L}$ nem lehet laza, hiszen akkor $b \geq |L_1|\cdot|L_2|+2 \geq n^2+n+2$ lenne, ami lehetetlen, tehát a tér feszes.

$n \geq 3$, mivel $n = 2$-ből az következne, hogy $\mathcal{L}$ degenerált (használjuk, hogy a tér feszes). Legyen $w = L_1 \cap L_2$, ekkor,

$$n^2+n+1 = b \geq (|L_1|-1)(|L_2|-1)+\deg(w) = (|L_1|-1)(n-1)+\deg(w).$$

Emiatt $|L_1| \leq n+3$. Ha $n = 3$, akkor egyszerű számolással ellentmondásra jutunk. Tehát $n \geq 4$.

Ha $p \in L_1$, akkor,

$$(\deg(p)-1)(|L_2|-1)+|L_1| \geq v.$$

Ezért:

$$\deg(p) \geq \frac{v-|L_1|}{|L_2|-1}+1.$$

Ha $p \notin L_1$, akkor élesebb eredményt is kaphatunk:

$$\deg(p) \geq \frac{v-1}{|L_2|-1}.$$

Ezért egy $p \in L_1$ pontra $\deg(p) \geq n+1$, ha $p \notin L_1$, akkor $\deg(p) \geq n+2$. Innen:

$$\sum_{p\in\mathbf{P}} \deg(p) \geq (v-|L_1|)(n+2)+|L_1|(n+1).$$

De tudjuk azt is, hogy:

$$\sum_{L\in\mathbf{L}} |L| \leq |L_1|+(b-1)|L_2| \leq bn+3.$$

A (1) azonosság miatt $v(n+2) \leq |L_1|+bn+3 \leq n+6+n^2+vn$. Ebből $n^2 \leq n+4$ jön, ami nyilván nem lehetséges, ezzel a tételt beláttuk. ■

2.4. Tétel. *Ha $\mathcal{L}$ egy n-edrendű RLS, akkor $|L_1|$ értéke:*

(i) *v-1, ha $\mathcal{L}$ degenerált,*

(ii) *n+2=4, ha $\mathcal{L}$ Lin-kereszt,*

(iii) *n, ha $\mathcal{L}$ affin sík,*

(iv) *n+1, máskor.*

2.5. Tétel. *Ha $\mathcal{L}$ egy n-edrendű RLS, akkor minden pont foka legalább $n+1$ kivéve, ha $\mathcal{L}$*

(i) *degenerált tér,*

(ii) *Lin-kereszt,*

(iii) *FSP,*

(iv) *lyukas FSP.*

Az előző tétel egyszerű következménye:

2.6. Tétel. *Ha $\mathcal{L}$ egy n-rendű RLS, akkor $b \geq n^2+n+1$, kivéve, ha $\mathcal{L}$*

(i) *degenerált tér,*

(ii) *affin sík,*

(iii) *FSP,*

(iv) *lyukas FSP.*

2.7. Tétel. *Ha $\mathcal{L}$ egy n-rendű RLS (és nem Lin-kereszt), akkor a párhuzamosság ekvivalencia-reláció az n pontú egyenesek halmazán.*

A következő tétel De Witte eredménye, és ha $b \leq n^2+n+1$, akkor klasszifikálja is a lineáris tereket:

2.8. Tétel. *$\mathcal{L}$ egy n-rendű RLS: $b \leq n^2+n+1$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{L}$ degenerált tér vagy projektív síkká bővíthető.*

Felhasználva a 2.8 tételt, elég belátnunk a főtétel helyett a következőt:

2.9. Tétel. *Ha $\mathcal{L}$ egy n-rendű RLS, továbbá $b \geq n^2+n+1$, akkor $\mathcal{L}$ degenerált tér, Lin-kereszt vagy (egyszerűen vagy projektívenen) bővített affin sík.*

A továbbiakban $\mathcal{L}$ legyen n-rendű RLS, egyeneseire teljesüljön a $b \geq n^2 + n + 2$ feltétel, és $\mathcal{L}$ ne legyen degenerált tér vagy Lin-kereszt. Könnyen látható hogy, ha egy RLS bővített affin sík, akkor vagy egyszerűen vagy projektíven bővített. Így elegendő csupán a bővítettséget belátnunk.

$M(L)$ legyen az L egyenessel párhuzamos egyenesek közül a maximális méretűek halmaza. *Valós pontnak* mondunk egy pontot, ha $n+1$ a foka, *ideálisnak,* ha ez nem teljesül. Egy egyenes *valós,* ha minden $(n+1)$-pontú egyenest metsz, *ideális,* ha van olyan $(n+1)$-pontú egyenes, amit nem metsz. *Hiperideális,* ha egyetlen $(n+1)$-pontú egyenest sem metsz (az ilyen egyeneseket *hiperideálnak* is hívjuk). Egy nemüres S halmaz súlya: $\omega(S) = \min\{\deg(v_i) - n - 1 | v_i \in S\}$.

A 2.9 tétel igazolása két lépésben történik. Először belátjuk, hogy ha $\mathcal{L}$-ben nincs olyan hiperideál, amely benne lenne $M(L)$-ben valamely valós L egyenesre, akkor $\mathcal{L}$ bővített affin sík. Ezután igazoljuk, hogy egyik - a feltételeknek megfelelő - $\mathcal{L}$ tér sem tartalmaz ilyen hiperideált.

A két állítás igazolása előtt kimondunk egy lemmát, a lemma állításai egyszerűen következnek a fenti segédtételekből, illetve egyszerű leszámlálásokkal igazolhatók.

2.1. Lemma. *Legyen $\mathcal{L}$ egy n-rendű RLS (degenerált tértől és Lin-kereszttől különböző), amire teljesül, hogy $b \geq n^2 + n + 2$. Ekkor*

(i) $|L_1| = |L_2| = n + 1$ *és $\mathcal{L}$ feszes, így minden $(n + 1)$-pontú egyenes metszi egymást.*

(ii) $v \leq n^2 + n + 1$ *és* $n \geq 2$.

(iii) *Minden pont foka legalább $n + 1$.*

(iv) *A párhuzamosság ekvivalencia-reláció az n-pontú egyenesek halmazán.*

(v) $v \geq n^2 + 2$ *és* $b \leq n^2 + 2n + 1$.

(vi) *Egy valós pont legalább két valós egyenesen fekszik.*

(vii) *Egy ideális egyenes csak ideális pontokat tartalmaz, így minden ideális egyenes súlya legalább 1.*

(viii) *Minden valós egyenes tartalmaz legalább egy valós pontot.*

(ix) *Van ideális egyenes.*

(x) *Van valós pont.*

(xi) *Ha L hiperideális, akkor $|L| \leq n - 1$.*

(xii) *Ha J ideális egyenes, ami párhuzamos egy K valós egyenessel, akkor* $s_K \geq 1 + |J|(\omega(J) - 1)$.

Bizonyítás. A 2.2, 2.3 és 2.4 tételek igazolják az (i) állítást. (ii) a 2.4, (iii) a 2.5 míg (iv) a 2.7 tétel egyszerű következménye. (v) az (ii) következménye (felhasználva azt, hogy $b \leq v+n$). (vi) igazolásához elég (i) és (v). (vii) triviális. (iii) és (v) segítségével beláthatjuk $(viii)$-t. (i), (vi) és $(viii)$ állításokból következik (x). (xi) (x) egyszerű következménye. (xii) egyszerű leszámolással adódik. (ix) igazolása maradt hátra.

Legyen L egy $(n+1)$-pontú egyenes, ha van vele párhuzamos egyenes, készen vagyunk. Tehát $s_L = 0$. Mivel $b \geq n^2+n+2$, ezért van egy $p \in L$ ideális pont. Legyen $q \in L$ valós pont, rajta keresztül L' egy $(n+1)$-pontú egyenes ($\neq L$). Ekkor p-n keresztül van egy olyan egyenes, ami párhuzamos L'-vel, s ezzel készen vagyunk. □

2.2. Lemma. *Legyen L' és H két egymást nem metsző egyenes egy tetszőleges $\mathcal{L}$ lineáris térben, legyen L olyan, amely mindkettőt metszi. Ekkor*

$$\sum_{p\in\mathbf{L'},p\notin\mathbf{L}} (\deg(p) - |L|) \geq (|H|-1)(|L'|-|L|+1)$$

.

Bizonyítás. A baloldal azokat az egyeneseket számolja, amelyek metszik L'-t, de nem metszik L-t. A transfer-lemma szerint (1.2 feladat) a jobboldal alulról becsüli azoknak az egyeneseknek a számát, amik metszik L'-t és H-t, de nem metszik L-et. Innen az egyenlőtlenség adódik. □

Speciális esetben megfogalmazva:

2.3. Lemma. *Ha L_1 és L_2 két k-pontú metsző egyenes, K párhuzamos L_1-gyel, továbbá L_1 és L_2 metszéspontjának a foka legalább k, akkor*

$$\sum_{p\in\mathbf{L_1}} (\deg(p) - k) \geq |K| - 1.$$

Az 1.3 feladat állítása speciális esetben megfogalmazva:

2.4. Lemma. *L_1 és L_2 metsző egyenesek, amelyek nem metszik N-et. $|L_1| = |N| = n$. Ekkor*

$$\sum_{p\in\mathbf{N}} ((\deg(p) - n - 1)) \geq |L_2| - 1.$$

Ezen előkészületek után rátérhetünk a tétel bizonyítására:

2.3. Totten bizonyításának első lépése

A következő tételt fogjuk belátni:

2.10. Tétel. *Ha $\mathcal{L}$ egy n-rendű RLS úgy, hogy $b \geq n^2+n+2$, s nincs olyan valós egyenese, amelynek maximális méretű párhuzamosai között lenne hiperideál, akkor $\mathcal{L}$ degenerált, Lin-kereszt vagy bővített affin sík.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathcal{L}$ nem degenerált tér és nem is Lin-kereszt. Be fogjuk látni, hogy ekkor bővített affin sík. Legyen $\mathcal{L}^*$ a valós pontok halmaza, továbbá $\mathcal{L}'$ az ideális pontok halmaza. Be kell látni, hogy $\mathcal{L}^*, \mathcal{L}'$ halmazok megfelelnek a bővített affin sík definíciójában kimondott feltételeknek.

Azaz a következőket kell belátnunk:

(a) $\mathcal{L}^*$ és a valós egyenesek ($\mathcal{L}^*$-ra megszorítva) affin síkot alkotnak.

(b) $\mathcal{L}'$ és az ideális egyenesek lineáris teret alkotnak.

(c) Egy valós és ideális pontot egyaránt tartalmazó egyenes legalább két valós pontot tartalmaz.

Tekintsük a leghosszabb ideális egyenest (L_h). Mivel nincs a feltételeknek megfelelő hiperideál, ezért van olyan valós egyenes ami metszi (L_2), s van olyan is ami nem (L_1). L_1 és L_2 (i) miatt $(n+1)$ pontúak. L_2 az L_h és L_1, nem metsző egyenesek transzverzálisa.

Válasszunk egy $p_0 \in L_h$ pontot, ami nem illeszkedik L_2-re, ez (vii) szerint ideális pont lesz, azaz a foka nagyobb lesz, mint $n+1$. Tehát $M(L_2)$ nem üres. Legyen $L_r \in M(L_2)$. Mivel L_r sem lehet hiperideál, ezért szintén metsz egy $(n+1)$-pontú egyenest (K-t, ami nem feltétlenül különbözik L_1-től). Legyen $u = L_h \cap L_2$, továbbá $k = \omega(L_h \setminus \{u\})$. S u_0 legyen az a pont, amin a $L_h \setminus \{u\}$ halmaz súlya felveszi a minimumát ($u \neq u_0$), azaz $\deg(u_0) = n+1+k$. (vii) szerint $k \geq 1$.

Alkalmazzuk a 2.3 lemmát az L_2, K és L_r egyenesekre:

$$\sum_{p \in \mathbf{L_2}} (\deg(p) - n - 1) \geq |L_r| - 1.$$

Itt a baloldal azokat az egyeneseket számolja össze, amelyek metszik L_2-t, de nem metszik K-t. L_r minden u-tól különböző pontjának foka legalább $n+1+k$, ezért legalább k egyenes elkerüli L_2-t. Így: $s_{L_2} \geq k(|L_h| - 1)$. Tudjuk, hogy igaz a következő egyenlőség: $b - 1 = s_2 + \sum_{p \in \mathbf{L_2}} (\deg(p) - 1)$, ennek segítségével alulról tudjuk becsülni az egyenesek számát:

$$b - 1 = s_2 + \sum_{p \in \mathbf{L_2}} (\deg(p) - 1) \geq$$

$$k(|L_h| - 1) + \sum_{p \in \mathbf{L_2}} (\deg(p) - n - 1) + \sum_{p \in \mathbf{L_2}} n \geq k(|L_h| - 1) + |L_r| - 1 + n^2 + n.$$

Másrészt felülről tudjuk becsülni a pontok számát, az u_0-on átmenő egyenesek vizsgálatával (a (3) azonosságot használjuk). Tudjuk, hogy az u_0 ponton pontosan k olyan egyenes megy át, ami elkerüli L_2-t. Kihasználjuk még azt, hogy L_r maximális az L_2-vel párhuzamos egyenesek közt. Így kapjuk, hogy:

$$v - 1 \leq n^2 + (|L_h| - 1) + k(|L_r| - 1). \tag{6}$$

A fenti két becslést összevetve és használva azt, hogy $b \leq v + n$, kapjuk, hogy

$$(k-1)(|L_h| - |L_r|) \leq 0.$$

Mindkét tényezőről tudjuk, hogy nemnegatív, így az egyenlőtlenség csak akkor teljesülhet, ha valamelyik tényező 0. Azaz mindenképpen egyenlőséggel teljesül, tehát az eddig használt egyenlőtlenségekben is egyenlőségeknek kell teljesülniük, ezért:

1. $v = b - n = n^2 + |L_h| + k(|L_r| - 1) = n^2 + |L_r| + k(|L_h| - 1)$.

2. $s_2 = k(|L_h| - 1)$.

3. Minden (u-tól különböző) L_h-n lévő pont foka pontosan $n + 1 + k$.

4. Minden L_2-vel párhuzamos (ideális) egyenes metszi L_h-t.

5. $\sum_{p \in \mathbf{L_2}} (\deg(p) - n - 1) = |L_r| - 1$.

6. (6) egyenlőtlenségben is egyenlőségnek kell állnia, tehát u_0-n n darab $(n+1)$-pontú, k darab $|L_r| = l_r$-pontú és egy $|L_h| = l_h$-pontú egyenes megy át. A 3. pont miatt ez minden (u-tól különböző) L_h-beli pontra elmondhatjuk.

A 3. és 6. pont miatt, L_2 helyett választhatjuk L_1 és L_h egy másik $(n+1)$-pontú transzverzálisát is, ami nem megy át u-n, ha $|L_h|$ legalább 3.

Ha $|L_h| = 2$, akkor L_h maximalitása miatt $|L_r|$ is 2. Így u-n n darab $(n+1)$-pontú és $k' + 1$ kétpontú egyenes megy át (valamilyen $k' \geq 1$-re), de mivel L_h másik pontján át n darab $(n+1)$-pontú és k pontú egyenes megy át, így $k' = k$. Tehát igazak a következők:

7. Minden (u-tól különböző) L_h-n lévő pont foka pontosan $n + 1 + k$.

8. Az L_h egyenes minden pontján n darab $(n + 1)$-pontú, k darab l_r-pontú, és egy l_h-pontú egyenes megy át.

9. Az 1. pontot és a (3) leszámlálást összevetve kapjuk, hogy egy l_r-pontú egyenes tetszőleges pontjának foka nagyobb, mint $n + 1$, azaz ideális pont.

10. A 8. és 9. pontot használva adódik, hogy minden $(n+1)$-pontú egyenes tartalmaz legalább egy ideális pontot.

Válasszunk L_2-n egy u-tól különböző, tetszőleges pontot (u_1). Ez L_h-val csak $(n + 1)$-pontú egyeneseken keresztül van összekötve ((i), 8. pont). L_2 helyett választhatunk más, $(n + 1)$-pontú transzverzálist is, ami nem megy át u_1-en. A 4. pont miatt $\deg(u_1) = n + 1$. Ezután az 5. és 7. pont felhasználásával:

11. $|L_r| - 1 = \sum_{p \in \mathbf{L_2}} (\deg(p) - n - 1) = \deg(u) - n - 1 = k.$

A fenti okoskodás, bármely $(n+1)$-pontú transzverzálisra működik. Ha egy $(n+1)$-pontú egyenes párhuzamos L_h-val, akkor az u ponttal n darab $(n+1)$-pontú és egy l_r-pontú egyenes köti össze. A 9. pont segítségével kapjuk, hogy:

12. Egy $(n+1)$-pontú egyenesnek pontosan n valós és egy ideális pontja van.

Legyen L_1 ideális pontja p. Ekkor minden rajta átmenő egyenes metszi L_2-t vagy L_h-t (4. pont). Tehát $\deg(p) \leq n + l_h$.

Lehet-e szigorú egyenlőtlenség?

Ez akkor teljesülne, ha egy p-n átmenő L egyenes L_2-t és L_h-t különböző pontokban metszené. Ez az egyenes l_r-pontú (8. és 12. pont), ezért a 9. pont szerint csak ideális pontjai vannak, de metszi L_2-t (u-tól különböző pontban). Ellentmondás, tehát:

13. $\deg(p) = n + l_r$.

Ha egy J egyenes átmegy p-n és L_2-t u-tól különböző pontban metszi, akkor,

$$v - 1 \leq (n-1)n + |J| + |L_h|(l_r - 1).$$

Az 1. pontbeli becslést és a 11. pontbeli azonosságot használva látjuk, hogy $|J| = n + 1$.

14. Tehát p-n keresztül n darab $(n+1)$-pontú egyenes (amelyek mind párhuzamosak L_h-val) és l_h darab l_r-pontú egyenes megy át (amelyek mind metszik L_h-t).

Legyen L_3 az L_1 és L_h egy $(n+1)$-pontú transzverzálisa ($u \notin L_3$), ekkor a 6. pont alapján:

15. Minden l_r-pontú, L_h-t metsző egyenes L_2 vagy L_3 valamelyikével párhuzamos, így ideális.

Ha egy valós L egyenesnek legfeljebb n pontja van, akkor a 14. és 15. pont miatt L nem mehet át p-n, ezért a p-n átmenő n darab $(n+1)$ pontú egyenessel különböző (valós) pontokban találkozik. Így:

16. Egy tetszőleges valós egyenesnek pontosan n darab valós és legfeljebb egy ideális pontja van.

Ezek szerint két ideális pontra illeszkedő egyenes is ideális, és (vii) alapján az ideális pontok és az ideális egyenesek lineáris teret alkotnak ($\mathcal{L}'$). Tehát (b) teljesül.

Hasonlóan, ha egy egyenesnek van valós és ideális pontja is, akkor van n valós pontja. Mivel $n \geq 2$ (lásd (ii)), tehát (c) is igaz.

Tekintsük a valós pontokat és a valós egyeneseket ($\mathcal{L}^*$-ra megszorítva). Azaz az egyenesek $\mathcal{L}$-beli valós egyenesek, esetleges ideális pontjaik nélkül. A 16. pont szerint minden indukált egyenesnek pontosan n pontja van, s minden pont foka $n+1$, tehát ez a tér valóban affin sík, azaz az (a) feltétel is teljesül.

Tehát beláttuk, hogy ha egy RLS-re teljesül, hogy $b \leq n^2+n+2$ (s nem Lin-kereszt vagy degenerált tér), s nincs benne a feltételeknek megfelelő hiperideál, akkor bővített affin sík. ■

2.4. Totten bizonyításának második lépése

Most már csak azt kell belátnunk, hogy a feltételeknek megfelelő terekben nem lehet a feltételeknek eleget tevő hiperidál, azaz:

2.11. Tétel. *Ha $\mathcal{L}$ egy n-rendű RLS úgy, hogy $b \geq n^2+n+2$, és nem degenerált tér vagy Lin-kereszt, akkor nincs olyan valós egyenese, amelynek maximális méretű párhuzamosai között van hiperideál.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{L}$ a feltételeknek megfelelő lineáris tér. Indirekten fogunk okoskodni. Tegyük fel, hogy van olyan B_0 $(n+1)$-pontú egyenes, amelynek maximális párhuzamosai közt van egy hiperideál (A_0). Legyen $k=\omega\{A_0\}$ és $a=|A_0|$. A lemma (xi) és (vii) állítása miatt $a \leq n-1$ illetve $k \geq 1$. Az ellentmondást több lépésben érjük el:

1. $v \leq n^2+k(a-1)$.

A_0 egy minimális, $n+1+k$ fokszámú pontján átmenő egyenesek pontjait számolva igazolhatjuk az egyenlőtlenséget.

2. Legyen L_0 egy tetszőleges $(n+1)$-pontú egyenes. Ekkor $\sum_{p\in\mathbf{L_0}}(\deg(p)-n-1) \leq a-k-2$.

Hiszen tudjuk, hogy $b-1 = s_{L_0}+\sum_{p\in\mathbf{L_0}}(\deg(p)-1)$. (xii)-ben szereplő egyenlőtlenséget alkalmazva: $b \geq n^2+n+a(k-1)+\sum_{p\in\mathbf{L_0}}(\deg(p)-n-1)$. Innen már csak az 1. pontot és a $b \leq v+n$ egyenlőtlenséget kell felhasználni.

A jobboldalon nemnegatív szám áll (tudjuk, hogy $k \geq 1$), ezért $3 \leq a \leq n-1$.

3. Ha L ideális egyenes, de nem hiperideál, akkor $|L| \leq a-k-1$.

Hiszen ekkor léteznek L_1 és L_2 $(n+1)$-pontú egyenesek, melyek közül az egyik (L_1) metszi, a másik pedig nem. Ekkor alkalmazhatjuk a 2.3 lemmát. Így kapjuk, hogy $\sum_{p\in\mathbf{L_1}}(\deg(p)-n-1) \geq |L|-1$, ezt összevetve a 2. ponttal adódik az állítás.

4. Ha L ideális egyenes, akkor hiperideál is.

Indirekten fogunk okoskodni. Legyen D azon egyenesek halmaza, amelyek ideálisak, de nem hiperideálok. Legyen L_h ezek közül a(z egyik) leghosszabb. L_h metszi L_1-et, de nem metszi L_2-t (L_1 és L_2 $(n+1)$-pontúak). Legyen $u = L_h \cap L_1$ és $l = \omega(L_h \setminus \{u\})$. Legyen $u_0 \in L_h$ az a pont, aminek a foka $n+1+l$. Az u_0-on átmenő valós egyenesek száma legyen r_0, a D-belieké d_0. Nyilván $d_0 \geq 1$. Ha legalább egy $(n+1)$-pontú egyenes átmegy az u_0-ponton, akkor $\deg(u_0) = d_0 + r_0$. Legyen $j \geq 1$ azoknak az u_0-on átmenő egyeneseknek a száma, amelyek metszik L_1-et, de nem metszik L_2-t. Ekkor az 1.1 feladat szerint $n+1-j$ olyan egyenes van, ami metszi mindkét egyenest. Így $r_0 \leq n+1-j \leq n$. Az L_1-gyel párhuzamos, L_2-t metsző (u_0-n átmenő) egyenesek száma szintén j, legyen egy ilyen egyenes L_g.

A 2.3 lemmát (azaz $\sum_{p \in \mathbf{L_1}} (\deg(p) - 1) \geq n^2 + n + |L_g| - 1$) és az s_{L_1}-re triviális alsó becslést alkalmazva,

$$b - 1 = s_{L_1} + \sum_{p \in \mathbf{L_1}} (\deg(p) - 1) \geq l(|L_h| - 1) + n^2 + n + |L_g| - 1. \tag{7}$$

Mivel $r_0 \leq n$, ezért minden $(n+1)$-pontú egyenesnek van olyan pontja a skatulyaelv miatt, amit u_0-lal H-beli egyenes köt össze (hiperideál ezt nyilván nem teheti). Legyen u_1 az $\mathcal{L}$ egy valós pontja. (vii) miatt nem lehet rajta H-beli egyenesen, az előző megjegyzésünk miatt minden $(n+1)$-pontú egyenesnek van pontja az u_0-on átmenő egyenesek valamelyikén, ezért az u_1-en átmenő $(n+1)$-pontú egyenesek száma (c_1) legfeljebb $1 + d_0(|L_h| - 1)$. A (3) azonosság miatt $v - 1 \leq n^2 + d_0(|L_r| - 1)$. Így (7) azonosságot is használva: $d_0(|L_h| - 1) \geq l(|L_h| - 1) + |L_g| - 1$, ezért $d_0 \geq l + 1$.

Tegyük fel, hogy legalább egy $(n+1)$-pontú egyenes átmegy az u_0 ponton (ekkor $\deg(u_0) = r_0 + d_0$). u_0-n l darab egyenes megy át, ami párhuzamos L_2-vel. L_h maximalitása miatt ezeknek az egyenesnek a hossza legfeljebb $|L_h|$. L_g is átmegy u_0-n. Ekkor ((3) azonosság alapján)

$$v - 1 \leq |L_g| - 1 + l(|L_h| - 1) + c_1 \cdot n + (n - c_1)(n - 1). \tag{8}$$

Tudjuk, hogy $c_1 \leq n$, továbbá $b \leq v + n$. Ezzel összevetve a (7) és a (8) egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy $c_1 \geq n$. Tehát $c_1 = n$.

Az u_0 ponton átmenő n darab $(n+1)$-pontú egyenes nem metszi A_0-t (hiszen A_0 hiperideál), így $\deg(u_0) = n + 1 + l \geq n + a$, tehát $l \geq a - 1$. Egy tetszőleges u_0-n átmenő L $(n+1)$-pontú egyenesre felírva a 2. pontbeli állítást:

$$a - k - 2 \geq \sum_{p \in \mathbf{L}} (\deg(p) - n - 1) \geq \deg(u_0) - n - 1 \geq a - 1.$$

Ez viszont ellentmondás, tehát u_0-n nem megy át $(n+1)$-pontú egyenes.

Újra a (3)-beli azonosságot használva:

$$v-1 \le r_0(n-1)+|L_g|-1+(d_0-1)(|L_h|-1)+(\deg(u_0)-r_0-d_0)(a-1)=$$

$$=r_0(n-a)+|L_g|-1+(d_0-1)(|L_h|-a)+(n+l)(a-1)\le$$

$$\le r_0(n-a)+|L_g|-1+l(|L_h|-a)+(n+l)(a-1)=$$

$$=r_0(n-a)+|L_g|-1+l(|L_h|-1)+n(a-1).$$

A (7) egyenlőtlenséget a fentivel összevetve kapjuk, hogy $n(n+1-a)\le r_0(n-a)$ ($a\le n-1$, tehát $(n-a)$ pozitív), ezért $r_0>n$, ez ellentmond annak, hogy $r_0\le n$. Ezzel a 4. pont állítását beláttuk.

Azaz egy egyenes pontosan akkor valós, ha találkozik néhány $(n+1)$-pontú egyenessel.

5. Minden $(n+1)$-pontú egyenesnek csak valós pontja van.

Tegyük fel, hogy ez nem igaz, tehát van legalább egy olyan (u) pontja, aminek a foka legalább $n+2$. Ezen a ponton nem mehet át ideális egyenes (hiszen akkor metszene egy $(n+1)$-pontút), tehát u-n $n+1$ darab $(n+1)$-pontú egyenesnek kellene átmennie, de ez túl sok pontot jelentene.

6. Ha L ideális egyenes, akkor $|L|\le a$.

7. Minden ponton pontosan $(n+1)$ darab valós egyenes megy át.

Ha egy u pont kívül van egy $(n+1)$-pontú egyenesen, akkor u-t az egyenes pontjaival összekötő egyeneseknek valósaknak kell lenniük (4. pont miatt azok az egyenesek, amik nem metszik az egyenest, nem is valósak). Ha u rajta van egy $(n+1)$-pontú egyenesen, akkor u valós, és az összes rajta átmenő egyenes valós ((vii) miatt).

8. Egy valós L egyenes $1+n|L|$ valós egyenessel találkozik.

Egy $(n+1)$-pontú L egyenes a fentiek szerint n^2+n+1 valós egyenest metsz, tehát $s_L=b-n^2-n-1$. Így ((9) belátásához a (v) és (xii) azonosságokat, míg a (10) egyenlőtlenséghez az 1. pontot használjuk):

$$n\ge s\ge 1+(k-1)a\ge 1, \tag{9}$$

$$s\le v-n^2-1\le k(a-1)-1. \tag{10}$$

Összesen tehát n^2+n+1 valós egyenes és s (hiper)ideális egyenes van.

Minden n-pontú egyenes n^2+1 valós egyenest metsz.

9. Legalább $k+2$ darab $n+k+1$ fokú pont van A_0-on.

Legyen t az $n+1+k$ fokú pontok száma. Az A_0-t metsző, L_1-gyel párhuzamos egyenesek száma legalább $ka-t+1$. Így $s=s_{L_1}\geq 1+ka-t$, innen a (10) egyenlőtlenség segítségével adódik, hogy $t\geq k+2$.

10. Legalább $n+k+3-a$ darab n-pontú egyenes megy át A_0 egy tetszőleges $n+1+k$ fokú pontján.

A bizonyítás leszámlálással indul ((3) azonosság), majd felhasználjuk a (9) és (10) egyenlőtlenségeket.

11. $2(a-1)\leq n$.

Alkalmazzuk a 2.2 lemmát az A_0, L_1 és egy, az előző kettőt metsző, n-pontú egyenesre.

12. Ha két n-pontú egyenes metszi egymást, akkor legfeljebb egy olyan ideális egyenes van, amely mindkettőt (különböző pontokban) metszi.

Legyen N_1 és N_2 a két n-pontú egyenes, a metszéspont legyen u. Tegyük fel, hogy létezik két ideális egyenes (I_1 és I_2), amely mindkettőt különböző pontokban metszi. Feltehetjük, hogy N_1-et I_1 és I_2 különböző (v, w) pontokban metszi. v-n a 7. pont szerint $(n+1)$ valós egyenes megy át, ezért legalább két valós egyenes is átmegy v-n, és párhuzamos N_2-vel (hiszen I_1 ideális). Ugyanez igaz w-re is. S N_1 minden más (u,v,w pontoktól különböző) pontján legalább egy N_2-vel párhuzamos egyenes átmegy, de ez ellentmond a 8. pontnak.

13. $k=1$.

Válasszunk u és v pontokan az A_0 egyenesen úgy, hogy $\deg(u)=\deg(v)=n+k+1$ legyen. Legyen u_n, illetve v_n a pontokon átmenő n-pontú egyenesek száma.

A 2.1 lemma (iv) állítása miatt azok az n-pontú egyenesek, amik átmennek u-n metszik azokat az n-pontú egyeneseket, amik átmennek v-n (mivel a párhuzamosság ekvivalenciareláció köztük). A 12. pont alapján ha egy ideális egyenes (A_0-tól különböző) átmegy u-n, akkor párhuzamos az összes v-n átmenő n-pontú egyenessel. Feltehetjük, hogy $u_n\leq v_n$. Egy u-n átmenő ideális egyenes mérete maximum $\deg(p)-v_n$. Felírunk egy egyenlőtlenséget (a (3) azonosságot alkalmazva):

$$v-1\leq u_n(n-1)+(n+1-u_n)(n-2)+a-1+(k-1)(n+k-v-n)\leq$$

$$\leq n^2-n-3+a+(k-1)(n+k)-v_n(k-2).$$

A (9) és (10) egyenlőtlenségek szerint $1+(k-1)a\leq v-n^2-1$, így

$$(n+1+k-v_n)(k-2)\geq 2+a(k-2).$$

A 10. pont állítása: $n+1+k-v_n\leq a-2$, ezért $k\geq 2$ nem teljesülhet.

14. A_0 az egyetlen ideális egyenes.

Tegyük fel, hogy A_0-n kívül van még ideális egyenes, ezek közül jelölje a leghosszabbat L_h. Legyen u a két egyenes metszéspontja, ha ez létezik, ha nem, akkor legyen L_h tetszőleges pontja. Legyen $l = \omega(L_h \setminus \{u\})$, s legyen t az $(n+1+l)$-fokú pontok (amelyek L_h-n vannak, s u-tól különböznek) száma.

$$s = s_{L_1} \geq 2 + t(l-1) + (|L_h| - t - 1)l = (|L_h| - 1)l - t + 2.$$

Egy tetszőleges $(n+1+l)$-fokú pontra felírva a (3) azonosságot:

$$v - 1 \leq (n+1)(n-1) + l(|L_h| - 1) = n^2 - 1 + l(|L_h| - 1).$$

(10) miatt $t \geq 3$. Tudjuk, hogy $s \geq 2+(l-1)(|L_h|-1)$, újra (10) alapján $a \geq 4+(l-1)(|L_h|-1)$. Legyen p egy u-tól különböző $n+1+l$ fokú pont. Tegyük fel, hogy legfeljebb 2 olyan n-pontú egyenes van, ami metszi A_0-t. Ezért p-re a (3) azonosságot felírva:

$$v - 1 \leq 2(n-1) + (a-2)(n-2) + (n+1-a)(n-1) + l(|L_h| - 1) = n^2 + 1 - a + l(|L_h| - 1).$$

(10) pont szerint $s \leq 1 + l(|L_h| - 1) - a$. De $s \geq 2 + (l-1)(|L_h| - 1)$, emiatt $|L_h| \geq a + 2$. Ez ellentmondás. Ezért feltehetjük, hogy minden L_h-beli $n+1+l$ fokú ponton legalább három olyan n fokú egyenes megy át, ami metszi A_0-t.

Legyen p-n átmenő három ilyen egyenes N_1, N_2, N_3. Legyen q egy másik $n+1+l$ fokú pont L_h-n. Legyen N egy q-n átmenő, A_0-t metsző egyenes. A (iv) miatt N metsz N_1, N_2, N_3 egyenesek közül legalább kettőt. Legyen ez N_1 és N_2. Az egyik egyenest biztosan nem A_0-n metszi, legyen ez N_1. Ekkor N, N_1, A_0 és L_h ellentmond a 12. pontnak. Azaz csak egy ideális egyenes van $\mathcal{L}$-ben.

15. Minden ideális pont A_0-on van, és egy ideális pont foka $n+2$.

Használjuk az 5. és 14. pontot.

16. A_0-t nem metszi két pontú egyenes.

Indirekten okoskodunk, használjuk a (3) azonosságot, így: $v - 1 \leq n^2 + n - a$. Ez ellentmondás ((v) állítás).

Így egy valós egyenesnek legalább két valós pontja van. Emiatt igaz a következő állítás:

17. $\mathcal{L}$ valós pontjai és a valós egyenesek (elhagyva belőlük az ideális pontokat) lineáris teret alkotnak. Legyen ez $\mathcal{L}^*$.

18. Egy tetszőleges n-pontú egyenes (L) egyértelműen meghatároz egy Π_L felbontást, amely $\mathcal{L}^*$ pontjait $n+1$ diszjunkt ($\mathcal{L}^*$-beli) egyenesre bontja fel. $L \in \Pi_L$, s tetszőleges $L \neq L' \in \Pi_L$ egyenes nem metszi L-et.

A 8. pont megjegyzése szerint minden n-pontú egyenes n darab valós egyenessel párhuzamos. Ezek megfelelnek a feltételeknek (egy valós ponton nem mehet át két ilyen egyenes).

19. Legyen L és L' két n-pontú egyenes, amelyek egy ideális pontban metszik egymást. Ekkor Π_L-nek és $\Pi_{L'}$-nek pontosan egy közös egyenese van.

L' minden pontján pontosan egy Π_L-beli egyenes megy át (az ideális pontján maga L). Tehát van egy olyan egyenes Π_L-ben, amely párhuzamos L'-vel, tehát ez az egyenes eleme $\Pi_{L'}$-nek.

20. Legyen p rögzített ideális pont. Minden $L_j(\ni p)$ n-pontú egyenesre, bővítsük az $\mathcal{L}^*$ teret egy olyan p_j ponttal, amely pontosan Π_{L_j} egyenesein van rajta. Ekkor egy $\mathcal{L}'$ lineáris teret kapunk, amiben $v' = v^* + d_n$, $b' = n^2 + n + 1$ és $\deg(q) = n + 1$ tetszőleges q-ra.

21. $\mathcal{L}'$ projektív síkká bővíthető. Legyen ez a projektív sík $\mathcal{L}''$

$v^* = v - a$, így:

$$v' = v - a + d_n \geq v + n + 4 - 2a \geq v + 2(a-1) + 4 - 2a = v + 2.$$

Tudjuk, hogy $b' = n^2 + n + 1$. Így alkalmazhatjuk a 2.8 tételt, s ezzel igazoltuk az állítást.

22. Ha két n-pontú egyenes metszi A_0-t, akkor metszik egymást.

Tegyük fel, hogy ez nincs így, azaz van két párhuzamos n-pontú egyenes (J_1, J_2), amelyek különböző pontokban metszik A_0-t (p és q). Egy n-pontú egyenessel egy ideális ponton két párhuzamos megy át, legyen $q \in J_3 \neq J_2$ párhuzamos J_1-gyel. A 2.4 lemma és a 16. pont miatt $\sum_{p \in \mathbf{J_2}} (\deg(p) - n - 1) \geq |J_3| - 1 \geq 2$. Ez viszont ellentmond a 15. pontnak.

23. Végső ellentmondás:

Legyen u egy rögzített ideális pont. Ekkor legyen $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{L}'$ és $\mathcal{L}''$ mint fent. Egy olyan n-pontú egyenesnek, amelynek ideális pontja u-tól különböző, egy $(n-1)$-pontú egyenes felel meg $\mathcal{L}'$-ben (22. pont). Minden u-tól különböző ideális ponthoz választhatunk egy-egy n-pontú egyenest (összesen $a-1$ darabot). $\mathcal{L}'$-ben az ezekhez tartozó $(n-1)$-pontú egyenesek páronként metszik egymást (szintén a 22. pont miatt). Amikor $\mathcal{L}''$-vé bővítünk, ezekhez az egyenesekhez két-két pontot hozzá kell vennünk (a pontok mind különbözők). Így a 21. pont szerint

$$n^2 + n + 1 = v'' \geq p' + 2(a-1) \geq v + n + 4 - 2a + 2(a-1).$$

Azaz

$$v \leq n^2 - 1.$$

Ez viszont ellentmond n választásának. Ezzel a 2.1 tétel bizonyítása teljes. ■

E tétel segítségével számos kérdés vizsgálata lényegesen egyszerűbbé válik. Bridges foglalkozott azokkal a terekkel, ahol $b = v + 1$. Erős lineáris algebrai módszerekkel sikerült is jellemeznie ezeket a tereket (1972). De Witte kombinatorikus eszközökkel klasszifikálta azokat a tereket, ahol $b = v + 2$. Eredményeik:

2.12. Tétel. *Ha $\mathcal{L}$ lineáris térre $b = v + 1$, akkor $\mathcal{L}$-et úgy kaptuk, hogy:*

(i) *egy projektív sík egy pontját töröltük,*

(ii) *egy másodrendű projektív sík két pontját töröltük.*

2.13. Tétel. *Ha $\mathcal{L}$ lineáris térre $b = v + 2$, akkor $\mathcal{L}$ a követezők valamelyike:*

(i) *egy olyan tér, amit úgy kaptunk, hogy egy legalább harmadrendű projektív sík két pontját töröltük,*

(ii) *Lin-kereszt,*

(iii) *másodrendű affin sík,*

(iv) *egyszerűen bővített másodrendű affin sík,*

(v) *harmadrendű szemi-affin sík.*

Totten tételével ezeknek a tételeknek a bizonyítása nagyon egyszerű (mindössze egy-két speciális esetet kell megvizsgálni, lásd [8]).

3. Három páronként párhuzamos egyenes nélküli lineáris terek klasszifikálása

3.1. Alapfogalmak

A kérdés A. Beutelspracher és Delandtsheer vizsgálatai nyomán vetődött fel. Metsch oldotta meg ([2]).

Bevezetünk néhány jelölést. $(k_1, k_2, \ldots k_r)$-keresztnek nevezzünk egy lineáris teret, ha a tér egy pontjának foka r, és a rajta átmenő egyenesek hossza rendre: $k_1, k_2 \ldots k_r$, a tér többi egyenese pedig kétpontú. Ekkor a $(3, 4)$-kereszt Lin-kereszt, a $(2, 2, \ldots 2)$-kereszt teljes gráf, míg a $(2, k)$-kereszt degenerált tér.

Adott egy tetszőleges $\mathcal{L}$ lineáris tér, ha ezt az alábbi két mód valamelyikén bővítjük, akkor *nyújtott* lineáris teret kapunk:

(a) $\mathcal{L}$-hez hozzáveszünk egy ∞ pontot, s $\mathcal{L}$ minden pontját 2 potú egyenesekkel kötjük össze a ∞ ponttal.

(b) $\mathcal{L}$ egy egyeneséhez veszünk hozzá egy ∞ pontot, majd ezt kötjük össze (kétpontú egyenesekkel) a többi ponttal.

3.1. Tétel. *Ha egy $\mathcal{L}$ lineáris tér nem tartalmaz három páronként párhuzamos egyeneset, akkor a $\mathcal{L}$ a következők valamelyike:*

(1) *degenerált tér vagy projektív sík,*

(2) *nyújtott degenerált tér vagy nyújtott projektív sík,*

(3) *egyszerűen vagy projektíven bővített affin sík,*

(4) *egy harmadrendű affin sík egy másodrendű affin síkkal bővítve,*

(5) *egy 5 pontú teljes gráf.*

3.2. A 3.1 tétel bizonyítása

A tételt több, általános lemma igazolásával fogjuk belátni. Feltesszük, hogy van egy olyan egyenes, aminek legalább három pontja van (az az eset triviális, ha minden egyenes kétpontú). Egy L egyenest metsző egyenesek száma m_L.

3.1. Lemma. *L_1 és L_2 két metsző, k-pontú egyenes ($m_{L_1} \geq m_{L_2}$). Legyen H párhuzamos L_2-vel. Legyen $p = L_1 \cap H$. Ekkor $\deg(p) \geq k + |H| - 1$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $m_{L_1} = m_{L_2}$, és minden H-val párhuzamos egyenes metszi L_1-et.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $s_H = m_{L_2} - k|H|$. Hasonlóan igaz az is, hogy $s_H \geq m_{L_2} - \deg(p) - (k-1)(|H|-1)$. E két egyenlőtlenség bizonyítja a lemmát. □

3.2. Lemma. *L_1 és L_2 két metsző, k-pontú egyenes ($m_{L_1} \geq m_{L_2}$). Legyen a metszéspont q. Ha L_1-nek van két olyan pontja (q-n kívül), melyeknek a foka legalább $k+1$, akkor $m_{L_1} = m_{L_2}$, továbbá létezik h úgy, hogy:*

(a) *$L_1 \cup L_2$ bármely q-tól különböző pontjának foka k vagy $k+h-1$. S a két egyenesen a k fokú pontok száma megegyezik.*

(b) *Minden olyan egyenes mérete h, ami párhuzamos L_2-vel és L_1-et metszi, vagy párhuzamos L_1-el és L_2-t metszi.*

Bizonyítás. Legyen p_1 és p_2 a feltételeknek megfelelő két pont. Mivel a fokszám legalább $k+1$, ezért vannak olyan $(p_1 \in)H_1$ és $(p_2 \in)H_2$ egyenesek, amik párhuzamosak L_2-vel. Legyen H_j hossza h_j. Feltehetjük, hogy $h_1 \leq h_2$. A 3.1 lemmát alkalmazva $\deg(p_2) \geq k + h_2 - 1 \geq k + h_1 - 1$. Másrészt a p_2-n átmenő egyenesek mindegyike metszi L_2 és H_1 valamelyikét, tehát $\deg(p_2) \leq k + h_1 - 1$. Tehát $h_1 = h_2 = h$. Hasonlóan $\deg(p_1) = k + h - 1$. Ez mutatja, hogy egy olyan egyenesnek, ami párhuzamos L_2-vel, de L_1-el nem, a hossza h. Továbbá, hogy L_1 – q-tól különböző – pontjának a foka k vagy $k+h-1$.

3.1 lemma miatt tudjuk azt is, hogy $m_{L_1} = m_{L_2}$. Legyen $q' = H_1 \cap H_2$. $m_{L_1} = m_{L_2}$ miatt q'-n is átmegy legalább két olyan egyenes, ami párhuzamos L_1-gyel és metszi L_2-t. L_2-nek van két olyan pontja (q-tól különböző), aminek a foka legalább $k+1$. Tehát létezik h', hogy L_2 minden pontjának foka k vagy $k+h'-1$, és minden L_2-t metsző, L_1-gyel párhuzamos egyenes hossza h'.

Legyen M_1 az L_1-et metsző, L_2-vel párhuzamos egyenesek halmaza. Tetszőleges (nem az egyeneseken fekvő) p pontra legyen c_p a ponton átmenő M_1-beli egyenesek száma. Mivel minden M_1-beli egyenesnek $h-1$ pontja van $L_1 \cup L_2$-n kívül, ezért:

$$|M_1| \cdot (h-1) = \sum_{p \notin \mathbf{L_1} \cup \mathbf{L_2}} c_p.$$

Definiáljuk hasonlóan M_2-t, ekkor:

$$|M_2| \cdot (h'-1) = \sum_{p \notin \mathbf{L_1} \cup \mathbf{L_2}} c_p.$$

$m_{L_1} = m_{L_2}$ miatt $|M_1| = |M_2|$. Így $h = h'$, ezzel a lemmát beláttuk. □

3.3. Lemma. *Legyen L_1, L_2, q, k, h mint az előző lemmában. Ekkor $h = 2$, vagy $h > k$.*

Bizonyítás. Indirekten okoskodunk. Tegyük fel, hogy $3 \leq h \leq k$. Legyen p_1 és p_2 az L_1 két $(k+h-1)$-fokú pontja (q-tól különböző). Ekkor $k+h-1 \geq k+2$, így van két egyenes (H_j és G_j), amelyek átmennek p_j-n, s párhuzamosak L_2-vel. $q' = H_1 \cap H_2$. H_j tetszőleges pontjának foka legalább $k+1 \quad (k+1 > h)$. Mivel $h \geq 3$, ezért alkalmazhatjuk a 3.2 lemmát H_1-re és H_2-re. $\deg(p_1) = \deg(p_2) = k+h-1$, tehát $H_1 \cup H_2$ minden q'-től különböző pontjának foka $k+h-1$. p_1-en $k-1$ egyenes megy át, ami párhuzamos H_2-vel, ezek a lemma (b) állítása szerint k-pontúak. A p_1-en átmenő másik $h-1$ egyenes h-pontú (szintén a lemmát alkalmazva). Így teljesül a következő egyenlőség: $v = 1 + k(k-1) + (h-1)^2$.

H_1-re és G_2-re a lemma állítását alkalmazva azt kapjuk, hogy $\deg(q') = k+h-1$. Mivel H_1 metsz minden olyan egyenest, ami párhuzamos L_2-vel, ezért $s_{L_2} = 1 + h(k+h-2) - hk = 1 + h(h-2)$.

Tegyük fel, hogy van olyan $p \neq q$ pont L_1-en, aminek a foka k. Ekkor van ilyen p' az L_2-n is. A p-t és p'-t összekötő egyenesnek legfeljebb $k+h-1$ pontja lehet. Minden más p-n átmenő egyenes hossza legfeljebb k (mivel $\deg(p') = k$). Így $v \leq k+h-1+(k-1)^2 < 1+k(k-1)+(h-1)^2$. Ez ellentmondás.

Tehát L_1 minden q-tól különböző pontjának a foka $k+h-1$. Eszerint az L_1-et metsző, s L_2-vel párhuzamos egyenesek száma: $k(k+h-1) - (k-1)(k-1) - (k+h-1) = (k-1)(h-1)$. $s_{L_2} = 1 + h(h-2) = (h-1)^2$. Ezért $(h-1)^2 \geq (h-1)(k-1) \implies h \geq k$, s mivel az indirekt feltevés szerint $h \leq k$, ezért $h = k$, és minden L_2-vel párhuzamos egyenes metszi L_1-et. Azaz minden egyenes metszi L_1-et vagy L_2-t.

Mivel $h = k$, ezért az okoskodásunkat meg tudjuk ismételni H_1-re és H_2-re is, eszerint minden egyenes metszi H_1 és H_2 valamelyikét, azonban L_2-re ez nem áll. Ellentmondást kaptunk, tehát az eredeti állítást beláttuk. □

3.4. Lemma. *Legyen L_1, L_2, q, k, h mint a 3.2 lemmában. Ha $h > k$, akkor $\mathcal{L}$ projektíven bővített affin sík.*

Bizonyítás. Legyen p_1 és p_2 L_1 két $k+h-1$ fokú pontja (q-tól különböző), továbbá $H(\ni p_2)$ olyan egyenes, ami párhuzamos L_2-vel. Legyenek $H_1, H_2 \dots H_{h-1}$ olyan p_1-en átmenő egyenesek, amelyek párhuzamosak L_1-gyel. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $m_H \leq m_{H_j}$. Legyen $q_j = H \cap H_j$.

Indirekten fogunk okoskodni. Tegyük fel, hogy valamilyen j-re van olyan p_1-től és h_j-től különböző $x \in H_j$ pont, hogy $\deg(x) \geq h+1$ (azt tudjuk, hogy $\deg(x)$ legalább h). Így alkalmazhatjuk a 3.2 lemmát H-ra és H_j-re. Azaz H_j és H minden q_j-től különböző pontjának foka h vagy $h+h'-1$. A 3.3 lemma miatt $h' = 2$ vagy $h' > h$. De $\deg(p_1) = h+k-1$, ezért $h' = k$. Ez ellentmondás.

Tehát H_j minden p_1-től és q_j-től különböző pontjának foka pontosan h ($\forall j$-re). Mivel minden j-re teljesül, hogy $m_H \geq m_{H_j}$, ezért $\deg(q_j) = h$. Legyen a (valamilyen j-re) H_j-n fekvő h-fokú pontok halmaza $\mathcal{L}^*$. $|\mathcal{L}^*| = (h-1)^2$. Ha egy L egyenes tartalmazza $\mathcal{L}^*$ egy pontját, akkor metszi az összes H_j egyenest. Azaz megszorítva ezeket az egyeneseket $\mathcal{L}^*$-ra egy $(h-1)$-edrendű affin síkot kapunk.

Ha $p \notin \mathcal{L}^*$, akkor p-n $h-1$ darab egyenes megy át, ami tartalmaz $\mathcal{L}^*$-beli pontot, ezek az egyenesek egy partícióját (párhuzamossági osztályát) alkotják $\mathcal{L}^*$-nak. Nézzünk $\mathcal{L}^*$-ban egy párhuzamossági osztályt. Mivel $h-1 \geq k \geq 3$, ezért legalább kettőnek metszenie kell egymást ($\mathcal{L}^*$-on kívül). Ekkor az ($\mathcal{L}^*$-ban) párhuzamos egyenes átmegy ezen a ponton. Tehát $\mathcal{L}^*$-on kívül pontosan h pont van, s minden párhuzamossági osztályhoz tartozik egy. Ezek a pontok lineáris teret alkotnak, jelölje ezt $\mathcal{L}'$. Tehát $\mathcal{L}$ az $\mathcal{L}^*$ bővítése. Kérdés, hogy mi lehet $\mathcal{L}'$.

Ha $\mathcal{L}'$-ben bármely két egyenes metszi egymást, akkor $\mathcal{L}'$ degenerált tér vagy projektív sík. Viszont tudjuk, hogy $|L_1|, |L_2| \geq 3$, tehát $\mathcal{L}'$ nem lehet degenerált. Ha van két párhuzamos egyenes (K és J), akkor minden egyenes ezek egyikét metszi, tehát $\mathcal{L}' = K \cup J$. Könnyen meggondolható, hogy ekkor $\mathcal{L}'$ egy másodrendű affin sík. Viszont tudjuk, hogy $|L_1|, |L_2| \geq 3$, tehát ez az eset nem lehetséges.

Azaz $\mathcal{L}$ egy projektíven bővített affin sík. $\square$

Megjegyzés. $\mathcal{L}^*$ rendje $h-1$, de $h = |\mathcal{L}'| = (k-1)^2 + (k-1) + 1 = k(k-1) + 1$, azaz $\mathcal{L}^*$ rendje $k(k-1)$, ami összetett szám, s nem ismert, hogy létezik-e olyan affin sík, aminek a rendje összetett szám. Tehát ilyen lineáris térre nem tudunk példát mutatni, s azt sem tudjuk, hogy létezik-e.

3.5. Lemma. *Legyen L_1, L_2, q, k, h mint a 3.2 lemmában. Ha $h = 2$, akkor $\mathcal{L}$ egy nyújtott projektív sík.*

Bizonyítás. Legyen p_1 és p_2 az L_1 két $(k+1)$-fokú pontja (q-tól különböző), továbbá legyen H_j egy olyan L_2-vel párhuzamos egyenes, ami átmegy p_j-n. Legyen $q' = H_1 \cap H_2$. Mivel $|H_1| = 2$, ezért minden L_2-vel párhuzamos egyenes tartalmazza q'-t. Minden q-tól és q'-től különböző pont foka k vagy $k+1$. p_3 és p_4 az L_2 két (q-tól különböző) $(k+1)$-fokú pontja. H_j egy p_j-t tartalmazó és L_1-gyel párhuzamos egyenes ($j = 3, 4$). H_3 és H_4 metszéspontjának foka legalább $k+2$, tehát $H_3 \cap H_4 = q'$.

$\deg(p_1) = \deg(p_2) = k+1$, ezért minden egyenes legfeljebb $k+1$ pontot tartalmaz, és minden $(k+1)$-pontú egyenes metszi H_1-et és H_2-t. Tehát minden $(k+1)$-pontú egyenes tartalmazza q'-t. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset. *Van olyan legfeljebb $(k-1)$-pontú egyenes (L), ami nem tartalmazza q'-t.*

Feltehetjük, hogy $p_1, p_3 \notin L$. L párhuzamos H_3-mal. Tehát minden egyenes metszi legalább az egyiküket. $\deg(p_1) = k+1$, ezért $|L| = k-1$.

Legyen $p \notin L$ olyan pont, aminek foka $k+1$. Ekkor létezik olyan L' egyenes, ami párhuzamos L-lel, s nem tartalmazza q'-t. Mivel L párhuzamos H_1-gyel és H_3-mal, ezért $p_1, p_3 \in L'$. Azaz minden $(k+1)$-fokú pont rajta van L-en vagy L'-n. Tehát $p_2, p_4 \in L$.

Legyen X olyan egyenes, ami tartalmazza p_1-et és p_4-et. Feltesszük, hogy ezen kívül tartalmaz egy harmadik, p pontot is. $\deg(p) = k$, tehát létezik olyan H egyenes, ami párhuzamos L-lel, és $p \in H$.

Mivel L párhuzamos H_2-vel és L'-vel is, ezért $q' \in H$, és $\emptyset \neq H \cap L = x$. $\deg(x) = k+1$. Tehát $x \in G$, ahol G párhuzamos L_2-vel. De minden L_2-vel párhuzamos egyenes tartalmazza q'-t, ezért $G = H$. De H nem lehet párhuzamos L_2-vel, mert tartalmaz egy k-fokú pontot (p-t). Tehát $|X| = 2$.

Így minden $(k+1)$-pontú egyenesnek, ami keresztülmegy p_2-n, metszenie kell X-et vagy H_3-at, tehát $k = 3$. Mivel $k = 3$, így a p_4-en átmenő (L_2-től különböző) egyenes kétpontú, ezért $v = 6$. Így J ($q, q' \in J$), L és L' páronként párhuzamos, ez lehetetlen. Tehát ez az eset nem valósulhat meg.

2. eset. *Minden olyan egyenes, ami nem tartalmazza q'-t, k-pontú.*

Számoljuk a p_1-en átmenő egyeneseket. Láthatjuk, hogy $v = k^2 - k + 2$. Legyen p egy q-tól különböző pont. Ha $\deg(p) \geq k+1$, akkor $\deg(p) = k+1$, illetve a p-t és q'-t összekötő egyenes kétpontú. Ha $\deg(p) \leq k$, akkor $\deg(p) = k$, illetve a p-t és q'-t összekötő egyenes $(k+1)$-pontú.

Ha $G \ni q'$, és $|G| = k+1$, akkor G minden q'-től különböző pontjának foka k, s minden nem G-n lévő pont foka $k+1$. S minden más q'-n átmenő egyenes kétpontú. Ha nem létezik olyan $(k+1)$-pontú egyenes, ami tartalmazza q'-t, akkor minden q'-n átmenő egyenes hossza 2, s minden q'-től különböző pont foka $k+1$.

Mindkét esetben, ha elhagyjuk q'-t és a rá illeszkedő (kétpontú) egyeneseket, akkor egy $k-1$ rendű projektív síkot kapunk. S ez pontosan a nyújtott projektív sík definíciója. □

3.6. Lemma. *Legyen G maximális méretű egyenes, és L_1, L_2 legyenek olyan egymással párhuzamos, kétpontú egyenesek, amelyek metszik G-t. Ekkor $\mathcal{L}$ egy $(3, |G|)$-kereszt vagy egy $(2, 2, |G|)$-kereszt, azaz mindenképpen nyújtott degenerált tér.*

Bizonyítás. Legyen $p_j = G \cap L_j$. Minden $p_1, p_2 \neq p \in G$ pont foka legfeljebb három. Ha $\deg(p) = 2$, akkor nyilván $(3, |G|)$-kereszt a tér. Ezért tegyük fel, hogy $\deg(p) = 3$ minden $p_1, p_2 \neq p \in G$-re.

Ha $|G| = 3$, akkor minden egyenes mérete legfeljebb 3, ha $|G| > 3$, akkor (használva, hogy $\deg(p) = 3$) minden G-től különböző egyenes mérete legfeljebb három. Tehát a térnek maximum $|G| + 4$ pontja lehet.

A $|G| + 4$, $|G| + 3$ eseteket könnyen kizárhatjuk. Így kapjuk, hogy a térnek $|G| + 2$ pontja van, ez azt jelenti, hogy $(2, 2, |G|)$-kereszt. Ezzel az állítást beláttuk. □

Megjegyzés. Az eddigi eredmények alapján feltehetjük, hogy az $\mathcal{L}$ térre teljesül a következő két tulajdonság:

(a) Ha van két k-pontú, egymást metsző L_1 és L_2 egyenes, és $m_{L_1} \geq m_{L_2}$, akkor L_1-en legfeljebb egy olyan pont van, aminek a foka nem k.

(b) Ha G maximális méretű egyenes, akkor minden G-t metsző kétpontú egyenes metszi egymást.

A továbbiakban a maximális egyenes mérete legyen $n+1$.

3.7. Lemma. *Ha G maximális méretű egyenes, és legalább két egyenessel párhuzamos, akkor minden vele párhuzamos egyenes kétpontú.*

Bizonyítás. Legyen L_1 és L_2 a két párhuzamos egyenes ($|L_1| \geq |L_2|$). Legyen a metszéspontjuk q. $s_G = m_{L_j} - |L_j| \cdot |G|$, ebből kapjuk, hogy $m_{L_1} = m_{L_2} + (|L_1| - |L_2|)|G|$.

Indirekten okoskodunk. Tegyük fel, hogy $|L_1| > 2$. Legyenek $(q \neq) p_1, p_2 \in L_1$. $r_1 = \deg(p_1) \leq \deg(p_2) = r_2$. Mivel L_1 párhuzamos G-vel, ezért $\deg(p_1) \geq |G| + 1 > |L_2|$. Tehát van $(p_1 \in) H$, ami párhuzamos L_2-vel. A 3.1 lemma szerint:

$$m_{L_1} - r_1 - (|L_1| - 1)(|H| - 1) \leq m_{L_2} - |L_2| \cdot |H|.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha minden H-val párhuzamos egyenes metszi L_1-et.

$$r_1 \geq (|L_1| - |L_2|)(|G| - |H|) + |L_1| + |H| - 1.$$

Így $r_2 \geq r - 1 \geq |L_1| + |H| - 1 \geq |L_1| + |H| - 1$. Mivel $\deg(p_2) \leq |L_2| + |H| - 1$, ezért $|L_1| = |L_2| \geq 3$. L_1 és L_2 minden pontjának foka legalább $|G| + 1 > |L_1| = |L_2|$, ez ellentmond a megjegyzés (a)-pontjának. □

3.8. Lemma. *Legyen G maximális méretű egyenes, p_1, p_2 G két pontja. $r_2 = \deg(p_2) \geq \deg(p_1) = r_1$. Ekkor az alábbi állítások egyike biztosan teljesül:*

(i) *p_2-t legalább két maximális méretű egyenes tartalmazza.*

(ii) *p_2-t legalább két kétpontú egyenes tartalmazza.*

(iii) *$r_1 = r_2$, és minden k-ra ($2 \leq k \leq r_2$) pontosan egy k-pontú egyenes tartalmazza p_2-t.*

Bizonyítás. (Ötlet)

Ha lenne két k-pontú egyenes, ami átmegy p_2-n, s sem (i), sem (ii) nem teljesülne, akkor ellentmondanánk az (a)-beli feltevésünknek. □

3.9. Lemma. *Legyen G maximális méretű egyenes ($|G| = n+1$). Ha G-nek van n olyan pontja, amelyek nem tartalmaznak G-től különböző $(n+1)$-pontú egyenest, akkor $\mathcal{L}$ degenerált tér.*

Bizonyítás. Legyenek ezek a pontok $p_1, p_2 \ldots p_n$. $r_j = \deg(p_j)$. Ha $n = 2$, akkor az állítás triviálisan teljesül ((b) pont).

Tehát $n \geq 3$. Feltehetjük, hogy $r_1 \leq r_2 \leq r_3$. Az előző lemmát alkalmazzuk p_1, p_2-re, illetve p_1, p_3-ra. Eszerint van p_2-n és p_3-on átmenő kétpontú egyenes (H_2, ill. H_3). A megyjegyzés (b) pontja szerint H_2 és H_3 metszik egymást (legyen a metszéspont q). H_j-n kívül nem megy át más kétpontú egyenes p_j-n ($j = 1, 2$). Újra a 3.8 lemma miatt $r_1 = r_j$, és p_j rajta van egy r_j pontú egyenesen ($j = 2, 3$). $\deg(p_2) = r_3$, így minden p_2-n átmenő egyenes metszi L_3-at. $q' = H_2 \cap L_3$. Mivel $|H_2| = 2$, ezért $q' = q$. Emiatt $L_3 = H_3 \implies r_3 = 2$. Ezzel az állítást beláttuk. □

3.10. Lemma. *L_1 és L_2 párhuzamos egyenesek. Ha mindkettő metsz egy $(n+1)$-pontú egyenest (G-t), akkor $|L_1| = n+1$ vagy $|L_2| = n+1$.*

Bizonyítás. A 3.9 lemma miatt G tartalmaz legalább két olyan pontot, amin legalább két $(n+1)$-pontú egyenes megy át. Tehát minden pont foka legalább $n+1$.

$|L_j| = l_j$, $L_j \cap G = p_j$. c_j legyen azoknak az egyeneseknek a száma, amik párhuzamosak G-vel és metszik L_j-t, e_j azoké, amik párhuzamosak G-vel és L_j-vel. S végül legyen m azoknak az egyeneseknek a száma, amik párhuzamosak L_1-gyel, és nem tartalmazzák p_2-t. Ekkor

$$\sum_{p \in \mathbf{L_2} \setminus \{\mathbf{p_2}\}} (\deg(p) - n - 1) = c_2.$$

Továbbá

$$m = (l_2 - 1)(n - l_1) + c_2.$$

Másrészt tudjuk, hogy $m \geq (n+1-2)(n+1-l_1) + e_1$, mivel G minden pontjának foka legalább $n+1$. Következésképp

$$c_2 \geq n - 1 + e_1 + (n - l_1)(n - l_2).$$

Indirekten fogunk okoskodni. Tegyük fel, hogy $l_1, l_2 \leq n$. Ekkor $n \geq 3$ ((b) miatt). Továbbá $c_2 \geq n - 1 + e_1 \geq 2$. Hasonlóan $c_1 \geq 2$. Ekkor a 3.7 lemma miatt minden G-vel párhuzamos egyenes kétpontú. Két esetet vizsgálunk:

1. eset. *A G-vel párhuzamos egyenesek nem mind mennek át egy ponton.*

Ez pontosan azt jelenti, hogy háromszöget alkotnak. Így $e_j \geq 1 \implies c_j \geq 3$. De $c_j + e_j$ a G-vel párhuzamos egyenesek száma, ez pedig ellentmondás.

2. eset. *A G-vel párhuzamos egyenesek mind egy ponton mennek át.*

Legyen ez a pont $q(\notin L_1)$. Ezért L_1 minden pontján maximum egy G-vel párhuzamos egyenes mehet át. Mivel $c_1 \geq n-1+e_2$ és $l_1 \leq n$, ezért $l_1 = n$, s L_1 minden p_1-től különböző pontján pontosan egy olyan egyenes megy át, ami párhuzamos G-vel (ezért minden ilyen pont foka $n+2$). $e_2 = 0$, így L_2-nek metszenie kell minden G-vel párhuzamos egyenest, azaz $q \in L_2$. Mivel L_1-en egy p-től különböző x pont foka $n+2$, van olyan x-en átmenő L egyenes ($L \neq L_1$), ami párhuzamos L_2-vel. Nézzünk L_1-en egy olyan pontot, ami nincs rajta L-en, ezen keresztül van egy kétpontú egyenes aminek a másik pontja q, tehát ez az egyenes párhuzamos L-el, s $|L| \leq n+1$. Tegyük fel, hogy $|L| = n+1$, ekkor L maximális méretű, s van vele két párhuzamos egyenes, így a 3.7 lemma miatt L_2 kétpontú, azaz $n = 2$, de tudjuk, hogy $n \geq 3$. Így $|L| \leq n$. Továbbá L metszi G-t, ezért $|L| = n$. L és L_1 minden pontjának foka legalább $n+1$, és $n \geq 3$. Ez ellentmond a megjegyzés (a) pontjának.

Tehát mindkét esetben ellentmondáshoz jutottunk, ezzel a lemmát beláttuk. □

3.11. Lemma. *Tegyük fel, hogy minden pont foka $n+1$. Ha $\deg(p) = n+1$, és p rajta van egy $(n+1)$-pontú egyenesen (G-n), akkor minden p-n átmenő egyenes mérete $n+1$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van olyan $L \ni p$ egyenes, ami legfeljebb n pontú. Mivel minden pont foka legalább $n+1$, van olyan G-t metsző H, ami párhuzamos L-lel. Mivel $\deg(p) = n$, ezért $|H| \leq n$. Ez ellentmond az előző lemmának. □

Legyen $\mathcal{L}$ nem degenerált lineáris tér, amelyben nincs három páronként párhuzamos egyenes. Legyen $|G| = n+1$. A 3.9 lemma miatt van két olyan $(n+1)$-pontú egyenes (H és H'), amik G-t különböző pontokban metszik. Ezért minden pont foka legalább $n+1$. A megjegyzés (a) pontja szerint H-n vagy G-n van olyan p pont, amire $\deg(p) = n+1$. A 3.11 lemma alapján minden p-n átmenő egyenes $(n+1)$-pontú (legyenek ezek: $G_1, G_2 \ldots G_{n+1}$) $\Longrightarrow$ $v = n^2+n+1$. Emiatt egy $(n+2)$-fokú ponton legfeljebb n darab $(n+1)$-pontú egyenes megy át. Két esetet különböztetünk meg:

1. eset. *Van olyan j, amire G_j-n minden pont foka $n+1$.*

Ekkor a 3.11 lemma miatt minden G-t metsző egyenes mérete $n+1$. Ezért legalább n^2+n+1 darab $(n+1)$-pontú egyenes van. A (2) azonosság szerint:

$$(n^2+n+1)(n+1) = \sum_{L \in \mathbf{L}} |L|(|L|-1).$$

Emiatt a térnek csak $(n+1)$-pontú egyenese van. Azaz $\mathcal{L}$ egy n-edrendű projektív sík.

2. eset. *Minden G_j egyenesnek van olyan pontja, aminek foka legalább $n+2$.*

Feltehetjük, hogy minden j-re $m_{G_1} \leq m_{G_j}$. Az (a) pont szerint pontosan egy pont létezik minden G_j egyenesen, aminek foka nem $n+1$, jelöljük ezt q_j-vel. A 3.11 lemma miatt tetszőleges

k-ra és $j \geq 2$-re a q_k-t és q-t összekötő egyenes hossza $n+1$ ($q \in G_j \setminus q_j$). q_k legfeljebb n darab $(n+1)$-pontú egyenesen van rajta, s az előző megállapítás miatt q_k pontosan n darab $(n+1)$-pontú egyenesen van rajta (sőt a q_k-t és q_j-t összekötő egyenesnek legfeljebb n pontja lehet).

Legyen x p-től és q_1-től különböző pont G_1-en. Ekkor x és q_2 összekötő egyenese $(n+1)$-pontú. G_2 többi pontját (mivel ezek foka $n+1$) is $(n+1)$-pontú egyenes köti össze x-szel. Ezért $\deg(x) = n+1$. Tehát G_1-en is csak egy pont lehet (q_1), aminek foka nem $n+1$.

Mivel $j \neq k$-ra a q_j-t és q_k-t összekötő egyenes legfeljebb n-pontú, ezért (3.11 lemma) nem lehet $(n+1)$-fokú pontja. Legyen Q a q_i pontok halmaza. Q pontjai lineáris teret alkotnak (a tér egyenesei $\mathcal{L}$ azon egyenesei, amik legalább két Q-beli ponton átmennek). Tehát $\mathcal{L}$ bővített affin sík.

A 3.4 lemma bizonyításához hasonlóan meg tudjuk mutatni, hogy Q csak degenerált tér, projektív sík vagy másodrendű affin sík lehet. Viszont a megjegyzés (a) pontja miatt Q nem lehet projektív sík. Ezzel a 3.1 tétel bizonyítását befejeztük. ■

4. A feladatok megoldásai

1.1 feladat megoldása. Ha t (p-n átmenő) egyenes metszi L-et, de L'-t nem, akkor $|L| - t$ egyenes metszi L-et és L'-t egyaránt. p-t és L'-t összesen $|L'|$ egyenes metszi. Azaz $|L'| - (|L| - t) = t + |L'| - |L|$ olyan egyenes van, ami metszi L'-t, de nem metszi L-et, azaz a feladat állítása igaz. □

1.2 feladat megoldása. Legyen p a H egyenes olyan pontja, ami nincs rajta L-en. H olyan egyenes, ami átmegy p-n metszi és L-et, de nem metszi L'-t. Tehát (az előző, 1.1 feladat jelöléseit használva) $t \geq 1$. Azaz legalább $1 + |L'| - |L|$ olyan p-n átmenő egyenes van, ami metszi L'-t, de nem metszi L-et. Ezek az egyenesek metszik H-t és L'-t, de nem metszik L-et. Ezt minden lehetséges p-re összegezve kapjuk a feladat állítását. □

1.3 feladat megoldása. Azokat az egyeneseket fogjuk kétféleképpen megszámolni, amelyek metszik N-et és az L_1,L_2 egyenesek egyikét. Jelölje $\mathbf{L}$ azoknak az egyeneseknek ($\neq L$) a halmazát, amik metszik L-et, és $\widetilde{\mathbf{L}}$ azokét, amelyek párhuzamosak vele. Két ilyen jel egymás mellé írása jelölje a két halmaz metszetét. Így felírhatjuk a következő azonosságot:

$$|\widetilde{\mathbf{L_1}}\,\mathbf{N}| + |\widetilde{\mathbf{L_2}}\,\mathbf{N}| - 2|\widetilde{\mathbf{L_1}}\,\widetilde{\mathbf{L_2}}\,\mathbf{N}| = |\widetilde{\mathbf{L_1}}\,\mathbf{L_2}\,\mathbf{N}| + |\mathbf{L_1}\,\widetilde{\mathbf{L_2}}\,\mathbf{N}|.$$

A halmazok számosságát meg is tudjuk adni:

$|\widetilde{\mathbf{L_1}}\,\mathbf{N}| = \sum_{\mathrm{p}\in\mathrm{N}} (\mathrm{deg(p)} - 1 - (\mathrm{n} + 1 - \mathrm{d_1}))$, ahol az adott pontból induló egyenesek számából levontuk az L_1-et metszőket és magát N-et. Hasonlóan $|\widetilde{\mathbf{L_2}}\,\mathbf{N}| = \sum_{\mathrm{p}\in\mathrm{N}} (\mathrm{deg(p)} - 1 - (\mathrm{n} + 1 - \mathrm{d_2}))$.

Az előző 1.3 feladat eredményét alkalmazva az $\widetilde{\mathbf{L_1}}\,\mathbf{L_2}\,\mathbf{N}$ halmazra kapjuk, hogy:

$|\widetilde{\mathbf{L_1}}\,\mathbf{L_2}\,\mathbf{N}| \geq (\mathrm{n} + 1 - \mathrm{d_2} - 1)(\mathrm{n} + 1 - (\mathrm{n} + 1 - \mathrm{d_1})) = \mathrm{d_1}(\mathrm{n} - \mathrm{d_2})$, hasonlóan:

$|\mathbf{L_1}\,\widetilde{\mathbf{L_2}}\,\mathbf{N}| \geq (\mathrm{n} + 1 - \mathrm{d_1} - 1)(\mathrm{n} + 1 - (\mathrm{n} + 1 - \mathrm{d_2})) = \mathrm{d_2}(\mathrm{n} - \mathrm{d_1})$.

Tehát az azonosságból kapjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\sum_{p\in N} (\deg(p) - n - 2 + d_1)) + \sum_{p\in N} (\deg(p) - n - 2 + d_2)) \geq 2|\widetilde{\mathbf{L_1}}\,\widetilde{\mathbf{L_2}}\,\mathbf{N}| + \mathrm{d_1}(\mathrm{n} - \mathrm{d_2}) + \mathrm{d_2}(\mathrm{n} - \mathrm{d_1}).$$

Innen

$$2d_1 d_2 \geq -2 \sum_{p\in N} (\deg(p) - n - 2) = 2(-t + n).$$

S ez az, amit igazolni szerettünk volna. □

1.4 feladat megoldása. Legyen P egy teljes ív tetszőleges pontja. Ekkor a P-ből kiinduló $n+1$ egyenes mindegyikén legfeljebb 1 további pontja lehet a teljes ívnek. Tehát egy teljes ív mérete legfeljebb $n+2$ lehet. $\square$

1.5 feladat megoldása. Egyesével nézzük az egyeneseket, s közben alsó becslést adunk az általuk fedett pontokra. Azt fogjuk használni, hogy bármely két egyenes legfeljebb egy pontban metszi egymást. Az első egyenes legalább $\lceil\sqrt{2v}\rceil$ pontot a fed. A második egyenes legalább további $\lceil\sqrt{2v}\rceil-1$ pontot fed, hiszen az első egyenessel legfeljebb 1 közös pontja lehet. A harmadik egyenes $\lceil\sqrt{2v}\rceil-2$ további pontot fed legalább, hiszen az első két egyenessel legfeljebb két közös pontja lehet. És így tovább. Tegyük fel, hogy legalább $\lceil\sqrt{2v}\rceil$ egyenes van, ami legalább $\sqrt{2v}$-pontú. Ezek legalább $\lceil\sqrt{2v}\rceil+(\lceil\sqrt{2v}\rceil-1)+(\lceil\sqrt{2v}\rceil-2)+\cdots+2+1$ különböző pontot fednek. Ez azt jelentené, hogy a térnek legalább $\frac{\lceil\sqrt{2v}\rceil\cdot(\lceil\sqrt{2v}\rceil+1)}{2}$ pontja van. De

$$\frac{\lceil\sqrt{2v}\rceil\cdot(\lceil\sqrt{2v}\rceil+1)}{2}>\frac{(\sqrt{2v})^2}{2}=v,$$

tehát egy lineáris térben legfeljebb $\lceil\sqrt{2v}\rceil-1$ egyenes van, ami legalább $\sqrt{2v}$ pontot tartalmaz. $\square$

1.6 feladat megoldása. Az 1.4 feladat megoldásának ötletét fogjuk alkalmazni, annyi módosítással, hogy olyan P pontot választunk a lineáris térben, aminek a fokszáma minimális ($\deg(p)=r$), s így a teljes ív méretét felülről tudjuk becsülni $2r$-el (hiszen minden P-n átmenő egyenesen legfeljebb 2 pont lehet a teljes ív része).

Tehát cél a minimális fokszám becslése. Ehhez az (1)-beli összefüggést fogjuk használni:

$$r\cdot v=\min\{\deg(p):p\in\mathbf{P}\}\cdot \mathrm{v}\leq\sum_{\mathrm{p}\in\mathbf{P}}\mathrm{deg(p)}=\sum_{\mathrm{L}\in\mathbf{L}}|\mathrm{L}|.$$

A $\sum_{L\in\mathbf{L}}|L|$ összeget fogjuk felülről becsülni, szétbontva a szummát és alkalmazva az 1.5 feladatot:

$$\sum_{L\in\mathbf{L}}|L|\leq\sum_{|L|<\sqrt{2v}}|L|+\sum_{|L|\geq\sqrt{2v}}|L|.$$

Legyenek $L_1,L_2,\dots L_k$ azok az egyenesek, amiknek legalább $\sqrt{2v}$ pontjuk van. Az előző feladat megoldása szerint:

$$|L_1|+(|L_2|-1)+\cdots+(|L_k|-k+1)\leq v\implies\sum_{|L|\geq\sqrt{2v}}|L|\leq v+\binom{k}{2}\leq v+\binom{\lceil\sqrt{2v}\rceil-1}{2}<2v.$$

Tehát

$$\sum_{L\in\mathbf{L}} |L| \le \sum_{|L|<\sqrt{2v}} |L| + \sum_{|L|\ge\sqrt{2v}} |L| < \sum_{|L|<\sqrt{2v}} \sqrt{2v} + 2v < b\sqrt{2v} + 2v.$$

Azaz

$$r \cdot v \le \sum_{L\in\mathbf{L}} |L| < b\sqrt{2v} + 2v \implies r < \frac{b}{v}\sqrt{2v} + 2.$$

Tehát azt kaptuk, hogy lineáris térben egy teljes ív legfeljebb $2\frac{b\sqrt{2v}}{v} + 4$ pontot tartalmazhat. $\square$

1.7 feladat megoldása. Ez pontosan a Bose-Fisher tétel $k = 1$ esete (1.8 feladat). $\square$

1.8 feladat megoldása. Ha van a halmazok közt pontosan k-elemű halmaz (legyen ez A_1), akkor ezt a halmazt minden másik tartalmazza, s páronként pontosan ebben A_1-ben metszik egymást. Innen könnyen adódik a kívánt egyenlőtlenség. Foglalkozzunk azzal az esettel, ha minden A_i-re $|A_i| > k$. Legyen a halmazrendszer incidencia-mátrixa $A^{m\times n}$, ahol a sorok a halmazoknak, az oszlopok a pontoknak felelnek meg. Két különböző sor skalárszorzata k. Egy sor önmagával vett skalárszorzata $|A_i|$. Tehát az AA^T mátrix elemei: $(AA^T)_{i,j} = k$, ha $i \ne j$, és $(AA^T)_{i,i} = |A_i|$. Erről a mátrixról a "bordering trick" segítségével beláthatjuk, hogy invertálható (kihasználtuk, hogy $|A_i| > k$), tehát az 1.2 lemma szerint $m \le n$. S ezzel kész vagyunk. $\square$

1.9 feladat megoldása. Tekintsünk páronként metsző egyeneseket, erre a szokott incidencia-mátrixos trükk (az AA^T mátrix helyett az A^TA mátrixot nézve) adja a kívánt eredményt. $\square$

Hivatkozások

[1] N. G. de Bruijn, P. Erdős, *On a combinatorical problem,* Indag. Math., 10, 1948, 421-423.

[2] K. Metsch, *Classification of linear spaces without three mutually parallel lines,* J. Geometry Vol. 37., 1990, 128-141.

[3] T. Szőnyi, *Szimmetrikus struktúrák,* oktatási segédanyag, letölthető a http://www.cs.elte.hu/∼ szonyi/jegy2uj.dvi.gz címről.

[4] J. Totten, *Basic properties of restricted linear spaces,* Discrete Mathematics 13, 1975, 67-74.

[5] J. Totten, *On the degree of points and lines in a restricted linear space,* Discrete Mathematics 14, 1976, 391-394.

[6] J. Totten, *Parallelism in a restricted linear space,* Discrete Mathematics 14, 1976, 395-398.

[7] J. Totten, *Classification of restricted linear spaces, Can. J. Math.,* Vol. XXVIII, No. 2, 1976, pp. 321-333.

[8] J. Totten, *Finite linear spaces with three more lines than points,*Simon Stevin, 51, 1977, 35-47.

[9] P. de Witte, *A new property of non-trivial finite linear spaces,* Bull. Soc. Math. Belg., XVIII, 1966, 430-438.

[10] P. de Witte, *A new proof of an inequality of Szekeres, de Bruijn and Erdős,* Bull. Soc. Math. Belg., 17, 1965, 475-483.