Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Conway-számok és kétszemélyes játékok

diplomamunka

Szerző:

Tóth Gábor, matematika BSc,

matematikus szakirány

Témavezető:

Fialowski Alice, egyetemi docens

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

0. fejezet

Bevezetés

Célom ezen szakdolgozattal, hogy bemutassak egy halmazelméleti számkonstrukciót, melyet John Horton Conway angol matematikus dolgozott ki az 1970-es években. Ez a módszer néhány egyszerű rekurzív definícióból kiindulva, egyetlen lépésben hoz létre a valós számoknak, a rendszámoknak és az infinitezimálisan kicsiny értékeknek megfelelő elemeket, sőt, rendezett testbe ágyazza őket. Így Conway számai között ugyanúgy lehet összeadni, kivonni, szorozni, osztani és gyököt vonni, mint ahogyan azt a valós számoknál megszoktuk, olyan objektumokat teremtve ezzel, melyeknek a matematika klasszikus ágaiban aligha lehetne értelmet adni. Például:

$$\sqrt{\omega - 3} + \frac{\pi}{\omega}.$$

Persze amilyen egyszerűek és tömörek az alapdefiníciók, olyannyira nehéz és munkaigényes a fenti tulajdonságok igazolása és az elmélet többi részének felépítése. Nem triviális például, hogy bármely két szám összehasonlítható, vagy hogy számok összege szám. De éppen ettől lesz szép és hasznos az elmélettel való foglalkozás, mert közelebb hozza az emberhez a tiszta, absztrakt matematikát, és a pusztán logikai alapokon nyugvó gondolkodást.

E szellemi kincsen túl a Conway-számoknak más, gyakorlatiasabb alkalmazásuk is van, nevezetesen a játékelméletben. Szoros kapcsolatban állnak a kétszemélyes, teljes információs, felváltva lépős stratégiai játékokkal, mint a sakk vagy a gó. Conway eredetileg ilyen játékok nyerő stratégiáit vizsgálta, így jutott el az új számfogalomhoz.

A témát az [1] és [2] irodalmak alapján fogom feldolgozni.

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Fialowski Alice-nak, aki által megismerhettem ezt az elméletet, és tanácsaival sokat segített a szakdolgozat elkészítésében.

0.1. Előismeretek, fogalmak és jelölések

A diplomamunka megértéséhez elegendő a halmazelmélet és logika alapjainak, a főbb algebrai struktúrák definícióinak, illetve a rendszámok legfontosabb tulajdonságainak ismerete. Most néhány kiegészítés következik ezekkel kapcsolatban.

Az L és R halmazok alkotta x *rendezett pár* definíciója: $x = \langle L, R\rangle := \{\{L\}, \{L, R\}\}$. Az L-et x bal oldali, az R-et pedig a jobb oldali *tagjának* hívjuk. Az L halmaz egy tetszőleges vagy tipikus elemét x^L-lel, az R halmazét x^R-rel jelöljük, és x bal illetve jobb oldali *összetevőinek* nevezzük őket. A továbbiakban egy rendezett párt legtöbbször az összetevőivel adunk meg. Például ha $L = \{a, b, c\}$ és $R = \{d, e\}$, akkor $\langle L, R\rangle = \{a, b, c\,|d, e\}$, vagy általánosan: $x = \left\{x^L \left| x^R\right.\right\}$.

A halmazelmélet Zermelo–Fraenkel-féle axiómarendszeréből (ZF) különösen fontos lesz számunkra az egyetlen nem intuitív axióma:

Regularitási axióma. $\forall x\Big(\exists u(u \in x) \to \exists v\Big(v \in x \wedge \forall w(\neg(w \in x \wedge w \in v))\Big)\Big)$. *Azaz minden nemüres x halmaznak van olyan v eleme, hogy x és v diszjunktak.*

A számokkal kapcsolatos definíciók rekurzívak, ezért az állítások többségét kénytelenek leszünk indukcióval bizonyítani. Ennek legitimizálásához nélkülözhetetlen az axióma alábbi következménye:

0.1.1. Állítás. *A regularitási axiómából következik, hogy nem létezik halmazok olyan $x_0, x_1, x_2, \ldots$ végtelen sorozata, melynek tagjaira $x_{i+1} \in x_i$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van ilyen sorozat. Ekkor elkészíthetjük az $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ halmazt, ami nyilván ellentmond a regularitási axiómának. □

Megjegyezzük, hogy a kiválasztási axiómát feltéve 0.1.1 megfordítása is igaz.

Nevezetes tétel, hogy ZF többi axiómáját feltéve a regularitási axióma ekvivalens azzal, hogy minden halmaz eleme a kumulatív hierarchia valamely V_α halmazának, alkalmas α rendszámra. A kumulatív hierarchia transzfinit rekurziós definíciója: $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, azaz a V_α hatványhalmaza, illetve ha α limeszrendszám, akkor $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$ [4].

Bevezetjük néhány algebrai struktúra rendezett, illetve részben rendezett változatát:

0.1.2. Definíció. *Egy csoportot rendezett (részben rendezett) csoportnak hívunk, ha értelmezve van rajta egy teljes rendezés (részben rendezés), mellyel a csoportművelet eltolásinvariáns, azaz tetszőleges a, b és c csoportelemekre, ha $a \leq b$, akkor $a+c \leq b+c$ és $c+a \leq c+b$.*

0.1.3. Definíció. *Egy kommutatív gyűrűt, illetve testet rendezett gyűrűnek, illetve rendezett testnek hívunk, ha értelmezve van rajtuk egy teljes rendezés, mellyel az additív csoport rendezett, és a szorzásra igaz, hogy ha a és b elemekre $0 \leq a$ és $0 \leq b$, akkor $0 \leq ab$.*

Az algebrai struktúrák bevezetésénél általában kikötik, hogy *halmazok* legyenek. Itt ehhez nem tarthatjuk magunkat, mert számos, vizsgálatunk tárgyát képző objektum – köztük maga a számok összessége is – nem halmaz, hanem valódi *osztály* lesz. Conway nagy kezdőbetűt használ, ha a struktúra osztályon értelmezett (például *Group*, *Field*). Mi ezt nem fogjuk külön kiemelni, egyszerűen csoportnak, testnek stb. nevezzük elemek (halmazok) tetszőleges olyan összességét, melyben az adott műveletekkel, relációkkal és kitüntetett elemekkel teljesülnek a struktúra axiómái. Bátran megtehetjük, hiszen az algebrai állítások igazsága független a struktúrák halmazelméleti mivoltától.

0.2. Betekintés a Conway-számok világába

Mielőtt definiálnánk a Conway-számokat, érdemes bevezetni egy náluk általánosabb fogalmat:

0.2.1. Definíció (Conway-játék)**.** *Egy x rendezett pár Conway-játék, ha minden összetevője Conway-játék. Minden Conway-játék így áll elő.*

Ez rekurzív definíció: ha már ismerünk néhány Conway-játékot, akkor e szabályt követve teremthetünk belőlük újakat; és csak azok az objektumok Conway-játékok, amelyek így születtek. Kezdetben egyetlen Conway-játékunk sincs, mégis elkezdhetjük a konstrukciót az $\langle \emptyset, \emptyset \rangle$ párral, hiszen erre triviális a feltétel: egyetlen összetevője sincs. Ezt a $\{|\}$ jelsorozattal is leírható Conway-játékot nevezzük 0-nak. A 0 ismeretében három újabb Conway-játékot állítunk elő: $1 := \{0|\}$, $-1 := \{|0\}$ és $* := \{0|0\}$.

Az elsőt iterálva: $2 := \{0, 1|\}$, $3 := \{0, 1, 2|\}$, minden n természetes számra, melynek már feleltettünk meg Conway-játékot, a következő Conway-játék $n{+}1 := \{0, 1, 2, \ldots, n|\}$, $\omega := \{0, 1, 2 \ldots |\}$, $\omega + 1 := \{0, 1, 2, \ldots, \omega|\}$ és így tovább. Transzfinit rekurziót alkalmazva az összes rendszám reprezentálható olyan párként, melynek bal oldali összetevői a nála kisebb rendszámok, hasonlóan a Neumann-féle definícióhoz.

A Conway-számokat két rekurzív szabály határozza meg, íme az első:

0.2.2. Definíció (Conway-szám)**.** *Egy x rendezett pár Conway-szám, hogyha minden összetevője Conway-szám, és nincsenek olyan x^L, x^R összetevői, melyekre $x^R \leq x^L$. Minden Conway-szám így áll elő.*

Egy rendezett pár biztosan Conway-szám, ha az egyik tagja üres, a másik pedig Conway-számok tetszőleges halmaza, hiszen ekkor a második feltétel semmitmondó. Ezért a Conway-számok konstrukcióját is indíthatjuk a 0-val, és transzfinit indukcióval a $*$ kivételével minden eddig bevezetett Conway-játékról kiderül, hogy Conway-szám is.

A második szabály kétváltozós rekurzióval adja meg a „kisebb vagy egyenlőt": az $x \leq y$ igazságát az dönti el, hogy „egyszerűbb" számpárokra igaz-e a reláció. A definíció Conway-játékokra is alkalmazható.

0.2.3. Definíció (Rendezés)**.** *Pontosan akkor teljesül $x \leq y$, hogyha nem létezik x-nek olyan x^L összetevője, melyre $y \leq x^L$, és nem létezik y-nak olyan y^R összetevője, melyre $y^R \leq x$.*

Jelölés. *$x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$, $x = y \Leftrightarrow x \leq y$ és $x \geq y$, $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ és $x \ngeq y$, $x > y \Leftrightarrow y < x$. A továbbiakban $x \equiv y$ jelöli azt, hogy x és y halmazelméleti értelemben azonosak.*

A 0.2.2 és 0.2.3 szabályok együtt definiálják tehát a Conway-számokat, melyeket a Donald Knuth által alkotott *szürreális számok* elnevezéssel is szoktak illetni. Mi ezután egyszerűen *számok*nak hívjuk őket. A definíciók mögött az a szemlélet húzódik meg, hogy a számok összetevőik „között" helyezkednek el a képzeletbeli számegyenesen, a konstrukció előrehaladtával egyre sűrűbben kitöltve azt.

Ha x-nek nincs bal oldali, y-nak pedig nincs jobb oldali összetevője, akkor $x \leq y$ teljesül. Ezért $0 \leq 0$, $0 \leq 1$, $-1 \leq 0$ és $-1 \leq 1$. Ezekből az egyenlőtlenségekből megállapítható, hogy $*$ nem szám, továbbá $0 \nleq -1$, $1 \nleq 0$, $1 \nleq -1$. Ez utóbbiakból pedig: $1 \leq 1$ és $-1 \leq -1$. Eddigi ismereteinket összefoglalhatjuk úgy, hogy a -1, 0 és 1 számok mindegyike egyenlő önmagával, és $-1 < 0$, $0 < 1$, $-1 < 1$ teljesülnek. Azt mondjuk, hogy a $\{0\}$ halmaz a számok nulladik, a $\{-1, 1\}$ pedig az első *nemzedéke*, azaz ezek a nulladik nemzedék ismeretében előállítható, újonnan született számok.

A $0 \leq 0$ egyenlőtlenség következményei $0 \nleq *$ és $* \nleq 0$ is. A relációnkról még nem tudjuk, valóban rendezés-e, de a Conway-játékok között már biztosan nem lesz teljes.

A fentiek alapján a második nemzedék tagjai:

$$\{-1|\}, \{1|\}, \{-1,0|\}, \{0,1|\}, \{-1,1|\}, \{-1,0,1|\},$$

$$\{|-1\}, \{|1\}, \{|-1,0\}, \{|0,1\}, \{|-1,1\}, \{|-1,0,1\},$$

$$\{-1|0\}, \{-1|1\}, \{-1|0,1\}, \{0|1\}, \{-1,0|1\}.$$

Végiggondolható, hogy az, amelyiknek több összetevője van valamelyik oldalén, a bal oldalon csak a nagyobb, a jobb oldalon pedig csak a kisebb összetevőt meghagyva, vele egyenlő számmá alakítható. A maradék hét számból $\{-1|\}$, $\{|1\}$ és $\{-1|1\}$ 0-val egyenlőek, míg a többi négy új ekvivalenciaosztályokat határoz meg, nevezetesen:

- $\{1|\}$ egyenlő a már definiált 2-vel,
- $-2 := \{|-1\}$,
- $\frac{1}{2} := \{0|1\}$,
- $-\frac{1}{2} := \{-1|0\}$.

Mielőtt folytatnánk a konstrukciót, bevezetjük a legfontosabb műveleteket – természetesen rekurzív úton. A Conway-játékok között is működnek ezek a definíciók.

0.2.4. Definíció (műveletek)**.**

- *x és y összege:* $x + y \equiv \left\{x^L + y, x + y^L \,\middle|\, x^R + y, x + y^R\right\}$,
- *x ellentettje:* $-x \equiv \left\{-x^R \,\middle|\, -x^L\right\}$, *$x - y$ azt jelenti, hogy* $x + (-y)$,
- *x és y szorzata:* $xy \equiv \left\{x^L y + xy^L - x^L y^L, x^R y + xy^R - x^R y^R \right|$

$$\left| x^L y + xy^R - x^L y^R, x^R y + xy^L - x^R y^L \right\}.$$

A formulákban megjelenő összetevők az összes ugyanolyan típusú összetevőre utalnak; tehát például $x+y$ bal oldalához az $x^L + y$ és $x + y^L$ összegeket x és y minden bal oldali összetevőjével el kell készíteni. Néhány példán keresztül ellenőrizhetjük a számok elnevezésének jogosságát. $0 + 0 \equiv 0$, és transzfinit indukcióval világos, hogy bármely α Conway-féle rendszámra $\alpha + 0 \equiv 0 + \alpha \equiv \alpha$. $0 + 1 \equiv 1 + 0 \equiv 1$ alapján ismét indukcióból következik, hogy minden n természetes számra n és 1 összege, bármilyen sorrendben összeadva őket, azonos az $n + 1$-nek megfelelő számmal. E gondolatmenetet folytatva kiderül, hogy az új természetes számok összeadása ugyanúgy megy, mint a régieké.

0.2.5. Állítás. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Bizonyítás. A természetes számokról tett megállapításainkból levezethető, hogy $\frac{1}{2} + 0 \equiv 0 + \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \equiv \left\{0 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 0 \,\middle|\, 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 1\right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{\frac{1}{2} \,\middle|\, \{0 + \frac{1}{2}, 1 + 0 | 1 + 1\}, \{0 + 1, \frac{1}{2} + 0 | 1 + 1\}\right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{\frac{1}{2} \,\middle|\, \{\frac{1}{2}, 1 | 2\}\right\} \stackrel{?}{=} \{0|\}.$$

Jelöljük x-szel az $\left\{\frac{1}{2}, 1 \,|2\right\}$ számot. $\left\{\frac{1}{2} \,|x\right\} \leq 1$-hez pusztán annyit kell igazolni, hogy $1 \not\leq \frac{1}{2}$, ami viszont következik $1 \leq 1$-bél, az első 1-est az $\frac{1}{2}$ jobb oldali összetevőjének feleltetve meg. $\left\{\frac{1}{2} \,|x\right\} \geq 1$-hez pedig egyrészt szükséges, hogy $\left\{\frac{1}{2} \,|x\right\} \not\leq 0$, másrészt pedig hogy $x \not\leq 1$. Az előbbit $1 \not\leq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}$ támasztja alá, az utóbbit pedig $1 \leq 1$, ahol a második 1-es x bal oldali elemét jelenti. $\square$

A bevezető fejezet hátralévő részében bizonyítás nélkül mutatom be a számok további nemzedékeit. A most elkezdett, „születésnap” szerinti elemi felépítés lehetőségeit részletesen tárgyalja [3], de a lentiek igazolásához felhasználható a későbbi 2.1.3 állításunk, az *elsőszülöttségi lemma* is.

A második konstrukciós lépés után a számok alábbi, a rendezés szerint növekvő sorrendbe állított ekvivalenciaosztályait ismerjük:

$$-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2.$$

A harmadik nemzedékkel kiegészülve:

$$-3, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3.$$

Majd a negyedikkel:

$$-4, -3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, -1, -\frac{7}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8},$$

$$0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2, \frac{5}{2}, 3, 4.$$

Általában az n-edik lépés után $m := 2^{n+1} - 1$ számunk van, növekvő sorrendben $x_1, \ldots, x_m$, és az $n+1$-edik lépésben megszületik az x_1-nél eggyel kisebb $\{|x_1\}$, az x_m-nél eggyel nagyobb $\{x_m|\}$, valamint az $\{x_i|x_{i+1}\}, i = 1, \ldots, m-1$ alakú számok, melyek a rendezésben összetevőik között, tőlük egyenlő távolságra állnak – vagyis $\{x_i|x_{i+1}\} + \{x_i|x_{i+1}\} = x_i + x_{i+1}$.

Így állíthatóak tehát elő a diadikus törtek. Az összes diadikus tört ismeretében pedig megkonstruálhatjuk az „ω-adik” nemzedéket, melynek számai szükségképpen végtelen sok összetevővel bírnak. A már definiált ω mellett létrejön $-\omega = \{|0, -1, -2, \ldots\}$, valamint az első infinitezimális, azaz 0-tél különböző, de hozzá minden diadikus törtnél közelebb fekvő számok: $\frac{1}{\omega} = \left\{0 \,\middle|\, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$ és $-\frac{1}{\omega} = \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots \,\middle|\, 0\right\}$. Sőt, minden diadikus törthöz készíthetünk hozzá infinitezimálisan közeli számot, például $1+\frac{1}{\omega}=\left\{1\,\middle|\,2,\frac{3}{2},\frac{5}{4},\frac{9}{8},\ldots\right\}$. Végül ide tartoznak a nem diadikustört-alakú valós számok is, melyek természetes felírását a kettes számrendszerbeli alakjuk szolgáltatja:

$$\frac{1}{3}=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{5}{16},\ldots\,\middle|\,1,\frac{1}{2},\frac{3}{8},\ldots\right\},$$

$$\sqrt{2}=\left\{1,\frac{5}{4},\frac{11}{8},\ldots\,\middle|\,2,\frac{1}{2},\frac{23}{16},\ldots\right\},$$

$$\pi=\left\{3,\frac{25}{8},\frac{201}{64},\ldots\,\middle|\,4,\frac{7}{2},\frac{13}{4},\frac{51}{16},\ldots\right\}.$$

Megjegyezzük, hogy az ω-adik nemzedék tagjait bevezethettük volna úgy is, mint a diadikus törtek *Dedekind-szeletei*, azaz olyan $\{L|R\}$ párok, melyekre minden diadikus tört pontosan L vagy R egyikében van, és $x^L<x^R$ minden összetevőre. Ha R üres, ω-t, ha L üres, $-\omega$-t kapjuk, a többi esetben pedig diadikustól infinitezimálisan eltérőt vagy valósat, annak függvényében, hogy valamelyik oldalon van-e maximális elem, vagy sem. Az itt tárgyalt elmélet szemléletéhez azonban jobban illeszkedik, és könnyebben is kezelhető az előbbi „konvergens sorozatos” megadás.

További nevezetes számok:

$$\omega-1=\{0,1,2,\ldots|\omega\},\quad \omega-n=\{0,1,2,\ldots|\omega,\omega-1,\ldots,\omega-(n-1)\},$$

$$\frac{\omega}{2}=\{0,1,2\ldots|\omega,\omega-1,\omega-2,\ldots\},$$

$$\frac{\omega}{2^n}=\left\{0,1,2,\ldots\,\middle|\,\frac{\omega}{2^{n-1}},\frac{\omega}{2^{n-1}}-1,\frac{\omega}{2^{n-1}}-2,\ldots\right\},$$

$$\sqrt{\omega}=\left\{0,1,2,\ldots\,\middle|\,\omega,\frac{\omega}{2},\frac{\omega}{4},\ldots\right\},\quad \frac{2}{\omega}=\left\{\frac{1}{\omega}\,\middle|\,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots\right\},$$

$$\frac{1}{2\omega}=\left\{0\,\middle|\,\frac{1}{\omega}\right\},\quad \frac{1}{\omega^2}=\left\{0\,\middle|\,\frac{1}{\omega},\frac{1}{2\omega},\frac{1}{4\omega},\ldots\right\}\quad \text{stb.}$$

Fő kutatási eszközünkről, az *indukció*ról szóló tétellel zárom a fejezetet.

0.2.6. Tétel (indukció). *Ha T egy tulajdonság, és Conway-játékok (számok) tetszőleges $X=(x_1,\ldots x_n)$ n-esére $T(X)$ következménye annak, hogy T teljesül minden X-től* *eltérő* $(x'_1, \ldots x'_n)$*-re, ahol minden* i*-re* x'_i *vagy maga* x_i*, vagy valamelyik összetevője, akkor* T *teljesül minden Conway-játékokból (számokból) álló* n*-esre.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamely X-re nem teljesül T. Ekkor van olyan $X_1 = (x'_1, \ldots x'_n)$, amelyre T nem igaz, ebből pedig az következik, hogy van olyan $X_2 = (x''_1, \ldots x''_n)$, amelyre T szintén nem igaz, és így tovább. A kapott $X, X_1, X_2, \ldots$ végtelen sorozat minden i-re meghatároz egy összetevői viszonyra nézve csökkenő sorozatot. Ezek közül legalább az egyik végtelen, és így halmazok végtelen leszálló sorozatát adja meg, ellentmondásban a 0.1.1 állítással. □

Indukcióval válik világossá, hogy minden szám Conway-játék, illetve hogy a 0-ból induló konstrukció minden Conway-játékot előállít. A tételt rugalmasan alkalmazzuk majd a bizonyításokban, néhol még ennél is általánosabb indukciós feltételt használva, de vigyázva arra, hogy a módszer korrekt maradjon.

1. fejezet

Kétszemélyes játékok

Most – látszólag – teljesen más vizekre evezünk. Bevezetjük a kétszemélyes, teljes információs, véges lefutású játékok egy modelljét, a nyerő stratégiák segítségével rendezett csoportstruktúrát értelmezünk rajtuk, végül pedig rámutatnunk a stratégiai játékok és a Conway-játékok közötti kapcsolatra.

1.1. Definíció, példák

A *játék* koncepciója a következő: Adott egy bal- és egy jobb oldali játékos, az előbbit L-lel, az utóbbit R-rel jelöljük. Adott a játék állapotainak S halmaza, az s_0 kezdőállapot, illetve az állapotok közötti $\to_L$ és $\to_R$ relációk. A játékosok megállapodnak, ki kezdje a játékot s_0-bél indulva, ezután felváltva lépnek. Ha a játék s állapotban van, és L-en van a sor, L bármely olyan s' állapotba léphet, melyre $s \to_L s'$. Ha nincs ilyen s', L elvesztette a játékot. R-re hasonló áll.

Kikötjük továbbá, hogy ne létezzék állapotok olyan $s_0, s_1, s_2, \ldots$ végtelen sorozata, melyre $s_0 \to s_1 \to s_2 \to \ldots$, ahol „$\to$" azt jelenti, hogy $\to_L$ és $\to_R$ közül valamelyik teljesül. Ez garantálja, hogy a játék véges sok lépésben befejeződik, és valaki biztosan nyer. Végül még egy – technikai jellegű – kikötést teszünk: minden $s \in S$ állapot legyen elérhető valamilyen $s_0 \to s_1 \to \ldots \to s_n = s$ úton a kezdőállapotbél. Az így meghatározott g játék jelölése: $(S, s_0, \to_L, \to_R)$.

Minden s állapotra létezik g-nek egy $(S', s, \to_L, \to_R)$ részjátéka, ahol $S' = \{s\} \cup \{s' \in$

$S : s'$ elérhető s-ből$\}$. Ha $s_0 \to_L s$, akkor a részjátékot g bal oldali, ha pedig $s_0 \to_R s$, akkor jobb oldali *opciójának* nevezzük, és az ilyeneket a számoknál bevezetett jelöléshez hasonlóan, g^L-lel illetve g^R-rel jelöljük. Két játék *izomorf*, és ezt „$\cong$" szimbólummal jelöljük, ha állapotaik között relációtartó bijekció létesíthető. Most néhány példa következik, amelyekre később hivatkozni fogunk:

A **dominójáték** kezdőállapota a síkbeli koordinátarendszer rácsnégyzeteinek egy véges részhalmaza. Egy lépésben a soron következő játékos elvehet a négyzetek közül két szomszédosat, azaz egy dominóformát, de L csak vízszintes, R csak függőleges állású dominót vehet el. A **kupac-** vagy **NIM-játékban** az állapotok természetes számok $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ n-esei, ahol $k_i \leq m_i$ rögzített m_i számokra. A kezdőállapot $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, és mindkét játékos egy lépésében valamelyik k_i-t megváltoztathatja tetszőleges k_i-nél kisebb természetes számra – egyetlen kupacból kell elvennie, de abból bármennyit elvehet. Értelemszerűen az nyer, aki előbb eljut a $\underline{0}$ állapotba. Ismeretes a játéknak olyan változata is, ahol éppen az veszít, aki az utolsó elemet kényszerül elvenni. Ilyenkor be kell vezetni még egy w állapotot és a $\underline{0} \to_L w$, $\underline{0} \to_R w$ relációkat.

Egy x **Conway-játék** is felfogható a fenti értelemben vett játékként. A kezdőállapot legyen maga x, minden x^L-re $x \to_L x^L$, minden x^R-re $x \to_R x^R$, x minden x' összetevőjére $x' \to_L x'^L$ illetve $x' \to_R x'^R$ és így tovább. Az így definiált állapotok halmazt alkotnak (a kumulatív hierarchiát lehet felhasználni ennek bizonyításához, lásd 0.1), a játék végességét pedig 0.1.1 biztosítja. A tartalmazási viszony miatt kézenfekvő az a szemlélet is, hogy x-et magával a játékkal, az összetevőit az opciókkal stb. azonosítsuk.

1.2. Nyerő stratégiák

Egy $g = (S, s_0, \to_L, \to_R)$ játékban a $W : \{s \in S : \exists s'(s \to_L s')\} \to S$ függvény L *stratégiája*, ha az értelmezési tartomány minden elemére $s \to_L W(s)$. A W az L-nek R kezdése melletti *nyerő stratégiája*, ha g tetszőleges olyan lejátszásában, amikor R kezd és L minden lépésében W-t követi, L nyer. Ilyen nyerő stratégia létezését LgR-rel jelöljük. Hasonlóan definiáljuk LgL, RgL és RgR teljesülését. Nyilván lehetetlen, hogy LgR és RgR, vagy hogy LgL és RgL egyszerre igazak legyenek.

Ha $F : g \to h$ izomorfizmus, és W bizonyos típusú nyerő stratégia g-ben, akkor $F(W(F^{-1}))$ ugyanolyan típusú nyerő stratégia h-ban; ezért izomorf játékok nyerő stratégiák szempontjából ugyanúgy jellemezhetők.

1.2.1. Állítás.

(1) *Ha g-nek valamely bal oldali opciójára Lg^LR, akkor LgL.*

(2) *Ha g minden bal oldali opciójára Rg^LR, akkor RgL.*

Bizonyítás. (1) Legyen W^L az Lg^LR-et igazoló nyerő stratégia. Ha L úgy játszik g-ben, hogy először g kezdőállapotából g^L kezdőállapotába lép, ezután pedig W^L-et követi, biztosan nyer. Tehát L-nek van nyerő stratégiája g-ben, amikor ő kezd. (2) Ha g-nek nincs bal oldali opciója, L már a kezdőlépésnél elveszti a játékot. Ha bele tud lépni valamilyen g^L-be, R játszhatja az ehhez az opcióhoz tartozó W^R nyerő stratégiáját, így megnyeri a játékot. Az ilyen W^R-ek egyesítése adja tehát R nyerő stratégiáját az egész g-ben. □

Természetesen az L és R szerepét felcserélve kapott *duális* állítás is igaz.

1.2.2. Tétel. *[indukció játékokra] Legyen T egy tulajdonság. Ha tetszőleges g játék esetén $T(g)$ következménye annak, hogy T g minden opciójára teljesül, akkor T minden játékra teljesül.*

Bizonyítás. Ha van olyan g_0, amelyre nem igaz T, akkor g_0-nak van olyan g_1 opciója, amelyre nem igaz T, g_1-nek pedig van olyan g_2 opciója, hogy arra sem igaz T, és így tovább. A g_i játékok s_i kezdőállapotai egy tiltott $s_0 \to s_1 \to s_2 \to \ldots$ végtelen sorozatot adnak. Ellentmondás. □

A tétel általánosítható játékok n-eseire, a 0.2.6-hoz hasonló módon. Most indukcióval igazoljuk, hogy valakinek mindig van nyerő stratégiája:

1.2.3. Tétel. *Minden g játékra igaz a következő formula:* $(LgL \vee RgL) \wedge (LgR \vee RgR)$.

Bizonyítás. A formula első felét igazoljuk, a másik fele ennek a duálisa. Az indukciós feltevés szerint minden g^L-re igaz a formula, tehát Lg^LR vagy Rg^LR teljesül. Ha van olyan bal oldali opció, melyre $Lg^L R$, akkor 1.2.1 miatt LgL. Ha pedig mindegyikre $Rg^L R$, akkor ismét 1.2.1 következtében RgL. $\square$

A játékok tehát a következő négy osztályba sorolhatók:

Osztály	Tulajdonság	Jelölés
L	$LgL \wedge LgR$, a játék L-nek jó	$g > 0$
R	$RgL \wedge RgR$, a játék R-nek jó	$g < 0$
S	$RgL \wedge LgR$, a játék a másodiknak jó	$g = 0$
F	$LgL \wedge RgR$, a játék az elsőnek jó	$g \parallel 0$

Az utolsó oszlop jelölései egyelőre csak szimbólumok, de rövidesen értelmet nyernek. Ha LgR igaz, akkor a g játék az **L**-hez vagy az **S**-hez tartozhat, ezért ilyenkor $g \geq 0$-t írunk, RgL helyett pedig hasonló megfontolásból $g \leq 0$-t. Az 1.2.1 állítás átfogalmazása az új írásmódunkkal és ismereteinkkel:

- $g \geq 0$ pontosan akkor, ha minden g^R-re $g^R \nleq 0$.
- $g \leq 0$ pontosan akkor, ha minden g^L-re $g^L \ngeq 0$.

Példák. Egy NIM-játékban a két játékos lépéslehetőségei megegyeznek, ezért az csak **F**-beli, vagy **S**-beli lehet. Az előbbire példa, ha egyetlen nemüres, vagy ha két eltérő elemszámú kupac van, az utóbbira pedig, ha két megegyező elemszámú. A dominójátékok között mind a négy osztályhoz könnyen találunk reprezentánsokat. A Conway-játékok közti legegyszerűbb példák az osztályokra, a fenti táblázat sorrendjét követve: 1, -1, 0, $*$.

1.3. Játékok ellentettje és összege

1.3.1. Definíció. *Zérójátéknak nevezzük a* 0 *Conway-játéknak megfeleltetett* $(\{0\}, 0, \emptyset, \emptyset)$ *játékot. Amennyiben nem okoz félreértést, ezt is* 0*-val jelöljük.*

A zérójáték az **S** osztályba tartozik, hiszen bárki is kezdje a játékot, veszít, mert nincs szabályos nyitó lépése. Részben ezt előlegezte meg az „$= 0$” szimbólum.

1.3.2. Definíció. *A* $g = (S, s_0, \to_L, \to_R)$ *játék ellentettje:* $-g = (S, s_0, \to_R, \to_L)$*, vagyis a két játékos lépéslehetőségeinek felcserélésével kapott játék.*

Nyilvánvalóan $-0 \equiv 0$, tetszőleges g játékra pedig $-(-g) \equiv g$ (az „$\equiv$" szimbólum játékok között is *azonosság*ot fog kifejezni). Egy g-beli nyerő stratégiát a szerepek felcserélésével át lehet alakítani $-g$-beli nyerő stratégiává, ezért LgR-ből következik $R(-g)L$, azaz ha $g \geq 0$, akkor $-g \leq 0$; és fordítva.

A g_1 és g_2 játékok g_1+g_2 összegén olyan játékot értünk, amiben L és R párhuzamosan játsszák a két játékot, oly módon, hogy a soron következő játékosnak g_1-ben vagy g_2-ben kell megtennie egy számára szabályos lépést, de csak az egyikben; ha egyik játékban sincs lehetősége lépni, akkor veszít. Formálisan:

1.3.3. Definíció. *A* $g_i = (S_i, s_{0i}, \to_{Li}, \to_{Ri})$ $(i \in \{1, 2\})$ *játékok összege az a* $g_1 + g_2 = (S, s_0, \to_L, \to_R)$ *játék, ahol* $S = S_1 \times S_2$*,* $s_0 = (s_{01}, s_{02})$*, továbbá* $(s_1, s_2) \to_L (s_1', s_2')$ *pontosan akkor, ha vagy* $s_1 \to_{L1} s_1'$ *és* $s_2 = s_2'$*, vagy* $s_1 = s_1'$ *és* $s_2 \to_{L2} s_2'$*, és az* R *játékos lépéseire is hasonló áll. A* $g_1 - g_2$ *azt jelenti, hogy* $g_1 + (-g_2)$*.*

Triviálisak a $g + 0 \cong g$, $g + h \cong h + g$ és $(g + h) + k \cong g + (h + k)$ izomorfiák, valamint a $-(g + h) \equiv -g - h$ azonosság.

1.3.4. Állítás. *Tetszőleges* g *és* h *játékokra*

(1) $g - g = 0$,

(2) *ha* $g \geq 0$ *és* $h \geq 0$*, akkor* $g + h \geq 0$*,*

(2) *ha* $g + h \geq 0$ *és* $h \leq 0$*, akkor* $g \geq 0$*.*

Bizonyítás. (1) A $g - g = 0$ azt jelenti, hogy $g - g$ az $\mathbf{S}$ osztályban van, azaz mindig a másodjára lépőnek van nyerő stratégiája. Valóban, a győzelemhez a másodiknak csak másolnia kell a kezdő játékos lépéseit az ellenkező komponensben, mint amelyikben a partnere lépett.

(2) Tudjuk, hogy L-nek g-ben és h-ban is van nyerő stratégiája, ha R kezd. Ekkor L megnyeri $g + h$-t is, ha R minden lépésére ugyanabban a komponensben válaszol, mint amiben R lépett, az ottani nyerő stratégiáját követve.

(3) Indirekt bizonyítunk: azt fogjuk belátni, hogy ha $g \ngeq 0$ és $h \leq 0$, akkor $g+h \ngeq 0$, vagyis RgR és RhL következménye $R(g+h)R$. Az R játékos valóban megnyeri $g+h$-t, ha első lépését a g komponensben, a g-beli nyerő stratégiáját követve teszi meg, a játék további részében pedig L minden lépésére ugyanabban a komponensben válaszol, mint amelyikben L lépett, méghozzá az ottani nyerő stratégiája szerint. □

1.4. Részben rendezés játékok között

1.4.1. Definíció. *A $g \geq h$ reláció pontosan akkor teljesül, ha $g - h \geq 0$ a* Nyerő stratégiák *részben bevezetett jelöléssel. A „nagyobb vagy egyenlő” reláció segítségével értelemszerűen definiáljuk a „kisebb vagy egyenlő”, „nagyobb”, „kisebb” és „egyenlő” relációkat.*

1.4.2. Állítás. *$g \geq 0$ is és $g \leq 0$ is ugyanazt jelentik a régi és az új értelemben.*

Bizonyítás. Először azt kell igazolnunk, hogy a régi értelemben vett $g \geq 0$ és $g - 0 \geq 0$ ekvivalensek. A $-0 \equiv 0$ azonosság miatt az utóbbi ugyanazt jelenti, mint $g + 0 \geq 0$. Hivatkozhatunk a $g+0 \cong g$ izomorfiára, de használhatjuk az 1.3.4 állítást is: Ha $g \geq 0$, akkor $0 \geq 0$ és (2) miatt $g+0 \geq 0$. Ha pedig $g+0 \geq 0$, akkor $0 \leq 0$ és (3) miatt $g \geq 0$.

Az új értelemben vett jelöléssel $g \leq 0$ azt jelenti, hogy $0 \geq g$, ami definíció szerint $0 - g \geq 0$ a régi jelöléssel. A $-(0-g) \equiv -0+g \equiv 0+g$ ekvivalenciákból és a $0+g \cong g+0$ izomorfiából következik, hogy $0-g \geq 0$ ekvivalens azzal, hogy $g+0 \leq 0$. Arra jutottunk tehát, hogy az állítás másik részéhez a régi értelemben vett $g \leq 0$ és $g+0 \leq 0$ ekvivalenciáját kell igazolnunk. Ehhez az 1.3.4-beli (2) és (3) állítások duális megfelelőit használhatjuk, a már látott módon. □

A *Nyerő stratégiák* rész táblázatát tanulmányozva látható, hogy az állítás következményeképpen a $g > 0$, $g < 0$ és $g = 0$ szimbólumok is egybevágnak a 1.4.1 definíció szerinti, zérójátékkal való összehasonlítással.

1.4.3. Állítás. *A „$\geq$” reláció reflexív és tranzitív a játékokon.*

Bizonyítás. A reflexivitás 1.3.4/(1) közvetlen következménye. Az kell még, hogy $g \geq h$ és $h \geq k$ következménye $g \geq k$. A feltevés azt jelenti, hogy $g-h \geq 0$ és $h-k \geq 0$. Ebből

1.3.4/(2) miatt $(g-h)+(h-k) \geq 0$, izomorf átalakítással pedig $(g-k)+(h-h) \geq 0$. Mivel $h-h \leq 0$, ezért 1.3.4/(3) következtében $g-k \geq 0$, vagyis $g \geq k$, amit bizonyítani kellett. □

Az állítás fontos következménye, hogy az „=" valóban ekvivalenciareláció, és a „≥" részben rendezés az ekvivalenciaosztályokon.

1.4.4. Állítás. *Tetszőleges g, h és k játékokra*

(1) *ha $g \geq h$, akkor $-h \geq -g$,*

(2) *ha $g \geq h$, akkor $g+k \geq h+k$.*

Bizonyítás.

(1) Mivel $g-h \cong -h+g$, ezért $g \geq h \Rightarrow g-h \geq 0 \Rightarrow -h+g \geq 0 \Rightarrow -h \geq -g$.

(2) Mivel $g-h \geq 0$ a feltétel szerint, és $k-k \geq 0$ is igaz, ezért $(g-h)+(k-k) \geq 0$. De $(g-h)+(k-k) \cong (g+k)-(h+k)$, ami az állítást igazolja. □

Ennek következtében az ellentettképzés és az összeadás zárt az ekvivalenciaosztályokra. Az utóbbi belátásához még annyit kell megjegyezni, hogy ha $g_1 \geq g_2$ és $h_1 \geq h_2$, akkor $g_1+h_1 \geq g_2+h_2$. Valóban, 1.4.4/(2) miatt $g_1+h_1 \geq g_2+h_1$, illetve $h_1+g_2 \geq h_2+g_2$, innen pedig már csak izomorf felcserélés és tranzitivitás kell.

Eddigi ismereteinket jól összefoglalja a következő tétel:

1.4.5. Tétel. *A játékok ekvivalenciaosztályai részben rendezett Abel-csoportot alkotnak az összeadással és a „≥" relációval, ahol a semleges elem az* **S** *osztály, az inverz pedig az ellentett.*

1.5. Kapcsolat a Conway-játékokkal

1.5.1. Állítás. *Tetszőleges g játékra igaz, hogy nincs olyan g^L, melyre $g^L \geq g$, és nincs olyan g^R, melyre $g \geq g^R$.*

Bizonyítás. Csak az első állítás igazolását részletezzük, a másiké hasonlóan megy. Azt kell belátnunk, hogy minden g^L-re $g^L - g \ngeq 0$, vagyis $R(g^L-g)R$. Az R játékos valóban győzhet $(g^L - g)$-ben, ha először a $-g$ komponensnek a $-g^L$ opciójába lép, majd a már látott másolási stratégiát követi. □

1.5.2. Tétel (induktív jellemzés)**.** *Pontosan akkor teljesül* $g \geq h$, *ha nincs olyan* g^R, *hogy* $h \geq g^R$, *és nincs olyan* h^L, *hogy* $h^L \geq g$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $g \geq h$. Ha bizonyos g^R-re $h \geq g^R$, akkor a tranzitivitás miatt $g \geq g^R$. Ha pedig van olyan h^L, hogy $h^L \geq g$, akkor $h^L \geq h$. Mindkettő ellentmond az előző állításnak.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy $g \ngeq h$, azaz $R(g-h)R$. Az R játékos $g-h$-beli nyerő stratégiája kétféleképp kezdődhet. Vagy a g komponensben lép először, és így azt kapjuk, hogy valamely g^R-re $R(g^R - h)L$, ami azzal ekvivalens, hogy $L(h - g^R)R$, azaz $h \geq g^R$. Ha viszont $-h$-ban kezdi a játékot, akkor h egy bal oldali komponensére $R(g - h^L)L$, amiből pedig $h^L \geq g$ vezethető le. □

Megjegyezzük, hogy a bizonyításhoz használhattuk volna a „≥ 0” szimbólum *Nyerő stratégiák* részben megismert induktív jellemzését is.

1.5.3. Tétel. *Legyenek* x, y *Conway-játékok,* x_{G}, y_{G} *pedig a nekik megfelelő játékok. Ekkor* $x \geq y$ *pontosan akkor teljesül, amikor* $x_{\mathrm{G}} \geq y_{\mathrm{G}}$.

Bizonyítás. Az $x \geq y$ egyenlőtlenség definíció szerint azt jelenti, hogy minden összetevőre $y \ngeq x^R$ és $y^L \ngeq x$. Ekkor a 0.2.6 szerinti indukciós feltételt használva $y_{\mathrm{G}} \ngeq (x^R)_{\mathrm{G}}$ és $(y^L)_{\mathrm{G}} \ngeq x_{\mathrm{G}}$. De az $(x^R)_{\mathrm{G}}$ alakú játékok x_{G}-nek az összes jobb oldali, a $(y^L)_{\mathrm{G}}$ alakúak pedig a y_{G}-nak az összes bal oldali opcióit adják, így az induktív jellemzés alapján $x_{\mathrm{G}} \geq y_{\mathrm{G}}$.

Fordítva, legyen $x_{\mathrm{G}} \geq y_{\mathrm{G}}$. Ekkor az induktív jellemzés szerint minden opcióra $y_{\mathrm{G}} \ngeq (x_{\mathrm{G}})^R$ és $(y_{\mathrm{G}})^L \ngeq x_{\mathrm{G}}$. Minden $(x_{\mathrm{G}})^R$-hez tartozik egy x^R, és minden $(y_{\mathrm{G}})^L$-hez tartozik egy y^L, melyek meghatározzák ezeket a játékokat. Ezért használhatjuk a játékpárokra általánosított 1.2.2 szerinti indukciós feltételt: x és y minden érintett összetevőjére $y \ngeq x^R$ és $y^L \ngeq x$, tehát $x \geq y$. □

Megjegyzés. $(x^R)_{\mathrm{G}} \equiv (x_{\mathrm{G}})^R$ és $(x^L)_{\mathrm{G}} \equiv (x_{\mathrm{G}})^L$.

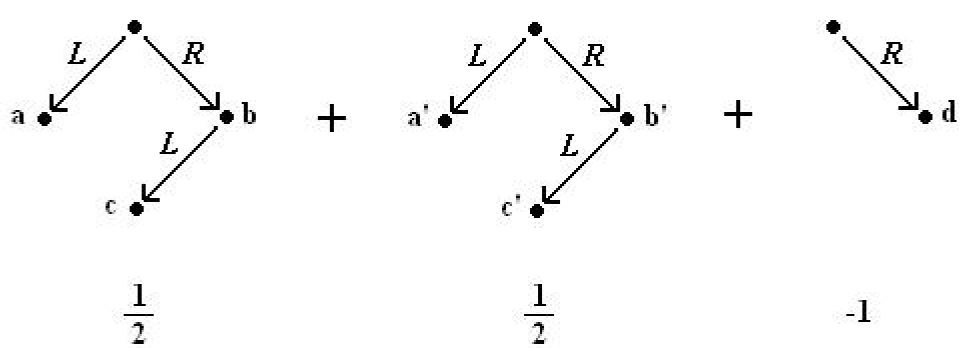
Egy g játékhoz természetes módon hozzárendelhető egy g_{C} Conway-játék, melyet rekurzívan definiálhatunk:

$$g_{\mathrm{C}} \equiv \left\{ (g^L)_{\mathrm{C}} \,\middle|\, (g^R)_{\mathrm{C}} \right\} .$$

Megmutatható, hogy minden x Conway-játékra $(x_{\mathrm{G}})_{\mathrm{C}} \equiv x$, illetve minden g stratégiai játékra $(g_{\mathrm{C}})_{\mathrm{G}} = g$. Ezen összefüggéseken keresztül megfeleltethetők egymásnak a stratégiai és Conway-játékok addíciói, és így átvihetjük az ebben a fejezetben kapott eredményeket Conway-játékokra, azt kapva, hogy a *Conway-játékok ekvivalenciaosztályai rendezett Abel-csoportot alkotnak*, a 0 osztályával mint zéróelemmel.

A fentiek szemléletesen elfogadhatók, precíz bizonyításuk pedig az 1.5.3 tételéhez hasonlóan technikai jellegű. Az átvitel részletes felépítése megtalálható [2]-ben, itt nem közöljük.

A Conway-játékok gyakran könnyebben kezelhetők, ha stratégiai játékokként tekintünk rájuk. Például adott x és y Conway-játékok egyenlőségének kérdése lefordítható arra, hogy az $x_{\mathrm{G}} - y_{\mathrm{G}}$ játék az **S** osztályba tartozik-e. Igazoljuk most az $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ egyenlőséget ezzel a módszerrel! A $-1 \equiv \{|0\}$ és az $\frac{1}{2} \equiv \{0\,|1\}$ alakokat használva a $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1$ Conway-játéknak megfelelő g játék így szemléltethető:



Tegyük fel, hogy R a játéknyitó. Ha első lépése **d**-be vezet, akkor L valamelyik $\frac{1}{2}$-es komponensben tud válaszolni, lépjen mondjuk **a**-ba. Ezután R-nek **b'**-be, majd L-nek **c'**-be kell lépnie, így L nyeri meg a játékot. Ha R valamelyik $\frac{1}{2}$-es komponensben kezd, az L játékos pedig a másik $\frac{1}{2}$-es komponensben válaszol a kezdő lépésre, végül akkor is ő nyer; tehát LgR igaz. Ha viszont L kezd, akkor R követhet az előbb leírthoz hasonló nyerő stratégiát; így RgL is áll, a játék valóban **S** osztálybeli.

2. fejezet

A Conway-számok teste

Ebben a fejezetben a Conway-számokat meghatározó rekurzív szabályokból kiindulva kezdünk el kutatni. Megmutatjuk, hogy a számok rendezés szerinti ekvivalenciaosztályai rendezett testet alkotnak. Igyekszünk majd kiemelni, mely állítások igazak csak számokra, és melyek teljesülnek minden Conway-játékra, melléktermékként megkapva ezzel a Conway-játékok rendezésével és összeadásával kapcsolatos, az előző fejezetben játékelméleti eszközökkel igazolt eredményeket is. Szinte mindent indukcióval fogunk belátni, ezért az indukciós feltételt hallgatólagosan mindig eleve feltesszük.

Emlékeztetőül gyűjtsük össze a számokról szóló, már szerepelt definíciókat:

- Az x rendezett pár pontosan akkor szám, ha minden összetevője szám, és nincsenek olyan x^L, x^R összetevői, melyekre $x^R \leq x^L$.
- $x \leq y$ pontosan akkor, ha nincs olyan x^L, hogy $y \leq x^L$, és nincs olyan y^R, hogy $y^R \leq x$.
- $x + y \equiv \left\{ x^L + y, x + y^L \middle| x^R + y, x + y^R \right\}$.
- $-x \equiv \left\{ -x^R \middle| -x^L \right\}$.
- $xy \equiv \left\{ x^L y + xy^L - x^L y^L, x^R y + xy^R - x^R y^R \right|$

$$\left| x^L y + xy^R - x^L y^R, x^R y + xy^L - x^R y^L \right\}.$$

Szükségünk lesz még a $0 \equiv \{|\}$ és az $1 \equiv \{0|\}$ kitüntetett elemekre.

2.1. Rendezés

2.1.1. Állítás. *tetszőleges x, y, z esetén igazak:*

(1) $x \le x$,

(2) *minden* x^L, x^R*-re* $x^L \ngeq x$ *és* $x^R \nleq x$,

(3) *ha* $x \le y$ *és* $y \le z$*, akkor* $x \le z$,

(4) *ha* x, y *számok, akkor* $x \le y$ *és* $x \ge y$ *közül legalább az egyik teljesül.*

Bizonyítás. Ha $x \nleq x$, akkor vagy $\exists x^R \le x$, vagy $\exists x^L \ge x$ igaz. Előbbi esetben x-nek nincs olyan jobb oldali összetevője, ami kisebb vagy egyenlő, mint x^R, speciálisan $x^R \nleq x^R$, az utóbbiból pedig hasonló módon $x^L \ngeq x^L$ következik, így indukcióval belátható (1). A (2) állítás nem más, mint a reláció definíciója (1)-re felírva. A tranzitivitás bizonyításához tegyük fel indirekt, hogy $x \nleq z$. Ekkor vagy $\exists z^R \le x$ vagy $\exists x^L \ge z$. Az elsőből és $x \le y$-ből indukció alapján $z^R \le y$, tehát $y \nleq z$, a másikból pedig hasonlóan $x \nleq y$, mindkettő ellentmondás. Végül tegyük fel, hogy x, y számok, és $x \nleq y$, $x \ngeq y$. Ha $\exists y^R \le x$ és $\exists y^L \ge x$, akkor (3) szerint $y^R \le y^L$, ellentmondásban a szám definíciójával. Amennyiben a második helyett $\exists x^R \le y$ igaz, akkor ebből $\nexists y^R \le x^R$, így indukcióval $\forall y^R \ge x^R$. Mivel y-nak van jobb oldali összetevője, amiről tudjuk, hogy kisebb vagy egyenlő, mint x, (3)-ből $x^R \le x$, ami (2)-nek mond ellent. Ha az elején a $\exists y^R \le x$ feltétel helyett $\exists x^L \ge y$-t teszünk fel, ugyanúgy okoskodhatunk, így igazoltuk (4)-et is. □

2.1.2. Következmény. *Az „=” valóban ekvivalenciareláció, és „≤” részben rendezés az ekvivalenciaosztályokon, számokra megszorítva ráadásul teljes is.*

Ezért ha x szám, akkor (2) írható $x^L < x < x^R$ alakban is. A számok ekvivalencia-osztályainak összességét Conwayt követve **No**-val jelöljük. Ezután ha számról esik szó, sokszor **No**-beli objektumot értünk majd alatta.

Megjegyzés. **No** fenti meghatározása nem a legszerencsésebb, ugyanis nem biztos, hogy minden ekvivalenciaosztály halmaz (igazából egyik sem az), és így **No** nem lesz osztály, vagyis halmazok összessége. Ezt a problémát kiküszöbölhetjük úgy, hogy minden x számra elkészítjük az $[x] \equiv \{y : y = x, y \in V_{\alpha_x}\}$ halmazt, ahol α_x a legkisebb olyan α rendszám, hogy V_α tartalmaz x-szel egyenlő számot (lásd 0.1); és ezek összességét hívjuk **No**-nak.

2.1.3. Tétel (Elsőszülöttségi lemma)**.** *Legyen* $x = \left\{x^L \middle| x^R\right\}$*, és tegyük fel, hogy valamely* z*-re* $x^R \not\leq z \not\leq x^L$ *minden* x^L, x^R *esetén, de* z*-nek egyetlen összetevője sem teljesíti ugyanezt. Ekkor* $x = z$*.*

Bizonyítás. Az $x \leq z$ egyenlőséghez az kell, hogy $z \not\leq x^L$ és $z^R \not\leq x$ minden szóba jövő összetevőre. Az előbbi közvetlenül megjelenik a lemma feltételében, az utóbbi pedig azért igaz, mert minden z^R-hez van olyan x^R, hogy $x^R \leq z^R$. A fordított egyenlőtlenség hasonlóan igazolható. □

A tétel számokra alkalmazva szemléletesen azt jelenti, hogy egy x szám az x^L-ek és x^R-ek között álló számok közül a *legegyszerűbb*, vagyis a legkorábban konstruált. Könnyen meggondolható speciális esetei:

2.1.4. Következmény. *Ha* x *és* y *összetevői között olyan bijekció létesíthető, hogy az egymásnak megfeleltett összetevők ugyanazon az oldalon állnak és egyenlőek, akkor* $x = y$*.*

2.1.5. Következmény. *Ha* x *szám, és* x' *úgy keletkezik* x*-ből, hogy* x *bal oldaláról elhagyunk néhány számot, melyeknél van nagyobb szám a bal oldalon, illetve a jobb oldaláról néhányat, melyeknél van kisebb a jobb oldalon, akkor* x' *is szám, és* $x = x'$*. Ez akkor is igaz, ha nem elhagyunk, hanem hozzáírunk ilyen összetevőket.*

2.2. Összeadás

Triviális, hogy $-0 \equiv 0$, a következő azonosságok pedig könnyen igazolhatók indukcióval: $x+y \equiv y+x$, $(x+y)+z \equiv x+(y+z)$, $x+0 \equiv x$, $-(-x) \equiv x$, $-(x+y) \equiv -x-y$. Példának álljon itt az asszociativitás bizonyítása:

$$(x+y)+z \equiv \{(x+y)^L+z, (x+y)+z^L | \ldots\} \equiv \{(x^L+y)+z, (x+y^L)+z, (x+y)+z^L | \ldots\} \equiv$$

$$\equiv \{x^L + (y+z), x + (y^L + z), x + (y + z^L) | \ldots\} \equiv$$

$$\equiv \{x^L + (y+z), x + (y+z)^L | \ldots\} \equiv x + (y+z).$$

2.2.1. Állítás.

(1) *Ha* $x \leq y$ *és* $z \leq w$*, akkor* $x + z \leq y + w$*.*

(2) *Ha* $x \ngeq y$ *és* $z \leq w$*, akkor* $x + z \ngeq y + w$*.*

Bizonyítás. (1) Itt többek között azt kell ellenőrizni, hogy $x^L + z \ngeq y + w$ minden x^L-re fennáll. Ehhez elég lenne az, hogy minden x^L-hez van olyan x^{LR}, hogy $x^{LR} + z \leq y + w$, vagy van olyan y^L, hogy $x^L + z \leq y^L + w$. A kettő közül az egyik valóban teljesül, mert $x \leq y$-ból definíció szerint $x^L \ngeq y$ minden bal oldali összetevőre, innen pedig vagy $\exists x^L R \leq y$, vagy $\exists y^L \geq x^L$. Ezután pedig $z \leq w$-t felhasználva indukcióval igazolható $x^L + z \ngeq y + w$. A másik három szükséges feltétel bizonyítása hasonlóan megy.

(2) Az $x+z \ngeq y+w$ teljesüléséhez az kell, hogy $\exists (y+w)^L \geq x+z$ és $\exists (x+z)^R \leq y+w$ közül valamelyik teljesüljön. Az $x \ngeq y$ biztosítja, hogy vagy $\exists y^L \geq x$, vagy $\exists x^R \leq y$ igaz. A előbbiből $y^L + w \geq x + z$, az utóbbiból pedig $x^R + z \leq y + w$ vezethető le (1) felhasználásával. □

Speciálisan $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$, ami az additív csoport rendezettségéhez kell. Triviális következmény az is, hogy egyenlő Conway-játékok összege egyenlő, így ekvivalenciaosztályokra is értelmes az összeadás és igazak az azonosságok. Azt viszont még nem tudjuk, hogy **No** zárt-e az összeadásra.

2.2.2. Állítás. *Ha* x *és* y *számok, akkor* $x + y$ *is szám.*

Bizonyítás. Az indukciós feltevés miatt $x + y$ összetevői számok. Az $x^L < x < x^R$ és $y^L < y < y^L$ egyenlőtlenségekből 2.2.1 szerint következnek: $x^L + y \ngeq x^R + y$, $x^L + y \ngeq x + y^R$, $x + y^L \ngeq x^R + y$ és $x + y^L \ngeq x + y^R$, azaz $(x+y)^L \ngeq (x+y)^R$ mindig teljesül. □

2.2.3. Állítás. *Minden* x *és* y *Conway-játékra*

(1) $x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$*,*

(2) $x = y \Rightarrow -x = -y$*,*

(3) *ha x szám, akkor $-x$ szám,*

(4) $x - x = 0$.

Bizonyítás. Ha indirekt $-x \not\geq -y$, akkor vagy $\exists(-x)^R \leq -y$, vagy $\exists(-y)^L \geq -x$. Az első azt jelenti, hogy $\exists -x^L \leq -y$, amiből indukcióval $x^L \geq y \Rightarrow x \not\leq y$. A másodikból hasonlóan jön ki az ellentmondás, (1) kész. (1)-ből (2) nyilvánvaló.

Az indukciós feltevés szerint $-x^R$ és $-x^L$ számok. Ha indirekt feltesszük, hogy $-x^R \geq -x^L$ előfordul, akkor ebből (1) szerint $x^R \leq x^L$, tehát x nem szám, ellentmondás; ezzel igazoltuk (3)-at.

Az $x - x \geq 0$-hoz az kell, hogy $x^R - x \not\leq 0$ és $x - x^L \not\leq 0$. Az előbbi következik az $x^R \geq x^R$ és $-x \not\leq -x^R$ egyenlőtlenségekből, 2.2.1 és az $x^R - x^R = 0$ indukciós feltevés miatt. A másik hasonlóan igazolható. Az $x \leq 0$-hoz szükséges feltételek: $x^L - x \not\geq 0$ és $x - x^R \not\geq 0$, de ezek (1) miatt ekvivalensek az előbb bizonyított kettővel. Tehát $x - x = 0$. □

2.2.4. Következmény. *A Conway-játékok osztályai részben rendezett,* **No** *pedig rendezett Abel-csoport az összeadásra. Az ellentett valóban a műveletre vonatkoztatott inverz.*

2.3. Szorzás

Nyilván $x0 \equiv 0$, továbbá indukcióval beláthatók az $x1 \equiv x$, $xy \equiv yx$ és $(-x)y \equiv x(-y) \equiv -xy$ azonosságok. A disztributivitást és az asszociativitást azonban csak egyenlőség formájában írhatjuk fel, ugyanis az előbbi igazolásához $x - x = 0$ típusú egyszerűsítés kell, az utóbbiéhoz pedig a disztributivitás. Például a disztributivitás bizonyítása:

$$(x+y)z \equiv \{(x+y)^L z + (x+y)z^L - (x+y)^L z^L, \ldots \mid \ldots\} \equiv$$

$$\equiv \{(x^L+y)z + (x+y)z^L - (x^L+y)z^L, (x+y^L) + (x+y)z^L - (x+y^L)z^L, \ldots \mid \ldots\} =$$

$$= \{(x^L z + xz^L - x^L z^L) + yz, xz + (y^L z + yz^L - y^L z^L), \ldots \mid \ldots\} \equiv xz + yz.$$

Két szám szorzatát felírhatjuk a következő, a definíció mögötti szemléletet megvilágító alakban is:

$$xy = \{xy - (x - x^L)(y - y^L), xy - (x^R - x)(y^R - y)|$$

$$|xy + (x - x^L)(y^R - y), xy + (x^R - x)(y - y^L)\}.$$

2.3.1. Tétel. *Számokra teljesülnek a következők:*

(1) *Ha $x_1 \leq x_2$ és $y_1 \leq y_2$, akkor $x_1y_2 + x_2y_1 \leq x_1y_1 + x_2y_2$. Amennyiben mindkét feltételben szigorú egyenlőtlenség van, úgy a következményben is.*

(2) *Ha $x_1 = x_2$, akkor tetszőleges y számra $x_1y = x_2y$.*

(3) *Ha x és y számok, akkor xy is szám.*

Bizonyítás. A részállításokat egyetlen egységként, közös indukciós feltétellel bizonyítjuk, ami gyakorlatilag azt jelenti, hogy egynek az igazolásához felhasználhatjuk a másik kettőt. Jelöljük az (1)-beli egyenlőtlenség teljesülését $P(x_1, x_2 : y_1, y_2)$-vel. Vegyük észre, hogy $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ esetén $P(x_1, x_2 : y_1, y_2)$-ből és $P(x_2, x_3 : y_1, y_2)$-ből az egyenlőtlenségek összeadásával és egyszerűsítéssel levezethető $P(x_1, x_3 : y_1, y_2)$.

(1) Ha $x_1 = x_2$ vagy $y_1 = y_2$, akkor (2) miatt a két oldal tagjai páronként egyenlőek. Elég tehát csak a szigorú egyenlőtlenségek esetével foglalkozni. Ha $x_1 < x_2$, akkor vagy $x_1 < {x_1}^R \leq x_2$, vagy $x_1 \leq {x_2}^R < x_2$ bizonyos ${x_1}^R$ vagy ${x_2}^L$ összetevőre. Tegyük fel, hogy az előbbi igaz. Ekkor a szigorú $P(x_1, x_2 : y_1, y_2)$ következik $P({x_1}^R, x_2 : y_1, y_2)$-ből és a szigorú $P(x_1, {x_1}^R : y_1, y_2)$-ből. Az első indukciós feltevés, a második igazolásához pedig még egy szinttel lejjebb kell ereszkedni $y_1 < y_2$ segítségével. Összességében arra jutunk, hogy ilyen alakú egyenlőtlenségeket kell ellenőriznünk:

$$P(x^L, x : y^L, y), \quad P(x^L, x : y, y^R), \quad P(x, x^R : y^L, y), \quad P(x, x^R : y, y^R).$$

Ezek éppen azt fejezik ki, hogy xy nagyobb a bal oldali és kisebb a jobb oldali összetevőinél, ami (3) miatt igaz.

(2) Vegyük mondjuk azt a szükséges feltételt, hogy ${x_1}^L y + x_1 y^L - {x_1}^L y^L \ngeq x_2 y$. Indukcióval $x_1 y^L = x_2 y^L$ és így azt kapjuk, hogy ${x_1}^L y + x_2 y^L \ngeq {x_1}^L y^L + x_2 y$, ami ${x_1}^L < x_2$ és $y^L < y$ miatt következik (1)-ből. A többi hét feltétel ugyanígy igazolható.

(3) Az indukciós feltevés miatt xy összetevői számok. Most is csak az egyik összetevőpáron mutatjuk be a bizonyítás menetét:

$$x^{L_1} y + x y^L - x^{L_1} y^L \overset{?}{<} x^{L_2} y + x y^R - x^{L_2} y^R.$$

Ha $x_1 \leq x_2$, akkor $P(x^{L_1}, x^{L_2} : y^L, y)$ és $P(x^{L_2}, x : y^L, y^R)$ következtében

$$x^{L_1} y + x y^L - x^{L_1} y^L \leq x^{L_2} y + x y^L - x^{L_2} y^L < x^{L_2} y + x y^R - x^{L_2} y^R,$$

ha pedig $x_2 \leq x_1$, akkor $P(x^{L_1}, x : y^L, y^R)$ és $P(x^{L_2}, x^{L_1} : y, y^R)$ miatt

$$x^{L_1} y + x y^L - x^{L_1} y^L < x^{L_1} y + x y^R - x^{L_1} y^R \leq x^{L_2} y + x y^R - x^{L_2} y^R.$$

□

A számok osztályai tehát zártak a szorzásra, továbbá ha $x \geq 0$ és $y \geq 0$, akkor $P(0, x : 0, y)$ következtében $xy \geq 0$. Eddigi ismereteinket összefoglalhatjuk úgy, hogy **No** *rendezett gyűrű*.

Ez nem általánosítható Conway-játékokra. Vegyük például a $* \equiv \{0|0\}$ Conway-játékot és a vele egyenlő $\{0|0,1\}$-et. Ekkor $* \cdot * \equiv *$, illetve $* \cdot \{0|0,1\} \equiv \{0,*|0,*\}$. A két szorzat nem egyenlő, hiszen $* = *$.

A 2.3.1/(1) szigorú változatából levezethető a nullosztómentesség. Ezért ha $x \neq 0$ és $xz = yz$, akkor $xz - yz = 0 \Rightarrow x(y - z) = 0 \Rightarrow y - z = 0 \Rightarrow y = z$. Tehát ha x-nek és $y \neq 0$-nak létezik *hányados*a, vagyis olyan z szám, melyre $yz = x$, akkor az egyértelmű. A létezéshez elég az, hogy minden pozitív számnak van reciproka. Egy x pozitív számot pedig felírhatunk $x = \{0, x^L | x^R\}$ alakban, ahol x bal oldali összetevői közül csak a pozitívak szerepelnek. Ezt $\exists x^L \geq 0$ és 2.1.5 miatt tehetjük meg. A fentiek alapján a következő tétel biztosítja, hogy **No** *rendezett test*:

2.3.2. Tétel. *Legyen x $\{0, x^L | x^R\}$ alakú, ahol az x^L-ek pozitívak. Ekkor létezik pontosan egy olyan y szám, melyre $xy = 1$, nevezetesen*

$$y = \left\{ 0, \frac{1 + (x^R - x)y^L}{x^R}, \frac{1 + (x^L - x)y^R}{x^L} \,\middle|\, \frac{1 + (x^L - x)y^L}{x^L}, \frac{1 + (x^R - x)y^R}{x^R} \right\}.$$

Ezt a tételt nem bizonyítjuk; a bizonyítás megtalálható [1]-ben. A formula működését azonban meg kell magyaráznunk, hiszen ilyet még nem láttunk. Az y-ra adott képlet egyrészt rekurzív x szerint, mert feltételezzük, hogy ismerjük x összetevőinek reciprokait. Másrészt y összetevőiben is rekurzív: új összetevőket már megadottak felhasználásával gyárthatunk, a 0-ból indítva a rekurziót.

Hogy ezt illusztráljuk, legyen például $x = \{0, 2|\} = 3$. Egyetlen pozitív összetevője a 2, ezért $y = \left\{0, \frac{1}{2}(1 - y^R) \,\middle|\, \frac{1}{2}(1 - y^L)\right\}$. Az első jobb oldali összetevő $\frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}$, az ebből képzett bal oldali összetevő $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, majd egy újabb elem a jobb oldalon $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{8}$. Ezt iterálva az $\frac{1}{3}$-nak a *Bevezetés*ben már látott alakját kapjuk meg.

Irodalomjegyzék

[1] J. H. Conway: *On Numbers and Games.* A K Peters Ltd., 2000

[2] H.-D. Ebbinghaus és tsai., J. H. Ewing (szerk.): *Numbers.* Springer, Readings in Mathematics, Vol. 123, 1991.

[3] D. E. Knuth: *Számok valóson innen és túl.* Gondolat, 1987.

[4] Hajnal A., Hamburger P.: *Halmazelmélet.* Nemzeti Tankönyvkiadó, 3. kiadás, 1994.