

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Horváth Vanda
Matematika BSc

SCHNYDER-CÍMKÉZÉSEK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Szakdolgozat

Témavezető: Pap Júlia, tudományos segédmunkatárs
Operációkutatási Tanszék



Budapest, 2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. A Schnyder-címkezés fogalma és létezése	4
2.1. Normális címkezés definíciója háromszögelt gráfokra	4
2.2. Normális címkezés létezése	6
2.3. Schnyder-címkezés általánosítása	9
2.4. Schnyder-címkezés létezése 3-összefüggő gráfokra	12
2.5. A Schnyder-címkezés létezésével ekvivalens állítások	15
3. Alkalmazások	20
3.1. Háromszögelt gráf négyzetrácsba való beágyazása	20
3.2. 3-összefüggő síkgráf négyzetrácsba való leképezése	23
3.3. Primál-duál érintési reprezentációk	28
3.4. Síkgráf dimenziója és címkezése közötti kapcsolat	32
3.5. Politóp dimenziója a Schnyder-címkezése segítségével	36
Köszönetnyilvánítás	40

1. Bevezetés

A gráfelmélet körében elég természetesen fölvetődő az a kérdés, hogy egy gráf síkgráf-e, vagyis síkbarajzolható-e úgy, hogy az élek ne messék egymást. Erre a kérdésre Kazimierz Kuratowski megadta a választ, egy gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha nincsen benne sem felosztott $K_{3,3}$, sem felosztott K_5 . Ezután a következő kérdés vetődött fel: ha adott egy síkgráf, hogyan lehetne megadni egy konkrét síkbarajzolását, illetve minél szebb síkbarajzolását.

1990-ben Walter Schnyder mutatott egy nagyon elegáns konstrukciót arra, hogyan lehet a maximális síkgráfokat, vagyis a háromszögelt síkgráfokat négyzetrácsba beágyazni [1]. Ehhez a gráf szögeit illetve azzal ekvivalensen a gráf éleit címkézte meg. A dolgozatom első felében ennek a címkézésnek a fogalmával, létezésével illetve általánosításával foglalkozom. A címkézés ugyanis kiterjeszthető általános síkgráfra is, és Stefan Felsner azt is belátta, hogy a 3-összefüggő gráfokra hasonló eredmények igazak [2]. Továbbá bizonyítok néhány ekvivalens állítást a Schnyder-címkézés létezésére.

A dolgozat második felében beszélek a címkézés alkalmazásairól, mint például a konkrét négyzetrácsba rajzolásról mind háromszögelt gráf, mind 3-összefüggő gráf esetén. Érdekes dolog továbbá, hogy a címkézés segítségével lehet azt is bizonyítani, hogy a 3-összefüggő síkgráfoknak létezik háromszögekkel való reprezentációja, illetve több megkötéssel szabályos háromszögekkel való reprezentáció is. Ezenkívül a Schnyder-címkézés kapcsolatban áll a síkgráf úgynevezett dimenziójával is, ami pedig a gráfot leíró lineáris rendezéseken alapul. Valamint a politóp incidenciapozetjének a dimenziója is visszavezethető a címkézésre.

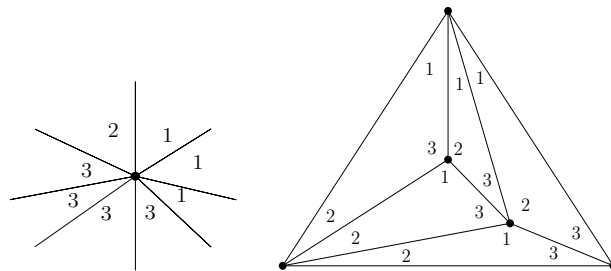
2. A Schnyder-címkézés fogalma és létezése

2.1. Normális címkézés definíciója háromszögelt gráfokra

Háromszögelt gráf alatt olyan síkgráfot értünk, ahol mind a külső tartomány, mind az összes belső tartomány háromszög. Ezeket a háromszög alakú belső tartományokat elemi háromszögeknek nevezem. Schnyder konstruált egy olyan fogalmat, egy címkézést, ami a gráf éleit három halmazból álló partícióba osztja úgy, hogy a csúcsoknál egy bizonyos szép tulajdonság teljesüljön, és a három halmaz mindegyike feszítőfa legyen [1]. Ez a konstrukció az élek helyett a szögek címkézésével is elmondható, és a kétféle címkézés kölcsönösen egyértelmű. A síkgráf szöge alatt tetszőleges síkbarajzolásánál egy tetszőleges csúcsnál lévő, körüljárás szerint szomszédos élek által meghatározott szöget értem. A címkézést normális címkézésnek vagy Schnyder-címkézésnek fogom hívni. A dolgozatban egyszerű gráfokról lesz szó.

2.1.1. Definíció. *Egy háromszögelt G gráf normális címkézésén a szögeknek egy olyan 1,2,3-mal való címkézését értjük, ahol teljesülnek a következők:*

- (i) *G minden elemi háromszögének van 1,2 és 3-mal címkézett szöge, és ezek óramutató járásával ellentétes sorrendben jelennek meg*
- (ii) *ha v belső csúcsa G -nek, akkor a v -nél lévő szögek címkéi óramutató járásával ellentétes sorrendben pontosan 3 csoportba oszthatók: az 1-gyel címkézett szögek nemüres halmazát követi a 2-vel címkézett szögek nemüres halmaza, majd azt pedig a 3-mal címkézetteké.*



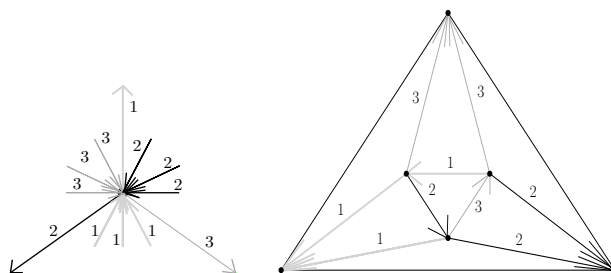
1. ábra. Példa egy csúcsnál lévő szögek címkézésére és a normális címkézésre

A szögek címkézése indukál egy címkézést a belső éleken is: Minden belső xy él pontosan 2 darab belső elemi háromszöghöz tartozik, és a szögek címkézésének definíciója miatt az él egyik (mondjuk x) végénél a szögek különbözően vannak címkézve (i, j) , az él másik végénél (y) egyformán (k, k) . Ekkor azt mondjuk, hogy az él címkéje k , és x -ből y -ba van irányítva.

Legyen T_i a G -beli i -vel címkézett irányított él halmaza ($i = 1, 2, 3$).

2.1.2. Definíció. Egy G háromszögelt gráf 3-fenyő felbontása a belső élek irányítása és olyan T_1, T_2, T_3 partíciója, ahol minden belső v csúcsra teljesülnek az alábbiak:

- (i) v -nek T_i -ben 1 a kifoka ($i = 1, 2, 3$)
- (ii) a v -nél lévő élek óramutató járásával ellentétes sorrendben: a T_1 -beli v -ből kilépő él, T_3 -beli v -be lépő élek, a T_2 -beli v -ből kilépő él, T_1 -beli v -be lépő élek, a T_3 -beli v -ből kilépő él, T_2 -beli v -be lépő élek, ahol belépő élből lehet 0 is.



2. ábra. Példa egy csúcsonál lévő élek címkézésére és a 3-fenyő felbontásra

2.1.3. Jelölés. A továbbiakban az i -vel, $i + 1$ -gyel, $i + 2$ -vel való címkézést modulo 3 értem.

2.1.4. Lemma. Egy G háromszögelt gráf normális címkézései és 3-fenyő felbontásai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak.

Bizonyítás. Minden normális címkézés indukálja a G háromszögelt gráf egy 3-fenyő felbontását: az előbb a címkézésből definiált T_i ($i = 1, 2, 3$) jó lesz partíciónak. Ugyanis ekkor a v belső csúcsra vonatkozó szabály és az élek irányítása szerint v -ből T_i -ben kilépő él pontosan az $i + 1$ -gyel és $i + 2$ -vel címkézett szögek határán van, vagyis pontosan egy ilyen él van. A v -be lépő T_i -beli élek pedig 2 db i -vel címkézett szög határán vannak, számuk tehát 0 is lehet. A 2.1.1. definíció (ii) pontjából pedig adódik a 2.1.2. definícióban lévő élek sorrendje is. Fordítva is igaz az állítás: minden legalább 4 pontú háromszögelt gráf tetszőleges 3-fenyő felbontásából egyértelműen megadható az a normális címkézés, ami indukálja: v belső csúcsonál a v -ből kilépő T_i -ben lévő egyértelmű él és a v -ből kilépő T_{i+1} -ben lévő egyértelmű él között lévő szögek (óramutató járásával ellentétesen tekintve) legyenek $i + 2$ -vel címkézve. Így az összes belső szög címkézve van úgy, hogy teljesül a 2.1.1. definíció (ii) pontja. Ezenkívül az i -vel címkézett él végpontjainál lévő szögek i -vel vannak címkézve, az irányítás szerinti jobb oldalán lévő másik szög $i + 1$ -gyel, a bal oldalán $i + 2$ -vel van címkézve. Ez utóbbi tulajdonság alapján a többi eddig kimaradt szöveget is megcímkézem. (A kimaradt

szögek a külső csúcsoknál lévő szögek voltak.) Ez pedig azt adja, hogy egy elemi háromszögben a három szög címkéje óramutató járásával ellentétes sorrendben 1,2,3. Ugyanis ha az elemi háromszög csúcsai v_1, v_2, v_3 óramutató járásával ellentétes sorrendben, ahol a v_1 -nél lévő címke i , akkor a v_1v_2 él vagy v_1 felé mutat és i -vel címkézett, vagy v_2 felé mutat és $i + 1$ -gyel címkézett. Mindkét esetben a v_2 -nél lévő szög $i + 1$ -gyel van címkézve, így a 2.1.1. definíció (i) pontja is teljesül. \square

2.1.5. Lemma. *Egy címkézett háromszögelt gráfban egy tetszőleges külső csúcsnál lévő szögek címkéje megegyezik, különböző külső csúcsoknál lévő szögek címkéje különböző. A külső csúcsok, amelyeknél lévő szögek 1, 2, illetve 3-mal címkézettek, óramutató járásával ellentétes sorrendben következnek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a G gráf n csúcsú, ekkor $3n - 9$ belső éle van, melyek a címkézés szerint irányítottak. Legyen egy csúcs kifoka az a szám, ahány belső él lép ki a csúcsból. Ekkor a kifokok összege $3n - 9$. Mivel az $n - 3$ darab belső csúcsból legalább 3 él lép ki, ezért a külső csúcsok kifoka 0, befoka (legalább 4 pontú gráf esetén) nem 0, vagyis az élek irányításának definíciója alapján egy külső csúcsnál lévő szögek egyformák. A második állítás a címkézés definíciójából és abból a tényből következik, hogy egy külső él hozzátartozik egy elemi háromszöghöz. \square

2.2. Normális címkézés létezése

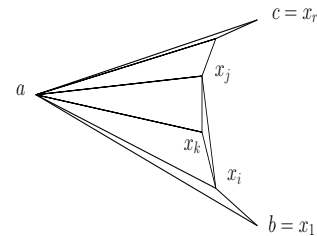
Belátjuk, hogy háromszögelt gráf szögeit lehet a 2.1.1. definíció szerint címkézni. Ennek a bizonyítása a gráf pontjainak száma szerinti indukcióval történik, mely segítségével nemcsak a címkézés létezése kapható meg, hanem algoritmikussá téve a bizonyítást egy konkrét címkézés is kiolvasható. Illetve az indukció segítségével további tulajdonságok tudhatók meg az élek partíciójáról, mint például bizonyos értelemben vett körmentesség, amire később szükségünk lesz a négyzetrácsba rajzolásához.

Jelölje $N(x)$ az x szomszédait a gráfban. Egy G gráfban az xy él összehúzásán azt értjük, hogy G -ből eltávolítjuk az y csúcsot és az y -t tartalmazó éleket, és y szomszédait - ha még nem voltak x -szel összekötve - összekötjük x -szel. Az így kapott új gráfot jelöljük G/xy -nal. Továbbá az egyszerűség kedvéért G/xy -ban az xy él összehúzásával kapott csúcsot vagy x -szel, vagy y -nal fogom jelölni, attól függően, hogy milyen tulajdonságát szeretném kihasználni. Azt mondjuk, hogy az xy él összehúzható, ha x -nek és y -nak pontosan 2 közös szomszédja van. Vegyük észre,

hogy ha G háromszögelt gráf, és xy él összehúzható, akkor G/xy egyszerű, és egyben háromszögelt gráf is.

2.2.1. Lemma. *Legyen G egy legalább 4 pontú háromszögelt gráf. Ha a külső csúcsok rendre a, b, c , akkor létezik olyan $x \neq b, c$ szomszédja a -nak, hogy ax összehúzható.*

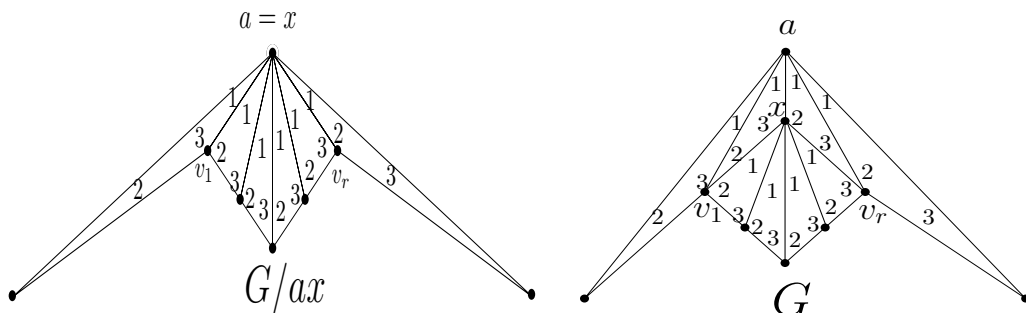
Bizonyítás. Ha a gráf legalább 4 pontú és háromszögelt, akkor van a -nak b -től és c -től különböző szomszédja. Legyenek a szomszédai rendre $b = x_1, x_2, \dots, x_r = c$. Legyenek i, j olyan indexek, melyekre $j > i + 1$ és x_i össze van kötve x_j -vel, továbbá minden $k \in \{i + 1, \dots, j - 1\}$ -ra és $l \in \{i, \dots, j\}$ -re x_k akkor és csak akkor van összekötve x_l -l, ha $l = k - 1$ vagy $l = k + 1$. Ilyen i, j index biztosan létezik. Ekkor pedig $i < k < j$ -re ax_k összehúzható. \square



3. ábra. Összehúzható él létezése

2.2.2. Tétel. *Minden háromszögelt gráfnak létezik normális címkézése.*

Bizonyítás. A csúcsok számára való indukcióval megmutatjuk, hogy egy G gráfra és annak a külső csúcsára létezik normális címkézés, hogy az a -nal lévő szögek 1-gyel címkézettek. $n = 3$ -ra triviálisan igaz az állítás. Tegyük fel, hogy a csúcsok száma legalább 4, és minden n -nél kevesebb csúcsú gráfra igaz az állítás. A 2.2.1. lemma szerint létezik a -nak olyan x szomszédja, hogy ax összehúzható. Legyenek x szomszédai a, v_1, \dots, v_r óramutató járásával ellentétes sorrendben. A G/ax gráf eggyel kevesebb csúcsú, tehát az indukciós feltétel szerint létezik normális címkézése, amelynél az a -nal lévő szögek 1-gyel címkézettek. Az így kapott címkézése G/ax -nek kiterjeszthető G normális címkézésévé a $\angle(v_i x v_{i+1})$ illetve $\angle(x a v_1)$ és $\angle(x a v_r)$ szögeket 1-gyel címkézve, a $\angle(a x v_1)$ szöveget 3-mal, a $\angle(a x v_r)$ szöveget 2-vel címkézve. \square



4. ábra. G címkézése G/ax címkézésének segítségével háromszögelt esetben

2.2.3. Megjegyzés. A 3-fenyő felbontások nyelvén is megfogalmazható a tétel bizonyítása: a G 3-fenyő felbontásának definíciójában szereplő T_1, T_2, T_3 a következőképpen kapható a T'_1, T'_2, T'_3 G/ax -beli irányított élek partíciójából:

$$T_1 = T'_1 - \{v_i \vec{a} \mid i \neq 1, r\} \cup \{\vec{x} \vec{a}\} \cup \{v_i \vec{x} \mid i \neq 1, r\}, T_2 = T'_2 \cup \{x \vec{v}_1\}, T_3 = T'_3 \cup \{x \vec{v}_r\}$$

2.2.4. Lemma. Legyen G egy legalább 4 csúcsú, címkézett, háromszögelt gráf, és legyen a az 1-gyel címkézett külső csúcs. Ekkor létezik olyan belső x csúcs, hogy ax él összehúzható úgy, hogy az összes olyan x -nél lévő szög címkéje 1, amely nincs az ax élen.

Bizonyítás. Legyen a szomszédainak a halmaza óramutató járásával ellentétesen x_0, x_1, \dots, x_s , úgy hogy x_0 és x_s külső csúcsok. Vegyük észre, hogy minden $x_i x_{i+1}$ él vagy 2-vel (ha x_{i+1} -től x_i felé megy) vagy 3-mal van címkézve (ha x_i -től x_{i+1} felé megy). Így létezik egy olyan x_k csúcs ($k \neq 0, s$), hogy $x_{k-1} x_k$ 2-vel van címkézve, $x_k x_{k+1}$ 3-mal. Vagyis az $\angle(ax_k x_{k-1})$ és az $\angle(ax_k x_{k+1})$ szögek kivételével az összes többi x_k -nél lévő szög 1-gyel van címkézve.

Azt állítjuk, hogy ax_k összehúzható. Indirekten tegyük fel, hogy nem, vagyis létezik $i \neq k-1, k+1$, hogy x_i szomszédja x_k -nak. Ekkor az előzőek alapján $x_i x_k$ él 1-gyel van címkézve, és x_k felé mutat. A 2.1.5. lemma alapján $i \neq 0, s$, így $x_i a$ és $x_i x_k$ két belső 1-gyel címkézett x_i -ből kilépő él, ami pedig ellentmond a 3-fenyő felbontás definíciójának. \square

2.2.5. Következmény. A 2.2.4. lemma alapján az is igaz, hogy a G háromszögelt gráf minden normális címkézése megkapható a 2.2.2. tétel bizonyításában leírt algoritmus segítségével.

2.2.6. Tétel. Legyen G egy legalább 4 csúcsú háromszögelt gráf, és legyen T_1, T_2, T_3 egy 3-fenyő felbontás. Ekkor minden T_i egy olyan fa, amely az összes belső csúcsot és pontosan egy külső csúcsot tartalmaz, valamint az élek T_i -ben a külső csúcs felé vannak irányítva. A T_1 -hez, T_2 -höz, T_3 -hoz tartozó külső csúcsok különbözőek, és óramutató járásával ellentétes sorrendben jelennek meg.

Bizonyítás. 4 pontú gráfra igaz az állítás. Ha $n > 4$, akkor a normális címkézés létezésének bizonyításában szereplő indukciót használom ki. A 2.2.3. megjegyzés alapján ha minden $n-1$ pontú gráfra igaz az állítás, akkor az n pontú gráfban is igaz, hogy T_i egy olyan fa, amely az összes belső csúcsot és pontosan egy külső csúcsot tartalmaz, valamint az élek T_i -ben a külső csúcs felé vannak irányítva. Az állítás további része pedig átöröklődik a 4 pontú gráfról. \square

2.2.7. Tétel. *Ha T_1, T_2, T_3 a G háromszögelt gráf 3-fenyő felbontása, akkor $T_i \cup T_{i+1}^{-1} \cup T_{i+2}^{-1}$ -ban nincs irányított kör (az alsó indexeket modulo 3 értve).*

Bizonyítás. A ciklikusság miatt elég az $i = 1$ esetet vizsgálni. Szintén a normális címkézés induktív bizonyításában szereplő x hozzáadásával az egyetlen x -ből kilépő él $T_1 \cup T_2^{-1} \cup T_3^{-1}$ -ban az ax él, és a -nak 0 a kifoka $T_1 \cup T_2^{-1} \cup T_3^{-1}$ -ban, tehát x hozzáadásával nem keletkezhetett kör. \square

2.3. Schnyder-címkézés általánosítása

A 2.1.1. definíció első pontja csak háromszögekre vonatkozik. Azonban ez könnyen általánosítható tetszőleges konvex tartományra is, cserébe viszont elveszik az élek partíciójának diszjunktsága, vagyis meg kell engednünk, hogy egy él több (legfeljebb 2) halmazba is tartozhasson. Szerencsére így is megmarad az úgynevezett körmentesség, így a fogalommal hasonlóan lehet továbbdolgozni, mint a háromszögelt esetben. Ebben és a következő részben [2]-re támaszkodom.

2.3.1. Definíció. *Legyen G egy 3-összefüggő síkgráf, és legyenek a, b, c csúcsok a külső tartomány határán óramutató járásával ellentétes sorrendben. Nevezzük a -t az első speciális csúcsnak, b -t a második, c -t a harmadik speciális csúcsnak. Ekkor G gráf a, b, c speciális pontokkal való általánosított Schnyder-címkézésén a szögeknek egy olyan 1,2,3-mal való címkézését értjük, ahol teljesülnek a következők:*

- (i) *az i -edik speciális csúcs külső szögének két címkéje van: $i+1$ és $i-1$ óramutató járásával ellentétesen ($i = 1, 2, 3$). A többi szögnek pontosan egy címkéje van.*
- (ii) *a v csúcsnál lévő szögek címkéi óramutató járásával ellentétes sorrendben pontosan 3 csoportba oszthatók: az 1-gyel címkézett szögek nemüres halmazát követi a 2-vel címkézett szögek nemüres halmaza, majd azt pedig a 3-mal címkézetteké.*
- (iii) *G minden belső tartományában az 1-gyel címkézett szögek nemüres halmazát követi a 2-vel címkézett szögek nemüres halmaza, majd azt pedig a 3-mal címkézetteké, és ezek óramutató járásával ellentétes sorrendben jelennek meg.*

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban az általánosított Schnyder-címkézést is röviden Schnyder-címkézésnek fogom hívni.

Vegyük észre, hogy ha G háromszögelt gráf, akkor ez a definíció pontosan azt adja, mint a normális címkézés definíciója korábban, eltekintve attól, hogy itt a külső szögek is meg vannak címkézve.

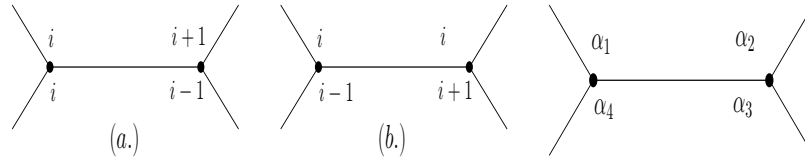
2.3.2. Észrevétel. A Schnyder-címkézés a, b, c külső szögeire vonatkozó feltétele meghatározza az összes külső szög címkézését: az i -edik speciális csúcs és az $i + 1$ -edik speciális csúcs közötti úton lévő külső szögek címkéje $i - 1$.

2.3.3. Lemma. Legyen G 3-összefüggő Schnyder-címkézett síkgráf. Ekkor egy tetszőleges élnél lévő szögek között van 1-gyel, 2-vel, és 3-mal címkézett szög, és csak az 5. ábra (a.), (b.) esetei fordulhatnak elő.

Bizonyítás. Jelölje v tetszőleges csúcsra $k(v)$ azon v -re illeszkedő élek számát, amelyeknek a v -nél lévő szögei különbözők, és F tetszőleges tartományra jelölje $k(F)$ azon F -beli élek számát, amelyeknél az él F -beli szögei különbözők. A címkézés definíciója miatt $k(v) = 3$, ha $v \notin \{a, b, c\}$ és $k(v) = 2$, ha $v \in \{a, b, c\}$, valamint $k(F) = 3$, ha F belső tartomány, a külső tartományra pedig a 2.3.2. észrevétel alapján $k(F) = 0$. Ezért

$$S = \sum_v k(v) + \sum_F k(F) = 3n - 3 + 3(t - 1) = 3|E|$$

az Euler formula alapján. Most jelölje $\alpha_1(e), \alpha_2(e), \alpha_3(e), \alpha_4(e)$ az e élnél lévő szögeket óramutató járásával megegyezően (5. ábra). Legyen $\epsilon_1(e), \epsilon_2(e), \epsilon_3(e), \epsilon_4(e)$ olyan, hogy $\alpha_2(e) = \alpha_1(e) + \epsilon_1(e)$, $\alpha_3(e) = \alpha_2(e) + \epsilon_2(e)$, $\alpha_4(e) = \alpha_3(e) + \epsilon_3(e)$, $\alpha_1(e) = \alpha_4(e) + \epsilon_4(e)$. Ekkor a címkézés definíciója miatt $\epsilon_j(e) \in \{0, 1\}$ ($j=1,2,3,4$), a ciklikusság miatt pedig $\sum_j \epsilon_j(e) \in \{0, 3\}$. Azonban egy e él hozzájárulása S -hez $\sum_j \epsilon_j(e)$, vagyis $\sum_j \epsilon_j(e) = 3$ minden e éltre, ami pedig tényleg a megadott lehetőségeket eredményezi. \square



5. ábra. Egy él lehetséges címkézései

2.3.4. Észrevétel. A 2.3.2. észrevétel a 2.3.3. lemmával összevetve azt eredményezi, hogy az i -edik speciális csúcsnál lévő belső szögek címkéje i .

A háromszögelt esetben a szögek címkézése indukált az éleken is egy címkézést, illetve irányítást. A fogalmat kicsit kibővítve ez az általános esetben is megtehető: Ha a v csúcsnál lévő e él olyan, hogy az e él v -nél lévő szögeinek címkéi i és $i + 1$, akkor legyen a v az e él töve, és legyen e címkéje $i - 1$. Ezzel a definícióval minden

élnek lesz irányítása és címkéje, azonban nem egyértelműen, az 5. ábra (b.) részében szereplő éleknek két irányítása és hozzá tartozó címkéje van.

A háromszögelt esethez hasonlóan jelölje T_i az i -vel címkézett irányított élek halmazát.

2.3.5. Definíció. *A G gráf élei által meghatározott T_1, T_2, T_3 partíciót a G gráf 3-fenyő felbontásának nevezzük, ha minden élnek van egy vagy két $i \in \{1, 2, 3\}$ címkéje és hozzá tartozó irányítása, és T_i -vel jelölve az i -vel címkézett irányított élek halmazát igazak a következők:*

- (i) $v \notin \{a, b, c\}$ csúcsnak T_1 -ben, T_2 -ben, T_3 -ban 1 a kifoka, és a megfelelő élek óramutató járásával ellentétes sorrendben jelennek meg, valamint minden v -be belépő i -vel címkézett él az $i+1$ -gyel címkézett kilépő és az $i-1$ -gyel címkézett kilépő élek között van, kilépő éllel való egybeesést is megengedve (óramutató járásával ellentétes irányban haladva).
- (ii) az i -edik speciális csúcsra illeszkedő belső élek mind egyirányúak, az i -edik speciális csúcs felé mutatnak és i -vel vannak címkézve, és a két külső él mindkettő kétirányú, az egyik kilépő él $i-1$ -gyel, a másik kilépő él $i+1$ -gyel van címkézve.

2.3.6. Észrevétel. *Ha G gráfnak adott egy Schnyder-címkézése, akkor az általa indukált T_1, T_2, T_3 3-fenyő felbontása lesz a gráfnak, ugyanis a szögek címkézéséhez adott feltételekből a háromszögelt esethez hasonlóan itt is adódnak az élek címkézéseinek feltételei. Továbbá a 3-fenyő felbontásból is leolvasható a Schnyder-címkézés a 2.3.3. lemma alapján.*

2.3.7. Lemma. *$T_i \cup T_{i+1}^{-1} \cup T_{i-1}^{-1}$ -ban nincs irányított kör (az alsó indexeket modulo 3 értve).*

Bizonyítás. Indirekten tegyük föl, hogy van kör $T_i \cup T_{i+1}^{-1} \cup T_{i-1}^{-1}$ -ben, legyen Z az a kör, ami a legkevesebb tartományt tartalmazza, jelöljük ezen tartományok összességét F -fel. Indirekten tegyük fel, hogy F -nek van belső pontja, jelöljük ezt x -szel. Legyen P_i az x -ből kiinduló T_i -beli séta F határáig (ami Z). Ilyen F határát elérő séta létezik, mert F belsejében nincsen kör. Mivel Z minimális kör volt, ezért P_i -ben sincsen kör, vagyis P_i út. Hasonlóan legyen P_{i-1} a T_{i-1} -ben haladó Z határáig tartó út x -ből. P_i -nek és P_{i-1} -nek x -en kívül nincs más metszéspontja Z minimalitása miatt. Legyen $P_i \cap Z = y$, $P_{i-1} \cap Z = z$, y -ből z -be menő út Z -ben Z_1 . Ekkor $P_{i-1}^{-1} \cup P_i \cup Z_1$ kör, ami ellentmond Z minimalitásának. Vagyis F -nek nincs belső pontja, F tartomány. Ekkor azonban ha Z óramutató járásával ellentétesen irányított, akkor nincs F -ben

$i + 1$ -gyel címkézett szög, ha pedig Z óramutató járásával megegyezően irányított, akkor nem lenne F -ben $i - 1$ -gyel címkézett szög. Egyik eset sem lehetséges, tehát $T_i \cup T_{i+1}^{-1} \cup T_{i-1}^{-1}$ -ben nincs kör. \square

2.3.8. Következmény. T_i irányított fa, amelynek összes éle az i -edik speciális csúcs felé mutat ($i=1,2,3$). (Ugyanis T_i -ben nincsen kör, és az i -edik speciális csúcs kivételével minden csúcsnak 1 a kifoka T_i -ben, annak pedig 0.)

2.4. Schnyder-címkézés létezése 3-összefüggő gráfokra

3-összefüggő gráfokra szeretnénk belátni a címkézés létezését. A kiindulópont ugyanúgy az indukció lenne, azonban ebben az esetben nem működik olyan könnyen, mint a háromszögelt esetben. Ott azon múlt az indukció szépsége, hogy a kapott eggyel kevesebb csúcsú gráf is háromszögelt volt, vagyis ugyanúgy teljesültek rá a feltételek. 3-összefüggő esetben azonban a kapott eggyel kevesebb csúcsú gráf nem feltétlen 3-összefüggő, azonban a segítségével mégis megkonstruálható a Schnyder-címkézés.

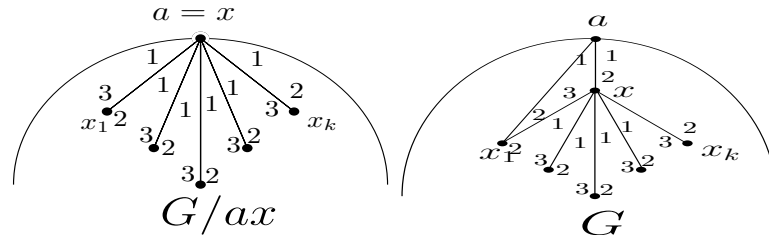
2.4.1. Definíció. A G 3-összefüggő gráf egy e élét összehúzóhatónak nevezzük, ha G/e is 3-összefüggő gráf.

2.4.2. Tétel. Ha G 3-összefüggő síkgráf, akkor létezik Schnyder-címkézése.

Bizonyítás. A bizonyítás a csúcsok száma szerinti indukcióval történik. Legyen G 3-összefüggő síkgráf, legyenek a, b, c a külső tartomány határán óramutató járásával ellentétes sorrendben lévő csúcsok. Legyen x a -nak olyan szomszédja, amely nincs a külső tartomány határán. Ekkor G/ax gráf Schnyder címkézéséből szeretnénk megkonstruálni G Schnyder címkézését.

Először tegyük fel, hogy ax él összehúzóható, és legyenek x szomszédai a, x_1, \dots, x_k óramutató járásával ellentétes sorrendben. Ekkor csak x_1 és x_k lehetnek a és x közös szomszédai. G/ax -ben az a -nál lévő szögek 1-gyel vannak címkézve, x_i -nél ax_i élen lévő szögek nincsenek 1-gyel címkézve. Ekkor a G gráfban legyen az összes G/ax -ben is szereplő szög ugyanolyan indexű, mint G/ax -ben (beleértve, hogy G/ax -ben hol x -nek hol a -nak tekintjük a kérdéses csúcsot). Ekkor az ax élt nem tartalmazó tartományokra teljesül a kritérium, valamint az ax élt tartalmazó tartományokon kívüli csúcsokra is. Továbbá legyen a -nál az összes (eddig még meg nem címkézett) szög címkéje 1, $\angle(axx_1)$ szög címkéje 3, $\angle(axx_k)$ szög címkéje 2. Ha a össze van kötve

x_1 -gyel, akkor az x_1x élnél az a -t tartozó tartományban legyenek a szögek különbözők, ha nincs összekötve, akkor egyformák. x_k -ra hasonlóan: ha a össze van kötve x_k -gyel, akkor az x_kx élnél az a -t tartozó tartományban legyenek a szögek különbözők, ha nincs összekötve, akkor egyformák. Így a többi csúcsnál és tartománynál is teljesülnek a Schnyder-címkézés feltételei.



6. ábra. A 3-összefüggő G gráf címkézése a 3-összefüggő G/ax címkézése segítségével

Most tegyük föl, hogy $e = ax$ él nem összehúzható, vagyis a G/e csak 2-összefüggő. G 3-összefüggősége miatt ez azt is jelenti, hogy G/e minden elvágó csúcspárja közül az egyik csúcs biztosan a , a másik csúcs legyen mondjuk y . Ekkor a, x, y elvágó csúcshármasa G -nek, $G \setminus \{a, x, y\}$ két komponense legyen H és K . Legyen $H' = G \setminus K$, $K' = G \setminus H$. Szeretnénk, ha H' és K' Schnyder-címkézhető lenne, és össze lehetne illeszteni a két címkézést.

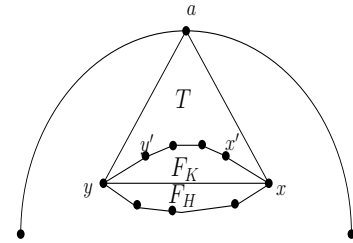
Amennyiben G -ben nem szerepeltek, vegyük hozzá H' -höz és K' -höz az ay és xy éleket. Ha eddig valamelyik nem volt 3-összefüggő, akkor így ezzel ez a probléma megoldódik. És az is igaz, hogy a kapott gráf síkgráf marad, ugyanis x, y, a elvágó csúcshármas volt. Jelölje az így kapott új gráfokat H'' és K'' ; ezek már Schnyder-címkézhetőek.

Első esetként tegyük fel, hogy H'' tartalmazza a, b, c mindegyikét. Ekkor H'' Schnyder-címkézhető a, b, c speciális pontokkal, ahol az a -nál lévő belső szögek 1-gyel vannak címkézve (a 2.3.4. észrevétel alapján). Valamint a $\Delta = \{a, x, y\}$ háromszög lesz a K'' külső határa, és a, x, y a speciális csúcsok a címkézéshez (a csúcsokat a -tól indulva óramutató járásával ellentétes sorrendben felsorolva). K'' 3-összefüggő síkgráf, az indukciós feltétel szerint létezik Schnyder-címkézése a, x, y speciális pontokkal. Ekkor H'' és K'' címkézése összeilleszthető: a Schnyder-címkézés definíciójában szereplő csúcsokra és a tartományokra vonatkozó szabály szerint a -nál lévő belső szögek mindkét címkézésben 1-gyel vannak címkézve, az x -nél lévő belső szög H'' -ben ugyanúgy van címkézve, mint az x -nél lévő belső szögek K'' -ben. y -ra ez ugyanúgy igaz.

Tehát ha ay és xy él is G -beli él volt, akkor megkaptuk G -nek egy Schnyder-

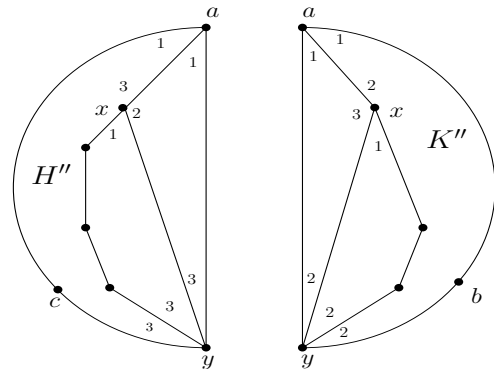
címkezését. Lehet azonban, hogy valamelyik él nem volt eredetileg G -ben. Vizsgáljuk mondjuk azt az esetet, hogy az xy él nem volt az eredeti gráfunkban, legyen F az a tartomány, amit az xy él hozzáadása elvág. F H'' -beli részét nevezzük F_H -nak, K'' -beli részét F_K -nak.

Nézzük azt az esetet, ha a csúcsok sorrendje Δ -ban óramutató járásával ellentétesen a, y, x . Ekkor az y -nál lévő szögek címkéje K'' -ben 2, x -nél lévő szögek címkéje K'' -ben 3, y -nál lévő szög címkéje F_H -ban 1 vagy 2, az x -nél lévő szög címkéje F_H -ban 2 vagy 3, illetve x' és y' címkéje F_K -ban 1. Ekkor az eredeti G gráfban x és y F -beli szögéhez azt a címkét választva, amely F_H -ban volt, a G gráf Schnyder-címkezését kapjuk.



7. ábra. A címkezések összeillesztése I.

Most tegyük föl, hogy b és c különböző komponensekbe esnek. Legyen mondjuk b K'' -ben és c H'' -ben. Mindkét gráfnak külső pontja az y , válasszuk H'' -ben és K'' -ben is y -t a harmadik speciális csúcsnak. Mivel a G gráf 3-összefüggő volt, ezért nem lehetett y a határán, vagyis G -nek nem volt éle az ay él. Ezért azt elhagyom mindkét ábrából, valamint a dupla csúcsokat és éleket összevonom. Ha xy él benne van a G



8. ábra. A címkezések összeillesztése II.

gráfban, akkor amint az ábrán is látszik, y külső csúcsát 1-gyel címkézve a csúcsokra vonatkozó szabály teljesül mind a -nál, mind x -nél, mind y -nál, és a tartományoknál sem lehet baj, mert nem keletkezett új, és nincs átfedés sem. Az xy él pedig eltávolítható a gráfból az x -nél lévő kérdéses szöget 1-gyel, az y -nál lévő szöget 2-vel címkézve.

Tehát minden esetben megkonstruálható H'' és K'' Schnyder-címkezéséből G gráf Schnyder-címkezése, vagyis az indukció alapján minden 3-összefüggő gráfnak létezik Schnyder-címkezése a három speciális csúcs figyelembevételével. \square

2.5. A Schnyder-címkézés létezésével ekvivalens állítások

Az előző részekben olyan eseteket láttunk, ahol a gráfnak létezik címkézése. Fontos azonban tudni, hogy az ottani feltételek ugyan elégségesek voltak, de nem szükségesek. Ebben a részben tehát 5 ekvivalens állítást gyűjtök össze [3] segítségével a Schnyder-címkézéssel kapcsolatban. Ha ugyanis adott egy konkrét gráf, akkor a Schnyder-címkézés definícióját nehéz ellenőrizni, de lehet, hogy valamelyik másik ekvivalens állításból könnyebben eldönthető, hogy a gráf címkézhető-e.

Az egyszerűség kedvéért legyen minden foksám legalább 3. Jelölje a külső tartományt $F_0(G)$. Legyenek v_1, v_2, v_3 tetszőleges csúcsok a külső tartományon óramutató járásával ellentétes sorrendben. Jelölje S_1 a v_1 -ből v_2 -be menő $F_0(G)$ határán lévő utat, S_2 a v_2 -ből v_3 -ba menő $F_0(G)$ határán lévő utat, S_3 pedig a v_3 -ból v_1 -be menőt.

2.5.1. Definíció. *Egy olyan síkbarajzolást, ahol a belső tartományok konvexek, konvex síkbarajzolásnak nevezünk.*

2.5.2. Definíció. *Egy konvex síkbarajzolást háromszög alakú konvex beágyazásnak nevezünk, ha a külső tartomány határa háromszög.*

Egy 2-összefüggő gráf belül 3-összefüggő, ha tetszőleges elvágó $\{u, v\}$ csúcspárjára u és v külső csúcsok, és $G \setminus \{u, v\}$ tetszőleges összefüggő komponensének van külső csúcsa.

2.5.3. Definíció. *Legyen $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, és legyenek u_1, u_2, u_n külső csúcsok óramutató járásával ellentétes sorrendben. Föltehetjük, hogy u_1 és u_2 össze van kötve, mert ha nem, akkor az eredeti G gráfhoz hozzáadjuk az $u_1 u_2$ élt. Legyen $\Pi = (V_1, V_2, \dots, V_h)$ a csúcsok partíciója, ahol $V_i \neq \emptyset$. Jelölje G_k a $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ által feszített részgráfját G -nek ($1 \leq k \leq h$), és \overline{G}_k a $V_{k+1} \cup V_{k+2} \cup \dots \cup V_h$ által feszített részgráfot.*

Azt mondjuk, hogy Π kanonikus felbontása G -nek (u_1, u_2, u_n speciális csúcsokkal), ha teljesülnek a következő feltételek:

- (1.) V_1 tartalmazza annak a belső tartománynak a határán lévő csúcsokat, amely az (u_1, u_2) élt tartalmazza, valamint $V_h = \{u_n\}$
- (2.) G_k belül 3-összefüggő ($1 \leq k \leq h$)
- (3.) V_k csúcsai külső csúcsai G_k -nak ($2 \leq k \leq h$), és
 - (a.) ha $|V_k| = 1$, akkor a V_k -ban lévő w csúcsnak legalább 2 szomszédja van G_{k-1} -ben, és ha $k < h$, akkor w -nek van \overline{G}_k -beli szomszédja is

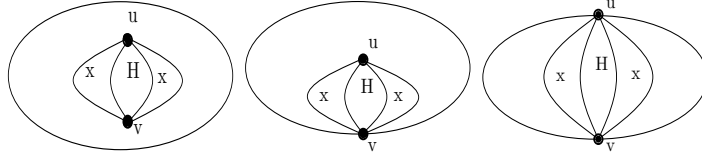
(b.) ha $|V_k| \geq 2$, akkor a V_k -beli csúcsok sorban rajta vannak $F_0(G_k)$ -n, az elsőnek és az utolsónak pontosan 1 szomszédja van G_{k-1} -ben, a többi csúcsnak 0, és minden V_k -beli csúcsnak van szomszédja \overline{G}_k -ban.

2.5.4. Tétel. Az alábbi állítások ekvivalensek:

- (a.) G -nek van kanonikus felbontása v_1, v_2, v_3 speciális csúcsokkal
- (b.) G -nek van 3-fenyő felbontása v_1, v_2, v_3 speciális csúcsokkal
- (c.) G Schnyder-címkézhető v_1, v_2, v_3 speciális csúcsokkal
- (d.) G -nek van olyan háromszög alakú konvex síkbarajzolása, hogy a csúcsok rácspontok, és $F_0(G)$ a v_1, v_2, v_3 pontok képei által meghatározott háromszög.
- (e.) G belül 3-összefüggő, és nincs olyan elvágó $\{u, v\}$ csúcspár, hogy u és v is rajta van valamilyen S_i úton ($i = 1, 2, 3$).

2.5.5. Lemma. (d.) \Rightarrow (e.), vagyis ha G -nek van olyan háromszög alakú konvex síkbarajzolása, hogy a csúcsok rácspontok, és $F_0(G)$ a v_1, v_2, v_3 pontok képei által meghatározott háromszög, akkor G belül 3-összefüggő, és nincs olyan elvágó $\{u, v\}$ csúcspár, hogy u és v is rajta van valamilyen S_i úton ($i = 1, 2, 3$).

Bizonyítás. Indirekten először is tegyük fel, hogy G 2-összefüggő, de belül nem 3-összefüggő. Legyen $\{u, v\}$ a feltételeknek megfelelő elvágó csúcspár.



9. ábra. 2-összefüggő, de belül nem 3-összefüggő gráf lehetséges elvágó csúcspárjai

Ekkor nem lehet mindkét x -szel jelölt tartomány konvex, ugyanis a H -val jelölt rész tartalmaz olyan w csúcsot, melynek foka eredetileg legalább 3, tehát u és v elhagyása után sem 0.

Most tegyük fel, hogy u és v olyan elvágó csúcspár, hogy mindketten az S_i úton vannak. Ekkor S_i -nek egyenesre kell illeszkednie, H tartalmaz egy legalább 3 fokú w csúcsot, így azonban az x -szel jelölt tartomány nem lehet konvex. \square

2.5.6. Definíció. Legyen G egy 2-összefüggő síkgráf, és legyenek w_1, w_2, \dots, w_t a külső tartomány csúcsai óramutató járásával egyező sorrendben. Azt mondjuk, hogy a Q út elvágó út, ha teljesíti a következőket:

- (i) Q tartalmaz két külső csúcsot, w_p -t és w_q -t, ahol $p < q$
- (ii) $\{w_p, w_q\}$ elvágó csúcspárja G -nek
- (iii) Q egy belső tartományban van
- (iv) Q nem tartalmaz külső élet, illetve w_p -n és w_q -n kívüli külső csúcsot

2.5.7. Definíció. Egy w_p -hez és w_q -hoz tartozó elvágó út minimális, ha nincs olyan i , amelyre $w_i \in \{w_{p+1}, w_{p+2}, \dots, w_{q-1}\}$ elvágó út vége lenne.

2.5.8. Észrevétel. A minimális elvágó út fogalma függ a külső tartomány csúcsaitól, pontosabban attól, hogy melyik csúcsot választottuk w_1 -nek.

2.5.9. Definíció. Legyen $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ egymást követő külső csúcsok legalább 3 elemű halmaza, melyekre $d(x_1) \geq 3, d(x_2) = d(x_3) = \dots = d(x_{p-1}) = 2, d(x_p) \geq 3$. Ekkor az $\{x_2, x_3, \dots, x_{p-1}\}$ halmazt a G láncának nevezzük.

2.5.10. Lemma. $(e.) \Rightarrow (a.)$, vagyis ha G belül 3-összefüggő, és nincs olyan elvágó $\{u, v\}$ csúcspár, hogy u és v is rajta van valamilyen S_i úton ($i = 1, 2, 3$), akkor G -nek van kanonikus felbontása v_1, v_2, v_3 speciális csúcsokkal.

Bizonyítás. Ha v_1 és v_2 nincsenek összekötve $F_0(G)$ -ben, akkor kössük őket össze, és az így kapott gráfot tekintsük a továbbiakban. Legyen a kanonikus felbontás definíciójában szereplő $u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_n = v_3$, ekkor indukcióval megmutatjuk, hogy ezzel a választással létezik a gráfnak kanonikus felbontása. A 2.5.3. definíció alapján legyen V_1 a v_1v_2 élt tartalmazó belső tartomány csúcsainak halmaza, $V_h = \{u_n\}$. Ekkor $u_n = v_3 \notin V_1$, ugyanis ellenkező esetben $\{v_1, v_3\}$ elvágó csúcspár lenne S_3 -n, a feltevéssel ellentétben, vagyis $V_1 \cap V_h = \emptyset$. Így a kanonikus felbontás (1.) pontja teljesül. $G_h = G$, G pedig belül 3-összefüggő, tehát a (2.) feltétel teljesül $k = h$ -ra. A (3.) pont is teljesül $k = h$ -ra, ugyanis $V_h = \{u_n\}$, és $d(u_n) \geq 3$. Vegyük továbbá észre, hogy u_n nem lehet elvágó csúcspár eleme, ugyanis mivel G belül 3-összefüggő, ezért elvágó csúcspár csak a határán lehet, és mivel v_1v_2 éle a gráfnak, ezért ha u_n elvágó csúcspárban lenne, akkor az az elvágó csúcspár rajta lenne S_2 -n vagy S_3 -n a feltétellel ellentétben. Ez másképp azt is jelenti, hogy $G_{h-1} = G \setminus u_n$ belül 3-összefüggő, vagyis a (2.) feltétel teljesül $k = h - 1$ -re. Vegyük észre, hogy ezekkel beláttuk az állítást $h = 2$ -re.

Most tegyük fel, hogy $h \geq 3$. Tegyük fel továbbá, hogy $V_h, V_{h-1}, \dots, V_{i+1}$ -et már kiválasztottuk, úgy hogy a (2.) feltétel teljesül minden $k \geq i$ -re, és a (3.) feltétel teljesül minden $k \geq i + 1$ -re. Ekkor belátjuk, hogy ki tudunk választani olyan V_i

csúcshalmazt G_i külső csúcsai közül, hogy a (2.) feltétel teljesüljön minden $k \geq i-1$ -re, és a (3.) feltétel teljesüljön minden $k \geq i$ -re. Vegyük észre, hogy az indukció el tud indulni, ugyanis $k = h-1$, h -ra teljesül a (2.) feltétel, és $k = h$ -ra teljesül a (3.) feltétel. Jelölje w_1, w_2, \dots, w_t a G_i külső csúcsait óramutató járásával megegyező sorrendben úgy, hogy $w_1 = v_1$ és $w_t = v_2$ legyen. Ekkor két eset lehetséges, az első, hogy G_i 3-összefüggő, másik, hogy G_i nem 3-összefüggő.

Első esetként tehát vizsgáljuk azt, ha G_i háromösszefüggő. Mivel V_{i+1} -ben van legalább egy csúcs, aminek van szomszédja G_i -ben, ezért van olyan külső w csúcsa G_i -nek, amire $w \notin V_1$. (Ha nem lenne olyan w , amely nincs V_1 -ben, akkor V_{i+1} -nek V_1 -beli szomszédai és v_1, v_2 csúcsok között lenne 2 olyan, amely elvágó csúcspár G_i -ben, illetve ha a két szomszéd v_1 és v_2 , akkor sem lehetne G_i háromösszefüggő.) Válasszuk V_i -nek az egyelemű $\{w\}$ halmazt. Ekkor mivel G_i 3-összefüggő volt, és w külső csúcsa volt, ezért $G_{i-1} = G_i \setminus w$ belül 3-összefüggő, és w -nek legalább 3 szomszédja van G_{i-1} -ben, vagyis a (2.) feltétel teljesül $k = i-1$ -re, a (3.) feltétel teljesül $k = i$ -re.

Második esetként vizsgáljuk azt, ha G_i nem 3-összefüggő, de belül 3-összefüggő. Ekkor $i \geq 2$ esetén G_i nem egy kör. Így létezik $F_0(G_i)$ -ben elvágó út. Legyen Q a minimális elvágó út, legyen a két végpontja w_p és w_q , $p < q$. Mivel G_i belül 3-összefüggő, ezért $q \geq p+2$. Ennek az esetnek a vizsgálatát két részre bontjuk, egyik eset lesz, ha $\{w_{p+1}, w_{p+2}, \dots, w_{q-1}\}$ lánc G_i -nek, másik eset, ha nem.

Először tehát nézzük, ha $\{w_{p+1}, w_{p+2}, \dots, w_{q-1}\}$ lánc G_i -nek. Ekkor válasszuk V_i -nek a $\{w_{p+1}, w_{p+2}, \dots, w_{q-1}\}$ halmazt. Mivel V_i lánc, és Q minimális elvágó út, ezért $V_i \cap V_1 = \emptyset$, és w_{p+1} -nek csak w_p , w_{q-1} -nek csak w_q olyan szomszédja, amely G_{i-1} -ben van, a többi V_i -beli csúcsnak nincs G_{i-1} -beli szomszédja, ugyanis mind a két G_i -beli szomszédja V_i -ben van. Továbbá mivel G_i -ben minden $w \in V_i$ csúcsnak 2 a foka, G -ben pedig legalább három, ezért minden V_i -beli csúcsnak van szomszédja $\overline{G_i}$ -ben. Így teljesül a (3.) feltétel $k = i$ -re.

Még azt kell ebben az esetben belátni, hogy (2.) feltétel teljesül $k = i-1$ -re. Indirekten tegyük fel, hogy G_{i-1} belül nem 3-összefüggő, vagyis vagy van egy v elvágó csúcsa, vagy olyan $\{u, v\}$ elvágó csúcspárja, mint amilyen a 9. ábrán szerepel. Ha v elvágó csúcsa G_{i-1} -nek, akkor v külső csúcsa G_i -nek, mert G_i belül 3-összefüggő. Valamint $v \neq w_p, w_q$, ugyanis ha valamelyikkel egyenlő, akkor v G_i -nek is elvágó csúcsa. Vegyük még észre, hogy mivel v elvágó csúcsa G_{i-1} -nek, ezért w_p és w_q csak rajta keresztül lehet összekötve, vagyis a $v \in Q$, ami pedig ellentmond annak, hogy egy elvágó út nem tartalmaz a végpontjain kívül külső csúcsot. Legyen most $\{u, v\}$ elvá-

gó csúcspárja G_{i-1} -nek, mint a 9. ábrán. Ekkor $\{u, v\}$ szintén a 9. ábrának megfelelő elvágó csúcspárja G_i -nek, ami pedig ellentmond annak, hogy G_i belül 3-összefüggő.

Most pedig nézzük az utolsó lehetőséget, hogy $\{w_{p+1}, w_{p+2}, \dots, w_{q-1}\}$ nem lánc G_i -nek. Ez Q minimalitása miatt azt jelenti, hogy a $\{w_{p+1}, \dots, w_{q-1}\}$ halmazban minden csúcsnak legalább 3 a foka G_i -ben. Azt szeretnénk belátni, hogy ekkor van egy olyan $w \in \{w_{p+1}, w_{p+2}, \dots, w_{q-1}\}$, amelynek van szomszédja $\overline{G_i}$ -ben, és ekkor az egyelemű $\{w\}$ halmazt választanánk V_i -nek. Tehát tegyük föl, hogy nincs ilyen w . Ekkor azonban w_p, w_q elvágó csúcspárja G -nek is, és w_p, w_{p+1}, \dots, w_q olyan út, amely $F_0(G)$ -n van. A lemma feltételei szerint nincs olyan elvágó csúcspár, amely valamely i -re az S_i úton lenne, vagyis $\{w_{p+1}, w_{p+2}, \dots, w_{q-1}\}$ halmazban van v_3 . Ha azonban $i \leq h-1$, akkor ez nem lehet, ugyanis $v_3 = u_n$ nincs G_i -ben. \square

2.5.11. Lemma ([9] alapján). $(a.) \Rightarrow (b.)$, vagyis ha a gráfnak létezik kanonikus felbontása, akkor létezik 3-fenyő felbontása is.

2.5.12. Lemma. $(b.) \Leftrightarrow (c.)$, vagyis a 3-fenyő felbontás létezése ekvivalens a szögek Schnyder-címkézésével.

Bizonyítás. A 2.3.6. észrevétel pontosan ezt mondja ki. \square

2.5.13. Lemma. $(c.) \Rightarrow (d.)$, vagyis ha G gráf v_1, v_2, v_3 speciális csúcsokkal Schnyder-címkézhető, akkor G -nek van olyan háromszög alakú konvex síkbarajzolása, hogy a csúcsok rácspontok, és $F_0(G)$ a v_1, v_2, v_3 pontok képei által meghatározott háromszög.

Bizonyítás. A 3.2. részben pontosan ezzel a problémával fogok foglalkozni. Ott ugyan fölteszem, hogy a gráf 3-összefüggő, és így látom be a konvex síkbarajzolás, de a 3-összefüggőséget csak ott használom föl, hogy ekkor a gráf Schnyder-címkézhető. \square

A 2.5.4 tétel bizonyítása. A lemmák miatt $(a.) \Rightarrow (b.) \Rightarrow (c.) \Rightarrow (d.) \Rightarrow (e.) \Rightarrow (a.)$, vagyis igaz a tétel állítása. \square

3. Alkalmazások

3.1. Háromszögelt gráf négyzetrácsba való beágyazása

Ebben a részben [1] alapján megmutatom, hogy egy G háromszögelt gráfot síkba lehet rajzolni úgy, hogy a csúcsai négyzetrács pontjai legyenek.

3.1.1. Definíció. Legyen G címkézett háromszögelt gráf T_1, T_2, T_3 3-fenyő felbontással. Egy rögzített belső v csúchoz definiáljuk a $P_i(v)$ utat ($i = 1, 2, 3$ -ra) a következően: legyen $P_i(v)$ a T_i -ben haladó v -ből induló T_i gyökerében végződő egyértelmű irányított út. Ekkor a 2.2.7. tétel alapján P_i -nek és P_j -nek v az egyetlen közös pontja, ha $i \neq j$. Így a 3 út 3 tartományra osztja G -t: jelölje $R_i(v)$ azt a zárt tartományt, amely nem tartalmazza T_i gyökerét.

3.1.2. Lemma. Ha u és v a címkézett, háromszögelt G gráf két különböző belső csúcsa, akkor $u \in R_i(v)$ esetén $R_i(u)$ valódi része $R_i(v)$ -nek.

Bizonyítás. Elegendő csak $i = 3$ -ra bizonyítani, vagyis tegyük föl, hogy $u \in R_3(v)$. Először nézzük azt, ha u az $R_3(v)$ határán van. Ha $u \in P_1(v)$, akkor $P_1(u)$ valódi része $P_1(v)$ -nek. Jelölje x $P_2(u)$ első u -tól különböző olyan csúcsát, mely $R_3(v)$ határán van, ekkor $x \in P_2(v)$, ugyanis a 3-fenyő felbontás definíciója miatt nem lehet $P_1(v)$ -ben. Vagyis $R_3(u) \subset R_3(v)$, a valódi rész pedig onnan adódik, hogy $P_1(u)$ valódi része $P_1(v)$ -nek. Ha $u \in P_2(v)$, akkor teljesen hasonlóan adódik az állítás. Most tegyük föl, hogy u nincs a határon. Ekkor jelölje x a $P_1(u)$ első olyan csúcsát, ami $R_3(v)$ határán van. A 3-fenyő felbontás definíciója szerint x nem lehet a $P_2(v)$ irányított úton, így $x \in P_1(v) - \{v\}$. Hasonlóan legyen y az első olyan csúcsa $P_2(u)$ -nak, ami $R_3(v)$ határán van, ekkor $y \in P_2(v) - \{v\}$. Így $R_3(u) \subseteq R_3(v)$, a valódi rész pedig a $v \in R_3(v) - R_3(u)$ miatt adódik. \square

3.1.3. Definíció. Egy G gráf baricentrikus reprezentálása egy olyan

$$v \in V(G) \mapsto (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$$

injektív függvény, ami teljesíti a következőket:

- (i) $v_1 + v_2 + v_3 = 1$ minden v csúcsra
- (ii) minden xy élre és $z \neq x, y$ csúcsra létezik olyan $k \in \{1, 2, 3\}$, hogy $x_k < z_k$ és $y_k < z_k$.

3.1.4. Tétel. Legyen G egy háromszögelt, címkézett gráf, T_1, T_2, T_3 3-fenyő felbontással, és jelölje v_i az $R_i(v)$ -ben lévő elemi háromszögek számát, ha pedig v a T_i fa gyökere, akkor legyen $v_i = 2n - 5$, $v_{i+1} = v_{i+2} = 0$ (az indexeket modulo 3 értve). Ekkor $f : v \in V(G) \mapsto \frac{1}{2n-5}(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ baricentrikus reprezentálása G -nek. Valamint ha adott egy baricentrikus reprezentáció, akkor minden $x, y, z \in G$ -re az $\angle(xzy)$ szöveget olyan k -val címkézve, melyre $z_k > x_k, y_k$, a G -nek normális címkézését kapjuk.

Bizonyítás. A baricentrikus reprezentálás első feltétele triviálisan teljesül, ugyanis $2n - 5$ pont az elemi háromszögek száma. Tekintsük az xy élt, és a $z \neq x, y$ csúcsot. Ha z külső csúcs, vagyis T_k gyökere, akkor $z_k > x_k, y_k$ teljesül. Ha z belső csúcs, akkor $x, y \in R_k(z)$ valamilyen k -ra, vagyis a 3.1.2. lemma alapján $z_k > x_k, y_k$.

A tétel második állításának bizonyításához először is vegyünk észre, hogy a baricentrikus reprezentálásból megadott címkézés egyértelmű, ugyanis $z_k > x_k, y_k$ feltétel mellett $x_i > z_i, y_i$ és $y_j > x_j, z_j$ feltételeknek is teljesülniük kell valamilyen $i, j \in \{1, 2, 3\}$ -re. $n = 3$ -ra triviálisan igaz az állítás. Ha G -nek legalább 4 csúcsa van, akkor elegendő azt belátni, hogy ha egy xy y -ből x -be irányított él címkéje i , akkor $y_i < x_i$ és $y_j > x_j$ $j \neq i$ -re, ez pedig következik a 3.1.2 lemmából, ugyanis $x \in R_j(y)$, ha $j \neq i$. \square

3.1.5. Lemma. Legyen $v \in V(G) \mapsto (v_1, v_2, v_3)$ baricentrikus reprezentálása G gráfnak. Ekkor tetszőleges α, β, γ nemkollineáris pontokra az

$$f : v \in V(G) \mapsto v_1\alpha + v_2\beta + v_3\gamma$$

leképezés G -nek szakaszokkal való síkbarajzolása az α, β, γ pontok által kifeszített síkba.

Bizonyítás. A definiált f injektív, sőt egy xy élre és $z \notin xy$ csúcsra $f(z)$ nincs rajta az $f(x)f(y)$ szakaszon a baricentrikus reprezentáció definíciója miatt. Tegyük most föl, hogy xy és uv nem csatlakozó különböző élek. Ekkor léteznek $i, j, h, k \in \{1, 2, 3\}$ indexek, amelyek kielégítik a következő feltételeket:

$$x_i > u_i, v_i, \quad y_j > u_j, v_j, \quad u_h > x_h, y_h, \quad v_k > x_k, y_k$$

Ezen feltételek alapján $\{i, j\} \cap \{h, k\} = \emptyset$, vagyis vagy $i = j$, vagy $h = k$. Ebből következik, hogy az $f(x)f(y)$ és $f(u)f(v)$ szakaszok el vannak választva egy olyan egyenessel, ami vagy $\alpha\beta$ -val, vagy $\alpha\gamma$ -val, vagy $\beta\gamma$ szakaszokkal párhuzamos, tehát az élek nem metszik egymást. \square

Jelölje T_1, T_2, T_3 gyökereit rendre a, b, c . Ekkor az $f : v \mapsto \frac{1}{2n-5}(v_1a + v_2b + v_3c)$ leképezés a G gráfnak szakaszokkal való beágyazása az a, b, c pontok által kifeszített síkba.

Válasszuk meg a, b, c pontokat a következőképpen:

$$a = (2n - 5, 0), \quad b = (0, 2n - 5), \quad c = (0, 0)$$

Az így kapott f leképezés a G gráf pontjait a $(2n - 5) \times (2n - 5)$ -ös négyzetrács pontjaiba képezi:

3.1.6. Tétel. *A $v \in V(G) \mapsto (v_1, v_2)$ leképezés a G gráf szakaszokkal való síkbarajzolása a $(2n - 5) \times (2n - 5)$ -ös négyzetrácsra.*

□

3.1.7. Definíció. *Egy G gráf gyenge baricentrikus reprezentálása egy*

$$v \in V(G) \mapsto (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$$

injektív függvény, ami teljesíti a következőket:

- (i) $v_1 + v_2 + v_3 = 1$ minden v csúcsra
- (ii) minden xy élre és $z \neq x, y$ csúcsra létezik olyan $k \in \{1, 2, 3\}$, hogy $(x_k, x_{k+1}) <_{lex} (z_k, z_{k+1})$ és $(y_k, y_{k+1}) <_{lex} (z_k, z_{k+1})$.

Legyen G egy tetszőleges címkézett, háromszögelt n csúcsú gráf, amelynek T_1, T_2, T_3 a 3-fenyő felbontása. Egy v belső csúcsra jelölje v'_i azoknak a csúcsoknak a számát $R_i(v)$ -ben, amelyek nincsenek rajta $P_{i-1}(v)$ -n, vagyis $v'_i = |R_i(v)| - |P_{i-1}(v)|$, ha pedig v gyökere T_i -nek (vagyis külső csúcs), akkor legyen $v'_i = n - 2$, $v'_{i+1} = 1$, $v'_{i+2} = 0$.

Így minden v csúcsra teljesül, hogy $v'_1 + v'_2 + v'_3 = n - 1$, és $0 \leq v'_1, v'_2, v'_3 \leq n - 2$.

3.1.8. Lemma. *Legyen u és v G -nek két különböző csúcsa. Ha v belső csúcs, és $u \in R_i(v)$, akkor $(u'_i, u'_{i+1}) <_{lex} (v'_i, v'_{i+1})$.*

Bizonyítás. Vizsgáljuk először az $u \in R_i(v) - P_{i-1}(v) \Rightarrow u'_i < v'_i$ implikációt. Ez igaz, ha u külső csúcs, vagyis T_{i+1} gyökere, ugyanis ekkor $u'_i = 0$, míg $v'_i \geq 1$. Ha u pedig belső csúcs, akkor az állítás következik a 3.1.2. lemmából: ha $u \in R_i(v)$, akkor $u'_i \leq v'_i$. Ha $u \notin P_{i-1}(v)$, akkor $u'_i < v'_i$. Ha $u \in P_{i-1}(v)$, akkor $u \in R_{i+1}(v) - P_i(v)$ és $u'_{i+1} < v'_{i+1}$ a 3.1.2. lemmát $i + 1$ -re alkalmazva. □

3.1.9. Következmény. A $v \in V(G) \mapsto \frac{1}{n-1}(v'_1, v'_2, v'_3)$ leképezés gyenge baricentrikus reprezentáció.

3.1.10. Lemma. Legyen $v \in V(G) \mapsto (v_1, v_2, v_3)$ gyenge baricentrikus reprezentációja G gráfnak. Ekkor tetszőleges α, β, γ nemkollineáris pontokra az

$$f : v \in V(G) \mapsto v_1\alpha + v_2\beta + v_3\gamma$$

leképezés G -nek szakaszokkal való síkbarajzolása az α, β, γ pontok által kifeszített síkba.

Bizonyítás. A definiált f injektív a gyenge baricentrikus reprezentáció definíciója miatt. Tegyük most föl, hogy xy és uv nem csatlakozó különböző élek. Ekkor léteznek $i, j, h, k \in \{1, 2, 3\}$ indexek, amelyek kielégítik a következő feltételeket:

$$\begin{aligned} (u_i, u_{i+1}) <_{lex} (x_i, x_{i+1}), \quad (v_i, v_{i+1}) <_{lex} (x_i, x_{i+1}), \quad (u_j, u_{j+1}) <_{lex} (y_j, y_{j+1}), \\ (v_j, v_{j+1}) <_{lex} (y_j, y_{j+1}), \quad (x_h, x_{h+1}) <_{lex} (u_h, u_{h+1}), \quad (y_h, y_{h+1}) <_{lex} (u_h, u_{h+1}), \\ (x_k, x_{k+1}) <_{lex} (v_k, v_{k+1}), \quad (y_k, y_{k+1}) <_{lex} (v_k, v_{k+1}) \end{aligned}$$

Ezen feltételek alapján $\{i, j\} \cap \{h, k\} = \emptyset$, vagyis vagy $i = j$, vagy $h = k$. Ebből következik, hogy az $f(x)f(y)$ és $f(u)f(v)$ szakaszok el vannak választva egy olyan egyenessel, ami vagy $\alpha\beta$ -val, vagy $\alpha\gamma$ -val, vagy $\beta\gamma$ szakaszokkal párhuzamos, tehát az élek nem metszik egymást. \square

Legyen most $\alpha = (n-1, 0)$, $\beta = (0, n-1)$, $\gamma = (0, 0)$, ekkor kapjuk a következő tételt:

3.1.11. Tétel. A $v \in V(G) \mapsto (v'_1, v'_2)$ leképezés a G gráf szakaszokkal való síkbarajzolása az $(n-2) \times (n-2)$ -es négyzetrácsra.

3.2. 3-összefüggő síkgráf négyzetrácsba való leképezése

Legyen G egy 3-összefüggő, Schnyder-címkézett gráf. [2] segítségével belátom, hogy ekkor is négyzetrácsba rajzolható. A háromszögelt esethez hasonlóan egy v belső csúcsra jelölje $P_i(v)$ a v csúcsból az i -edik speciális csúcsba menő T_i -ben haladó egyértelmű utat. A 2.3.7 lemma alapján $P_i(v)$ -nek és $P_j(v)$ -nek nincs v csúcson kívüli közös pontja, ha $i \neq j$. Így ebben az esetben is minden belső v csúcsra a $P_1(v), P_2(v), P_3(v)$ utak három részre osztják a G gráfot. Jelölje $R_i(v)$ a $P_{i+1}(v)$ és $P_{i-1}(v)$ közé eső zárt részt, valamint $R_i^\circ(v)$ a nyílt részt:

$$R_i^\circ(v) = R_i(v) \setminus (P_{i+1}(v) \cup P_{i-1}(v))$$

3.2.1. Lemma. *Ha u és v a Schnyder-címkezett 3-összefüggő G gráf két különböző belső csúcsa, akkor ha $u \in R_i(v)$, akkor $R_i(u) \subseteq R_i(v)$ -nek, és ha $u \in R^\circ_i(v)$, akkor a tartalmazás valódi.*

Bizonyítás. Elegendő csak $i = 1$ -re bizonyítani a szimmetria miatt. Először tegyük föl, hogy $u \in R^\circ_1(v)$. Jelölje x a $P_2(u)$ első olyan csúcsát, ami $R_1(v)$ határán van. Az élek irányítása miatt x nem lehet a $P_3(v)$ irányított úton, így $x \in P_2(v) - \{v\}$. Hasonlóan legyen y az első olyan csúcsa $P_3(u)$ -nak, ami $R_1(v)$ határán van, ekkor $y \in P_3(v) - \{v\}$. Így $R_1(u) \subset R_1(v)$, a valódi rész pedig a $v \in R_1(v) - R_1(u)$ miatt adódik.

Most nézzük azt az esetet, ha $u \in R_1(v) \setminus R^\circ_1(v)$, a szimmetria miatt föltehetjük, hogy $u \in P_3(v)$. Ha u -nál a 2-vel címkezett kilépő él különbözik a $P_3(v)$ -beli belépő éltől, akkor az előző esethez hasonlóan adódik az állítás, és a valódi tartalmazás is. Ha az előbbi két él egybeesik, akkor nevezzük el u' -nek az él u -tól különböző másik végét. Ekkor $R_1(u') = R_1(u)$. $P_3(v)$ -nek u és v közötti csúcsainak számára alkalmazott indukcióval kapjuk, hogy $R_1(u') \subseteq R_1(v)$. \square

3.2.2. Definíció. *Egy G Schnyder-címkezett 3-összefüggő gráf koordináta-leképezése egy*

$$v \in V(G) \mapsto (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$$

injektív függvény, ami teljesíti a következőket:

- (i) $v_1 + v_2 + v_3 = 1$ minden v csúcsra
- (ii) Ha $R_i(u)$ valódi része $R_i(v)$ -nek, akkor $u_i < v_i$, ha pedig $R_i(u) = R_i(v)$, akkor $u_i = v_i$
- (iii) Ha $u \in R_i(v)$, akkor $u_i \leq v_i$, ha pedig $u \in R^\circ_i(v)$, akkor $u_i < v_i$
- (iv) Ha egy i -vel címkezett e él u -ból v -be mutat, akkor $u_i < v_i$, $u_{i+1} \geq v_{i+1}$ és $u_{i-1} \geq v_{i-1}$
- (v) A G címkezett gráf minden uv élére létezik olyan $i, j \in \{1, 2, 3\}$, hogy $u_i < v_i$ és $v_j < u_j$.

3.2.3. Tétel. *Legyen G egy 3-összefüggő, címkezett gráf. Legyen v_i az $R_i(v)$ -ben lévő tartományok száma, és jelölje t az összes tartomány számát. Ekkor*

$$f : v \in V(G) \mapsto \frac{1}{t-1}(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$$

koordináta-leképezése G -nek.

Bizonyítás. A 3.2.2. definíció (i) feltétele azért teljesül, mert a külső tartományon kívül minden tartományra és minden v csúcsra pontosan egy olyan index van, amelyre $R_i(v)$ -nek része a tartomány. A (ii) feltétel triviálisan igaz, a (iii) feltétel a 3.2.1. lemmából következik. A (iv) feltétel abból következik, hogy ha egy i -vel címkézett él u -ból v -be mutat, akkor $u \in R_i^\circ(v)$. Az (v) feltételhez vegyünk észre, hogy ha létezik i , hogy $v_i < u_i$, akkor mivel a koordináták összege 1, léteznie kell egy j -nek is, amelyre $v_j > u_j$. Ha pedig nem létezik ilyen i , akkor $R_i(v)$ -beli tartományok száma megegyezik $R_i(u)$ -beli tartományok számával minden i -re, vagyis $v = u$. Ez utóbbiból az injektivitás is következik. \square

Legyenek α, β, γ nemkollineáris pontok, és jelölje f az

$$f : v \in V(G) \mapsto v_1\alpha + v_2\beta + v_3\gamma$$

leképezést, ahol $v \mapsto (v_1, v_2, v_3)$ koordináta-leképezés. Legyen az uv él képe az $f(u)f(v)$ szakasz.

3.2.4. Lemma. *A G címkézett gráf $f(G)$ beágyazásában nincs olyan w csúcs, amelynek képe az uv él képén lenne ($w \neq u, v$).*

Bizonyítás. Indirekten tegyük fel, hogy $f(w)$ rajta van az $f(u)f(v)$ szakaszon. Az uv él benne van valamilyen $i \in \{1, 2, 3\}$ indexre $R_i(w)$ -ben, tegyük fel, hogy ez az index $i = 1$. Ezért $u_1 \leq w_1, v_1 \leq w_1$, vagyis $f(w)$ csak úgy lehet rajta az $f(u)f(v)$ szakaszon, ha $u_1 = v_1 = w_1$. $u, v \in R_1(w)$, tehát a 3.2.1. lemma alapján az uv él $R_1(w)$ határán van, és csak úgy lehet $u_1 = v_1 = w_1$, ha $R_1(v) = R_1(u) = R_1(w)$. Ha mondjuk u és v is $P_2(w)$ -n van rajta, akkor mind $u_2 < w_2$, mind $v_2 < w_2$, vagyis ekkor $f(w)$ nem lehet rajta az $f(u)f(v)$ szakaszon. Hasonlóképpen nem lehet u és v mindkettő $P_3(w)$ -n. Most nézzük azt az esetet, ha $u \in P_2(w)$ és $v \in P_3(w)$. Mivel $R_1(v) = R_1(u) = R_1(w)$, ezért u, w, v ebben a sorrendben rajta vannak $P_3(u)$ -n, valamint v, w, u ebben a sorrendben rajta vannak $P_2(v)$. Most vizsgálom az uv él lehetséges irányításait, címkéit. 2 vagy 3 nem lehet a címkéje, mert akkor vagy u -ból vagy v -ből kettő darab 2-vel vagy 3-mal címkézett él lépne ki. (Ez azt is jelenti, hogy az uv élnek nem lehet két irányítása és címkéje.) Ha pedig 1-gyel lenne címkézve, akkor a 2.3.7. lemmával ellentétben lenne irányított kör $T_i \cup T_{i+1}^{-1} \cup T_{i-1}^{-1}$ -ban $i = 2$ vagy $i = 3$ esetén. Tehát hamis az indirekt állítás. \square

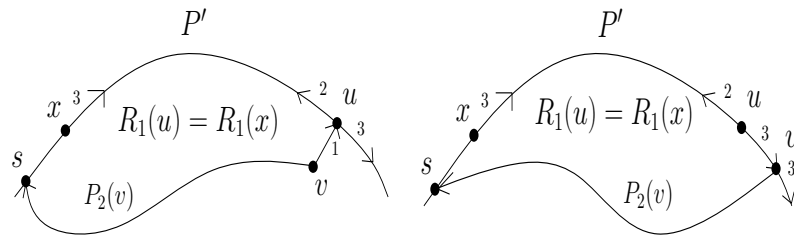
3.2.5. Lemma. *A G címkézett gráf f leképezése olyan, hogy az élek nem metszik egymást.*

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy az uv élnek és az xy élnek nincs közös csúcsa. Legyenek az $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ indexek olyanok, melyekre

$$uv \in R_i(x), uv \in R_j(y), xy \in R_k(u), xy \in R_l(v)$$

Ha $i = j$ vagy $k = l$, akkor létezik olyan koordináta, amely elválasztja a két élet, vagyis azok diszjunktak. A szimmetria miatt föltehetjük, hogy $i = k = 1$. Ekkor $x \in R_1(u)$ és $u \in R_1(x)$ miatt a 3.2.1. lemmából következik, hogy $R_1(x) \subseteq R_1(u)$ és $R_1(u) \subseteq R_1(x)$, vagyis $R_1(u) = R_1(x)$. Ez azt is jelenti, hogy a tartomány határán lévő u és x közötti út minden éle kétirányú, és egyik irányból 2-vel, másik irányból 3-mal címkézett. Legyen P' a 3-mal címkézett irányított út u és x között. Föltehető, hogy x -től megy u felé, ugyanis u és x szerepe eddig szimmetrikus. Ez a koordináták nyelvén azt jelenti, hogy $u_1 = x_1, u_2 < x_2, u_3 > x_3$. A 3.2.1. lemma alapján $y_1 \leq u_1$ és $v_1 \leq x_1$. A 3.2.4. lemma bizonyításában szereplő gondolat alapján ez csak úgy lehet, ha $y_1 < u_1$ és $v_1 < x_1$. (Ugyanis ha például $y_1 = u_1$ lenne, akkor $u_1 = x_1$ miatt a 3 csúcs $R_1(u)$ határán lenne x, u, y sorrendben, és ekkor xy élnek nem tudnánk címkézést találni.)

Azt állítjuk, hogy ekkor a harmadik koordinátája v -nek a legnagyobb, a második koordinátája y -nak a legnagyobb a négy csúcs közül. Az állítás bizonyításához először is belátjuk, hogy $x \in R^{\circ}_3(v)$. Azt tudjuk, hogy $v \in R_1(x) = R_1(u)$, és v szomszédja u -nak. Ezért két eset lehetséges: v vagy $R_1(u)$ belső pontja, és ekkor uv él az u felé mutat, és 1-gyel van címkézve (u csúcsszabálya miatt), vagy pedig $R_1(u)$ határán van, és ekkor csak $P_3(u)$ -n lehet, $P_2(u)$ -n nem, ugyanis akkor $R_1(v) = R_1(u)$ miatt $v_1 < u_1$ nem teljesülhetne.

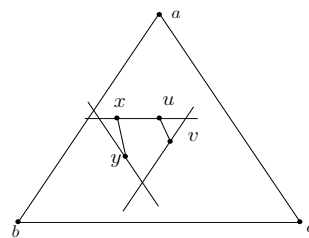


11. ábra. v csúcs lehetséges elhelyezkedései

Legyen s az első olyan csúcsa $P_2(v)$ -nek, ami rajta van $P_2(u)$ -n. Ekkor s nem lehet rajta P' -n, ugyanis akkor mindkét esetben irányított kör lenne $T_1 \cup T_2^{-1} \cup T_3^{-1}$ -ban a vu él, a P' út u és s közötti része és a $P_2(v)$ s és v közötti része által meghatározott kör, kihasználva hogy az első esetben vu címkeje 1, a második esetben uv címkeje 3.

(Illetve a második esetben $s \neq u$ onnan adódik, hogy $v_1 < u_1$.) Vagyis $s \in P_2(x) \setminus x$. Másrészt a $P_1(v)$ utat vizsgálva az első esetben ez $vu \cup P_1(u)$, a második esetben pedig mivel $v \in R_2(u)$, ezért $P_1(v) \subseteq R_2(u)$.

Ezekből pedig következik, hogy $x \in R_3(v)$, továbbá $y \in R_3(v)$. A koordináták nyelvén ez azt jelenti, hogy $x_3 < v_3$ és $y_3 \leq v_3$. Valamint $v_3 \geq u_3$, ugyanis vagy \vec{vu} 1-gyel címkézett, vagy \vec{uv} 3-mal címkézett. Így kapjuk, hogy a harmadik koordinátája v -nek a legnagyobb. Hasonló gondolat adja, hogy a második koordinátája y -nak a legnagyobb. Ekkor azonban ahogyan az ábra is mutatja, az uv él és az xy él nem metszheti egymást. □



12. ábra. xy és uv él helyzete

3.2.6. Tétel. Legyen $v \in V(G) \mapsto (v_1, v_2, v_3)$ koordináta-leképezése a G gráfnak. Ekkor tetszőleges α, β, γ nemkollineáris pontokra az $f : v \in V(G) \mapsto v_1\alpha + v_2\beta + v_3\gamma$ leképezés G -nek konvex síkbarajzolása az α, β, γ pontok által kifeszített síkba.

Bizonyítás. A 3.2.4. lemmából és a 3.2.5. lemmából tudjuk, hogy az f leképezés a G gráf szakaszokkal való síkbarajzolása. Már csak azt kell belátnunk, hogy a tartományok konvex sokszögek.

Legyen F egy tetszőleges tartomány, és legyen m_i az F -beli csúcsok i -edik koordinátájának a maximuma. Az $x_1 = m_1, x_2 = m_2, x_3 = m_3$ egyenletű affin egyenesek definiálnak egy háromszöget, nevezzük ezt Δ -nak. Vegyük észre, hogy $F \subseteq \Delta$. Azt állítjuk, hogy minden F -beli csúcs a Δ határán van, ekkor pedig a tartomány tényleg konvex. Az állítás bizonyításához legyen v egy tetszőleges F -beli csúcs. Ekkor létezik olyan i index, hogy $F \subseteq R_i(v)$, ami azt jelenti, hogy minden $u \in F$ csúcsra $u_i \leq v_i$, vagyis v csúcs i -edik koordinátája maximális. □

3.2.7. Tétel. A G háromösszefüggő síkgráfnak létezik szakaszokkal való háromszög alakú konvex síkbarajzolása a $(t-1) \times (t-1)$ -es négyzetrácsba, ahol a külső háromszög 3 csúcsa tetszőlegesen kijelölt csúcsok egy tartomány határán, t pedig a tartományok számát jelöli.

Bizonyítás. Legyen $f : v \in V(G) \mapsto \frac{1}{t-1}(v_1\alpha + v_2\beta + v_3\gamma)$, ahol v_i az $R_i(v)$ -ben lévő tartományok száma. Válasszuk α, β, γ koordinátáit a következőképpen: $\alpha = (0, t-1), \beta = (t-1, 0), \gamma = (0, 0)$. Ekkor a 3.2.6. tétel alapján f leképezés a G gráfnak szakaszokkal való síkbarajzolása, ahol a tartományok konvexek. Továbbá a csúcsok koordinátái egész számok lesznek, ugyanis v_i egész minden v csúcsra. □

3.3. Primál-duál érintési reprezentációk

[4] alapján belátom, hogy egy 3-összefüggő G síkgráfnak létezik háromszögekkel való primál-duál érintési reprezentációja. Érdekes, hogy a tétel körökkel való változata már korábban is ismert volt (Andreev,[7]).

3.3.1. Definíció. *Nevezzük érintkező rendszernek görbéknek olyan halmazát a síkban, ahol két különböző görbe nem metszi, de érintheti egymást. Nevezzük továbbá érintési pontoknak azon pontokat, ahol legalább két görbe érinti egymást.*

3.3.2. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráf érintkező reprezentációja egy olyan $\mathcal{G} = \{g(v) : v \in V\}$ érintkező rendszer, ahol két görbe akkor és csak akkor érinti egymást, ha a hozzájuk tartozó csúcsok szomszédosak.*

Egy $G = (V, E)$ síkgráf duális gráfját jelölje $G^* = (V^*, E^*)$, ekkor a primál-duál érintési reprezentációját definiáljuk a következőképpen:

3.3.3. Definíció. *Egy $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ pár primál-duál érintési reprezentáció, ha $\mathcal{V} = \{g(v) : v \in V\}$ érintési reprezentációja G -nek és $\mathcal{F} = \{g(f) : f \in V^*\}$ érintési reprezentációja G^* -nak, és minden $uv \in E$ élre és hozzájuk tartozó $f, g \in V^*$ -ra teljesül, hogy $g(u)$ és $g(v)$ érintési pontja megegyezik $g(f)$ és $g(g)$ érintési pontjával. Valamint ha az összes görbe háromszög, akkor háromszögekkel való primál-duál reprezentációról beszélünk.*

3.3.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy háromszögekkel való primál-duál érintési reprezentáció csempézés, ha a G -beli és G^* -beli csúcsoknak megfelelő háromszögek egy olyan háromszöget fednek le, amely megfelel a külső tartománynak.*

3.3.5. Tétel. *Minden 3-összefüggő síkgráfnak van olyan háromszögekkel való primál-duál érintési reprezentációja, amely csempézés, és minden érintési pont valamelyik háromszög csúcsa.*

3.3.5. tétel bizonyításának előkészítése. A 2.4.2. tétel szerint ha G 3-összefüggő síkgráf, akkor létezik Schnyder-címkézése, ami pedig a 2.5.4. szerint ekvivalens azzal, hogy létezik 3-fenyő felbontása. Tekintsük a kétirányú éleket úgy, mintha két különböző színű úgynevezett félél lenne egymás felé irányítva, valamint mintha a speciális csúcsoknál is menne ki egy megfelelő színű félél. Definiáljunk ennek a segítségével egy érintkező rendszert:

v csúcs minden szögéhez tartozzon egy nyílt görbe: címkézzük az i -vel címkézett

szögekhez tartozó görbét i -vel. Minden egyirányú és kétirányú $e \in E$ élre válasszunk az élen egy belső pontot, jelöljük ezt $p(e)$ -vel, ha e két félélből áll, akkor legyen $p(e)$ a félélek találkozási pontja. Valamint az i -edik speciális csúcsból kimenő félélhez is válasszuk hozzá a végpontját, nevezzük ezt az i -edik speciális érintkezési pontnak. Ezek a $p(e)$ pontok lesznek az érintkező rendszer érintési pontjai. A görbék pedig a következők: ha a v csúcsnál az e és e' él közötti szög i -vel van címkézve, akkor vegyünk egy $p(e)$ -t és $p(e')$ -t összekötő görbét e és e' mentén, és címkézzük i -vel. Így minden érintési pontban az élen fekvő négy szöghöz tartozó 4 görbe fog találkozni. Az 5. ábrából pedig az látszik, hogy mindhárom féle címke megjelenik $p(e)$ -nél, és a 2 azonos címkéjű összefűzhető egy hosszabb görbévé, anélkül, hogy metszéspontok keletkeznének. Fűzzük is össze azokat a görbéket, amiket lehet. Sőt az is igaz, hogy nem keletkezett zárt görbe, ugyanis akkor lenne egy olyan alakzat, aminek az összes külső szöge ugyanolyan címkéjű, ekkor viszont nem léphetne ki belőle más címkéjű él, ami ellentmond a Schnyder-címkézés tulajdonságainak. Egy v csúcshoz tartozó i -vel címkézett szögek egymás mellett voltak, a görbéik összefűzéséből kapott hosszabb görbét jelöljük $g_i(v)$ -vel. A Schnyder-címkézés tulajdonságaiból további állítások adódnak: ha $e = \vec{uv}$ egyirányú él i -vel címkézett, akkor $g_{i-1}(u)$ és $g_{i+1}(u)$ $p(e)$ -ben ér véget, $g_i(v)$ keresztül megy $p(e)$ -n, ha pedig $e = uv$ él kétirányú, ahol u -ból kilép i címkével, v -ből kilép j címkével ($i \neq j$), akkor k -val jelölve a harmadik féle címkét adódik, hogy $g_j(u)$ és $g_i(v)$ $p(e)$ -ben végződik, $g_k(u)$ és $g_k(v)$ pedig áthalad $p(e)$ -n.

3.3.6. Észrevétel. *Vegyük észre, hogy a Schnyder-címkézés csúcsszabálya miatt egy v csúcshoz tartozó i -vel címkézett részgörbék összefűzhetőek voltak, és hasonlóan a tartományokra vonatkozó szabály miatt a tartományban lévő i -vel címkézett részgörbék is összefűzhetőek voltak. Továbbá ha a különböző görbék úgymond kiegyenesíthetőek volnának, akkor ezáltal minden csúcsnak és tartománynak egy-egy háromszög felelne meg, és a kapott primál-duál reprezentáció az i -edik speciális érintkezési pontok által kifejlesztett háromszög csempézése lenne, vagyis igaz lenne a 3.3.5. tétel.*

3.3.7. Definíció. *Egy nyílt görbékből álló érintkező rendszer kiegyenesíthető, ha létezik olyan homeomorfizmus, amely olyan érintkező rendszerbe transzformálja, ahol a görbék egyenes szakaszok.*

3.3.8. Definíció. *Egy érintkező rendszer külső speciális pontjainak nevezem azokat a pontjait, amelyek a külső tartomány határán vannak, és semelyik görbének nem belső pontjai.*

3.3.9. Tétel (de Fraysseix, [10]). *Egy olyan érintkező rendszer, amelynél minden érintési pont legfeljebb egy görbének belső pontja, akkor és csak akkor kiegyenesíthető, ha minden olyan részrendszerének, amelynek a számossága legalább kettő, legalább 3 külső speciális pontja van.*

A tételt nem bizonyítom, csak hivatkozom rá a továbbiakban. \square

3.3.5. tétel bizonyítása. A 3.3.6. észrevétel és a 3.3.9. tétel alapján azt kellene belátnunk, hogy a konstruált érintkező rendszer minden legalább kettő számosságú részrendszerének legalább 3 külső speciális csúcsa van. Vegyük észre, hogy elég csak az összefüggő részrendszereket vizsgálni, ugyanis ha arra teljesül az állítás, akkor az összes részrendszerre teljesül. Jelöljön H egy összefüggő részrendszert.

A görbék által meghatározott kör alatt azt értem, ha léteznek olyan részeik a görbéknek, amelyek zárt görbét határoznak meg. Először tekintsük azt az esetet, ha a részrendszerben nincsen kör, ekkor minden érintkezési pont a külső tartomány határán van. A görbék számára való indukcióval bizonyítunk. 2 görbéből álló rendszerre igaz az állítás, ugyanis a 4 végpont közül csak egyik lehet a másik görbének belső végpontja. Tekintsünk most egy n görbéből álló rendszert, annak $n-1$ görbéből álló összefüggő részrendszerére az indukciós feltétel miatt igaz az állítás, az n . görbét hozzávéve a külső speciális pontok száma nem csökken, ugyanis az n . görbének 2 végpontja van, és csak 1 addigi külső speciális csúcs válhat görbe belső pontjává, mert az n . görbe hozzáadásával sem keletkezett kör.

Most nézzük azt az esetet, ha a H részrendszerben van kör, jelölje C az egyik legnagyobb kört olyan értelemben, hogy nem bővíthető: nincs olyan kör, ami tartalmazza. Ebben az esetben is a görbék száma szerinti indukcióval bizonyítok. Valamint jelöljük K -val a külső tartomány határát, pontosabban azon görbék összességét, amelyeknek van olyan görberésze, ami a külső tartomány határán van. Tekintsük az eredeti G gráfnak azon részgráfját, amelynek csúcsai C -ben vannak. Ebből a G' részgráfból biztosan lép ki G -ben i címkéjű él, nevezzük ezt e_i -nek, a töve pedig legyen v_i ($i = 1, 2, 3$). Ekkor $p(e_i)$ -ben ér véget a v_i -hez tartozó $i + 1$ -gyel és $i - 1$ -gyel címkézett görbe. Mindkettőről tudjuk, hogy benne van K -ban, különben v_i nem lehetne benne G' -ben. Így $p(e_i)$ vagy külső speciális pontja az érintkező rendszernek, vagy pedig $p(e_i)$ elhagyásával 2 részre esik H . Jelölje H' a C -t nem tartalmazó részt (hozzáértve a $p(e_i)$ pontot is), ekkor az indukció szerint van H' -nek külső speciális pontja, és ez H -nak is külső speciális pontja lesz. Így az érintkező rendszer minden legalább 2 elemű részhalmazának van 3 külső speciális pontja. \square

Fölvetődhet az a kérdés is, hogy mondható-e több is a háromszögekkel csempezett primál-duál érintési reprezentációról, például meg lehet-e konstruálni hasonló háromszögekkel. Általánosan azonban nem igaz ez az állítás, létezik olyan 4-összefüggő gráf, amelyre egyértelmű a hasonló háromszögekkel való érintési reprezentáció, de ez nem ad primál-duál reprezentációt, ugyanis az egyik tartománynak egy pont felelne meg. Azonban az igaz, hogy minden 4-összefüggő háromszögelt gráfnak létezik érintkező reprezentációja, és ezt bizonyítom a továbbiakban.

3.3.10. Tétel ([8], Convex Packing Theorem). *Legyen T háromszögelt gráf a, b, c külső csúcsokkal. Legyen C egy egyszerű zárt görbe a síkon, melyet három pontja a $\mathcal{P}_a, \mathcal{P}_b, \mathcal{P}_c$ görbékre oszt. T minden v belső csúcsára legyen P_v egy olyan konvex halmaz, amely több, mint 1 pontot tartalmaz.*

Ekkor létezik olyan $\mathcal{Q} = \{\mathcal{Q}_v : v \in V(T)\}$ érintkező rendszer, amelyre $\mathcal{Q}_a = \mathcal{P}_a$, $\mathcal{Q}_b = \mathcal{P}_b$, $\mathcal{Q}_c = \mathcal{P}_c$, és minden $v \in V(T) \setminus \{a, b, c\}$ -re \mathcal{Q}_v vagy egy pont, vagy pedig hasonló \mathcal{P}_v -hez (pozitív arányú hasonlósággal), és a \mathcal{Q} által indukált gráfnak T részgráfja.

3.3.11. Tétel. *Minden 4-összefüggő háromszögelt T síkgráfnak létezik érintkező reprezentációja szabályos háromszögekkel.*

Bizonyítás. Legyen T pontjainak száma n , ekkor az éleinek száma $3n - 6$. Alkalmazzuk a 3.3.10. tételt. Legyenek \mathcal{P}_v görbék szabályos, fölfele álló háromszögek, illetve legyen $\mathcal{P}_a, \mathcal{P}_b, \mathcal{P}_c$ egy szabályos háromszög három oldala. \mathcal{Q} érintkező rendszer által indukált gráfot nevezzük G -nek. A tétel bizonyításához azt kellene belátni, hogy nincs olyan $v \in T$ csúcs, amelyre \mathcal{Q}_v egy pont lenne, illetve hogy $E(G) = E(T)$.

Először tegyük fel, hogy v olyan csúcs, melyre \mathcal{Q}_v egy pont. Ekkor T -ben legfeljebb 3 szomszédja lehet v -nek, ugyanis egy pont köré maximum 3 szabályos háromszög helyezhető el, tehát \mathcal{Q} -ban \mathcal{Q}_v 3 másik görbével érintkezhet. Ekkor azonban T -ben v -nek a szomszédjai maximum 3 elemű, elvágó csúcshalmazt alkotnának, ami ellentmond a 4-összefüggőségnek.

Most belátom, hogy $E(G) = E(T)$. Azt tehát tudjuk, hogy nincs olyan T -beli csúcs, melynek a képe pont, tehát G gráf $n - 3$ darab háromszögből és a három külső csúcs által kapott szakaszból áll (amely szintén háromszöget alkot). Az érintési pontoknál 2 vagy 3 háromszög találkozik. G éleit az érintési pontokon keresztül a csúcsoknak injektíven megfeleltetve és $\mathcal{Q}_a, \mathcal{Q}_b, \mathcal{Q}_c$ helyzetéből adódóan így következik, hogy $|E(G)| \leq 3 + 3(n - 3) = 3n - 6 = |E(T)|$. $T \subseteq G$ miatt ez $E(G) = E(T)$ -t adja. □

3.4. Síkgráf dimenziója és címkézése közötti kapcsolat

A gráfot bizonyos értelemben leíró lineáris rendezések száma és a síkgráf Schnyder-címkézése által definiált részbenrendezések között keresem a kapcsolatot [2] és [5] források alapján.

3.4.1. Definíció. Legyen $G = (V, E)$ egy véges egyszerű gráf. Tekintsük a V halmazon lineáris rendezéseknek olyan \mathcal{R} családját, amelyre teljesül a következő feltétel:

- Minden $e = xy \in E$ élre és $z \neq x, y$ csúcsra teljesül, hogy létezik olyan $L \in \mathcal{R}$, amelyre $z > x$ és $z > y$ L -ben.

Ekkor az \mathcal{R} lineáris rendezések családját a G lineáris reprezentációjának hívjuk.

3.4.2. Definíció. Legyen $G = (V, E)$ egy véges egyszerű gráf. Ekkor azt a legkisebb olyan pozitív egész t számot, amelyre létezik t elemszámú lineáris reprezentációja G -nek, a gráf dimenziójának nevezzük.

3.4.3. Definíció. Legyen P egy tetszőleges poszet. Legyenek L_1, \dots, L_t olyan lineáris rendezések, melyek metszete P , vagyis $a < b$ P -ben akkor és csak akkor, ha $a < b$ minden L_i -ben ($i = 1, \dots, t$). Ekkor az ilyen lineáris rendezések $\mathcal{R} = \{L_1, \dots, L_t\}$ családját a poszet lineáris reprezentációjának nevezzük.

3.4.4. Definíció. Legyen $G = (V, E)$ egy véges egyszerű gráf. Ekkor G incidenciaposzetje az a P_G részben rendezett halmaz, melynek alahalmaza $V \cup E$, és $x \in V$, $e \in E$ esetén $x < e$ P_G -ben, akkor és csak akkor, ha $x \in e$, másfajta elemei az alaphalmaznak pedig nem összehasonlíthatóak. Az incidenciaposzet lineáris reprezentációja alatt P_G -nek, mint poszetnek a lineáris reprezentációját értem.

3.4.5. Definíció. Legyen $G = (V, E)$ egy véges egyszerű gráf, P_G az incidenciaposzetje. Ekkor azt a legkisebb olyan pozitív egész t számot, amelyre létezik t elemszámú lineáris reprezentációja P_G -nek, az incidenciaposzet dimenziójának nevezzük, és $\dim(P_G)$ -vel jelöljük.

3.4.6. Lemma. Ha a G síkgráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráf dimenziója megegyezik az incidenciaposzetje dimenziójával.

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy $\dim(G) \leq \dim(P_G)$, ugyanis ha vesszük P_G egy \mathcal{R} lineáris reprezentációját, akkor egy e élre és $z \notin e$ csúcsra létezik olyan $i \neq j$, hogy $e < z$ L_i -ben és $e > z$ L_j -ben, és ekkor $x, y < e < z$ L_i -ben ($L_i, L_j \in \mathcal{R}$).

Tehát \mathcal{R} teljesíti G lineáris reprezentációjának feltételét. Most tegyük fel, hogy a G gráf minden csúcsának foka legalább 2, és $\mathcal{R} = \{L_1, \dots, L_t\}$ a G -nek lineáris reprezentációja. Definiáljunk $L_i \in \mathcal{R}$ segítségével egy L'_i rendezést $V \cup E$ -n a következőképpen:

- a csúcsokon legyen L'_i ugyanúgy értelmezve, mint L_i
- egy $e = xy$ élre és z csúcsra legyen $e > z$ ha $z \in e$, $z \notin e$ esetén pedig legyen $e < z$ ha $\max\{x, y\} < z$, és $e > z$ ha $\max\{x, y\} > z$, ahol a maximum az L_i rendezés szerint tekintendő
- legyen $e = xy$ és $f = zv$ élekre $e < f$ ha $\max\{x, y\} < \max\{z, v\}$ és legyen $e > f$, ha $\max\{x, y\} > \max\{z, v\}$, a maximumot L_i szerint nézve

Könnyen látszik, hogy az így kapott L'_i rendezés egyrészt L_i bővítése, másrészt lineáris rendezés. Öt elemű példán szemlélítetve $a < b < c < d < e$ csúcsok esetén $a < b < ab < c < ac < bc < d < ad < bd < cd < e < ae < be < ce < de$ rendezést adja. A második pontból pedig az is látszik, hogy L'_i rendezés a P_G részben rendezés bővítése. A lemma bizonyításához az az állítás hiányzik még, hogy $\cap_i L_i = P_G$, vagyis ha $a, b \in V \cup E$, ahol a, b nem áll relációban P_G -ben, akkor létezik i, j , hogy $a < b$ L_i -ben és $a > b$ L_j -ben. Először legyen a, b két különböző csúcs. Mivel minden foksám legalább kettő, ezért létezik olyan a -ra illeszkedő e él, amelyre nem illeszkedik b , a lineáris reprezentáció definíciója szerint pedig létezik olyan L_i , melyben b nagyobb, mint e két végpontja, vagyis $b > a$. Hasonlóképpen létezik olyan rendezés is, melyben $a > b$. Most legyen $a = xy$ él, $b = z$ csúcs, ahol $z \notin xy$, ekkor azt tudjuk, hogy létezik olyan i , melyre $z > x, y$ L_i -ben, vagyis $z > \max\{x, y\}$ L_i -ben, tehát $z > xy$. Mivel létezik olyan rendezés is, melyben $z < x$, ezért ott $z < \max\{x, y\}$, vagyis $z < xy$. Utolsó lehetőségként legyen $a = xy, b = zv$ két különböző él, ahol a különbözőség miatt föltehető, hogy $z \notin xy$. xy élre és rá nem illeszkedő z csúcsra létezik olyan L_i rendezés, melyre $x, y < z, \max\{x, y\} < z$, vagyis $\max\{x, y\} < \max\{z, v\}$, tehát $a < b$ L'_i -ben. A másik irány hasonlóképpen adódik. \square

3.4.7. Lemma. K_5 dimenziója 4, de ha egy tetszőleges élet eltávolítunk, akkor az így kapott gráf dimenziója 3.

Bizonyítás. Jelölje K_5 csúcsait 1, 2, 3, 4, 5. Legyenek L_1, L_2, L_3, L_4 olyan lineáris rendezések, amelyeknél L_i legnagyobb eleme i , a második legnagyobb eleme pedig 5. Ekkor ij élre $i, j \neq 5$ esetén $i < j$ L_j -ben és $i > j$ L_i -ben, $j = 5$ esetén pedig $i > 5$ L_i -ben és $i < 5$ minden L_i -től különböző rendezésben. Így tehát teljesül

a 3.4.1. definícióban kimondott feltétel, így $\dim(K_5) \leq 4$. Másrésztől három elemű lineáris reprezentációja nincsen: indirekten tegyük fel, hogy $\{M_1, M_2, M_3\}$ lineáris reprezentációja. Föltehető, hogy ekkor 4 és 5 egyik rendezésnek sem legnagyobb eleme, és $4 > 5$ M_1 -ben és M_2 -ben. Legyen M_3 legnagyobb eleme j . Ekkor az 5 csúcsot és a 4 és j által meghatározott élet vizsgálva nincs olyan rendezés, amelyben $5 > j$ és $5 > 4$ is teljesül, ami pedig ellentmondás.

Most távolítsunk el egy e élet, föltehető, hogy ez a 3 és 4 által meghatározott él. Legyen ekkor

$$L_1 = [2 < 3 < 5 < 4 < 1]$$

$$L_2 = [1 < 3 < 5 < 4 < 2]$$

$$L_3 = [1 < 2 < 4 < 5 < 3]$$

Ekkor $\{L_1, L_2, L_3\}$ lineáris reprezentációja a $K_5 \setminus e$ gráfnak. \square

3.4.8. Lemma. $K_{3,3}$ dimenziója 4, de egy tetszőleges éle eltávolításával kapott gráf dimenziója 3.

Bizonyítás. Először belátom, hogy $K_{3,3}$ dimenziója legalább 4, vagyis 3 lineáris rendezés nem elég. Jelölje a csúcsokat $A, B, C, 1, 2, 3$, és $K_{3,3}$ jelölje azt a gráfot, ahol minden betű össze van kötve minden számmal. Indirekten tegyük föl, hogy $P_{K_{3,3}}$ dimenziója kisebb, mint 4, vagyis léteznek olyan L_1, L_2, L_3 lineáris rendezések, amelyek teljesítik a 3.4.4 definíció feltételét. Jelölje az L_i -beli rendezés relációját $<_i$.

Először vizsgáljuk azt az esetet, ha a lineáris rendezések legnagyobb V -beli elemei ugyanolyan szerepűek, vagyis például rendre A, B, C . Továbbá föltehető, hogy $1 <_1 2 <_1 3$ teljesül. Ekkor $C2 < 1$ és $C3 < 2$ csak L_2 -ben teljesülhet, így $3 <_2 2 <_2 1$. Ez alapján $A1 < 2$ és $A2 < 3$ csak L_3 -ban lehet igaz, így $1 <_3 2 <_3 3$. Ekkor azonban $B2 < 1$ egyik rendezésben sem igaz. Ha a legnagyobb elemek rendre $1, 2, 3$, akkor hasonlóképpen adódik az állítás.

Második esetként vizsgáljuk azt, ha az egyik maximális V -beli elem szám, a másik kettő betű. Ekkor föltehető, hogy L_1 -ben A a maximális V -beli elem, L_2 -ben 3 , L_3 -ban pedig C . Ekkor $C3 < B, 1, 2$ csak L_1 -ben teljesülhetnek, hasonlóképpen $A3 < B, 1, 2$ csak L_3 -ban lehetnek igazak. Továbbá mivel L_3 -ban C maximális V -beli, föltehető, hogy $C <_1 3$, hasonlóképpen föltehető, hogy $A <_3 3$, valamint L_2 -ben A és C a két legkisebb V -beli elem, és $A <_2 C$. Így kapjuk a következőket:

$$C <_1 3 <_1 1, 2, B <_1 A; \quad A <_2 C <_2 1, 2, B <_2 3; \quad A <_3 3 <_3 1, 2, B <_3 C.$$

$B3 < 1, 2$ egyike sem teljesülhet L_2 -ben. Tegyük fel, hogy az egyik teljesül L_1 -ben,

a másik nem, mondjuk $B3 <_1 1$, de a másik nem teljesül L_1 -ben. Ekkor

$$C <_1 3 <_1 2 <_1 B <_1 1 <_1 A; \quad A <_2 C <_2 1, 2, B <_2 3; \quad A <_3 3 <_3 1, B <_3 2 <_3 C.$$

$A2 < 1$ -nek és $C1 < 2$ -nek is teljesülni kell, mindkettő csak L_2 -ben lehetne igaz, így $2 <_2 1$ és $1 <_2 2$ lenne, ami ellentmondás. Vagyis az L_3 -ra vonatkozó szimmetrikus állítás miatt kapjuk, hogy $B3 < 1, 2$ L_1 -ben és L_3 -ban is teljesül. Valamint 1 és 2 szimmetriája miatt föltehető, hogy $2 <_1 1$. $C2 < B$, $C1 < B, 2$ mindegyike csak L_2 -ben teljesülhet, így

$$C <_1 3 <_1 B <_1 2 <_1 1 <_1 A$$

$$A <_2 C <_2 1 <_2 2 <_2 B <_2 3$$

$$A <_3 3 <_3 B <_3 1, 2 <_3 C.$$

$A2 < 1$ és $B1 < 2$ egyike sem teljesül L_1, L_2 -ben, így mindkettőnek L_3 -ban kellene igaznak lennie, de akkor $2 <_3 1$ -nek és $1 <_3 2$ -nek egyszerre kellene teljesülnie, ami ellentmondás.

Ha eltávolítjuk mondjuk $K_{3,3} e = A2$ élét, akkor ellenőrizhető, hogy

$$L_1: C < 3 < B < 2 < 1 < A$$

$$L_2: A < C < 1 < 2 < B < 3$$

$L_3: A < 3 < B < 1 < 2 < C$ lineáris reprezentációja lesz $G \setminus e$ -nek. Ebből az is látszik, hogy egy olyan rendezést hozzávéve, amelyben a két legkisebb csúcs A és 2 , a G -nek lineáris reprezentációját adja. \square

3.4.9. Észrevétel. *Mivel egy gráf Kuratowski tétele szerint akkor és csak akkor síkgráf, ha nincs benne felosztott K_5 és $K_{3,3}$, ezért fölmerül az a kérdés, hogy van-e kapcsolat a gráf dimenziója és aközött, hogy egy gráf síkgráf-e.*

3.4.10. Tétel. *Egy gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha a dimenziója ≤ 3 .*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy a G gráf síkgráf, be szeretnénk látni, hogy ekkor a dimenziója ≤ 3 . Föltehető az is, hogy G gráf háromszögelt, a háromszögelés csak új feltételeket hozhat be. Háromszögelt gráfnak létezik Schnyder-címkézése, jelölje $R_i(v)$ ugyanazt, mint korábban (a 3.1. részben), kibővítve azzal, hogy ha a v csúcs T_i gyökere, akkor legyen $R_i(v)$ az egész, $R_{i+1} = R_{i-1} = \emptyset$. A 3.1.2. lemma szerint ha $u \in R_i(v)$, akkor $R_i(u)$ valódi része $R_i(v)$ -nek, legyen ebben az esetben Q_i rendezésben $u < v$. Látszik, hogy ekkor Q_i -nek vehetjük tetszőleges lineáris lezártját, mely lineáris rendezés lesz, ugyanis a tartalmazások tranzitívak. Mivel egy uv élre és $w \neq u, v$ csúcsra létezik olyan i , hogy $uv \in R_i(w)$, ezért erre az i -re

$u < w, v < w$ teljesül Q_i -ben. Ebből következik, hogy Q_1, Q_2, Q_3 tetszőleges lineáris lezártjai lineáris reprezentációja lesz a gráfnak.

A másik irányt [6] felhasználásával bizonyítom. Tegyük fel, hogy a gráf dimenziója ≤ 3 , legyenek a csúcsokon vett lineáris rendezések L_1, L_2, L_3 , ahol az L_i -ben vett relációt $<_i$ jelöli. Jelölje $r_i(v)$ azt a számot, hogy növekvő sorrendben v hányadik L_i -ben, továbbá jelölje f a $v \in V \rightarrow (v_1, v_2) = (2^{r_1(v)}, 2^{r_2(v)}) \in \mathbb{R}^2$ leképezést. Legyen uv él képe az $f(u)f(v)$ szakasz, ekkor az így kapott leképezés G síkbarajzolása lesz. Ennek belátásához először azt az állítást bizonyítjuk, hogy $x, y \in V$ csúcsokra ha $y <_1 x$ és $x <_2 y$, akkor $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (x_1, y_2)$ pontok által meghatározott háromszögbe nem eshet csúcs képe. Ha ugyanis lenne benne egy z csúcs képe, akkor $\frac{1}{2}x_1 < z_1 < x_1$ és $\frac{1}{2}y_2 < z_2 < y_2$ valamelyike biztosan teljesülne, ami pedig ellentmondás.

Most tegyük föl, hogy xy és uv élek képei metszik egymást, ekkor föltehető, hogy a 4 pont mind különböző és közülük L_1 -ben x a legnagyobb. A lineáris reprezentáció definíciója szerint léteznek olyan $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ indexek, melyekre $y >_i u, v$, $u >_j x, y$, és $v >_k x, y$. Mivel xy és uv élek képei nem metszik egymást, ezért $i \neq 1$, és x -nek L_1 -beli maximalitása miatt $j, k \neq 1$. Az is látszik, hogy $i \neq j, k$. Mivel az élek metszik egymást, ez csak úgy lehet, ha $j = k = 3$, vagyis $i = 2$. Így x, y pontokra teljesül az állítás feltétele. Ekkor $x >_1 u, v$, $y >_2 u, v$ és az állítás miatt az élek képei nem metszhetik egymást. \square

3.5. Politóp dimenziója a Schnyder-címkézése segítségével

A gráfokhoz hasonlóan hipergráfokra is lehet definiálni a dimenziót hasonló módon. Az igazán érdekes eseteket azonban a politópok adják, így most a politópokra vezetjük be az analógiát. Ebben a fejezetben $\dim(P)$ -vel fogom jelölni az így definiált dimenziót, és $\text{Dim}(P)$ -vel a politóp által kifeszített affin tér dimenzióját.

3.5.1. Definíció. *Legyen a P politóp csúcsainak halmaza $\mathcal{V}(P)$, és a lapjainak halmaza $\mathcal{F}(P)$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}(P)$ -ra a csúcsokon vett lineáris rendezések \mathcal{R} családja lineáris reprezentációja a (P, \mathcal{G}) párnak, ha teljesül az alábbi feltétel:*

- minden $F \in \mathcal{G}$ lapra és $x \in \mathcal{V}(P) \setminus \mathcal{V}(F)$ csúcsra van olyan $L \in \mathcal{R}$, hogy $x > y$ L -ben minden $y \in \mathcal{V}(F)$ -ra.

3.5.2. Definíció. *Legyen egy (P, \mathcal{G}) pár rendezés-dimenziója a legkisebb olyan t pozitív egész szám, amelyre (P, \mathcal{G}) -nek van t elemszámú lineáris reprezentációja. Ha $\mathcal{G} = P$, akkor annak a rendezés-dimenzióját egyszerűen $\dim(P)$ -nek jelöljük.*

3.5.3. Tétel. *Ha P politóp, melyre $\text{Dim}(P) = d$, ahol $d \geq 2$, akkor $\text{dim}(P) \geq d+1$.*

Bizonyítás. A bizonyítás d szerinti indukcióval történik. Először legyen $d = 2$, ekkor a politóp határa egy n csúcsú kör ($n = |\mathcal{V}(P)|$), arra pedig $\text{dim}(P) \geq 3$, ugyanis 2 lineáris rendezés nem elég.

Legyen most $d > 2$, P lineáris reprezentációja pedig L_1, L_2, \dots, L_t . Jelölje v a legnagyobb csúcsot L_t -ben. Messük el a P politópot egy olyan H hipersíkkal, amely elválasztja v csúcsot a többi csúcstól. A $P \cap H$ is egy politóp, jelöljük ezt P/v -vel, ekkor $\text{Dim}(P/v) = d - 1$. P/v -nek a lapjai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők P -nek azon lapjaival, amelyek v csúcsot tartalmazzák. Jelölje \mathcal{F}_v a v -t tartalmazó P -beli lapokat, a megfeleltetésből következik, hogy $\text{dim}(P/v) \leq \text{dim}(P, \mathcal{F}_v)$. Az indukciós feltételből kapjuk, hogy $\text{dim}(P/v) \geq d$, mert P/v olyan politóp, melyre $\text{Dim}(P) = d - 1$. Ekkor L_1, L_2, \dots, L_3 lineáris reprezentációja (P, \mathcal{F}_v) párnak, ugyanis $F \in \mathcal{F}_v$ és $w \notin \mathcal{V}(F)$ esetén létezik olyan $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, melyre $w > u$ L_i -ben minden $u \in F$ -re, viszont $v > w$ L_t -ben, tehát $i \in \{1, 2, \dots, t - 1\}$, vagyis $\text{dim}(P, \mathcal{F}_v) \leq t - 1$. Így $t \geq \text{dim}(P, \mathcal{F}_v) + 1 \geq \text{dim}(P/v) + 1 \geq d + 1$. \square

3.5.4. Jelölés. *Legyen G 3-összefüggő síkgráf. Jelölje Q_i az R_i által definiált részbenrendezést, vagyis legyen $u < v$ Q_i -ben akkor és csak akkor, ha $R_i(u)$ valódi része $R_i(v)$ -nek. Jelölje továbbá Q'_i azt a rendezést, melyben $u < v$ akkor és csak akkor, ha a következő feltételek valamelyike teljesül tetszőleges u, v csúcsokra:*

- (a) $u < v$ Q_i -ben
- (b) u és v nem összehasonlítható Q_i -ben és $u < v$ Q_{i+1} -ben.

3.5.5. Lemma. *Q'_i tranzitív, vagyis $u < v$ és $v < w$ esetén $u < w$.*

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy $u < v, v < w, w < u$ Q'_i -ben. Nevezzük (u, v) csúcspárt a-típusúnak Q'_i -ben, ha 3.5.4. jelölés (a) feltétele teljesül rá, és b-típusúnak, ha a (b) feltétel igaz rá. Típuson belül a tranzitivitás következik Q_i definíciójából, ezért feltehetjük, hogy (u, v) a-típusú, és (v, w) b-típusú. A szimmetria miatt föltehetjük, hogy $i = 1$. Ha $R_1(v) = R_1(w)$, akkor $R_1(u)$ valódi része $R_1(w)$ -nek, vagyis $u < w$ mert (u, w) a-típusú. Tehát föltehető, hogy $R_1(v) \neq R_1(w)$. Mivel (v, w) b-típusú, ezért $R_1(v) \not\subset R_1(w)$, $R_1(w) \not\subset R_1(v)$, vagyis $w \notin R_1(v)$ és $w \notin R_2(v)$. Tehát $w \in R^\circ_3(v)$ és $R_3(w)$ valódi része $R_3(v)$ -nek. Azt tudjuk, hogy $u \in R_1(v)$, ezért az előbbieket miatt u nem lehet $R^\circ_3(w)$ -ben, tehát vagy $u \in R_1(w)$, vagy $u \in R_2(w)$. Ha $u \in R_1(w)$, akkor mivel $w \notin R_1(v)$ azt kapjuk, hogy $R_1(u)$ valódi része $R_1(w)$ -nek, vagyis $u < w$ Q'_1 -ben. Ha pedig $u \in R^\circ_2(w)$, akkor $R_2(u)$ valódi része $R_2(w)$ -nek, és

ekkor a 3.5.4. jelölés (b) feltétele teljesül (u, w) -re. Tehát $u < w$ Q'_i -ben, vagyis Q'_i tranzitív. \square

3.5.6. Észrevétel. *Tetszőleges u, v csúcsokra vagy $u < v$ vagy $v < u$ Q'_i -ben, vagyis Q'_i teljes lineáris rendezés.*

3.5.7. Tétel. *Ha P politóp 3 dimenziós affin teret feszít ki, akkor $\dim(P) = 4$, sőt ha $I \in \mathcal{F}(P)$ és $\mathcal{F}_I = \mathcal{F}(P) \setminus \{I\}$, akkor $\dim(P, \mathcal{F}_I) = 3$.*

Bizonyítás. Legyen (P, \mathcal{F}_I) lineáris reprezentációja \mathcal{R} . Ekkor \mathcal{R} -hez egy olyan lineáris rendezést hozzáadva, amelyben $v < w$ minden $v \in \mathcal{V}(I)$ és $w \in \mathcal{V}(P) \setminus \mathcal{V}(I)$ esetén, P -nek lineáris reprezentációját kapjuk. Ezt összevetve a 3.5.3 tétellel azt kapjuk, hogy $4 \leq \dim(P) \leq \dim(P, \mathcal{F}_I) + 1$, vagyis elég azt belátni, hogy $\dim(P, \mathcal{F}_I) \leq 3$.

Legyen G gráf a P politópnak olyan síkbarajzolása, ahol I a külső tartomány, legyenek a_1, a_2, a_3 a külső tartomány határán óramutató járásával ellentétes sorrendben. Ekkor G gráfnak létezik Schnyder-címkezésése a_1, a_2, a_3 speciális pontokkal. Legyenek ekkor Q'_1, Q'_2, Q'_3 a 3.5.4. pontban definiált lineáris rendezések, azt állítjuk, hogy ez lineáris reprezentációja a gráfnak. Legyen F a G gráf egy tartománya, y a gráf egy pontja az F tartományon kívül. Ekkor $F \subseteq R_i(y)$ valamilyen $i \in \{1, 2, 3\}$ -ra, a szimmetria miatt föltehető, hogy $i = 1$. Ekkor $R_1(x) \subseteq R_1(y)$ minden $x \in F$ csúcsra. Ha minden $x \in F$ -re $R_1(x)$ valódi része $R_1(y)$ -nak, akkor $i = 1$ -re teljesül a 3.5.1. definíció feltétele.

Tegyük fel, hogy $R_1(x) = R_1(y)$. Ekkor az az eset nem lehetséges, hogy van olyan x' , hogy $R_1(x) = R_1(y) = R_1(x')$ és $x \in P_2(y)$, $x' \in P_3(y)$, mert akkor a 3.2.7. tételben kapott konvex síkbarajzolásnál az F tartomány egyik élén lenne az y csúcs. Hasonlóképpen nem lehet az sem, hogy $x \in P_3(y)$ és $x' \in P_2(y)$.

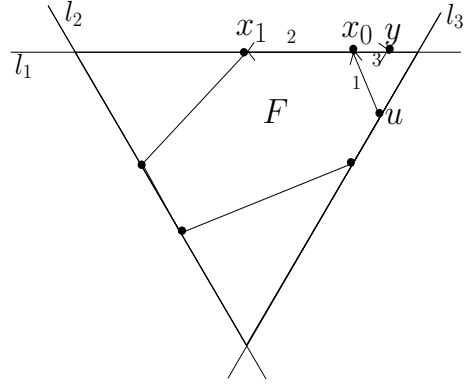
Ha minden olyan $x \in F$ csúcsra, melyre $R_1(x) = R_1(y)$ az x csúcs rajta van $P_3(y)$ úton, akkor $R_2(x)$ valódi része $R_2(y)$ -nak, vagyis $x < y$ Q'_1 -ben.

Vizsgáljuk most az utolsó esetet, vagyis hogy minden olyan $x \in F$ csúcsra, melyre $R_1(x) = R_1(y)$ az x csúcs rajta van $P_2(y)$ úton. Azt állítjuk, hogy ekkor minden $v \in F$ csúcsra $v < y$ Q'_3 -ban. Ha $R_1(x) = R_1(y)$, akkor $R_3(x)$ valódi része $R_3(y)$ -nak, vagyis $x < y$ Q'_3 -ban. Legyen most v olyan csúcsa F -nek, melyre $R_1(v)$ valódi része $R_1(y)$ -nak.

Legyen G gráf 3.2.6. tételben definiált konvex síkbarajzolásában az F tartományt tartalmazó háromszög Δ , melyet az l_i egyenesek határolnak. Ekkor y rajta van a l_1 -en, és F többi l_1 -en lévő csúcsa tőle csak balra lehet. Jelölje $x_0 \in F$ a legjobboldali csúcsot l_1 -en, és u a legfelső csúcsot l_3 egyenesen, és jelölje x_0 -nak a másik F -beli

szomszédját x_1 . Ekkor x_1 akár rajta van l_1 -en, akár nincs rajta, igaz, hogy $x_0\vec{x}_1$ 2-vel van címkézve. És mivel $x_0\vec{y}$ 3-mal van címkézve, ezért az ux_0 él csak x_0 -ba belépő, 1-gyel címkézett él lehet. Ebből következik, hogy minden $v \in F \cap l_3$ csúcsra $P_1(v)$ úton rajta van x_0 . $v \in F \cap l_2$ -re pedig $P_1(v)$ x_0 -tól balra keresztezi l_1 -et. Ez alapján pedig $v \in F$ esetén $y \notin R_3(v)$, vagyis $R_3(y) \not\subseteq R_3(v)$. Így tehát vagy

$R_3(v)$ valódi része $R_3(y)$ -nak, vagy pedig $R_3(v) \not\subseteq R_3(y)$, és ez utóbbi esetben $R_1(v) \neq R_1(y)$, vagyis $R_1(v)$ valódi része $R_1(y)$ -nak. Tehát $v < y$ Q'_3 -ban minden $v \in F$ -re. □



13. ábra. Az F tartomány csúcsainak helyzete y -hoz képest

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Pap Júliának a szakdolgozat megírása közben nyújtott folyamatos érdeklődését, segítségét, kérdéseivel való iránymutatását, és a dolgozat figyelmes átolvasását. Köszönöm továbbá a témát, amelyben örömet leltem, és a szakirodalmat, amelyet bőségesen kaptam egy-egy új kérdés után is.

Szeretnék még köszönetet mondani gimnáziumi matematikatanáromnak, Lukovits Milán atyának is a matematika iránti érdeklődésem felébresztéséért, és a matematikában oly gyakori "Miért?" kérdés fontosságának megmutatásáért, amely kérdéssel a dolgozat írása közben is többször szembesültem.

Hivatkozások

- [1] Walter Schnyder, *Embedding Planar Graphs on the Grid*, Proc. 1st ACM-SIAM Sympos. Discrete Algoritmus, pp.138-148 (1990)
- [2] Stefan Felsner, *Convex drawings of Planar Graphs and the Order Dimension of 3-Politopes*, Order, 18, pp.19-36 (2001)
- [3] Kazuyuki Miura, Machiko Azuma, and Takao Nishizeki, *Canonical Decomposition, Realizer, Schnyder Labeling and Orderly Spanning Trees of Plane Graphs*, International Journal of Foundations of Computer Science, 16, 1, pp.117-141 (2005)
- [4] Daniel Gonçalves, Benjamin Lévêque, Alexandre Pinlou, *Triangle Contact Representations and Duality*, Graph Drawing Conf. (2010).
- [5] Stefan Felsner and William T. Trotter, *Posets and Planar Graphs*, Journal of Graph Theory (2000)
- [6] Martin Pei, *Planar Graphs and Poset Dimension*, <http://www.proofbypicture.com/weblogs/piinthesky/planardim.pdf> (2005)
- [7] E. Andreev, *On Convex Polyhedra in Lobachevsky Spaces*, Mat. Sbornik, Nov. Ser.81, 445-478 (1970)
- [8] O. Schramm, *Combinatorically Prescribed Packings and Applications to Conformal and Quasiconformal Maps*, Modified version of PhD thesis from 1990 retrived at <http://arxiv.org/abs/0709.0710v1>
- [9] G. D. Battista, R. Tamassia, and L. Vismara, *Output-sensitive Reporting of Disjoint Paths*, Algorithmica, 302-340 (1999)
- [10] H.de Fraysseix, P.O. de Mendez, *Barycentric Systems and Stretchability*, Discrete Applied Mathematics 155, 1079-1095 (2007)