

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

HÉRA KORNÉLIA

Matematika BSc
matematikus szakirány

KAKEYA-HALMAZOK
ÉS KAPCSOLÓDÓ PROBLÉMÁK

Szakdolgozat

Témavezető: DR. LACZKOVICH MIKLÓS
egyetemi tanár, az MTA r. tagja
Analízis Tanszék



Budapest, 2013

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Laczkovich Miklósnak, hogy áldozatos munkájával hozzájárult eme szakdolgozat elkészítéséhez. Hálával tartozom a rengeteg konzultációért, közös munkáért, az újabb és újabb érdekes kérdésselvetésekért, és a figyelemért, amit rám fordított. Szeretnék továbbá köszönetet mondani Kiss Gergelynek, hogy hasznos tanácsaival, észrevételeivel, kérdéseivel elősegítette további elmélyedésemet a Kekeya-halmazok témakörében.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. A Cunningham-konstrukció	5
2.1. Bevezetés	5
2.2. A konstrukció alapötlete	6
2.3. Fák és kiegészítő háromszögek	8
2.4. A sarjasztás	10
2.5. A konstrukció befejezése	13
3. A gömbi Kakeya-probléma	16
3.1. Bevezetés	16
3.2. Az $a = 2\pi$ és az $a = \pi$ esetek bemutatása	17
3.3. Az $a < \pi/2$ eset bemutatása	18
3.4. Az $\pi/2 \leq a < \pi$ eset bemutatása	19
3.5. Az $\pi < a < 2\pi$ eset bemutatása	21
4. Tétel egyszerű ívekre	24
4.1. Definíciók, lemmák	24
4.2. A tétel kimondása, a bizonyítás alapja	26
4.3. A bizonyítás befejezése	32
5. Mozgatás szakaszok és körívek esetén	39
5.1. A szakaszok esete	39
5.2. A körívek esete	40
6. Hivatkozások	42

1. Bevezetés

A matematikának egy igen érdekes témaköre a Kakeya-problémakör. Kakeya-halmaznak egy olyan síkbeli tartományt nevezünk, melyben egy egységnyi hosszúságú szakasz megfordítható, azaz folytonos mozgással önmagába vihető úgy, hogy közben 180 fokos fordulatot tesz. A kérdésfelvetés a következő: Mekkora a minimális területe egy Kakeya-halmaznak? A kérdést S. Kakeya japán matematikus tette fel 1917-ben. Egyszerű példák Kakeya-halmazra az egységnyi átmérőjű körlap, illetve az egységnyi magasságú szabályos háromszög. Egy kis gondolkodás után láthatjuk, hogy egy bizonyos háromcsúcsú hipociklois által határolt tartomány is Kakeya-halmaz. A háromcsúcsú hipocikloist úgy kapjuk, hogy egy R sugarú kör kerületén belülről végiggörgetünk egy $R/3$ sugarú kört. A kis körvonal egy pontjának pályája adja a háromcsúcsú hipocikloist. Belátható, hogy a hipociklois minden pontjában húzott érintőjének a tartományba eső szakasza állandó hosszúságú, $R = 3/4$ választás esetén egységnyi hosszú. Így tehát a mozgást elképzelve könnyen látható, hogy az $R = 3/4$ esetben a háromcsúcsú hipociklois által határolt tartomány is Kakeya-halmaz. Az egységnyi átmérőjű körlap területe $\pi/4$, az egységnyi magasságú háromszögé $\sqrt{3}/3$, és belátható, hogy ezen hipociklois által határolt tartomány területe $\pi/8$. A sejtés sokáig az volt, hogy ezen háromcsúcsú hipociklois által határolt tartomány a legkisebb területű Kakeya-halmaz.

A. S. Besicovitch orosz matematikus a Kakeya-problémától függetlenül 1920-ban konstruált egy olyan halmazt, mely minden irányban tartalmaz egységnyi hosszúságú szakaszt, és nulla a területe. Oroszország akkori elszigeteltsége miatt ez az eredmény nem jutott el a matematikai köztudatba, azonban Besicovitch emigrációja után hamarosan ismertté vált. Pál Gyula felismerte, hogy a Besicovitch konstrukciójában szereplő alapötlet felhasználható a Kakeya-probléma megoldására is. A válasz: nincs legkisebb területű Kakeya-halmaz, ugyanis tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan Kakeya-halmaz, melynek területe kisebb, mint ε . Besicovitch eredeti konstrukciója meglehetősen bonyolult, ezt később sokan egyszerűsítették, köztük ő maga is, az egyszerűsített változat megtalálható [3]-ban. A Kakeya-problémakör részletesebb történeti áttekintéséről, egyéb érdekes kérdésfelvetéseiről, általánosításairól olvashatunk [5]-ben.

F. Cunningham 1971-ben írt [1] cikkében megmutatta, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan Kakeya-halmaz, melynek területe kisebb, mint ε , és egy egységnyi sugarú körben található! Szakdolgozatom első fejezetében be fogom mutatni Cunningham eme konstrukcióját. A Cunningham konstrukciójában szereplő halmaz egyszeresen összefüggő, de én ezt jelen dolgozatban nem bizonyítom.

Szakdolgozatom második részében a gömbi Kakeya-halmazok problémáját tárgyalom. Azt mondjuk, hogy az a ívhosszúságú főkör-ív megfordítható a gömbfelületen lévő K halmazban, ha van olyan folytonos mozgás a K halmazon belül, mely a főkör-ívet önmagába viszi úgy,

hogy közben 180 fokok fordulatot tesz, azaz ellentétes irányítással érkezik vissza önmagába. Ezen halmazokat gömbi Kakeya-halmazoknak nevezzük. A kérdésfelvetés a síkbeli problémához analóg módon a következő. Adott a ívhosszúságú főkör-ív az egységgömbfelületen. Mekkora a legnagyobb alsó korlátja azon gömbi Kakeya-halmazok területének, melyben az ív megfordítható? Cunningham [2]-ben leírt konstrukciójának megfelelően a síkbeli Cunningham-konstrukció által elkészített Kakeya-halmazokat fogjuk használni, ezeket képezzük a gömbfelületre a gömb középpontjából való középpontos vetítéssel.

A síkbeli Kakeya-halmazok létezésének egy érdekes ekvivalenciáját adja a következő tétel:

1.1. Tétel. *A következő állítások ekvivalensek:*

1. *Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan K síkbeli Kakeya-halmaz, melynek területe kisebb, mint ε .*
2. *Tetszőleges $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}^2$ azonos hosszúságú irányítatlan szakaszok esetén teljesül a következő: tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan M síkbeli elmozgatás, mely J_1 -et J_2 -be viszi, és a mozgatás által súrolt terület kisebb, mint ε .*
3. *Tetszőleges $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}^2$ azonos hosszúságú irányított szakaszok esetén teljesül a következő: tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan M síkbeli elmozgatás, mely J_1 -et J_2 -be viszi (úgy, hogy $M(1)(J_1)$ és J_2 irányítása megegyezik), és a mozgatás által súrolt terület kisebb, mint ε .*

Ezen ekvivalencia létezése adta az ötletet a következő kérdés tárgyalásához. Adott a síkon két különböző egybevágó egyszerű ív. Igaz-e, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan folytonos síkbeli elmozgatás, mely egyik egyszerű ívet a másikba viszi, és a mozgatás által súrolt terület kisebb, mint ε ? A dolgozatban leírtak szerint ki fog derülni a következő. Ha egy egyszerű ív olyan, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan folytonos síkbeli elmozgatás, mely az egyszerű ívet egy tőle különböző egybevágó példányába viszi úgy, hogy a mozgatás által súrolt terület kisebb, mint ε , akkor az egyszerű ív körív vagy szakasz. Ezen új eredmény bizonyításával ismerkedhetünk meg a 4. fejezetben.

Az 5. fejezetben azt tárgyaljuk, mi a helyzet abban az esetben, ha az egyszerű ív szakasz vagy körív. Elsőként bebizonyítjuk az 1.1. Tételt. Ezután felhasználjuk, hogy az 1. fejezetben található Cunningham-konstrukció szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan K síkbeli Kakeya-halmaz, melynek területe kisebb, mint ε . A tételbeli ekvivalenciából következni fog egy megfelelő mozgatás létezése abban az esetben, ha az egyszerű ív egy szakasz. Abban az esetben, ha az egyszerű ív egy körív, a probléma egyelőre megválaszolatlan. A már meglévő eredményekkel megismerkedhetünk az 5. fejezetben.

2. A Cunningham-konstrukció

2.1. Bevezetés

2.1. Definíció. Legyen $M : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos leképezés, melyre teljesül, hogy minden rögzített $t \in [0, 1]$ esetén $M(t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ síkbeli egybevágóság, és $M(0) = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$. Ekkor M -et folytonos síkbeli elmozgatásnak nevezzük.

2.2. Definíció. Legyen $J \subset \mathbb{R}^2$ kompakt halmaz, és M folytonos síkbeli elmozgatás. A J halmaz M mozgatója által súrolt tartomány területe $\lambda_2(H_{J,M})$, ahol λ_2 a kétdimenziós Lebesgue-mértéket jelöli, a $H_{J,M}$ halmaz pedig:

$$H_{J,M} := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists y \in J, \exists t \in [0, 1] M(t)(y) = x \right\}.$$

2.3. Definíció. Legyen $K \subset \mathbb{R}^2$ halmaz, $J \subset K$ egység-hosszúságú szakasz, A és B végpontokkal. Azt mondjuk, hogy a K halmaz *Keakeya-halmaz*, ha létezik olyan $\{M(t) \mid t \in [0, 1]\}$ folytonos síkbeli elmozgatás, melyre $M(t)(J) \subset K$ minden $t \in [0, 1]$ esetén, $M(1)(J) = J$, és $M(1)(A) = B$, $M(1)(B) = A$. Szemléletesen: Egy olyan síkbeli tartományt, amelyben egy egység-hosszúságú szakasz folytonos mozgással önmagába vihető úgy, hogy közben 180 fokos fordulatot tesz, azaz ellentétes irányítással érkezik vissza önmagába, *Keakeya-halmaznak* nevezzük.

Ebben a fejezetben F. Cunningham [1]-beli konstrukcióját tárgyaljuk, amely olyan síkbeli *Keakeya-halmazt* eredményez, melynek területe tetszőlegesen kicsi lehet, és az egység-sugarú körben található. A Cunningham konstrukciójában szereplő halmaz egyszerűen összefüggő, de ezt jelen dolgozatban nem tárgyaljuk.

2.4. Tétel. *Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan Keakeya-halmaz, melynek területe kisebb, mint ε , és az egység-sugarú körben található.*

2.5. Észrevétel. A tételben szereplő 1 sugarú kör mérete tovább már nem csökkenthető. Valóban, legyen D egy $r < 1$ sugarú körlap, P egy D -beli pont, melynek távolsága a középponttól kisebb, mint $1 - r$.

Állítás. *A $D \setminus \{P\}$ halmaz nem Keakeya-halmaz.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy *Keakeya-halmaz*, azaz megfordítható benne az egység-szakasz. Paraméterezzük a szakasz mozgását az $\{M(t) \mid t \in [0, 1]\}$ mozgatóval. Jelölje az egység-szakaszt a kezdeti állapotban J , végpontjait A és B . A feltétel szerint $M(1)(J) = M(0)(J) = J$, és $M(1)(A) = B$, $M(1)(B) = A$, azaz a szakasz ellentétes irányítással érkezik vissza önmagába. Legyen most $t_0 \in [0, 1]$ tetszőleges. Jelölje az $M(t_0)(J)$ szakaszpozíciót J_{t_0} . Jelölje ezen szakaszpozíció végpontjait $A_{t_0} = M(t_0)(A)$ és $B_{t_0} = M(t_0)(B)$. Tekintsük az $A_{t_0}B_{t_0}P$

irányított háromszöget. Mivel $P \notin D$, ezért $P \notin J_{t_0}$ teljesül, így ez egy valódi háromszög. Tetszőleges $t \in [0, 1]$ esetén jelölje $H(t)$ az $A_t B_t P$ irányított háromszöget. Abból adódóan, hogy a P pont középponttól való távolsága kisebb, mint $1 - r$, megfigyelhető, hogy létezik a t_0 pontnak egy olyan $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ környezete, hogy tetszőleges $t' \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ esetén a $H(t')$ háromszög irányítása megegyezik a $H(t_0)$ háromszög irányításával. Tekintsük ezen intervallum egy zárt részintervallumát, majd nevezzük ezentúl ezen zárt részintervallum belsejét $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ -nak. Tekintsük most az összes ilyen $t_0 \in [0, 1]$ ponthoz tartozó környezeteket, tehát az $\bigcup_{t_0 \in [0, 1]} (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \supset [0, 1]$ halmazt. (A $t_0 = 0, t_0 = 1$ esetben ezek féloldali környezetek lesznek, ezek jelölését most nem különböztetjük meg.) Mivel a $[0, 1]$ intervallum kompakt, kiválasztható ezen fedésből véges részfedés, azaz $\bigcup_{t_0 \in I} (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \supset [0, 1]$, ahol $|I| < \infty$. Legyenek ezek az intervallumok $\{(t_i - \delta_i, t_i + \delta_i) \mid i = 1, \dots, n\}$. Tekintsük ezen intervallum-végpontok által meghatározott $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_m = 1$ felosztását a $[0, 1]$ intervallumnak, azaz legyen $u_0 = 0, u_1 = t_1 - \delta_1, u_2 = 0 + \delta_0, \dots, u_{m-1} = t_n + \delta_n, u_m = 1$. Teljesül, hogy minden $u \in [u_{i-1}, u_i]$ esetén a $H(u)$ háromszögek irányítása megegyezik a $H(u_{i-1})$ háromszög irányításával tetszőleges $i = 1, \dots, m$ esetén. Tehát teljesül, hogy minden $u \in [0, 1]$ esetén a $H(u)$ háromszögek irányítása megegyezik a $H(0)$, azaz az ABP háromszög irányításával. Ekkor azonban a $H(1)$, azaz a feltétel szerinti BAP háromszög irányításának is meg kellene egyeznie az ABP háromszög irányításával, de ez nem teljesül, ellentmondás. Tehát $D \setminus \{P\}$ valóban nem Kakeya-halmaz. \square

Tehát bármely D -ben fekvő Kakeya-halmaznak tartalmaznia kell a D középpontja körüli $1 - r$ sugarú kört, tehát legalább $(1 - r)^2 \pi$ területtel kell rendelkeznie.

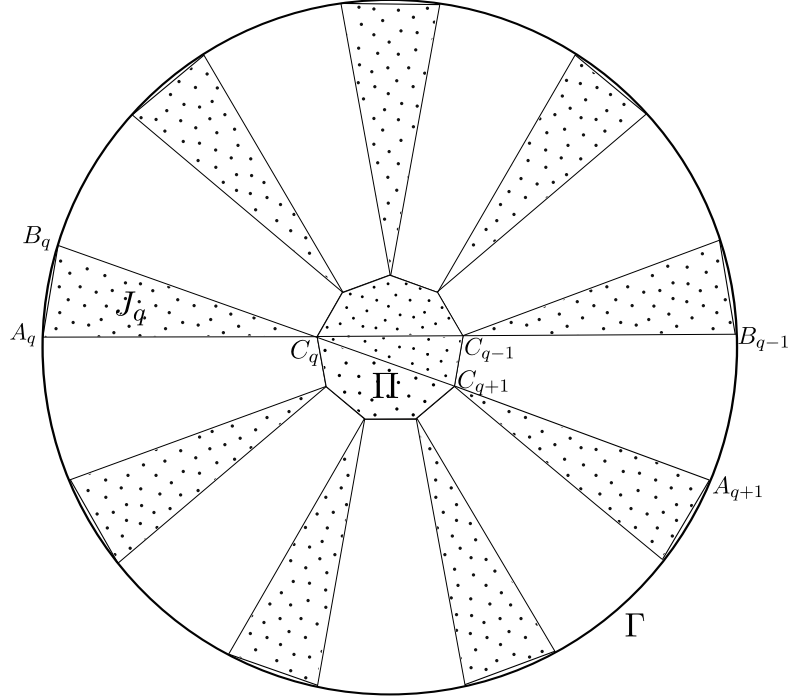
2.2. A konstrukció alapötlete

Bizonyításunk fontos építőköve, melyet Besicovitch is használt megoldásában, hogy egy szakasz korlátlanul mozgatható a rajta áthaladó egyenes mentén, nulla területet súrolva.

Legyen a halmazunk a következő: Legyen Γ a fix egységkör, középpontja O . Az $\varepsilon > 0$ szám adott, legyen Π egy a körrel koncentrikus páratlan Q oldalú szabályos konvex sokszög által határolt tartomány, melynek területe kisebb, mint $\varepsilon/2$.

Legyenek Π csúcsai $C_0, C_1, \dots, C_Q = C_0$ oly módon számozva, hogy az egymást követő csúcsok majdnem szemben legyenek egymással, tehát a $C_{q-1}OC_q$ szög legyen $\pi Q/(Q+1)$ minden $q = 1, \dots, Q$ esetén. Most készítsünk el Q darab háromszöget: J_1, \dots, J_Q a következő módon. Legyenek A_q és B_{q-1} a $C_{q-1}C_q$ szakasz által meghatározott egyenes és a Γ kör metszéspontjai, A_q legyen a C_q -hoz közelebb lévő metszéspont minden $q = 1, \dots, Q$ esetén (lásd: 1. ábra). Tehát létrehoztunk a körvonalon $2Q$ darab pontot: $A_0, B_0, A_1, B_1, \dots, A_Q = A_0, B_Q = B_0$. Ekkor J_q

csúcsai legyenek C_q , A_q és B_q , minden $q = 0, \dots, Q$ esetén ($J_0 = J_Q$). Legyen K a Π sokszög-tartomány és a J_1, \dots, J_Q háromszögek uniója.



1. ábra. A kiindulási Kakeya-halmaz

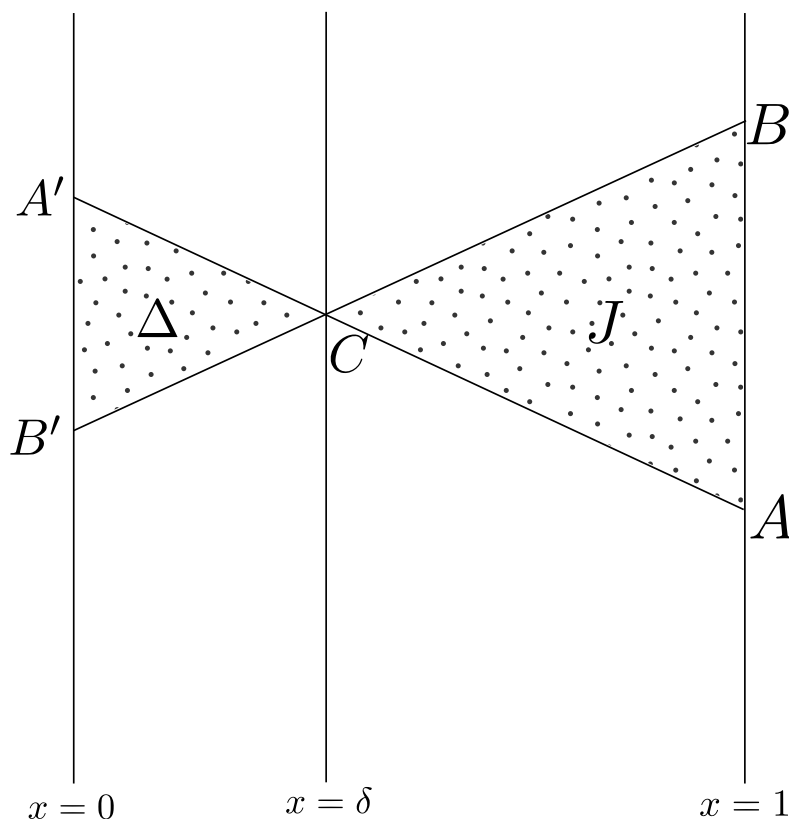
Az egység hosszú szakasz K -ban a következőképpen mozog: $C_{q-1}C_qA_q$ szakaszcól C_q körül fordulva átforgó $C_{q+1}C_qB_q$ szakaszra. Ehhez szükséges, hogy a $C_{q-1}C_{q+1}$ és az A_qB_q párhuzamos szakaszok távolsága legalább egységnyi legyen. Ez megvalósítható, ha Q -t elég nagyra választjuk. Valóban, hiszen ha $Q \rightarrow \infty$, akkor Π egy $\varepsilon/2$ területű körhöz tart, melynek sugara $\sqrt{\varepsilon/(2\pi)}$, így a kérdéses távolság $\sqrt{\varepsilon/(2\pi)} + 1$ -hez tart, ami nagyobb, mint 1. Tehát a szakasz mozgása:

Az egység szakasz $C_0C_1A_1$ -től C_1 körül fordulva $C_2C_1B_1$ -ig forog, majd ezen szakasz által meghatározott egyenes mentén mozog, míg $A_2C_2C_1$ -re nem érkezik. Ekkor elfordul C_2 körül $B_2C_2C_3$ -ig, majd ezen szakasz által meghatározott egyenes mentén mozog, és így tovább. Q darab ilyen mozgás után a szakasz visszakerül $A_1C_1C_0$ -ra, és mivel Q páratlan, ezért fordított irányban áll, mint eredetileg. Tehát K Kakeya-halmaz, azonban túl nagy a területe. Következő célunk ennek csökkentése lesz.

Csökkentsük a $C_{q-1}C_qA_q$ -ból $C_{q+1}C_qB_q$ -ba történő mozgás során súrolt területet! Ezt Q -szor ismételve csökkenthetjük K minden ágán a súrolt területeket.

Használjunk egyszerűbb jelöléseket. Legyen $A' := C_{q-1}$, $B' := C_{q+1}$, $A := A_q$, $B := B_q$, $C := C_q$, $J := J_q$. Vegyünk fel egy koordináta-rendszert úgy, hogy az y tengely az A' és B'

által meghatározott egyenes legyen. Az $A'B'C$ háromszög legyen Δ , ez része Π -nek. Legyen Δ magassága δ . A J háromszög magassága legyen r . A feltétel szerint $\delta+r \geq 1$, tekintsük a $\delta+r = 1$ esetet (lásd: 2. ábra). A célunk, hogy a szakasz mozgatását $A'A$ -ból $B'B$ -be úgy végezzük el, hogy a $K^{(0)} = \Delta \cup J$ halmazt egy kisebb területű halmazzra cseréljük, melyben a mozgatás megvalósul. A Δ háromszöget hagyjuk változatlanul, J -t cseréljük le egy olyan halmazzra, hogy a súrolt terület minél nagyobb mértékben csökkenjen. Ez a halmaz egy úgynevezett fából és kiegészítő háromszögekből fog állni.



2. ábra.

2.3. Fák és kiegészítő háromszögek

Legyen m pozitív egész szám. Vegyünk fel m különböző pontot: C_1, C_2, \dots, C_m növekvő sorrendben az A' és B' közé eső szakaszon. Vegyünk fel $m-1$ különböző pontot: V_1, V_2, \dots, V_{m-1} növekvő sorrendben az A és B közé eső szakaszon. Egészítsük ki a jelölést: legyen $C_0 = A'$, $C_{m+1} = B'$, $V_0 = A$, $V_m = B$. Legyen t_i a C_i, V_i, C_{i+1} csúcsok által meghatározott háromszög minden $i = 0, \dots, m$ esetén. Ekkor álljon a T fa a t_i háromszögek uniójából ($i = 0, \dots, m$). Tekintsük az $x = -r$ egyenletű függőleges egyenest, ahol $r = 1 - \delta$. Legyen A_i a $C_i V_{i-1}$ által

meghatározott egyenes és az $x = -r$ egyenes metszéspontja, B_i a C_iV_i által meghatározott egyenes és az $x = -r$ egyenes metszéspontja. A C_iV_{i-1} és a C_iV_i oldalak a t_{i-1} és t_i szomszédos fa-háromszögek oldalai. Legyenek a J_1, J_2, \dots, J_m kiegészítő háromszögek a következők: J_i háromszög legyen a C_i, A_i, B_i csúcsok által meghatározott háromszög minden $i = 1, \dots, m$ esetén. Legyen a $K^{(1)} = T \cup \left(\bigcup_{i=1}^m J_i \right)$ halmaz a $K^{(0)} = \Delta \cup J$ halmaz első lecseréltje. $K^{(0)}$ -hoz hasonlóan $K^{(1)}$ is egy Kakeya-részhalmaz, a szakasz $A'A$ -tól $B'B$ -ig tud mozogni $K^{(1)}$ -en belül. Ezt a következőképpen teszi (lásd 3. ábra):

$A'A = C_0V_0$ -ból indulva t_0 belsejében forog V_0 körül, amíg el nem éri C_1V_0 -t. Ekkor ezen egyenes mentén lecsúszik addig, hogy az $x = -r$ és $x = \delta$ egyenesek közé kerüljön. Ekkor elfordul C_1 körül úgy, hogy az $x = -r$ és $x = 0$ egyenesek közt lévő része J_1 belsejében mozogjon, addig, amíg el nem éri a $B_1C_1V_1$ egyenest. Ekkor ezen egyenes mentén felcsúszik V_1 -ig, így az $x = 0$ és $x = 1$ tengelyek közé kerül. Ekkor az előzőekhez hasonlóan jár el C_1V_1 -ből kiindulva. Az általános lépésben C_iV_i -ből indulva t_i belsejében forog V_i körül, amíg el nem éri $C_{i+1}V_i$ -t. Ekkor ezen egyenes mentén lecsúszik addig, hogy az $x = -r$ és $x = \delta$ egyenesek közé kerüljön. Ekkor elfordul C_{i+1} körül úgy, hogy az $x = -r$ és $x = 0$ egyenesek közt lévő része J_{i+1} belsejében mozogjon, addig, amíg el nem éri a $B_{i+1}C_{i+1}V_{i+1}$ egyenest. Ekkor ezen egyenes mentén felcsúszik V_{i+1} -ig, így az $x = 0$ és $x = 1$ tengelyek közé kerül. Ezt elvégzi minden $i = 0, \dots, m$ -re, majd V_mC_m -ből V_m körül fordulva eléri $C_{m+1}V_m = B'B$ -t. Tehát elmozgattuk a szakaszt $A'A$ -ból $B'B$ -be.

Célunk az volt, hogy csökkentsük a súrolt területet. Nézzük meg, sikerült-e! Legyen a J háromszög területe a , a J_i háromszögek területe a_i minden $i = 1, \dots, m$ esetén. Az $A_iC_iB_i$ és a $V_{i+1}C_iV_i$ háromszögek hasonlóak, így oldalaira teljesül: $|A_iB_i| = r|V_{i-1}V_i|$ minden $i = 1, \dots, m$ esetén. Így teljesül:

$$\sum_{i=1}^m |A_iB_i| = r \sum_{i=1}^m |V_{i-1}V_i| = r|AB|.$$

Ezek alapján

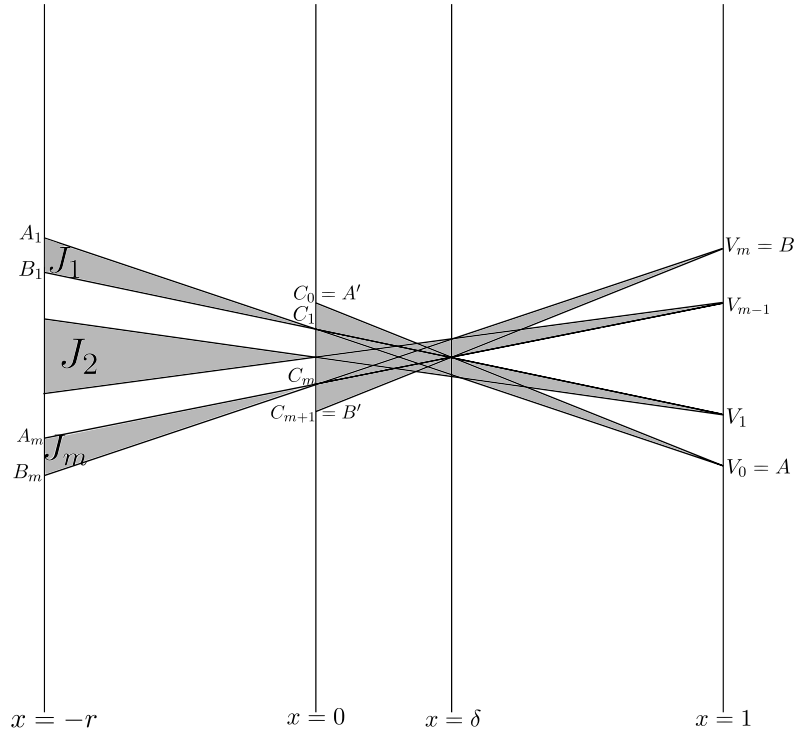
$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} r |A_iB_i| = \frac{1}{2} r^2 |AB| = ra.$$

Tehát a kiegészítő háromszögek összterülete J területének r -szerese ($r < 1$).

A következő kérdés annak megállapítása, hogy aránylik a T fa területe a Δ háromszög területéhez. Igaz-e, hogy $K^{(1)}$ területe kisebb, mint $K^{(0)}$ területe? Tudjuk, hogy T tartalmazza Δ -t.

Állítás. A T fa Δ háromszögön kívüli területe tetszőlegesen kicsi lehet.

Ez a Kakeya-probléma megoldásának fő lépése. Jelen cikkben Besicovitch meglátásának egy módosított formáját használjuk. Az itt konstruált fák hasonlóak a Besicovitch–Perron–Schoenberg-fákhoz, melyek megtalálhatóak [4]-ben, de különböznek azoktól. A B–P–S-fákban a



3. ábra.

szomszédos elemi háromszögek oldalai majdnem párhuzamosak, így szükségszerűen a metszéspontok nagyon messzire kerülnek. Ellenben a mi fáink kifejezetten úgy vannak készítve, hogy a szomszédos elemi háromszögek az y tengelyen metsszék egymást, így a kiegészítő háromszögek innen kezdődjenek.

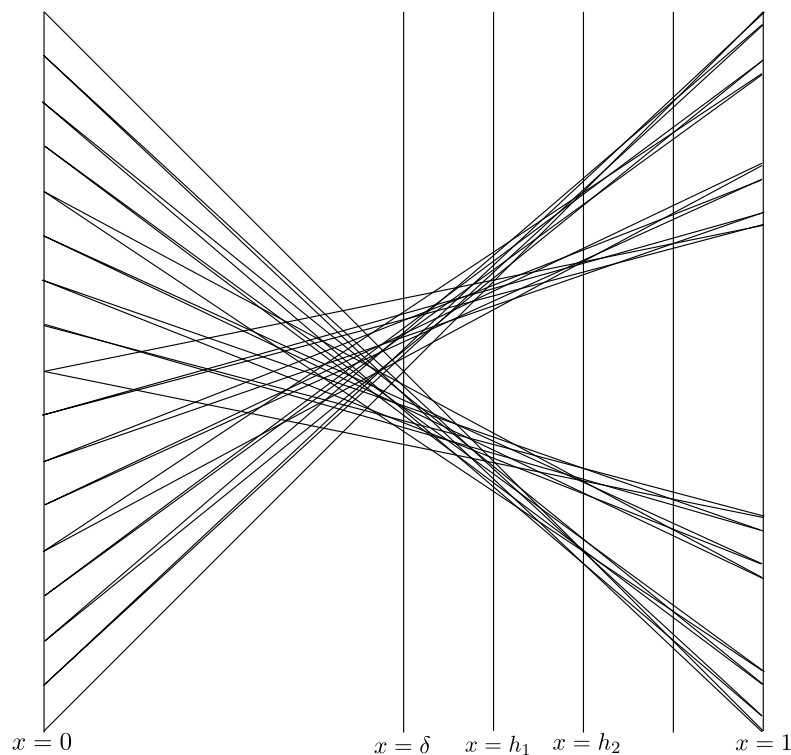
2.4. A sarjasztás

Legyen p pozitív egész szám. Minden ilyen p -re létezik egy speciális T_p fa, amely a Δ háromszögből való növeléssel kapható. A növekedést sarjasztásnak nevezzük, ez egy speciális folyamat, melynek során egy háromszögből két háromszög lesz. Sarjasztások ismétlődéséből kaphatjuk a T_p fát a következőekben leírtak szerint.

Legyen $0 < h' < h''$, és legyen t egy háromszög, melynek σ alapja az y tengelyen, harmadik csúcsa az $x = h'$ tengelyen fekszik. A h' -ről h'' -re történő sarjasztás során a t háromszög helyét a $t_0 \cup t_1$ háromszögek veszik át, melyek a következőképpen kaphatók: Legyen $\sigma = \sigma_0 \cup \sigma_1$, ahol $|\sigma_0| = \sigma/2$ és $|\sigma_1| = \sigma/2$. Legyen V_0 a t háromszög σ_0 felőli oldalegyenesének és az $x = h''$ tengelynek metszéspontja, illetve V_1 a t háromszög σ_1 felőli oldalegyenesének és az $x = h''$ tengelynek metszéspontja. Legyen a t_0 háromszög alapja σ_0 , harmadik csúcsa V_0 , és a t_1 háromszög alapja σ_1 , harmadik csúcsa V_1 . Ezzel megkaptunk egy sarjasztást. Definiáljuk a

T_p fát a következőképpen:

Osszuk az x tengelyen fekvő $[\delta, 1]$ intervallumot p egyenlő részre a $h_1 < h_2 < \dots < h_{p-1}$ pontokat beillesztve a $\delta = h_0$ és az $1 = h_p$ pontok közé. Legyen tehát $h_i - h_{i-1} = r/p$ minden $i = 1, \dots, p$ esetén. Most sarjasszuk a Δ háromszöget h_0 -ról h_1 -re két háromszöget létrehozva, majd sarjasszuk ezeket h_1 -ről h_2 -re négy háromszöget létrehozva, és így tovább. Ezen a módon végzett p sarjasztás után keletkező 2^p darab háromszög uniója adja a T_p fát (lásd: 4. ábra).



4. ábra. A T_p fa a $p = 4$ esetben

Ahhoz, hogy belássuk, hogy T_p egy speciális fa, használjunk bináris számrendszert! Minden sarjasztáskor a keletkező új háromszögeket lássuk el a 0 és 1 indexekkel annak megfelelően, melyik háromszöget helyettesítik, az első lépéshez hasonlóan. Tehát Δ -ból kiindulva kapjuk először t_0 -t és t_1 -et, majd $t_{00}, t_{01}, t_{10}, t_{11}$ -et, és így tovább. A P darab sarjasztás után T minden elemi háromszöge előáll t megfelelő indexelésével, ahol az indexek p -hosszú 0-1 sorozatok. Ez a $0, 1, \dots, 2^p - 1$ egész számok bináris reprezentációjának felel meg.

Legyen most a σ alap $m + 1 = 2^p$ részre osztva az y tengelyen: $\sigma_0, \dots, \sigma_m$. Legyenek a V_0, \dots, V_{m+1} pontok növekvő sorrendben az $x = 1$ tengelyen a fa csúcsai. Tehát az $A'B'$ alap 2^p egyenlő részre van osztva, σ_i alapja egy V_i csúcsú háromszögnek minden $i = 0, \dots, m$ esetén. Az osztópontokat C_1, \dots, C_m -nek nevezve láthatjuk, hogy a fák kezdeti bevezetésében szereplő-ekhez hasonló halmazhoz jutottunk. T_p területének meghatározásához egy felső becslést fogunk

alkalmazni.

2.6. Állítás. *Egy sarjasztás során a keletkező többlet-terület legfeljebb $\sigma(h'' - h')^2/h''$.*

Bizonyítás. A keletkező többlet két háromszög uniójának területe (lásd: 5. ábra), ezt fogjuk felülről becsülni. Ehhez szükségünk van a következő lemmára:

Legyen $A'B'$ felezőpontja F , az FV_0 és $B'V_1$ egyenesek metszéspontja G_0 , az FV_1 és $A'V_0$ egyenesek metszéspontja G_1 . Jelölje G_0 $x = h'$ -től való távolságának és G_1 $x = h'$ -től való távolságának nagyobbikát g , feltehető, hogy ez G_0 -nál vétetik fel. (A másik eset teljesen analóg módon bizonyítható.)

2.7. Lemma. $g < h'' - h'$.

Bizonyítás. Legyen az FV_0 és az $x = h'$ egyenesek metszéspontja F_0 , az FV_1 és az $x = h'$ egyenesek metszéspontja F_1 . Ekkor az $A'V_0F$ háromszög hasonló a VV_0F_0 háromszöghöz, illetve a $B'V_1F$ háromszög hasonló a VV_1F_1 háromszöghöz. Így oldalaira és magasságaikra teljesül

$$\frac{\sigma/2}{a} = \frac{h''}{h'' - h'}.$$

Tehát $a = \frac{1}{2}\sigma(h'' - h')/h''$. Az FG_0B' háromszög és az F_0G_0V háromszögek hasonlóak, tehát oldalaira és magasságukra fennáll:

$$\frac{g}{h' - g} = \frac{a}{\sigma/2} = \frac{\sigma(h'' - h')/(2h'')}{\sigma/2} = \frac{h'' - h'}{h''}.$$

Reciprokot véve kapjuk, hogy

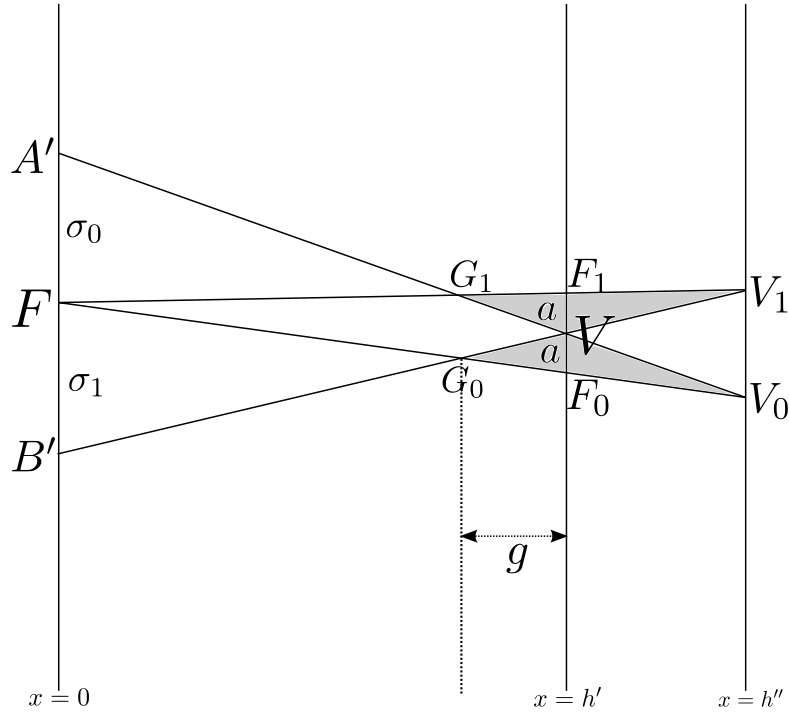
$$\frac{h'}{g} - 1 = \frac{h' - g}{g} = \frac{h''}{h'' - h'} = \frac{h'' - h' + h'}{h'' - h'} = \frac{h'}{h'' - h'} + 1.$$

Ebből következik, hogy $h'/g > h'/(h'' - h')$, tehát $g < h'' - h'$. □

Ebből következően mindkét háromszög területét felülről tudjuk becsülni egyenként két háromszög uniójának területével, melyek alapja a , magassága $h'' - h'$. Tehát egy kis háromszög területe legfeljebb $2a(h'' - h')/2 = a(h'' - h')$. A hasonlóság alapján $a = \frac{1}{2}\sigma(h'' - h')/h''$, tehát a keletkező többlet-terület legfeljebb $2a(h'' - h') = \sigma(h'' - h')^2/h''$. □

Most vizsgáljuk T_p -t! Nem számítjuk a Δ háromszög területét, mert az része $K^{(0)}$ -nak, csak a területnövekedést, ami T_p Δ -ból való növekedése során keletkezik. A sarjasztás k -adik lépésében 2^{k-1} háromszögből sarjad együttesen 2^k háromszög az $x = h_{k-1}$ egyenesről az $x = h_k$ egyenesre. Ezek mindegyikének alapja $\sigma/2^{k-1}$ hosszúságú, tehát $h_k - h_{k-1} = r/p$ és $h_k > \delta$. A 2.6. Állítás szerint ezen lépés minden sarjasztásánál a területnövekedés kisebb, mint

$$\frac{\sigma}{2^{k-1}} \frac{1}{h_k} (h_k - h_{k-1})^2 < \frac{\sigma}{2^{k-1}} \frac{1}{\delta} \frac{r^2}{p^2},$$



5. ábra. Egy sarjasztás

így a 2^{k-1} sarjasztáskor keletkezett összterület-növekedés kisebb, mint

$$2^{k-1} \frac{1}{2^{k-1}} \frac{\sigma r^2}{\delta p^2} = \sigma \frac{r^2}{p^2 \delta}.$$

Adjuk össze a p lépésben keletkező területeket: ez kisebb, mint $\sigma r^2/(p\delta)$, ami nullához tart $p \rightarrow \infty$ esetén.

2.8. *Megjegyzés.* Megfigyelhetjük, hogy mivel $\sigma = |A'B'| = |AB|\delta/r$, és az eredeti J háromszög területe $a = \frac{1}{2}r|AB|$, így becslésünk szemléletesebben kifejezve: a p darab sarjasztáskor keletkező összterület-növekedés kisebb, mint $2a/p$.

2.5. A konstrukció befejezése

Előző fejezetünkben megmutattuk, hogy a konstruált $K^{(0)}$ halmaz lecserélhető a $K^{(1)}$ halmazzal úgy, hogy $K^{(1)}$ területe jelentősen kisebb, mint $K^{(0)}$ területe. Pontosabban, a Δ háromszög még mindig része, de az ezen kívüli terület majdnem r -szeresére csökkent ($r < 1$). A következő lépés még jobban csökkenteni a területet, újra az előző konstrukciót használva. Tekintsük a konstrukció-beli J_1, \dots, J_m kiegészítő háromszögeket. Ezeknek csökkentjük a területét oly módon, hogy minden $i = 1, \dots, m$ esetén J_i -t helyezzük J szerepkörébe. Azaz vezessünk be egy új koordináta-rendszert: $x' := -x + \delta$, $y' := -y$. Így J_i olyan pozícióba kerül, mint amilyenben

az előbbi lépésben J volt. Legyenek az A'_i, B'_i pontok az A', B' pontoknak megfelelően az $A_i C_i$ illetve $B_i C_i$ által meghatározott egyenesek és az $x' = 0$, azaz $x = \delta$ tengelyek metszéspontjai. Legyen a $\Delta_i = A'_i B'_i C_i$ háromszög. Az A'_i és B'_i pontok a T fa derekánál helyezkednek el, és a Δ -nak megfelelő Δ_i a T fa belsejében van.

Alkalmazzuk az előzőekben leírt módszert, és helyettesítsük J_i -t egy T_i fával, ami $x = \delta$ -tól $x = -r$ -ig terjed. Az itt létrejövő kiegészítő háromszögek legyenek J_{i1}, \dots, J_{im_i} , amelyek $x = \delta$ -tól $x = 1$ -ig terjednek. Ezt elvégezzük minden $i = 1, \dots, m$ esetén. Legyen az új Keakeya-részhalmazunk $K^{(2)} = T \cup \left(\bigcup_{i=1}^m T_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^{m_i} J_{ij} \right)$, azaz az eredeti T fa, az új T_i fák, és az új J_{ij} kiegészítő háromszögek uniója. A szakasz mozgása $A'A$ -ból $B'B$ -be $K^{(2)}$ -ben hasonló az előbbieken leírtakhoz, annyiban különbözik, hogy amikor $A_i C_i A'_i$ -ből $B_i C_i B'_i$ -be mozog, nem egyszerűen elfordul C_i körül, hanem a fentiekben leírt mozgást végzi T_i elemi háromszögeit és a J_{ij} kiegészítő háromszögeket használva.

Legyen a_{ij} a J_{ij} kiegészítő háromszögek területe minden $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m_i$ esetén. Az előzőekhez hasonló számolás alapján kapjuk a következő összefüggést:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} = \sum_{i=1}^m r a_i = r^2 a.$$

Az fentiekben leírt T fára vonatkozó számolásokat megismételve látható, hogy a T_i új fák Δ_i háromszögeken kívüli összterülete is tetszőlegesen kicsi lehet. Így $K^{(2)}\Delta$ -n kívüli területe tetszőlegesen közel kerülhet $r^2 a$ -hoz.

Ezt az eljárást végezzük a továbbiakban kellően sokszor, azaz létrehozunk új-generációs fákat, illetve kiegészítő háromszögeket. Nézzük meg, hogy érhető el, hogy az összterület egy tetszőleges adott számnál kisebb legyen.

Legyen $\eta > 0$ adott. A $\Delta \cup J$ halmaz területcsökkentésére leírt konstrukció N -szeri ismétlésével szeretnénk elérni, hogy az összterület kisebb legyen, mint η . A lépés N -szeri ismétlése után kapjuk a $K^{(N)}$ Keakeya-részhalmazt, mely Δ -n kívüli részének területe tetszőlegesen közel van $r^N a$ -hoz. Válasszuk meg N -t oly módon, hogy $r^N a < \eta/2$ teljesüljön. Ez megtehető, hiszen $r < 1$ és $\eta > 0$. Ekkor tehát az utolsó generációs kiegészítő háromszögek területösszege kisebb, mint $\eta/2$. Az N generáció fájának összterületére szeretnénk az $\frac{\eta}{2}$ felső becslést kapni. A 2.8. Megjegyzésünkéből adódóan látható, hogy az n -edik generáció fájának területe legfeljebb $2a^{(n)}/p$, ahol $a^{(n)}$ jelöli az $n - 1$ -edik generációs kiegészítő háromszögek összterületét. Mivel $a^{(n)} \leq a$ minden n esetén, így $p > 4Na/\eta$ választás esetén teljesül, hogy

$$\frac{2 \sum_{n=1}^N a^{(n)}}{p} \leq \frac{2Na}{p} < \frac{\eta}{2}.$$

Ekkor tehát az utolsó generációs kiegészítő háromszögek és a fában történő növekedések területének összege kisebb, mint η .

Legyen most $\eta = \varepsilon/(2Q)$, ahol $\varepsilon > 0$ a tételünkben szereplő adott szám, Q pedig a Π sokszög-tartomány oldalainak száma. Ekkor tehát minden $q = 1, \dots, Q$ esetén a J_q tartományt lecseréltük kiegészítő háromszögekre és fa-növekményekre, melyeknek összterülete kisebb, mint $\varepsilon/(2Q)$. Ekkor tehát $\bigcup_{q=1}^Q J_q$ tartomány lecseréltjének területe kisebb, mint $\varepsilon/2$. Tehát a $K = \bigcup_{q=1}^Q J_q \cup \Pi$ tartomány kiegészítő háromszögek és fa-növekmények segítségével lecsökkentett területe kisebb, mint $\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Az elkészült halmaz a konstrukció alapján tehát Kakeya-halmaz, az egységnyi sugarú körlap belsejében található, és területe kisebb, mint ε . Tételünket tehát beláttuk, konstruáltunk egy Kakeya-halmazt, mely az egység sugarú körben található, és tetszőlegesen kicsi lehet a területe.

3. A gömbi Kakeya-probléma

3.1. Bevezetés

Jelölje $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ az egységgömbfelületet:

$$\Sigma = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} = 1 \right\}.$$

Azt mondjuk, hogy az a ívhosszúságú főkör-ív megfordítható a $K \subset \Sigma$ halmazban, ha van olyan folytonos Σ -beli mozgás, mely a főkör-ívet önmagába viszi úgy, hogy közben 180 fokos fordulatot tesz, azaz ellentétes irányítással érkezik vissza önmagába. Szeretnénk definiálni, mit értünk azon, hogy a főkör-ívek ellentétes irányításúak.

Legyen $F \subset \Sigma$ főkör irányítatlan értelemben, legyenek ezen főkör irányított megfelelői F_1 és F_2 . Először szeretnénk definiálni, mit értünk azon, hogy az F_1, F_2 főkörök ellentétes irányításúak. Legyen $g_1 : [a, b] \rightarrow \Sigma$ folytonos leképezés az $F_1 \subset \Sigma$ főkör paraméterezése, illetve $g_2 : [a, b] \rightarrow \Sigma$ az F_2 főköré, azaz $F_1 = g_1([a, b])$, $F_2 = g_2([a, b])$. Tekintsük az F által meghatározott S síkot, és a főkört paraméterező $g_1 : [a, b] \rightarrow S$, és $g_2 : [a, b] \rightarrow S$ síkgörbékét. Legyen a Σ egységgömb középpontja X , definiáljuk a g_1, g_2 síkgörbék X pontból számított előjeles szögelfordulását.

$$S(g_1, X) = \sum_{i=1}^n \left(\overrightarrow{Xg_1(t_{i-1})} \text{ és } \overrightarrow{Xg_1(t_i)} \text{ előjeles szöge} \right),$$
$$S(g_2, X) = \sum_{i=1}^n \left(\overrightarrow{Xg_2(t_{i-1})} \text{ és } \overrightarrow{Xg_2(t_i)} \text{ előjeles szöge} \right),$$

ahol $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ megfelelően finom felosztás. Könnyen látható, hogy ez az érték vagy 2π , vagy -2π lesz tetszőleges főkörök esetén. Azt mondjuk, hogy az F_1 és az F_2 főkörök ellentétes irányításúak, ha $S(g_1, X) = -S(g_2, X)$.

Legyen most $G \subset \Sigma$ egy tetszőleges főkör-ív. Ekkor létezik pontosan egy olyan F főkör, hogy $G \subset F$. A G főkör-ív irányított megfelelői G_1 és G_2 , ezekhez tartoznak az F főkör F_1 és F_2 irányított megfelelői. Azt mondjuk, hogy a G_1 és G_2 főkörívek ellentétes irányításúak, ha az F_1 és F_2 főkörök ellentétes irányításúak.

3.1. Definíció. Az $a = (a_1, a_2, a_3)$ és $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ vektorok vektoriális szorzata:

$$a \times b := c = (c_1, c_2, c_3), \text{ ahol } c_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \ c_2 = a_3b_1 - a_1b_3, \ c_3 = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Teljesül, hogy $|a \times b| = |a||b| \sin \alpha$, ahol α jelöli az a, b vektorok által bezárt szöget. Az $a \times b = c$ vektor merőleges az a, b vektorok által kifeszített síkra, és az a, b, c vektorok ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak.

3.2. Definíció. Legyen $M : [0, 1] \times \Sigma \rightarrow \Sigma$ folytonos leképezés, melyre teljesül, hogy minden rögzített $t \in [0, 1]$ esetén $M(t) : \Sigma \rightarrow \Sigma$ egybevágóság, és $M(0) = \text{id}_\Sigma$. Ekkor M -et folytonos elmozgatásnak nevezzük a gömbfelületen.

3.3. Definíció. Legyen $K \subset \Sigma$ halmaz, és legyen $G \subset K$ főkör-ív. Azt mondjuk, hogy a K halmaz gömbi Kakeya-halmaz, ha létezik olyan $\{M(t) \mid t \in [0, 1]\}$ folytonos mozgatás a gömbfelületen, hogy $M(t)(G) \subset K$ minden $t \in [0, 1]$ esetén, $M(1)(G) = G$, valamint a G és az $M(1)(G)$ főkörívek ellentétes irányításúak.

A kérdésfelvetés a következő: Tekintsünk Σ -n egy a ívhosszúságú főkör-ívet. Mekkora a legnagyobb alsó korlátja azon $K \subset \Sigma$ gömbi Kakeya-halmazok területének, melyekben az a hosszúságú ív megfordítható? Az ilyen tulajdonságú $K \subset \Sigma$ halmazokat a ívhosszúságú főkör-ívhez tartozó gömbi Kakeya-halmaznak is nevezzük.

3.4. Tétel. *Legyen k_a a legnagyobb alsó korlátja az a hosszúságú főkör-ívhez tartozó gömbi Kakeya-halmazok területének. Ekkor*

$$k_a = \begin{cases} 0 & \text{ha } a < \pi \\ 2\pi & \text{ha } \pi \leq a < 2\pi \\ 4\pi & \text{ha } a = 2\pi, \end{cases}$$

egyenlőség csak az $a = \pi$ és $a = 2\pi$ esetekben fordul elő.

3.2. Az $a = 2\pi$ és az $a = \pi$ esetek bemutatása

Tekintsük először az $a = 2\pi$ esetet. Legyen tehát $F \subset \Sigma$ főkör, ennek irányított megfelelője F_1 . Tegyük fel, hogy létezik olyan M mozgatás, hogy az általa súrolt terület kisebb, mint 4π , és $M(0)(F) = F$, $M(1)(F) = F$, valamint az F és $M(1)(F)$ főkörívek ellentétes irányításúak. Legyen az $M(1)(F)$ főkör irányított megfelelője F_2 . Legyen Σ középpontja X . Jelöljük ki F_1 -nek két pontját, P -t és Q -t úgy, hogy a $p := \overrightarrow{XP}$ és $q := \overrightarrow{XQ}$ vektorokra teljesüljön, hogy a p, q vektorok előjeles szöge $\pi/2$ legyen. Tekintsük a p és q pontok vektoriális szorzatát: $r := p \times q$. Mivel a p, q vektorok merőleges egységvektorok, ezért teljesül, hogy $|r| = 1$, tehát $r \in \Sigma$. Az r vektor Σ -n lévő csúcsát jelölje R .

Mivel a feltétel szerint a súrolt terület kisebb, mint 4π , ezért van olyan A pontja a gömbfelületnek, amit a mozgatás nem érint. Tekintsük az $M(t)(F_1)$ főkör által meghatározott S_t síkot minden $t \in [0, 1]$ esetén. A feltétel szerint tehát az A pont minden $t \in [0, 1]$ esetén az S_t által meghatározott valamelyik féltérben van, sőt az S_t síkon. Tekintsük a P, Q, R pontok M mozgatás általi képeit: Legyen $P_t := M(t)(P)$, $Q_t := M(t)(Q)$, $R_t := M(t)(R)$ minden $t \in [0, 1]$ esetén. Meggondolható, hogy az F_{t_1} és F_{t_2} (ugyanazt a síkot meghatározó) főkörök

pontosan akkor ellentétes irányításúak, ha az egyes főkörökhöz tartozó R_{t_1}, R_{t_2} pontokra teljesül, hogy vagy R_{t_1} esik az A ponttal azonos féltérbe, és R_{t_2} az A ponttal ellentétes féltérbe, vagy fordítva. Tegyük fel, hogy F_1 kezdőállapotában az A pont és az R_0 pont az S_0 sík által meghatározott ugyanazon féltérbe esnek. Mivel az M mozgás folytonos, és nem érinti az A pontot, ezért teljesül, hogy tetszőleges $t_1, t_2 \in [0, 1]$ esetén, melyekre $M(t_1)(F_1)$ és $M(t_2)(F_1)$ főkörök közel vannak egymáshoz, akkor ha az R_{t_1} és A pontok az S_{t_1} sík által meghatározott ugyanazon féltérbe esnek, akkor az R_{t_2} és A pontok is az S_{t_2} sík által meghatározott ugyanazon féltérbe fognak esni. Ez azt jelenti, hogy minden $t \in [0, 1]$ esetén az A és R_t pontok S_t síkhoz viszonyított elhelyezkedése ugyanolyan, mint a $t = 0$ esetben. Tehát minden $t \in [0, 1]$ esetén az R_t és A pontok az S_t sík által meghatározott ugyanazon féltérbe esnek. Ekkor ez a $t = 1$ esetben is teljesül, tehát az R_1 és A pontok az $S_1 = S_0$ sík által meghatározott ugyanazon féltérbe esnek. Ez azonban azt jelenti, hogy az F_1 és F_2 főkörök irányítása megegyezik, ellentmondás.

A teljes gömbfelületen pedig megfordítható a főkör, mégpedig egy tetszőleges pontja körüli forgatással. Tehát $a = 2\pi$ esetén $k_a = 4\pi$.

Az $a = \pi$ eset könnyen visszavezethető erre. Tehát célunk a π hosszúságú félkör-ív megfordítása a gömbfelületen. Tegyük fel, hogy ezt meg tudjuk tenni egy K halmazban. Legyen K' a K halmaz antipodális halmaza. A félkör mozgása a K halmazban indukálja az antipodálisának mozgását K' -ben. Ezek együtt egy körvonalat alkotnak, ez a körvonal megfordítható a $K' \cup K$ halmazban. Ekkor az előbbi eset szerint a $K' \cup K$ halmaz területe legalább 4π , azaz $K' \cup K$ az egész gömbfelület. Mivel K' és K egybevágóak, mindkettő területe legalább 2π . Tehát $k_\pi \geq 2\pi$. A félkörív megfordítása meg is tud valósulni egy 2π területű halmazon, a felezőpontja körüli megforgatással. (Egy gömbi főkör-ív felezőpontján azt a pontot értem, mely a főkör ívhosszáat két egyenlő ívhosszúságú részre osztja.) Ezzel tehát beláttuk, hogy $a = \pi$ esetén $k_a = 2\pi$.

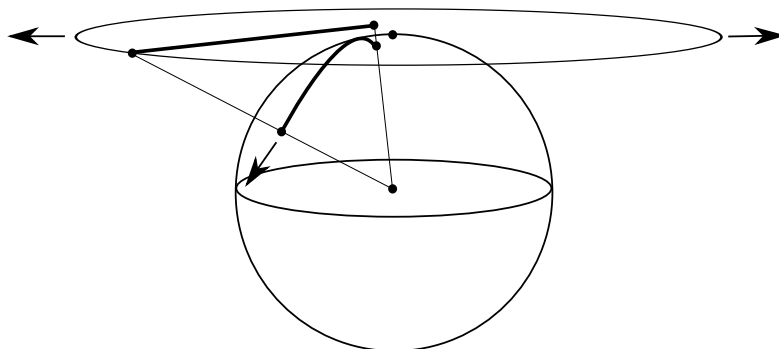
3.3. Az $a < \pi/2$ eset bemutatása

A következő lépésben az $0 < a_1 < \pi/2$ hosszúságú ívekhez fogunk Takeya-halmazokat gyártani. Tehát legyen adott $\varepsilon_1 > 0$ tetszőlegesen kicsi szám, $0 < a_1 < \pi/2$ ívhosszúságú főkör-ív a gömbfelületen. Cél: létrehozni egy K_1 gömbi Takeya-halmazt, melyben az a_1 hosszúságú főkör-ív megfordítható, és a területe kisebb, mint ε_1 .

Készítsünk el egy K síkbeli Takeya-halmazt az előző fejezetben leírtak szerint. A megfordítandó szakasz hosszúsága legyen a (egység helyett egy nagy a szám), a konstrukció szerint K része az a sugarú körlapnak. Legyen a körlap középpontja O .

Helyezzük most az egységgömböt a síkhoz úgy, hogy az egységgömb északi pólusa O -ban érintkezzen a síkkal. Legyen az egységgömb középpontja C . A C pontból való középpontos vetítéssel vetítsük le a síkot az északi félgömbre, legyen a K Takeya-halmaz képe K_1 a gömb-

felületen. Mivel a projekció nem növeli a területet, ezért K_1 területe is kisebb, mint ε_1 . A vetítés a sík egyeneseit a gömbi főkörökbe viszi, az összes K -beli szakasz-pozíciónak megfelel egy ív-pozíció K_1 -ben (lásd: 6. ábra).



6. ábra. Vetítés a gömbfelületre

A nehézséget az okozza, hogy a vetítéskor kapott főkör-ívek különböző hosszúságúak lehetnek, ezen hosszúságok kiszámítása hosszadalmas lenne. Ezt kiküszöbölendő gondoljuk meg a következőt. A K síkbeli Minkowski-halmazban a szakasz-pozíciók mindegyike olyan, hogy a szakaszok egyik vége tetszőlegesen közel lehet az O középponthoz: a konstrukcióbeli sokszögtartományt megfelelően kicsire választva elérhetjük a kívánt eredményt. Ekkor ha a síkbeli K Minkowski-halmazhoz tartozó a szakaszhosszúságot megfelelően nagyra választjuk, akkor a gömbi Minkowski-halmazhoz tartozó a' ívhosszúságok mindegyike megközelíti $\pi/2$ -t. Ekkor tehát a K_1 halmaz ezen a' ívhosszúságok legkisebbikének megfelelő Minkowski-halmaz lesz. Tehát adott $a_1 < \pi/2$ esetén létezik a' , hogy $a_1 < a' < \pi/2$, és K_1 Minkowski-halmaz, melyben az a' hosszúságú ív, így az a_1 hosszúságú ív is megfordítható, területe kisebb, mint ε_1 . Tehát teljesül, hogy $a_1 < \pi/2$ esetén $k_{a_1} = 0$.

3.4. Az $\pi/2 \leq a < \pi$ eset bemutatása

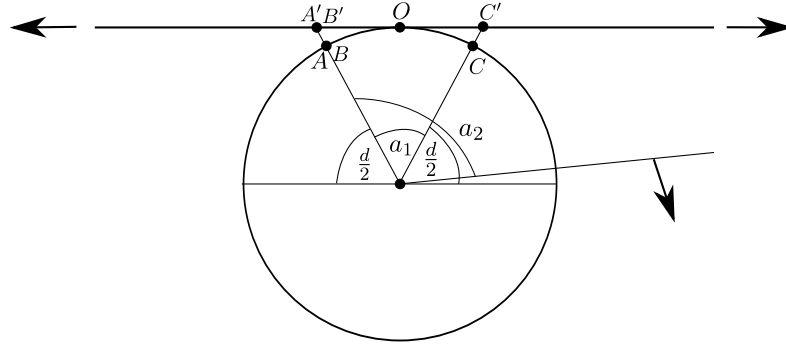
A következő lépés az lesz, hogy megmutatjuk, hogyan kell felnagyítani egy adott gömbi Minkowski-halmazt, hogy egy nagyobb hosszúságú főkör-ívhez tartozó Minkowski-halmazt kaphassunk. Legyen $a_1 = \pi - d < \pi/2$. Legyen $\varepsilon_1 > 0$ adott, és K_1 az előző eljárás alapján az a_1 -hez gyártott Minkowski-halmaz, melynek területe kisebb, mint ε_1 . Legyen $\varepsilon_2 > 0$ adott. Konstruálunk egy K_2 Minkowski-halmazt, melyben egy a_2 hosszúságú főkör-ív megfordítható, és területe kisebb, mint $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Belátjuk, hogy megfelelő K_2 halmaz konstruálásával egy megközelítőleg $\pi - d/2$ hosszúságú főkör-ívet is meg tudunk fordítani.

Kihasználjuk, hogy a K síkbeli Minkowski-halmaz konstrukciójából adódóan véges sok nagyon keskeny, a magasságú háromszögből áll, és a szakasz mozgása ezen háromszögek hosszabbik

oldalai közti forgatásokból áll. (A többgenerációs fákat alkotó keskeny háromszögekből, illetve az utolsó generációs kiegészítő háromszögekből, melyek magassága ugyan kisebb, de ezekben a mozgás az eredeti kis háromszög belsejét is érintve történik.) Feltehetjük tehát, hogy a gömbi Kakeya-halmazunk n darab, nagyon keskeny, a_1 magasságú gömbi háromszögből áll, melyekben a főkör-ív mozgása a hosszabbik oldalak közti forgatásokból áll. Célunk az, hogy megnöveljünk minden ilyen kis háromszöget úgy, hogy a területnövekedés legfeljebb ε_2/n legyen, és a keletkező, megnövelt halmazban egy nagyobb, a_2 hosszúságú ív legyen folytonosan mozgatható kis területet súrolva ugyanazon főkör-oldalak között.

Legyen tehát egy ilyen gömbi háromszög a következő: Csúcsai legyenek A, B, C , az AB ív szolgál a keskeny alapul, BC és AC oldalak hosszúak. Legyen a háromszög C -hez tartozó súlyvonalának felezőpontja O . (A gömbháromszög súlyvonalán azt a főkör-ívet értem, mely az alap felezőpontját a C csúccsal összeköti.) Legyen most az egységgömb északi pólusa az O pont. Helyezzünk egy síkot az egységgömbhöz úgy, hogy ebben az O pontban érintsék egymást. Az egységgömb középpontjából való középpontos vetítés segítségével vetítsük most az ABC gömbi háromszöget a síkra. A kapott síkbeli háromszög legyen $A'B'C'$. Könnyen belátható, hogy a háromszög C' csúcshoz tartozó súlyvonalának felezőpontja O . Tekintsünk most erre az $A'B'C'$ háromszögre és az O pontra úgy, hogy az O pont egy nagy r sugarú kör középpontja, a háromszög a megfelelő (nem feltétlenül szabályos) sokszög-mag-tartomány egy kis háromszöge. Végezzük el a Cunningham-konstrukciót az $A'B'C'$ háromszögből, mint Δ -ból kiindulva. Az $A'C'$ és a $B'C'$ oldalakat a C' csúcson keresztül az r sugarú kör körvonaláig meghosszabbítva kapjuk a J -nek megfelelő háromszöget. Készítsük el a többgenerációs fákból és az utolsó generációs kiegészítő háromszögekből álló K' tartományt, melyben az a hosszúságú szakasz elmozgatható az $A'C'$ által meghatározott egyenestől a $B'C'$ által meghatározott egyenesig. A konstrukcióból adódóan a keletkező K' halmaz területe tetszőlegesen kicsivel haladja csak meg az $A'B'C'$ háromszög területét. Most vetítsük vissza a K' halmazt a gömbfelületre. Legyen a vetület K , ezzel felnagyítottuk az ABC háromszöget. A mozgás K -ban is az AC által meghatározott főkörtől a BC által meghatározott főkörig történik. A K halmaz területe tetszőlegesen kicsivel haladja csak meg az ABC gömbháromszög területét, legyen ez a többlet-terület kisebb, mint ε_2/n . A K' síkbeli halmaz a konstrukcióból adódóan olyan, hogy a benne szereplő szakaszpozíciók mindegyike közel van a C' csúcshoz tartozó súlyvonalhoz, valamint a szereplő szakaszok hosszúsága eléri r -et vagy az $A'B'$ alaptól jobbra, vagy a C' csúcstól balra (a többgenerációs fákat alkotó háromszögekben, vagy az utolsó generációs kiegészítő háromszögekben). Ekkor az r hosszúságú szakasz vetítésekor keletkező a_2 főkör-ív hosszúságok megfelelően nagy r választása esetén tetszőlegesen megközelítik az $a_1 + d/2 = \pi - d/2$ hosszúságot (lásd: 7. ábra).

Most belátjuk, hogy $a < \pi$ esetén $k_a = 0$. Legyen adott $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi szám.



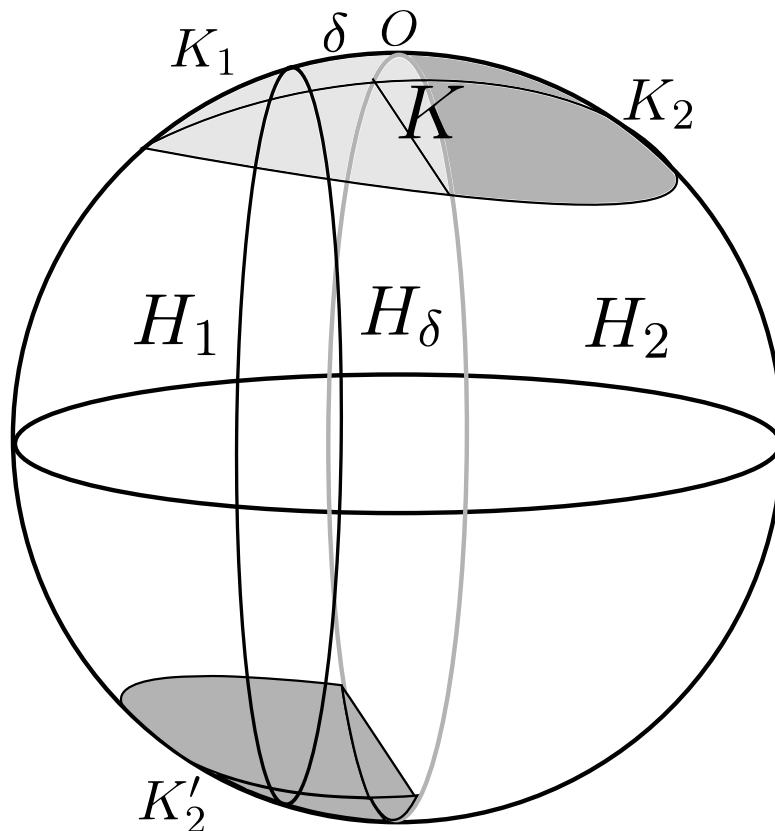
7. ábra. Az ívhossz növelése megközelítőleg $d/2$ -vel

Alkalmazzuk az első lépésben leírtakat $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ -vel, azaz hozzunk létre egy $a_1 = \pi - d < \pi/2$ hosszúságú ívhez tartozó K_1 Kakeya-halmazt, melynek területe kisebb, mint $\varepsilon/2$. Most ismételjük a második lépést többször egymás után $\varepsilon_2 = \varepsilon/4$, $\varepsilon_3 = \varepsilon/8, \dots$ választással, így létrehozunk a K_2, K_3, \dots halmazokat. Minden $n = 1, 2, \dots$ esetén K_n gömbi Kakeya-halmaz, melynek területe kisebb, mint $\varepsilon/2^n$, és megfordítható benne egy megközelítőleg $\pi - d/2^n = a_n$ ívhosszúságú főkör-ív. Megfigyelhető, hogy $n \rightarrow \infty$ esetén $a_n \rightarrow \pi$, így létezik olyan n_0 index, hogy $a < a_{n_0} < \pi$. Ekkor K_{n_0} megfelelő Kakeya-halmaz az a hosszúságú ív számára, azaz a K_{n_0} halmazban megfordítható az a ívhosszúságú főkör-ív, és területe kisebb, mint ε . Tehát beláttuk, hogy $a < \pi$ esetén $k_a = 0$.

3.5. Az $\pi < a < 2\pi$ eset bemutatása

Tekintsük most az $\pi < a < 2\pi$ esetet. Legyen $b = a - \pi$, így $0 < b < \pi$. Adott $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi szám. Az előbbi konstrukcióban leírtak szerint létezik olyan K gömbi Kakeya-halmaz, melyben a b hosszúságú főkör-ív megfordítható, és területe kisebb, mint $\varepsilon/2$. Célunk, hogy K segítségével készítsünk egy $a = b + \pi$ -hez tartozó K' Kakeya-halmazt, melynek területe kisebb, mint $2\pi + \varepsilon$. A síkbeli Cunningham-konstrukciót megfigyelve látható, hogy az eredeti síkbeli Kakeya-halmaz sokszögmag-tartományának O középpontja olyan, hogy a szakasz-pozíciók mindegyike O ponthoz tetszőlegesen közel marad. Az előző lépésben a Kakeya-halmazokat alkotó keskeny háromszögeket is lecseréltük fák, és kiegészítő háromszögek uniójára, de ezen új, hosszabb szakasz-pozíciókra is teljesül, hogy valamelyik végük az O középponthez tetszőlegesen közel lesz a sokszögmag-tartományt megfelelően kicsire választva. A vetítés nem növeli a távolságot, ebből következően létezik a gömbi Kakeya-halmaznak egy olyan O középpontja, hogy az ív-pozíciók mindegyike az O ponthoz δ -nál közelebb marad, és ez a δ távolság tetszőlegesen kicsire választható. Vágjuk ketté az egységgömböt az O északi póluson átmenő tetszőleges főkör segítségével a H_1, H_2 részekre. Legyen H_δ azon tartomány, amit úgy kapunk, hogy a H_2 félgömb

határához hozzáragasztunk egy δ szélességű szalagot a gömbfelületen. Válasszuk meg δ -t olyan kicsire, hogy a szalag területe kisebb legyen, mint $\varepsilon/2$. Legyen $K_1 = K \cap H_1, K_2 = K \cap H_2$. Legyen K'_2 a K_2 halmaz antipodális halmaza. Legyen $L = K_1 \cup H_\delta \cup K'_2$ (lásd: 8. ábra). Az L halmaz területe kisebb, mint a K_1, H_δ, K'_2 halmazok területének összege, tehát kisebb, mint $2\pi + \varepsilon$.



8. ábra. Az L halmaz megkonstruálása

3.5. Állítás. *Az L halmazban megfordítható az $a = \pi + b$ hosszúságú főkör-ív.*

Bizonyítás. Az eredeti K halmazban a b hosszúságú ív összes pozíciójának meg tudjuk feleltetni az a hosszúságú ív egy pozícióját L -ben a következőképpen. Ha valamely eredeti b hosszúságú ív-pozíciót a két félgömb kettévágta, akkor tekintsük a pozíció K_1 -beli részét, valamint a K_2 -beli résznek megfelelő antipodális K'_2 -ben. Kössük össze ezeket az íveket egy π hosszúságú ívvel a H_2 félgömbön belül. Az antipodális halmaz tulajdonságai miatt ez megtehető. Így minden ilyen pozíciónak megfeleltettünk egy $a = b + \pi$ hosszúságú ívet. Amennyiben valamely eredeti b hosszúságú ív-pozíció teljes egészében a H_1 tartományba esik, akkor az O ponthoz közelebbi végéhez illesszünk egy π hosszúságú félkör-ívet. Mivel K -ban minden szakasz-pozíció

az O ponthoz δ -nál közelebb van, ezért a hozzáragasztott félkör-ív a H_δ tartományon belül lesz. Így a teljes $a = b + \pi$ hosszúságú ív ebben az esetben is az L tartományon belül lesz. Ha valamely eredeti b hosszúságú ív-pozíció teljes egészében a H_2 tartományba esik, akkor ezt az antipodálisban tekintve teljes mértékben a K'_2 halmazba fog esni. Legyen az O pont antipodálisa O' . Ragasszunk az ív O' ponthoz közelebbi végéhez egy π hosszúságú félkör-ívet. Az antipodális tulajdonságai miatt teljesül, hogy K'_2 -ben minden szakasz-pozíció az O' ponthoz δ -nál közelebb van, ezért itt is teljesül, hogy a hozzáragasztott félkör-ív a H_δ tartományon belül lesz. Tehát a teljes $a = b + \pi$ hosszúságú ív ebben az esetben is az L tartományon belül lesz. Tehát mindhárom esetben a b hosszúságú ív mozgása indukálja az a hosszúságú ív L tartományon belüli mozgását, vagyis az L halmazban megfordítható a b hosszúságú főkör-ív. Állításunkat tehát beláttuk. \square

Az L tartomány területe kisebb, mint $2\pi + \varepsilon$, tehát beláttuk, hogy $\pi < a < 2\pi$ esetén $k_a \leq 2\pi$. Könnyen látható, hogy $k_a < 2\pi$ nem lehet, hiszen tegyük fel, hogy van egy olyan gömbi Kakeya-halmaz, melyben az $a > \pi$ hosszúságú ív megfordítható, és a területe kisebb, mint 2π . Ekkor azonban a π hosszúságú ív is megfordítható benne, de már beláttuk, hogy $k_\pi = 2\pi$, ellentmondás. Tehát $\pi < a < 2\pi$ esetén $k_a = 2\pi$.

Ezzel tehát beláttuk a gömbi Kakeya-halmazokra vonatkozó tételt.

4. Tétel egyszerű ívekre

4.1. Definíciók, lemmák

4.1. Definíció. Az $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ nem-üres halmazok távolsága:

$$d(X, Y) := \inf_{x \in X, y \in Y} |x - y|.$$

4.2. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz ε sugarú környezete:

$$U(X, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid d(z, X) \leq \varepsilon\}.$$

4.3. Definíció. Az $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt halmazok Hausdorff-távolsága:

$$d_H(X, Y) = \inf \{\varepsilon > 0 \mid X \subseteq U(Y, \varepsilon), Y \subseteq U(X, \varepsilon)\} = \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} |x - y|, \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} |x - y| \right\}.$$

4.4. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy tetszőleges $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt halmazok esetén

$$d(X, Y) \leq d_H(X, Y).$$

4.5. Definíció. Legyen $M : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos leképezés, melyre teljesül, hogy minden rögzített $t \in [0, 1]$ esetén $M(t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ síkbeli egybevágóság, és $M(0) = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$. Ekkor M -et folytonos síkbeli elmozgatásnak nevezzük.

4.6. Definíció. Legyen $\{E_i \mid i \in I\}$ síkbeli egybevágóságok sorozata. Azt mondjuk, hogy $\{E_i \mid i \in I\}$ korlátos, ha létezik olyan K valós szám, hogy $\forall i \in I$ esetén $|E_i(0)| \leq K$.

4.7. Definíció. Legyen $\{E_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ síkbeli egybevágóságok sorozata. Azt mondjuk, hogy E_n konvergens és a határértéke E , ha $\forall x \in \mathbb{R}^2$ esetén $E_n(x) \rightarrow E(x)$ ($n \rightarrow \infty$).

4.8. Lemma. Legyen $\{E_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ irányítástartó síkbeli egybevágóságok korlátos sorozata. Ekkor E_n -ből kiválasztható konvergens részsorozat: $E_{n_k} \rightarrow E$ ($k \rightarrow \infty$).

Bizonyítás. E_n irányítástartó síkbeli egybevágóságsorozat, tehát előáll $E_n = T_{v_n} \circ O_n$ alakban, ahol T_{v_n} egy v_n vektorral való eltolás, O_n ortogonális transzformáció minden $n = 1, 2, \dots$ esetén. Teljesül a következő:

$$E_n(0) = T_{v_n} \circ O_n(0) = T_{v_n}(0) = v_n.$$

$\{E_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ korlátos, tehát $\exists K$, hogy $|E_n(0)| \leq K$ minden $n = 1, 2, \dots$ esetén, azaz $|v_n| \leq K$, azaz a v_n sorozat korlátos. Tehát a Bolzano-Weierstrass-tétel szerint kiválasztható belőle konvergens részsorozat. Egy konvergens részsorozat kiválasztása után feltehetjük, hogy $v_n \rightarrow v$. Tekintsük most az O_n ortogonális transzformációk sorozatát.

$$O_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_n & -\sin \alpha_n \\ \sin \alpha_n & \cos \alpha_n \end{pmatrix},$$

ahol a következők igazak: $a_n^2 + b_n^2 = 1$, $c_n^2 + d_n^2 = 1$, $a_n c_n + b_n d_n = 0$. Tehát teljesül az is, hogy $|a_n| \leq 1$, $|b_n| \leq 1$, $|c_n| \leq 1$, $|d_n| \leq 1$. Tehát az a_n, b_n, c_n, d_n sorozatok korlátosak, így kiválasztható belőlük konvergens részsorozat: $a_{n_k} \rightarrow a, b_{n_k} \rightarrow b, c_{n_k} \rightarrow c, d_{n_k} \rightarrow d$. A határértékekre is teljesül, hogy $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$, azaz a belőlük gyártott mátrix is ortogonális. Legyen

$$O_{n_k} = \begin{pmatrix} a_{n_k} & b_{n_k} \\ c_{n_k} & d_{n_k} \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$E_{n_k} = T_{v_{n_k}} \circ O_{n_k}, \text{ és } E = T_v \circ O.$$

Belátjuk, hogy $E_{n_k} \rightarrow E$. Valóban,

$$E_{n_k}(x) = T_{v_{n_k}} \circ O_{n_k}(x) = T_{v_{n_k}}((a_{n_k}x_1 + b_{n_k}x_2, c_{n_k}x_1 + d_{n_k}x_2)),$$

ahol $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$(a_{n_k}x_1 + b_{n_k}x_2, c_{n_k}x_1 + d_{n_k}x_2) \rightarrow (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) = O(x) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Tehát

$$T_{v_{n_k}} \circ O_{n_k}(x) \rightarrow T_v \circ O(x).$$

Tehát $E_{n_k}(x) \rightarrow E(x)$ minden $x \in \mathbb{R}^2$ esetén, tehát $E_{n_k} \rightarrow E$ teljesül.

Tehát kiválasztottunk E_n -ből egy $E_{n_k} \rightarrow E$ konvergens részsorozatot. \square

4.9. Lemma. *Legyen $\{E_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ irányítástartó egybevágóságok sorozata. Ha $E_n \rightarrow E$, akkor $E_n^{-1} \rightarrow E^{-1}$.*

Bizonyítás. E_n irányítástartó síkbeli egybevágóságsorozat, tehát előáll $E_n = T_{v_n} \circ O_n$ alakban, ahol T_{v_n} egy v_n vektorral való eltolás, O_n ortogonális transzformáció minden $n = 1, 2, \dots$ esetén. A feltétel szerint $T_{v_n} \circ O_n = E_n \rightarrow E = T \circ O$. Az előző lemma bizonyításában szereplő lépéseket felhasználva láthatjuk, hogy az egybevágóságok konvergenciája a következőnek felel meg:

$$O_n = \begin{pmatrix} \cos \alpha_n & -\sin \alpha_n \\ \sin \alpha_n & \cos \alpha_n \end{pmatrix} \rightarrow O = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

és

$$T_{v_n} \rightarrow T_v.$$

Teljesül, hogy $E_n^{-1} = O_n^{-1} \circ T_{v_n}^{-1}$.

$$O_n^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_n & \sin \alpha_n \\ -\sin \alpha_n & \cos \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha_n) & -\sin(-\alpha_n) \\ \sin(-\alpha_n) & \cos(-\alpha_n) \end{pmatrix},$$

$$O^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix},$$

$$T_{v_n}^{-1} = T_{-v_n} \text{ és } T_v^{-1} = T_{-v}.$$

Ekkor teljesül, hogy

$$O_n^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha_n) & -\sin(-\alpha_n) \\ \sin(-\alpha_n) & \cos(-\alpha_n) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = O^{-1}.$$

és

$$T_{v_n}^{-1} = T_{-v_n} \rightarrow T_{-v} = T_v^{-1}$$

Tehát teljesül, hogy $E_n^{-1} = O_n^{-1} \circ T_{v_n}^{-1} \rightarrow O^{-1} \circ T_v^{-1} = E^{-1}$. □

4.10. Lemma. *Legyenek $K, L \subseteq \mathbb{R}^2$ nemüres, kompakt halmazok, és legyen E_n egybevágóságok egy konvergens sorozata. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E$, akkor $d_H(E(K), L) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_H(E_n(K), L)$.*

Bizonyítás. Mivel E, E_n egybevágóságok minden $n = 1, 2, \dots$ esetén, ezért teljesül:

$$\begin{aligned} d_H(E(K), L) &= \max\left\{ \sup_{z \in E(K)} \inf_{y \in L} |z - y|, \sup_{y \in L} \inf_{z \in E(K)} |z - y| \right\} = \\ &= \max\left\{ \sup_{x \in K} \inf_{y \in L} |E(x) - y|, \sup_{y \in L} \inf_{x \in K} |E(x) - y| \right\} = \\ &= \max\left\{ \sup_{x \in K} \inf_{y \in L} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) - y \right|, \sup_{y \in L} \inf_{x \in K} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) - y \right| \right\} = \\ &= \max\left\{ \sup_{x \in K} \inf_{y \in L} \lim_{n \rightarrow \infty} |E_n(x) - y|, \sup_{y \in L} \inf_{x \in K} \lim_{n \rightarrow \infty} |E_n(x) - y| \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max\left\{ \sup_{x \in K} \inf_{y \in L} |E_n(x) - y|, \sup_{y \in L} \inf_{x \in K} |E_n(x) - y| \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max\left\{ \sup_{z \in E_n(K)} \inf_{y \in L} |z - y|, \sup_{y \in L} \inf_{z \in E_n(K)} |z - y| \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_H(E_n(K), L). \end{aligned}$$

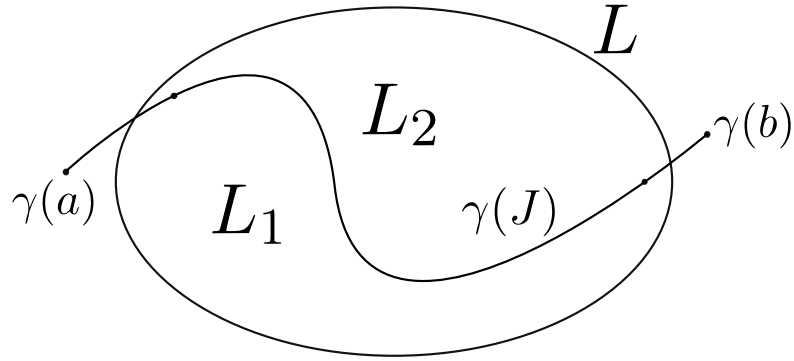
□

4.2. A tétel kimondása, a bizonyítás alapja

4.11. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz egyszerű ív, ha van olyan $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos és egy-egyértelmű leképezés, amelyre $H = \gamma(I)$.

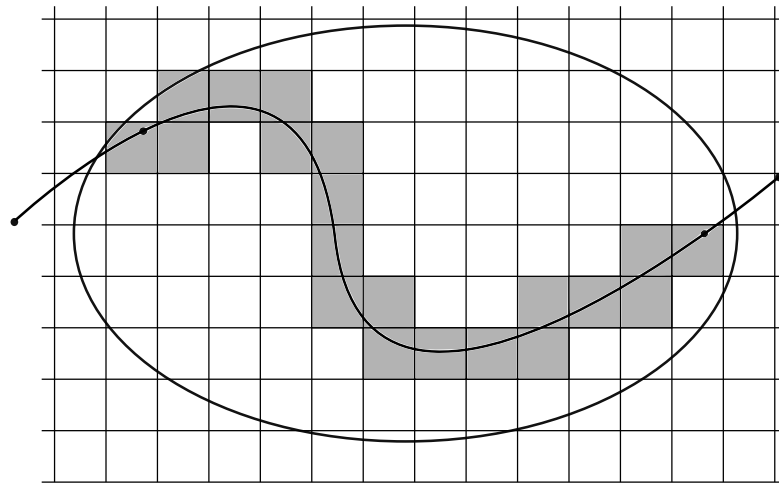
4.12. Tétel. *Legyen $\gamma(I)$ egyszerű ív, $r > 0$ olyan valós szám, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan M_ε folytonos síkbeli elmozgatás, hogy $d_H(M_\varepsilon(1)(\gamma(I)), \gamma(I)) \geq r$, és a mozgatás által súrolt terület kisebb, mint ε . Ekkor az egyszerű ív szakasz vagy körív.*

Legyen $J \subset I$ zárt részintervallum, $a, b \notin J$. Legyen $L \subset \mathbb{R}^2$ egy olyan Jordan-tartomány, amely lefedi $\gamma(J)$ -t, de nem tartalmazza a $\gamma(a), \gamma(b)$ végpontokat, és az egyszerű ív a tartományt pontosan két komponensre osztja: L_1, L_2 (lásd: 9. ábra). Ilyen tartomány létezése következik a Jordan-görbetétellel kapcsolatos síktopológiai tételekből.



9. ábra. A kiinduló állapot

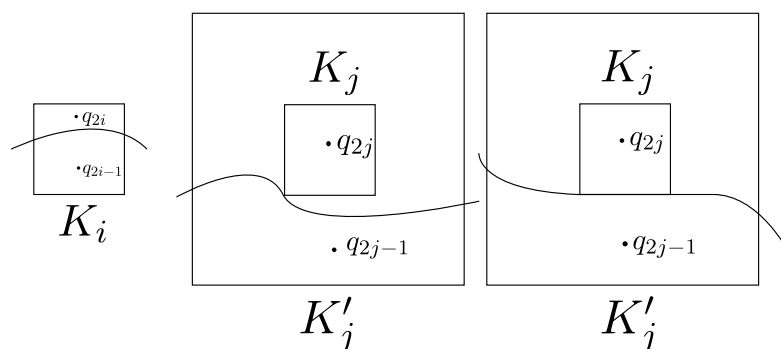
Legyen $r_L := \min\{r, d(\gamma(J), \mathbb{R}^2 \setminus L) / 2\}$. Legyen most $\varepsilon > 0$ rögzített, melyre teljesül, hogy $\varepsilon < d(\gamma(J), \mathbb{R}^2 \setminus L) / 4$. Célunk az lesz, hogy felvegyünk $\gamma(J)$ közelében L mindkét komponensében véges sok pontot, és ezek segítségével találjunk úgynevezett blokkolópontokat, azaz olyan pontokat, amelyeket az egyszerű ív mozgatása során nem érintünk. Tehát vegyük fel a q_1, \dots, q_{2n} pontokat úgy, hogy $q_1, q_3, \dots, q_{2n-1} \in L_1$, és $q_2, q_4, \dots, q_{2n} \in L_2$ teljesüljön, a következő módon (lásd:10. ábra):



10. ábra. Négyzetrácssháló felvétele

Fedjük le az L alakzatot egy négyzetrácsshálóval, melyben a négyzetek átlója $\varepsilon/3$ nagyságú. Tekintsük azokat a K_1, \dots, K_n négyzeteket, melyekre $K_i \cap \gamma(J) \neq \emptyset$ ($i = 1, \dots, n$). Amennyi-

ben az egyszerű ív metszi a K_i négyzet belsejét, akkor legalább két komponensre bontja azt, ezekből kiválasztunk két olyan pontot, melyek egyike L_1 -nak, másika L_2 -nek része. Válasszuk ki $K_i \cap L_1$ -ből a q_{2i-1} , illetve $K_i \cap L_2$ -ből a q_{2i} pontokat. Amennyiben az egyszerű ív nem metszi a K_j négyzet belsejét (csak a határát), akkor növeljük meg a négyzetet a középpontjából háromszorosára. Így egy ε átlójú K'_j négyzetet kapunk. K'_j -re teljesül, hogy $\gamma(I)$ legalább két komponensre bontja, tehát az előbbi gondolatmenet szerint kiválaszthatunk $q_{2j-1} \in K'_j \cap L_1$, $q_{2j} \in K'_j \cap L_2$ pontokat (lásd: 11. ábra). Ekkor minden $i = 1, \dots, 2n$ esetén teljesül, hogy a q_i pontok a $\gamma(J)$ ív ε sugarú környezetében vannak, valamint minden $c \in \gamma(J)$ ponthoz van olyan q_{2i-1} és q_{2i} , $i \in \{1, \dots, n\}$, hogy $|c - q_{2i-1}| \leq \varepsilon$, $|c - q_{2i}| \leq \varepsilon$.



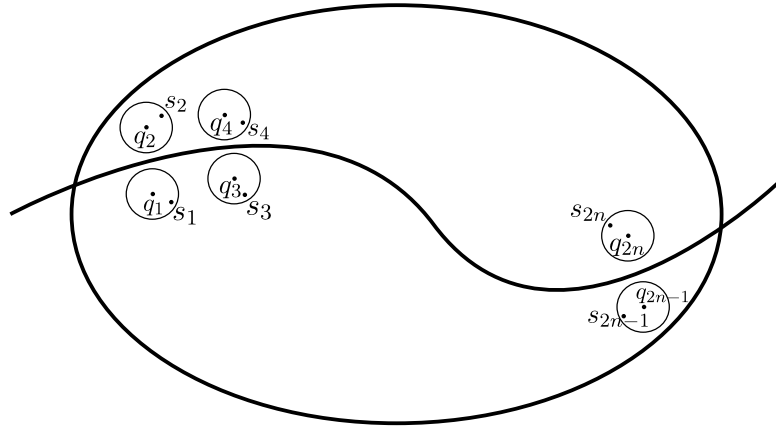
11. ábra. A q_i pontok felvétele

Vegyünk fel a q_i pontok körül δ sugarú köröket ($i = 1, \dots, 2n$) úgy, hogy ezek ne messék a egyszerű ívet, és az L tartományon belül maradjanak. Tehát legyen

$$\delta < d(\gamma(J), q_i) \text{ és } \delta < d(\mathbb{R}^2 \setminus L, q_i)$$

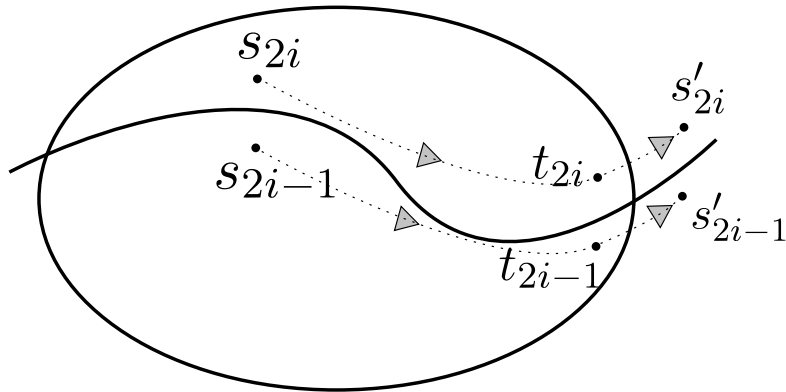
minden $i = 1, \dots, 2n$ esetén. Automatikusan teljesül, hogy $\delta < \varepsilon < d(\gamma(J), \mathbb{R}^2 \setminus L) / 4$, ezt a későbbiekben használni fogjuk. Tehát a q_i pontok köré rajzoltunk δ sugarú, $\delta^2\pi$ területű köröket. A feltétel szerint van olyan $M_{\delta^2\pi}$ folytonos síkbeli mozgatás, hogy az általa súrolt terület kisebb, mint $\delta^2\pi$, és $d_H(M_{\delta^2\pi}(1)(\gamma(I)), \gamma(I)) \geq r$. Ebből következik, hogy minden $i = 1, \dots, 2n$ esetén van a q_i körüli δ sugarú körnek olyan s_i pontja, amelyet a mozgatás során nem érintettünk (lásd:12. ábra). Hiszen ha valamelyik körben nem lenne ilyen s_i pont, akkor a teljes kört súroltuk volna a mozgatás során, így a súrolt terület legalább $\delta^2\pi$ lenne. Tehát az s_1, \dots, s_{2n} pontok olyanok, hogy az $M_{\delta^2\pi}$ mozgatás során nem érintettük őket, távolságuk a egyszerű ívtől legfeljebb $\varepsilon + \delta < 2\varepsilon$, és teljesül, hogy $\forall c \in \gamma(J)$ ponthoz van olyan $s_{2i-1} \in L_1$ illetve $s_{2i} \in L_2$, $i \in \{1, \dots, n\}$, hogy $|c - s_{2i-1}| \leq \varepsilon + \delta < 2\varepsilon$ és $|c - s_{2i}| \leq \varepsilon + \delta < 2\varepsilon$.

Tekintsük most az $M_{\delta^2\pi}(1)$ síkbeli egybevágóságot. Legyen $M_{\delta^2\pi}(1)(s_i) = s'_i$ minden $i = 1, \dots, 2n$ esetén. Azonban előfordulhat, hogy az s'_i pontok L -en kívülre esnek. Tekintsük ezért az



12. ábra.

$M_{\delta^2\pi}$ folytonos mozgatas egy olyan részmozgatását, amely az s_i pontokat biztosan L -en belülré viszi (lásd: 13.ábra). Legyen tehát $M_{\delta^2\pi}^L$ olyan részmozgatás, hogy a $M_{\delta^2\pi}^L(t_0)$ végállapotára teljesül, hogy $d_H(M_{\delta^2\pi}^L(t_0)(\gamma(J)), \gamma(J)) = r_L$. Mivel a mozgatas folytonos, van ilyen t_0 . Az egyszerűbb jelölés kedvéért paraméterezzük át $M_{\delta^2\pi}^L$ mozgatást úgy, hogy a végállapotot $t = t_0$ helyett $t = 1$ -ben érje el. Legyen $M_{\delta^2\pi}^L(1)(s_i) = t_i$ minden $i = 1, \dots, 2n$ esetén.



13. ábra.

4.13. Állítás. $t_i \in L$ minden $i = 1, \dots, 2n$ esetén.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $d(s_i, \gamma(J)) < 2\varepsilon < d(\gamma(J), \mathbb{R}^2 \setminus L) / 2$, valamint, hogy

$$d_H(\gamma(J), M_{\delta^2\pi}^L(1)(\gamma(J))) = r_L \leq \frac{d(\gamma(J), \mathbb{R}^2 \setminus L)}{2}.$$

Teljesül, hogy

$$d(t_i, \gamma(J)) \leq d(t_i, M_{\delta^2\pi}^L(1)(\gamma(J))) + d_H(M_{\delta^2\pi}^L(1)(\gamma(J)), \gamma(J)).$$

Mivel

$$d\left(t_i, M_{\delta^2\pi}^L(1)(\gamma(J))\right) = d(s_i, \gamma(J)),$$

ezért

$$\begin{aligned} d(t_i, \gamma(J)) &\leq d(s_i, \gamma(J)) + d_H\left(M_{\delta^2\pi}^L(1)(\gamma(J)), \gamma(J)\right) \leq \\ &\leq \frac{d(\gamma(J), \mathbb{R}^2 \setminus L)}{2} + \frac{d(\gamma(J), \mathbb{R}^2 \setminus L)}{2} = d(\gamma(J), \mathbb{R}^2 \setminus L). \end{aligned}$$

Tehát $t_i \in L$ minden $i = 1, \dots, 2n$ esetén. \square

Tehát az $M_{\delta^2\pi}^L$ mozgatás olyan, hogy az általa súrolt terület kisebb, mint $\delta^2\pi$,

$$d_H\left(\gamma(J), M_{\delta^2\pi}^L(1)(\gamma(J))\right) = r_L,$$

és a mozgatás az s_i pontokat az L tartományon belülre viszi minden $i = 1, \dots, 2n$ esetén. Az s_{2i-1} és s_{2i} pontok az egyszerű ív különböző komponenseiben vannak, és az egyszerű ív mozgása során ezeket a pontokat nem érinthettük. Ha az egyszerű ívet tekintjük mozdulatlanak és az s_i pontokat mozgatjuk el, a mozgatás során a pontokkal nem érinthettük az egyszerű ívet. Tehát az s_{2i-1} és s_{2i} pontok a mozgatás során az eredeti komponensükben maradnak, tehát t_{2i-1} és t_{2i} pontok különböző komponensben lesznek minden $i = 1, \dots, 2n$ esetén. Az s_{2i-1} és s_{2i} pontok egymástól való távolsága legfeljebb 4ε , így a t_{2i-1} és t_{2i} pontoké is legfeljebb ennyi minden $i = 1, \dots, 2n$ esetén. Tehát a t_i pontok a $\gamma(I)$ ív legfeljebb 4ε sugarú környezetében vannak minden $i = 1, \dots, 2n$ esetén. Tudjuk, hogy $\forall c \in \gamma(J)$ ponthoz van olyan $s_{2i-1} \in L_1$ illetve $s_{2i} \in L_2$ $i \in \{1, \dots, n\}$, hogy $|c - s_{2i-1}| \leq 2\varepsilon$ és $|c - s_{2i}| \leq 2\varepsilon$. Tehát $\forall M_{\delta^2\pi}^L(c) \in M_{\delta^2\pi}^L\gamma(J)$ ponthoz van olyan $t_{2i-1} \in L_1$ illetve $t_{2i} \in L_2$ ($i \in \{1, \dots, n\}$), hogy $|M_{\delta^2\pi}^L(c) - t_{2i-1}| \leq 2\varepsilon$ és $|M_{\delta^2\pi}^L(c) - t_{2i}| \leq 2\varepsilon$. Tehát az $M_{\delta^2\pi}^L(1)(\gamma(J))$ elmozgatott egyszerű ív az eredeti $\gamma(I)$ ív legfeljebb 4ε sugarú környezetében van.

Összegezve, létezik egy olyan $M_{\delta^2\pi}^L$ folytonos síkbeli elmozgatás, hogy az általa súrolt terület legfeljebb $\delta^2\pi$,

$$d_H\left(M_{\delta^2\pi}^L(1)(\gamma(J)), \gamma(J)\right) = r_L \quad \text{és} \quad M_{\delta^2\pi}^L(1)(\gamma(J)) \subset U(\gamma(I), 4\varepsilon).$$

4.14. *Megjegyzés.* Az $M_{\delta^2\pi}$ mozgatás folytonosságából következik, hogy minden $0 \leq \eta \leq r_L$ -hoz létezik olyan $M_{\delta^2\pi}^\eta(1)$ egybevágóság, hogy

$$d_H\left(M_{\delta^2\pi}^\eta(1)(\gamma(J)), \gamma(J)\right) = \eta \quad \text{és} \quad M_{\delta^2\pi}^\eta(1)(\gamma(J)) \subseteq U(\gamma(I), 4\varepsilon)$$

teljesül.

Cseréljük le az előbbieken rögzített ε -t egy $\varepsilon_m \rightarrow 0$ sorozatra. Végezzük el ugyanezt az eljárást mindegyik ε_m -re. Kapunk tehát $q_{i,m}$ pontokat $i = 1, \dots, n$, $m = 1, 2, \dots$ az előbbiekhöz

hasonlóan, valamint egy δ_m sorozatot, melyre szintén teljesül, hogy $\delta_m < \varepsilon_m \rightarrow 0$. Tehát minden ε_m esetén létezik egy olyan $M_{\delta_m^2}^L$ folytonos síkbeli elmozgatás, hogy az általa súrolt terület legfeljebb $\delta_m^2 \pi$,

$$d_H \left(M_{\delta_m^2}^L(1)(\gamma(J)), \gamma(J) \right) = r_L,$$

és

$$M_{\delta_m^2}^L(1)(\gamma(J)) \subset U(\gamma(J), 4\varepsilon_m).$$

Tudjuk, hogy $\varepsilon_m \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$). Tekintsük most az $\{M_{\delta_m^2}^L(1) \mid m = 1, 2, \dots\}$ egybevágóságsorozatot. Bizonyítjuk, hogy ezekből kiválasztható konvergens részsorozat.

4.15. Állítás. *Az $\{M_{\delta_m^2}^L(1) \mid m = 1, 2, \dots\}$ irányítástartó síkbeli egybevágóságsorozat korlátos.*

Bizonyítás.

$$|M_{\delta_m^2}^L(1)(0) - 0| \leq |c - 0| + |c - M_{\delta_m^2}^L(1)(c)| + |M_{\delta_m^2}^L(1)(c) - M_{\delta_m^2}^L(1)(0)|$$

teljesül tetszőleges $c \in \gamma(J)$ esetén minden $m = 1, 2, \dots$ -re. Mivel $M_{\delta_m^2}^L(1)$ egybevágóság, ezért

$$|M_{\delta_m^2}^L(1)(c) - M_{\delta_m^2}^L(1)(0)| = |c - 0| \leq \sup_{c \in \gamma(J)} |c| = K_1 < \infty.$$

Tetszőleges $c \in \gamma(J)$ esetén teljesül, hogy

$$|M_{\delta_m^2}^L(1)(c) - c| \leq d_H \left(M_{\delta_m^2}^L(1)(\gamma(J)), \gamma(J) \right) = r_L.$$

Tehát

$$|M_{\delta_m^2}^L(1)(0) - 0| \leq 2 \sup_{c \in \gamma(J)} |c| + d_H \left(M_{\delta_m^2}^L(1)(\gamma(J)), \gamma(J) \right) = 2K_1 + r_L =: K < \infty.$$

Ekkor tehát minden $m = 1, 2, \dots$ esetén $|M_{\delta_m^2}^L(1)(0)| \leq K$, tehát $\{M_{\delta_m^2}^L(1) \mid m = 1, 2, \dots\}$ korlátos. \square

Ekkor tehát a 4.8. Lemma szerint létezik az $\{M_{\delta_m^2}^L(1) \mid m = 1, 2, \dots\}$ egybevágóságsorozatnak konvergens részsorozata. Egy konvergens részsorozat kiválasztása után feltehetjük, hogy $M_{\delta_m^2}^L(1) \rightarrow M(1)$.

4.16. Állítás. $d_H(M(1)(\gamma(J)), \gamma(J)) = r_L$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\lim_{m \rightarrow \infty} M_{\delta_m^2}^L(1) = M(1)$, és

$$d_H \left(M_{\delta_m^2}^L(1)(\gamma(J)), \gamma(J) \right) = r_L \text{ minden } m = 1, 2, \dots \text{ esetén.}$$

Alkalmazzuk a 4.10. Lemmát a $K = L = \gamma(J)$ kompakt halmazokra, és az $E_m = M_{\delta_m^2}^L(1)$ egybevágóságsorozatra. Ekkor tehát a lemma szerint teljesül, hogy

$$d_H(M(1)(\gamma(J)), \gamma(J)) = \lim_{m \rightarrow \infty} d_H \left(M_{\delta_m^2}^L(1)(\gamma(J)), \gamma(J) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} r_L = r_L.$$

Tehát $d_H(M(1)(\gamma(J)), \gamma(J)) = r_L$ teljesül. \square

Tekintsük tehát az $M_{\delta_m^2 \pi}^L(1) \rightarrow M(1)$ egybevágóságot. Legyen m olyan nagy, hogy $|M_{\delta_m^2 \pi}^L(1)(c) - M(1)(c)| < \varepsilon_m$ teljesüljön minden $c \in \gamma(J)$ esetén. Tudjuk, hogy

$$M_{\delta_m^2 \pi}^L(1)(\gamma(J)) \subset U(\gamma(I), 4\varepsilon_m).$$

Ekkor az is teljesül, hogy $M(1)(\gamma(J)) \subset U(\gamma(I), 5\varepsilon_m)$ minden elég nagy m esetén. Mivel $\varepsilon_m \rightarrow 0$, ezért $M(1)(\gamma(J)) \subset U(\gamma(I), 0)$ teljesül, azaz a $\gamma(J)$ ív $M(1)$ általi képe $\gamma(I)$ része lesz.

A 4.14. Megjegyzés szerint minden $0 \leq \eta \leq r_L$ -hoz létezik olyan $M_{\delta_m^2 \pi}^\eta(1)$ egybevágóság, hogy

$$d_H(M_{\delta_m^2 \pi}^\eta(1)(\gamma(J)), \gamma(J)) = \eta \quad \text{és} \quad M_{\delta_m^2 \pi}^\eta(1)(\gamma(J)) \subseteq U(\gamma(I), 4\varepsilon_m).$$

Az előbbiekhöz hasonlóan belátható, hogy $M_{\delta_m^2 \pi}^\eta(1)$ -ből kiválasztható konvergens részsorozat, majd egy részsorozat kiválasztása után feltehető, hogy $M_{\delta_m^2 \pi}^\eta(1) \rightarrow M^\eta(1)$. Teljesül, hogy

$$d_H(M^\eta(1)(\gamma(J)), \gamma(J)) = \eta \quad \text{és} \quad M^\eta(1)(\gamma(J)) \subseteq U(\gamma(I), 5\varepsilon_m)$$

minden elég nagy m esetén. Mivel $\varepsilon_m \rightarrow 0$, ezért $M^\eta(1)(\gamma(J)) \subseteq U(\gamma(I), 0)$ teljesül, azaz a $\gamma(J)$ ív $M^\eta(1)$ általi képe $\gamma(I)$ része lesz minden $0 \leq \eta \leq r_L$ esetén.

Tehát beláttuk: A $\gamma(J)$ részív olyan, hogy minden $0 \leq \eta \leq r_L$ esetén van a részívnek olyan elmozgatott példánya, hogy a Hausdorff-távolságuk η , és az elmozgatott példány az eredeti $\gamma(I)$ egyszerű ívnek része lesz.

A $J \subset I, a, b \notin J$ zárt részintervallum megválasztása a bizonyításunk elején tetszőleges volt. Ezzel beláttuk a következőt:

4.17. Állítás. *Tetszőleges $J \subset I, a, b \notin J$ zárt részintervallumhoz van olyan pozitív r_J szám, hogy minden $0 \leq \eta \leq r_J$ esetén van egy olyan folytonos síkbeli M mozgatás, amelyre:*

$$d_H(\gamma(J), M(1)(\gamma(J))) = \eta \quad \text{és} \quad M(1)(\gamma(J)) \subseteq \gamma(I).$$

4.18. *Megjegyzés.* A konstrukcióból látható, hogy ha $J = [c, d]$, ahol $a < c < d < b$, akkor $M(1)(\gamma(J)) = \gamma([x, y])$, ahol $M(1)(\gamma(c)) = \gamma(x)$, és $M(1)(\gamma(d)) = \gamma(y)$.

Tételünk szerint ekkor a $\gamma(I)$ egyszerű ív szakasz vagy körív. Ennek bizonyítása következik most.

4.3. A bizonyítás befejezése

Legyen $J = [c, d] \subset I = [a, b], c \neq a, d \neq b$ zárt intervallum. Legyen $X = X_{[c, d]}$ azon $x \in [a, b]$ pontok halmaza, melyekhez létezik olyan $y, a \leq x < y \leq b$, hogy $\gamma([x, y]) \cong \gamma([c, d])$, ahol a $\gamma([c, d])$ -t $\gamma([x, y])$ -ba képező egybevágóság a $\gamma(c)$ pontot $\gamma(x)$ -be, a $\gamma(d)$ pontot $\gamma(y)$ -ba viszi. Nyilván $c \in X$, tehát X nem üres.

4.19. Állítás. Az $X \subseteq [a, b]$ halmaz zárt.

Bizonyítás. Legyen $x_n \in X, x_n \rightarrow x$. Be szeretnénk látni, hogy $x \in X$. Tehát létezik $y_n \in X$, hogy $\gamma([x_n, y_n]) \cong \gamma([c, d])$. Jelöljük most az egyszerűség kedvéért ezt az egybevágóságot E_n -nel. Mivel $y_n \in [a, b]$, ezért a Bolzano–Weierstrass-tétel szerint kiválasztható belőle konvergens részsorozat. Egy részsorozat kiválasztása után feltehetjük, hogy $y_n \rightarrow y$. Be szeretnénk látni, hogy $\gamma([x, y]) \cong \gamma([c, d])$. Könnyen látható, hogy az $\{E_n : n = 1, 2, \dots\}$ sorozat korlátos, ezért a 4.8. Lemma szerint van konvergens részsorozata. Egy részsorozat kiválasztása után feltehetjük, hogy $E_n \rightarrow E$. Be szeretnénk látni, hogy

$$E(\gamma([x, y])) = \gamma([c, d]).$$

Tudjuk, hogy

$$E_n(\gamma([x_n, y_n])) = \gamma([c, d]).$$

Ebből következik, hogy $\forall v \in [c, d]$ -hez létezik minden $n = 1, 2, \dots$ esetén pontosan egy olyan $z_n \in [x_n, y_n]$, hogy

$$E_n(\gamma(z_n)) = \gamma(v).$$

Ekkor tehát $z_n = \gamma^{-1}(E_n^{-1}(\gamma(v)))$. A γ , és γ^{-1} függvények folytonossága, valamint a 4.9. Lemma miatt teljesül, hogy

$$\gamma^{-1}(E_n^{-1}(\gamma(v))) \rightarrow \gamma^{-1}(E^{-1}(\gamma(v))) =: z.$$

Ekkor tehát $E(\gamma(z)) = \gamma(v)$, és $z_n \rightarrow z$. Mivel $x_n \leq z_n \leq y_n$, és $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$, ezért teljesül, hogy $x \leq z \leq y$.

Tehát minden $v \in [c, d]$ -hez létezik pontosan egy olyan $z \in [x, y]$, amelyre $E(\gamma(z)) = \gamma(v)$. Ebből következik, hogy

$$E(\gamma([x, y])) = \gamma([c, d]).$$

Mivel $E_n(\gamma(x_n)) = \gamma(c)$, és $E_n(\gamma(y_n)) = \gamma(d)$ minden $n = 1, 2, \dots$ esetén, ezért a konstrukcióból adódóan $E(\gamma(x)) = \gamma(c)$, és $E(\gamma(y)) = \gamma(d)$ is teljesülni fog. Tehát a halmaz valóban zárt. \square

4.20. Állítás. Minden $x \in X, a < x < \max X$ ponthoz és minden $\delta > 0$ számhoz léteznek olyan $x', x'' \in X$ pontok, melyekre $x' < x < x''$, és $|x - x'| < \delta, |x - x''| < \delta$.

Bizonyítás. Tekintsük az $[x, y]$ intervallumot. Mivel $[x, y] \subset [a, b], x \neq a, b \neq y$, ezért léteznek olyan $e \neq x, a$, és $f \neq y, b$ pontok, hogy $[x, y] \subset [e, f] \subset [a, b]$ (lásd: 14. ábra). A γ^{-1} függvény egyenletes folytonosságát kihasználva teljesül, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\eta > 0$ szám, hogy tetszőleges $u, v \in [a, b]$ esetén, ha $|\gamma(u) - \gamma(v)| < \eta$, akkor $|u - v| < \varepsilon$. Legyen $\tau = \min\{|x - e|, |y - f|\}$. Legyen az ε szám olyan kicsi, hogy $0 < \varepsilon < \min\{\tau, \delta\}$ teljesüljön,

ahol δ az állításban adott szám. Tekintsük az ehhez az ε -hoz tartozó $\eta > 0$ számot. Legyen $J = [e, f]$, és alkalmazzuk a 4.17. Állítást erre a J -re. Legyen $0 < \eta' < \min\{\eta, r_J\}$. Ekkor az η' számhoz létezik olyan M mozgatás, hogy

$$d_H(\gamma(J), M(1)(\gamma(J))) = \eta' \quad \text{és} \quad M(1)(\gamma(J)) \subseteq \gamma(I).$$

Ezen tartalmazás szerint léteznek olyan e', f' pontok, hogy $M(1)(\gamma([e, f])) = \gamma([e', f'])$, ezért $\gamma([e, f]) \cong \gamma([e', f'])$. A távolságra vonatkozó állításból pedig következik, hogy

$$|\gamma(e) - \gamma(e')| = |\gamma(e) - M(1)(\gamma(e))| \leq d_H(\gamma(J), M(1)(\gamma(J))) \leq \eta' < \eta,$$

és

$$|\gamma(f) - \gamma(f')| = |\gamma(f) - M(1)(\gamma(f))| \leq d_H(\gamma(J), M(1)(\gamma(J))) \leq \eta' < \eta.$$

Ekkor tehát a folytonosság szerint $|e - e'| < \varepsilon, |f - f'| < \varepsilon$. Jelölje az $M(1)$ egybevágóságot az egyszerűség kedvéért E , azaz $E(\gamma([e, f])) = \gamma([e', f'])$. Mivel $[x, y] \subset [e, f]$, ezért léteznek olyan x', y' pontok, hogy $E(\gamma([x, y])) = \gamma([x', y'])$. Tekintsük most az E^{-1} egybevágóságot. $E^{-1}(\gamma([e', f'])) = \gamma([e, f])$. Mivel $\varepsilon < |x - e|, \varepsilon < |y - f|$, és $|e - e'| < \varepsilon, |f - f'| < \varepsilon$, ezért teljesül, hogy $[x, y] \subset [e', f']$. Ekkor léteznek olyan x'', y'' pontok, hogy $E^{-1}(\gamma([x, y])) = \gamma([x'', y''])$. Az e', f', e'', f'' pontok olyanok, hogy vagy $e' < e < e''$ és $f' < f < f''$ teljesül, vagy mindkét esetben a fordított irányú reláció. Ezek szerint az x', y', x'', y'' pontok is olyanok, hogy vagy $x' < x < x''$ és $y' < y < y''$ teljesül, vagy mindkét esetben a fordított irányú reláció. Feltehetjük, hogy $x' < x < x''$ teljesül. Mivel $\gamma([x'', y'']) \cong \gamma([x', y']) \cong \gamma([x, y]) \cong \gamma([c, d])$, ezért teljesül, hogy $x', x'' \in X$. Mivel $[x, y] \subset [e, f]$, ezért teljesül, hogy $[x', y'] \subset [e', f']$. Ekkor azonban teljesül, hogy

$$|\gamma(x) - \gamma(x')| \leq d_H(\gamma(J), M(1)(\gamma(J))) = \eta' < \eta,$$

$$|\gamma(y) - \gamma(y')| \leq d_H(\gamma(J), M(1)(\gamma(J))) = \eta' < \eta.$$

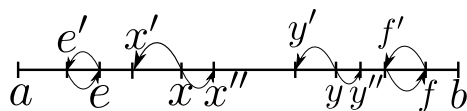
Ebből a folytonosság szerint következik, hogy $|x - x'| < \varepsilon \leq \delta$, és $|y - y'| < \varepsilon \leq \delta$. Mivel $[x, y] \subset [e', f']$, ezért teljesül, hogy $[x'', y''] \subset [e, f]$. Ekkor teljesül, hogy

$$|\gamma(x'') - \gamma(x)| \leq d_H(\gamma(J), M(1)(\gamma(J))) = \eta' < \eta.$$

$$|\gamma(y'') - \gamma(y)| \leq d_H(\gamma(J), M(1)(\gamma(J))) = \eta' < \eta.$$

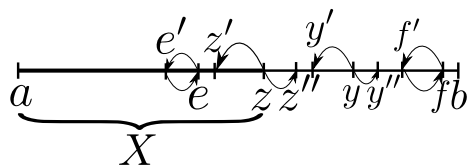
Ebből a folytonosság szerint következik, hogy $|x - x''| < \varepsilon \leq \delta, |y - y''| < \varepsilon \leq \delta$. Tehát megadtunk olyan $x', x'' \in X$ pontokat, melyekre $x' < x < x''$, és $|x - x'| < \delta, |x - x''| < \delta$. \square

4.21. Állítás. $X = [a, \max X]$ intervallum, és $\gamma([\max X, b]) \cong \gamma([c, d])$.



14. ábra.

Bizonyítás. Tegyük fel először indirekt, hogy $\gamma([\max X, y]) \cong \gamma([c, d])$, ahol $y < b$. Legyen $\max X = z$. Mivel $[z, y] \subset [a, b]$, $z \neq a, y \neq b$, ezért léteznek olyan $e \neq a, z$, és $f \neq b, y$ pontok, hogy $[z, y] \subset [e, f] \subset [a, b]$ (lásd: 15. ábra). A 4.20. Állításban szereplő gondolatmenetet teljes mértékben megismételve konstruálunk e', f', e'', f'' pontokat, és ezek segítségével $z', z'', y', y'' \in X$ pontokat, melyekre teljesül, hogy vagy $z' < z < z''$ és $y' < y < y''$ áll fenn, vagy mindkét esetben a fordított irányú reláció. Ekkor azonban $z = \max X$ nem lehetne a maximum, ellentmondás. Tehát nem teljesülhet, hogy $\gamma([\max X, y]) \cong \gamma([c, d]), y < b$. Azaz $\gamma([\max X, b]) \cong \gamma([c, d])$.



15. ábra.

Mivel X zárt, nem-üres, és minden $x \in X \cap (a, z)$ ponthoz van tetszőlegesen közel $x', x'' \in X$ $x' < x < x''$, ezért X -nek egy intervallumnak kell lennie: $X = [a, z]$. Tegyük fel, hogy nem, azaz létezik olyan $u \in [a, b]$ hogy $a < u < z, u \notin X$. Ekkor létezik X -nek egy legkisebb u -nál nagyobb v eleme, és egy legnagyobb u -nál kisebb w eleme. Belátjuk, hogy $a \neq w$ vagy $v \neq z$ biztosan teljesül. Valóban, ha $w = a$, akkor $c \in X$, $c > a$ miatt $u < c$, tehát $v \leq c < z$. Ugyanis a $c = z$ eset nem fordulhat elő, mert ebből az előbbiek szerint $d = b$ következne, de a feltétel szerint $d < b$.

Ha $u < v < z$ teljesül, akkor a 4.20. Állítás szerint létezik a v ponthoz tetszőlegesen közel $v' \in X, v' < v$ pont, tehát létezik $u < v' < v$ pont. Ekkor v nem lehetne a legkisebb u -nál nagyobb X -beli elem, ellentmondás. Hasonlóan, ha $a < w < u$ teljesül, akkor a 4.20. Állítás szerint létezik a w ponthoz tetszőlegesen közel $w'' \in X, w < w''$ pont, tehát létezik $w < w'' < u$ pont. Ekkor w nem lehetne a legnagyobb u -nál kisebb X -beli elem, ellentmondás. Ezen két eset valamelyike tehát biztosan bekövetkezik, ellentmondásra jutunk. Tehát $X = [a, \max X]$

intervallum. □

A fenti gondolatmenetet tetszőleges $[c, d] \subset I, a \neq c, b \neq d$ zárt intervallumra megismételhetjük. Tehát tetszőleges ilyen $[c, d]$ esetén az $X = X_{[c,d]}$ halmazra teljesül, hogy $X = [a, \max X]$ intervallum, és $\gamma([\max X, b]) \cong \gamma([c, d])$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott pozitív szám. A $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény egyenletesen folytonos, ezért teljesül, hogy ε -hoz létezik olyan $\tau > 0$, hogy tetszőleges $x, y \in [a, b]$ esetén, ha $|x - y| < \tau$, akkor $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \varepsilon$. A $\gamma^{-1} : \gamma([a, b]) \rightarrow [a, b]$ függvény egyenletesen folytonos, ezért τ -hoz létezik olyan $\eta > 0$, hogy tetszőleges $x, y \in [a, b]$ esetén, ha $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \eta$, akkor $|x - y| < \tau$. Az η számhoz a γ függvény egyenletes folytonossága miatt létezik olyan $\delta > 0$, hogy tetszőleges $x, y \in [a, b]$ esetén, ha $|x - y| < \delta$, akkor $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \eta$. Tekintsük most ezt a δ számot.

Legyen $a = p_0$, és legyen $p_0 < p_1 < p_0 + \delta$ olyan pont, hogy $|\gamma(p_1) - \gamma(p_0)| > |\gamma(t) - \gamma(p_0)|$ minden $p_0 < t < p_1$ -re. Legyen $p_1 < p_2$ olyan pont, hogy $|\gamma(p_2) - \gamma(p_1)| = |\gamma(p_1) - \gamma(p_0)|$, és $|\gamma(p_2) - \gamma(p_1)| > |\gamma(t) - \gamma(p_1)|$ minden $p_1 < t < p_2$ -re. (Ha δ elég kicsi, akkor van ilyen.)

Tekintsük most a $[c, d] = [p_0, p_2]$ intervallumhoz tartozó X halmazt. Az előbbiek alapján tudjuk, hogy $\gamma([p_0, p_2]) \cong \gamma([\max X, b])$. Tehát ha δ elég kicsi, akkor $p_1 \in X$. Ekkor tehát az X halmaz definíciója szerint p_1 -hez létezik olyan p_3 pont, hogy $\gamma([p_0, p_2]) \cong \gamma([p_1, p_3])$. Mivel $[p_0, p_1] \subset [p_0, p_2]$, és $|\gamma(p_2) - \gamma(p_1)| = |\gamma(p_1) - \gamma(p_0)|$, ezért teljesül: $\gamma([p_0, p_1]) \cong \gamma([p_1, p_2])$. Ebből következik, hogy a $\overrightarrow{\gamma(p_1)\gamma(p_2)}$ és $\overrightarrow{\gamma(p_2)\gamma(p_3)}$ vektorok által bezárt irányított szög megegyezik a $\overrightarrow{\gamma(p_0)\gamma(p_1)}$ és $\overrightarrow{\gamma(p_1)\gamma(p_2)}$ vektorok által bezárt irányított szöggel. Teljesül továbbá, hogy

$$|\gamma(p_3) - \gamma(p_2)| = |\gamma(p_2) - \gamma(p_1)| = |\gamma(p_1) - \gamma(p_0)|.$$

Ismételjük meg ezt az eljárást: a $p_2 \in X$ ponthoz az előbbiekhez hasonlóan kapunk egy p_4 pontot, melyre teljesül, hogy a $\gamma([p_0, p_2]) \cong \gamma([p_2, p_4])$. Az előbbiekhez hasonlóan $\overrightarrow{\gamma(p_2)\gamma(p_3)}$ és a $\overrightarrow{\gamma(p_3)\gamma(p_4)}$ vektorok által bezárt irányított szög megegyezik a $\overrightarrow{\gamma(p_1)\gamma(p_2)}$ és a $\overrightarrow{\gamma(p_2)\gamma(p_3)}$ vektorok által bezárt irányított szöggel, így a $\overrightarrow{\gamma(p_0)\gamma(p_1)}$ és $\overrightarrow{\gamma(p_1)\gamma(p_2)}$ vektorok által bezárt irányított szöggel is. Teljesül továbbá, hogy

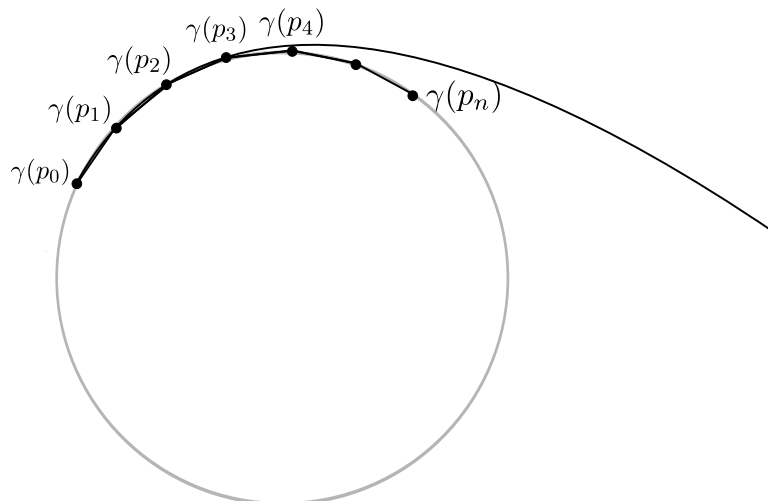
$$|\gamma(p_4) - \gamma(p_3)| = |\gamma(p_3) - \gamma(p_2)| = |\gamma(p_1) - \gamma(p_0)|.$$

Végezzük el ezt az eljárást annyiszor, ahányszor lehetséges. Az eredmény: $\gamma(p_0), \gamma(p_1), \dots, \gamma(p_n)$ pontok, melyekre teljesül, hogy a $\overrightarrow{\gamma(p_i)\gamma(p_{i+1})}$ és a $\overrightarrow{\gamma(p_{i+1})\gamma(p_{i+2})}$ vektorok által bezárt irányított szög megegyezik a $\overrightarrow{\gamma(p_0)\gamma(p_1)}$ és a $\overrightarrow{\gamma(p_1)\gamma(p_2)}$ vektorok által bezárt irányított szöggel minden $i = 0, \dots, n-2$ esetén, és $|\gamma(p_i) - \gamma(p_{i+1})| = |\gamma(p_0) - \gamma(p_1)|$ minden $i = 0, \dots, n-1$ esetén.

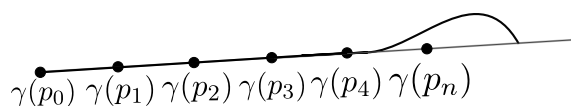
A folytonosság szerint fennáll a következő: mivel $|p_0 - p_1| < \delta$, ezért $|\gamma(p_0) - \gamma(p_1)| < \eta$. A konstrukció alapján $|\gamma(p_i) - \gamma(p_{i+1})| = |\gamma(p_0) - \gamma(p_1)|$ minden $i = 0, \dots, n-1$ esetén.

Ekkor tehát a folytonosság szerint mivel $|\gamma(p_i) - \gamma(p_{i+1})| < \eta$, ezért $|p_i - p_{i+1}| < \tau$ minden $i = 0, \dots, n-1$ esetén. Ekkor a folytonosság szerint teljesül, hogy $|\gamma(p_{i+1}) - \gamma(p_i)| < \varepsilon$ minden $i = 0, \dots, n-1$ esetén. Két eset lehetséges. Ha az eredeti $\gamma(p_0), \gamma(p_1), \gamma(p_2)$ pontok kollineárisak voltak, akkor készíthetünk az eljárással tetszőlegesen közeli pontokat, melyek szintén kollineárisak ezekkel. Be szeretnénk látni, hogy ebben az esetben az egyszerű ív egy szakasz lásd: (17. ábra). Amennyiben nem kollineárisak, úgy az eljárás többszöri ismétlésével egy egyenlő hosszúságú szakaszokból álló törött-vonalat kapunk, melyre teljesül, hogy a szomszédos szakaszai által bezárt irányított szögek egyenlőek. Be szeretnénk látni, hogy ebben az esetben az egyszerű ív egy körív (lásd: 16. ábra).

Legyen $\gamma(c) \in \gamma(I)$ tetszőleges pont. Be szeretnénk látni, hogy valamely p_i , ($i \in \{0, \dots, n\}$) pontra $|\gamma(c) - \gamma(p_i)| < \varepsilon$. Legyen $c \in [p_i, p_{i+1}]$, ekkor tehát $|c - p_i| \leq |p_i - p_{i+1}| < \tau$. A folytonosság szerint tehát $|\gamma(c) - \gamma(p_i)| < \varepsilon$.



16. ábra.



17. ábra.

Tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén megválaszthatóak úgy a p_0, p_1, \dots, p_n pontok, hogy $|\gamma(p_{i+1}) - \gamma(p_i)| < \varepsilon$ minden $i = 0, \dots, n-1$ esetén, és $|\gamma(c) - \gamma(p_i)| < \varepsilon$ valamely p_i -re. Tekintsünk ε helyett egy $\varepsilon_m \rightarrow 0$ sorozatot, végezzük el az előbbi eljárást mindegyik ε_m -re. Minden

ε_m -hez megválaszthatók úgy a $\gamma(p_1), \gamma(p_2)$ pontok, hogy a keletkező p_0, p_1, \dots, p_{n_m} pontokra $|\gamma(p_{i+1}) - \gamma(p_i)| < \varepsilon_m \rightarrow 0$ minden $i = 0, \dots, n_m$ esetén. Ha az eredeti $\gamma(p_0), \gamma(p_1), \gamma(p_2)$ pontok kollineárisak, akkor a keletkező $\gamma(p_i)$ pontok is, ezek egy szakasz tetszőlegesen sűrű ponthalmazát alkotják, $\varepsilon_m \rightarrow 0$ esetén tehát egy szakaszhoz fognak konvergálni. Ha az eredeti $\gamma(p_0), \gamma(p_1), \gamma(p_2)$ pontok nem kollineárisak, akkor a keletkező p_i pontok egy egyenlő hosszúságú szakaszokból álló törött-vonal csúcsait alkotják, melyre teljesül, hogy a szomszédos szakaszai által bezárt irányított szögek egyenlőek. Így $\varepsilon_m \rightarrow 0$ esetén ezek egyre kisebb hosszúságú szakaszokból álló törött-vonalat hoznak létre, ezek a szögtartás miatt egy körvonalhoz fognak konvergálni.

Teljesül továbbá, hogy tetszőleges $\gamma(c) \in \gamma(I)$ esetén van olyan p_i , ($i \in \{0, \dots, n_m\}$), hogy $|\gamma(c) - \gamma(p_i)| < \varepsilon_m \rightarrow 0$. Tehát az egyszerű ív tetszőleges $\gamma(c)$ pontjára teljesül, hogy a p_i -k által meghatározott szakaszhoz vagy körívhez tetszőlegesen közel van. Tehát az egyszerű ív szakasz vagy körvonal.

Ezzel tehát beláttuk az egyszerű ívekre vonatkozó tételt.

5. Mozgatás szakaszok és körívek esetén

5.1. A szakaszok esete

Elsőnek következzen a bevezetésben szereplő **1.1. Tétel** bizonyítása. Az állítás:
A következő állítások ekvivalensek:

1. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan K síkbeli Kakeya-halmaz, melynek területe kisebb, mint ε .
2. Tetszőleges $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}^2$ azonos hosszúságú irányítatlan szakaszok esetén teljesül a következő: tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan M síkbeli elmozgatás, mely J_1 -et J_2 -be viszi, és a mozgatás által súrolt terület kisebb, mint ε .
3. Tetszőleges $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}^2$ azonos hosszúságú irányított szakaszok esetén teljesül a következő: tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan M síkbeli elmozgatás, mely J_1 -et J_2 -be viszi (úgy, hogy $M(1)(J_1)$ és J_2 irányítása megegyezik), és a mozgatás által súrolt terület kisebb, mint ε .

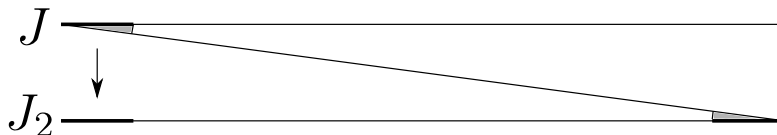
Bizonyítás. 1. \Rightarrow 2.

Állítás. Legyen $e \subset \mathbb{R}^2$ fix egyenes, melyet a Kakeya-halmazban mozgatott szakasz kiindulási pozíciója határoz meg. Tetszőleges $f \subset \mathbb{R}^2$ egyenes esetén jelölje $\alpha(f)$ az e és f egyenesek óramutató járásával megegyező irányban bezárt szögét. Ekkor tetszőleges $\phi \in [0, \pi]$ szöghöz létezik a K Kakeya-halmazban egy olyan szakasz-pozíció, hogy az általa meghatározott f egyenesre $\phi = \alpha(f)$.

Bizonyítás. Legyen M az a mozgatás, amely a Kakeya-halmazban a szakaszt megfordítja. Tudjuk, hogy $M(t)(J)$ iránya a t paraméter folytonos függvénye. Mivel $\alpha(M(0)(J)) = 0$, és $\alpha(M(1)(J)) = \pi$, ezért minden ϕ -hez van olyan t_0 , hogy $\alpha(M(t_0)(J)) = \phi$. Állításunkat tehát beláttuk. \square

Legyen most a J_1 szakasz a K Kakeya-halmaz kiindulási pozíciója. Legyen a J_1 által meghatározott egyenes e , a J_2 által meghatározott egyenes f . Ekkor az előbbi állítás szerint $\alpha(f) \in [0, \pi]$ -hez létezik olyan J szakaszpozíció K -ban, hogy a J által meghatározott g egyenesre $\alpha(g) = \alpha(f)$, azaz f és g párhuzamosak. Mozgassuk el J_1 -et a Kakeya-halmaz konstrukciójában szereplő mozgatással a J pozícióig. Ekkor J és J_2 párhuzamos, alkalmazhatjuk a Pál-féle módszert, ami megmutatja, hogy párhuzamos szakaszokat hogyan lehet egymásba mozgatni tetszőlegesen kis területet súrolva (lásd: 18. ábra). Legyen $\eta > 0$ tetszőlegesen kicsi szám. Legyenek a J szakasz végpontjai A és B . Forgassuk el a J szakaszt A körül egy kis szöggel úgy,

hogy a forgatás által meghatározott körcikk területe kisebb legyen, mint $\eta/2$. A kapott szakaszt toljuk el saját egyenesé mentén addig, amíg a B végpont el nem éri az f egyenest. Forgassuk most vissza a szakaszt B körül ugyan azzal a kis szöggel, így a forgatás által meghatározott körcikk területe ismét kisebb lesz, mint $\eta/2$, és a kapott szakasz f egyenesre esik. Toljuk el a szakaszt ezen egyenes mentén J_2 -ig. A mozgatás által súrolt terület tehát kisebb, mint η . Tehát a Kakeya-halmazban történő mozgatást és a Pál-féle mozgatást egymás után elvégezve



18. ábra.

elmozgattuk J_1 -et J_2 -be tetszőlegesen kis területet súrolva.

2. \Rightarrow 1. Ezen irány az első fejezetben található Cunningham-konstrukcióban megtalálható, ugyanis 2.-ből kiindulva konstruáljuk meg a Kakeya-halmazt.

3. \Rightarrow 2. Ez teljesen triviális, hiszen ha el tudjuk mozgatni J_1 -et J_2 -be irányított értelemben, akkor nyilván irányítatlan értelemben is.

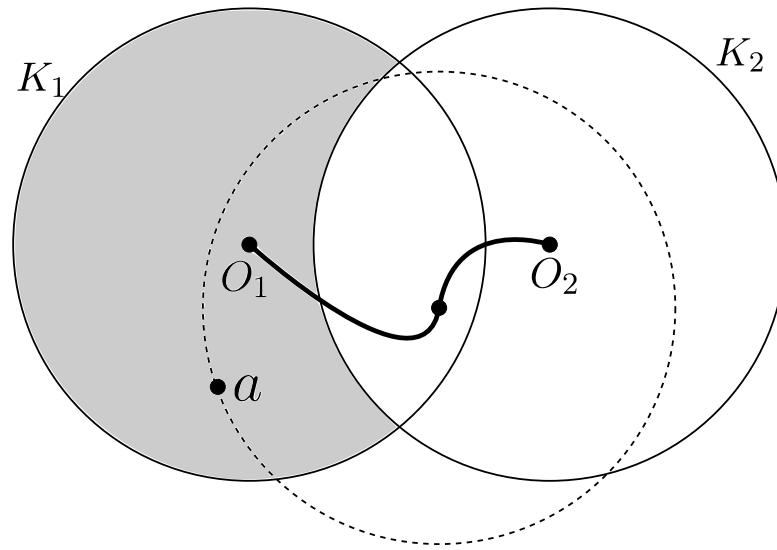
2. \Rightarrow 3. Legyenek $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}^2$ szakaszok irányított értelemben. Ha a 2. pont szerint létező M mozgatás olyan, hogy $M(1)(J_1)$ irányítása megegyezik J_2 irányításával, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor a következőt tesszük: Már tudjuk, hogy 2. \Rightarrow 1., tehát létezik J_1 kezdő pozíciójú tetszőlegesen kis területű Kakeya-halmaz. Ez megad egy N mozgatást, mely tetszőlegesen kis területet súrol, és a J_1 szakaszt ellentétes irányítással viszi önmagába a Kakeya-halmaz definíciója szerint. Ekkor az N és M mozgatásokat egymás után elvégezve egy olyan mozgatást kapunk, hogy $M(1)(N(1)(J_1))$ irányítása megegyezik J_2 irányításával, és tetszőlegesen kicsi lehet a súrolt terület. Állításunkat tehát beláttuk. \square

5.2. A körívek esete

A kérdésfelvetés körívek esetén a következő: Adott a síkon két különböző egybevágó körív. Igaz-e, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan folytonos síkbeli elmozgatás, mely egyik körívet a másikba viszi, és a mozgatás által súrolt terület kisebb, mint ε ? A megoldás alapötlete a Cunningham-konstrukció átírása szakaszok helyett körívekre. A sejtés a következő: Ha adott a síkon két különböző egybevágó körív, melyek ívhossza kisebb, mint π , akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan folytonos síkbeli elmozgatás, mely egyik körívet a másikba viszi, és a mozgatás által súrolt terület kisebb, mint ε . Azon körívek esetén, melyek a ívhosszára $\pi \leq a < 2\pi$ teljesül, a probléma megoldási módszere egyelőre kiforratlan. A 2π ívhosszú körív, azaz a teljes körív mozgatása esetén a kérdés tisztázott:

5.1. Állítás. Adott a síkon két különböző egysugarú kör. Nem igaz, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan folytonos síkbeli elmozgatás, amely az egyik teljes körvonalat a másikba viszi úgy, hogy a mozgás által súrolt terület kisebb, mint ε .

5.2. Megjegyzés. Az egyszerű ív fenti definíciója nem engedi meg a zárt görbe esetét, hiszen ekkor a végpontokban nem egy-egy értelmű a leképezés. Az bizonyítás érdekessége miatt mégis tárgyaljuk ezt az esetet.



19. ábra. A teljes körvonal mozgása

Bizonyítás. Legyenek a körlapok K_1 és K_2 , középpontjaik O_1 és O_2 (lásd: 19. ábra). Tegyük fel indirekt, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan folytonos síkbeli elmozgatás, amely a K_1 -hez tartozó körvonalat a K_2 -höz tartozó körvonalba viszi úgy, hogy a mozgás által súrolt terület kisebb, mint ε . Tekintsük a $K_1 \setminus K_2$ halmaz területét, legyen ez T . Mivel a két kör különböző, ezért $T > 0$. A feltétel szerint létezik az $\varepsilon = T$ számhoz tartozó mozgás, legyen ez $\{M(t) \mid t \in [0, 1]\}$. Teljesül, hogy $M(0)(K_1) = K_1$, és $M(1)(K_1) = K_2$. Legyen $a \in K_1 \setminus K_2$ a tartomány tetszőleges belső pontja. Ekkor $|a - O_1| < 1$, és $|a - O_2| > 1$. Tekintsük az O_1 középpont M mozgás általi pályáját: $\{M(t)(O_1) \mid t \in [0, 1]\}$. Mivel $|a - M(0)(O_1)| < 1$, $|a - M(1)(O_1)| > 1$, és a mozgás folytonos, ezért van olyan $t \in [0, 1]$, hogy $|a - M(t)(O_1)| = 1$. Ez azt jelenti, hogy az a pont rajta van az $M(t)(K_1)$ kör körvonalán, azaz a K_1 körvonal mozgása során súroltuk az a pontot. Ez minden $a \in K_1 \setminus K_2$ belső pontra elmondható, tehát a tartomány minden belső pontját súroltuk a mozgás során. Ekkor azonban a súrolt terület legalább T , ellentmondva annak a feltételnek, hogy a mozgás által súrolt terület kisebb, mint T . Állításunkat tehát beláttuk. \square

6. Hivatkozások

- [1] F. Cunningham, *The Kakeya problem for simply connected and for star-shaped sets*, Amer. Math. Monthly 78 (1971), 115–129.
- [2] F. Cunningham, *Three Kakeya problems*, Amer. Math. Monthly 81 (1974), 582–592.
- [3] A. S. Besicovitch, *On Kakeya's problem and a similar one*, Math. Z. 27 (1928), 312–320.
- [4] A. S. Besicovitch, *The Kakeya problem*, Amer. Math. Monthly 70 (1963), 697–706.
- [5] Laczkovich M., *A Kakeya-probléma*, Természet Világa, 1998. III. különszám, 74–76.