Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Véges Márton
Matematika BSc
Matematikus szakirány

# Mérhetetlen halmazok

Szakdolgozat

Témavezető: Keleti Tamás egyetemi docens, tanszékvezető
Analízis tanszék

Budapest, 2013.

## Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Keleti Tamásnak, a szakdolgozathoz nyújtott sok segítségét; beleértve magát a témafelvetést, kapcsolódó szakirodalom ajánlását, illetve a problémákra adott válaszait.

# Tartalomjegyzék

# Bevezetés

Gyakran használt eszköz a matematikában, hogy egy halmazon valamilyen valószínűségi mértéket definiálunk. Sokszor ez a mérték eltolás-invariáns is egyben. Felmerül a kérdés, van-e olyan halmaz, amin nem lehet ilyen mértéket megadni, azaz minden eltolás-invariáns (Borel)-mértékre 0 vagy végtelen mértékű. Ilyet természetesen könnyű adni, például egy tetszőleges korlátos, mérhető $H$ halmaz végtelen sok diszjunkt eltoltja. Általában, ha egy halmaz ilyen módon „periodikus", akkor csak 0 vagy végtelen lehet a mértéke. Azonban ezek a példák mind $\sigma$-végesek, próbáljunk olyan példákat adni, amik 0 vagy nem $\sigma$-végesek minden eltolás-invariáns mértékre. Az első példát erre R. O. Davies adta 1971-ben [2] (Larman konstruált egy másik halmazt 1965-ben, de azt nem konkrétan ezzel a céllal készítette, meg sincs említve ez a tulajdonság a cikkben [8]). Davies konstrukciója halmazok olyan sorozatán alapszik, ahol a sorozatban következő elem lényegében tartalmazza az előző kontinuum-sok eltoltját.

R. D. Mauldin a Liouville-számokkal kapcsolatban tette fel ezt a kérdést, azaz van-e olyan eltolás-invariáns Borel mérték, amire a Liouville-számok mértéke pozitív és $\sigma$-véges [11]. Erre a válasz nem, amint azt a későbbiekben látni fogjuk. Több gyengébb állítás is született, például L. Olsen a Hausdorff-mértékekre látta be, hogy 0 vagy végtelen a mérték [12]. Később a [1] cikkben minden eltolásinvariáns mértékre bizonyították, hogy 0 vagy végtelen a mérték (a $\sigma$-végességet nem vizsgálva). Elekes és Keleti látta be az állítást úgy, ahogy azt Mauldin feltette [3]. hogy Most definiáljuk a mérhetetlenség fogalmát, amit a későbbiekben vizsgálni fogunk.

**Definíció.** Egy nemüres Borel halmazt $\mathbb{R}$-en *mérhetetlen*nek nevezünk, ha minden eltolás-invariáns Borel-mértékre 0 vagy nem $\sigma$-véges a mértéke.

Az első fejezetben definiáljuk a Liouville-számok halmazát és belátjuk néhány alaptulajdonságát. Elekes és Keleti már említett módszerével belátjuk, hogy ez a halmaz mérhetetlen. Ez egy általánosabb állítás következményeke, amit a későbbiekben más tételek bizonyításához újra felhasználunk.

A második fejezetben további mérhetetlen halmazokat adunk. Ezek közt szerepelnek a nem normális számok, a Besicovitch-Eggleston számok bizonyos típusai, illetve egy gyengébb állítás, ami csak annyit lát be, hogy minden Besicovitch-Eggleston osztály 0 vagy végtelen mértékű (tehát lehet $\sigma$-véges a mérték). Előbbi tételek Elekes és Keleti eredményei, utóbbi pedig Bugeaud, Dodson és Kristensentől származik.

Végül a harmadik fejezetben adunk példát tetszőleges Borel-osztályú illetve Hausdorff- és boxdimenziójú mérhetetlen halmazra. Előbbi a [3] cikkből származik, utóbbi pedig saját munka, ami Davies konstrukcióján alapszik.

# 1. fejezet

# A Liouville számok és mérhetetlenség

## 1.1. Bevezetés

A Liouville-számok olyan irracionális számok, amelyek jól közelíthetőek racionálisakkal:

**1.1.1. Definíció** (Liouville számok)**.**

$$\begin{aligned} L &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \forall n \exists p, q \in \mathbb{Z} (q > 1),\ \text{hogy}\ 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \forall n \exists p, q \in \mathbb{Z} (q > 1),\ \text{hogy}\ \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\} \end{aligned}$$

Érdekesség, hogy a Liouville-számok voltak az elsők, amelyekről belátták, hogy transzcendensek. A következőekben belátunk néhány egyszerű állítást, amik a későbbiekben hasznosak lesznek. A bizonyítások a [13] könyvből származnak.

**1.1.2. Állítás.** *Az $L$ egy sűrű és $G_\delta$ halmaz.*

*Bizonyítás.* Definiáljuk az $U_n$ halmazokat a következő módon:

$$U_n = \bigcup_{q \geq 2} \bigcup_{p} \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}$$

Ekkor a Liouville-számok így írhatók:

$$L = \bigcap_{n} U_n$$

Az $U_n$ halmazok nyíltak, tehát $L$ egy $G_\delta$ halmaz lesz. Az $U_n$ halmazok továbbá sűrűek is (minden racionális számhoz van tetszőlegesen közel egy $U_n$-beli elem), ezért a Baire kategória-tétel miatt a metszetük sűrű. □

**1.1.3. Állítás.** *$\lambda(L) = 0$, ahol $\lambda$ a Lebesgue-mérték.*

*Bizonyítás.* Definiáljuk a $G_{n,q}$ halmazokat a következő módon, $n > 2$ és $q \geq 2$-re:

$$G_{n,q} = \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \left( \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right)$$

A definícióból nyilván $L \subseteq \bigcup_{q \geq 2} G_{n,q}$. Innen:

$$L \cap (-m, m) \subseteq \bigcup_{q \geq 2} G_{n,q} \cap (-m, m) \subseteq \bigcup_{q \geq 2} \bigcup_{p=-mq}^{mq} \left( \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right)$$

A jobb oldalon levő intervallumok hossza $\frac{2}{q^n}$, tehát

$$\begin{aligned} \lambda(L \cap (-m, m)) &\leq \sum_{q \geq 2} \sum_{p=-mq}^{mq} \frac{2}{q^n} = \sum_{q \geq 2} \frac{(2mq + 1)2}{q^n} \leq (4m + 1) \sum_{q \geq 2} \frac{1}{q^{n-1}} \\ &\leq (4m + 1) \int_{x \geq 1}^{\infty} \frac{1}{x^{n-1}} dx = \frac{4m + 1}{n - 2} \end{aligned}$$

A jobb oldal 0-hoz tart, ha $n$ tart végtelenhez, így $\lambda(L \cap (-m, m)) = 0$. Mivel $L$ lefedhető megszámolható sok nullmértékű halmaz uniójával, ezért maga is nullmértékű. □

Megjegyezzük, hogy a fenti bizonyításhoz hasonlóan, óvatosabb becslést alkalmazva, beláthatjuk azt is, hogy $L$ Hausdorff-dimenziója 0. Ennek a bizonyítása szintén megtalálható Oxtoby könyvében.

**1.1.4. Állítás.** *$L$ eltolásinvariáns a racionális számokra nézve, azaz $L + q = L$ minden $q \in \mathbb{Q}$-ra.*

*Bizonyítás.* Triviális. □

## 1.2. Mérhetetlenség

Most belátjuk, hogy $L$ egy mérhetetlen halmaz. A bizonyítások [3] alapján történnek. Először a következő két lemmát látjuk be:

**1.2.1. Lemma.** *Ha $B$ egy Lebesgue null-mértékű Borel-halmaz, és $\mu$ egy Borel-mérték, amire $\mu(B)$ pozitív és $\sigma$-véges, akkor létezik olyan $C \subset B$ kompakt részhalmaz, amire $\mu(C) > 0$ és $int(C - C) = \emptyset$.*

*Bizonyítás.* Az első lépésben belátjuk, hogy $\lambda$-majdnem minden $t$-re $\mu(B \cap (B + t)) = 0$. Jelölje $\mathcal{A}$ azt a $\sigma$-algebrát, ahol $\mu$ értelmezve van. Definiáljuk a következő új mértéket:

$$\mu_B(A) = \mu(B \cap A) \text{ minden } A \in \mathcal{A}\text{-ra}$$

Ez a mérték is $\sigma$-véges Borel-mérték lesz. Legyen

$$B' = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in B \right\}$$

Most alkalmazzuk Fubini-tételét. A szorzattér első komponensének a mértékének $\mu_B$-t választjuk, a másodikénak pedig $\lambda$-t. Rögzített $x$-re $B'$ függőleges szekciói $\{y \in \mathbb{R} : y \in B - x\} = B - x$ alakúak, ezek pedig a feltétel miatt null-mértékűek. Tehát a Fubini-tétel szerint $(\mu_B \times \lambda)(B') = 0$. Ekkor $\lambda$-m.m vízszintes szekció is 0-mértékű ($\mu_B$ szerint). Egy vízszintes szekció $B - y$ alakú, ezért $\lambda$-m.m. $y$-ra $0 = \mu_B(B - y) = \mu(B \cap (B - y))$. Ez pedig pont az, amit be akartunk látni az első lépésben.

A második lépésben keresünk egy $H$ Borel-halmazt, ami megfelel a lemmabeli állításnak, azaz $H \subset B$, $\mu(H) > 0$ és $\mathrm{int}(H - H) = \emptyset$. Legyen $D$ egy olyan megszámolható sűrű halmaz, hogy $\mu(B \cap \cap (B + t)) = 0$ minden $t \in D$ -re (az előző lépés szerint ilyen létezik) . Ekkor $H$ legyen a következő:

$$H = B \setminus \bigcup_{t \in D} (B + t)$$

A $t$-k választása miatt $\mu(B \cap (\cup_{t \in D} B + t)) = 0$, így $\mu(H) = \mu(B) > 0$. Továbbá $t \in D$-re $t \notin (H - - H)$, különben valamilyen $a, b \in H$ számokra $a = b + t$, de $a \in H \subset B \setminus (B + t)$, ami ellentmondás. Tehát $D \cap (H - H) = \emptyset$ és $D$ sűrű, így $\mathrm{int}(H - H) = \emptyset$. Azaz $H$ valóban megfelel a feltételeknek.

Utolsó lépésként megadjuk a $C$ kompakt halmazt, mégpedig az előbb definiált $H$ részhalmazaként. $H \subset B$, így $H$ $\sigma$-véges. Legyen $H = \bigcup_n A_n$, ahol $A_n \in \mathcal{A}$ és $\mu(A_n) < \infty$. Mivel $H$ pozitív mértékű, így valamelyik $A_n$-re $\mu(A_n) > 0$. Legyen $A = A_n$. Definiáljuk a következő mértéket:

$$\mu_A(S) = \mu(A \cap S) \text{ minden } S \subset \mathbb{R} \text{ Borel halmazra}$$

Ekkor $\mu_A$ egy véges mérték. Ismert, hogy ekkor

$$\mu_A(H) = \sup \{\mu_A(C) : C \text{ kompakt}\}$$

Mivel $\mu_A(H) = \mu(A \cap H) = \mu(A) > 0$, létezik egy kompakt $C \subset A$, amire $0 < \mu_A(C) = \mu(A \cap C) = = \mu(C)$. Mivel $C \subset H$, ezért $\mathrm{int}(C - C) = \emptyset$. Ezzel bebizonyítottuk a lemma állítását. □

A következő lemma bizonyításához szükség lesz egy egyszerű állításra a kompakt halmazok különbségéről:

**1.2.2. Állítás.** *Legyenek $K, L \subset \mathbb{R}$ kompakt halmazok. Ekkor $K - L$ is kompakt.*

*Bizonyítás.* A $K - L$ halmaz nyilván korlátos, ezért elég belátni, hogy zárt. Legyen $k_i \in K$, $l_i \in L$ olyan számok, amire $k_i - l_i$ konvergens, be kell bizonyítani, hogy a határérték $K - L$-ben van. A $k_i$ sorozatnak van konvergens részsorozata $K$ kompaktsága miatt, így feltehető, hogy $k_i \to a \in K$. Hasonlóan, $l_i$-nek is van konvergens részsorozata, ezért $l_i \to b \in L$ és $k_i - l_i \to a - b \in K - L$. □

**1.2.3. Lemma.** *Legyen $B$ egy $G_\delta$ halmaz, amire $\{t \in \mathbb{R} : B + t \subset B\}$ sűrű, és $C \subset B$ olyan kompakt halmaz, amire int$(C - C) = \emptyset$. Ekkor $C$-nek van nem megszámolható sok diszjunkt eltoltja $B$-ben.*

*Bizonyítás.* Legyen $T = \{t \in \mathbb{R} : C + t \subset B\}$. Mivel $B$ $G_\delta$, ezért léteznek $U_n$ nyílt halmazok, hogy $B = \bigcap_n U_n$. $C + t \subset \bigcap_n U_n$ pontosan akkor, ha $C + t \subset U_n$ minden $n$-re. Emiatt $T = \bigcap G_n$, ahol

$$G_n = \{t \in \mathbb{R} : C + t \subset U_n\}.$$

Legyen $t_0 \in G_n$. Mivel $C$ kompakt és $U_n$ nyílt, ezért $d = \operatorname{dist}(C + t_0, \mathbb{R} \setminus U_n) > 0$, és így $t \in G_n$, ha $|t - t_0| < \frac{d}{2}$. Tehát $G_n$ nyílt. Azaz $T$ egy sűrű $G_\delta$ halmaz, ezért második kategóriás.

Kell keresnünk több, mint megszámolható sok diszjunkt eltoltat, ehhez transzfinit indukciót fogunk használni: keressük a számoknak egy $(t_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ sorozatát, amelyekre a $C + t_\alpha$ halmazok páronként diszjunktak. A $t_\alpha$ számokat $T$-ből fogjuk választani, ezért $C + t_\alpha \subset B$ minden $\alpha < \omega_1$-re.

A konstrukció: Nyilván $(C + t_\alpha) \cap (C + t_\beta)$ pontosan akkor üres, ha $t_\alpha \notin C - C + t_\beta$. Elég azt bizonyítani, hogy minden megszámolható $\alpha$ rendszámra találunk olyan $t_\alpha \in T$ számot, amire $t_\alpha \notin C - C + t_\beta$ , minden $\beta < \alpha$ rendszámra. Ha ezt nem lehetne megtenni, az azt jelentené, hogy $T \subset \bigcup_{\beta<\alpha} C - C + t_\beta$. A feltétel szerint $C - C$ belseje üres és az 1.2.2 állítás miatt zárt, tehát $C - C$ sehol sem sűrű halmaz. De $T$ második kategóriás, ezért nem lehet lefedni megszámolható sok sehol sem sűrű halmazzal, tehát ellentmondásra jutottunk. Így mindig találunk megfelelő $t_\alpha$ számot és ezzel igazoltuk a lemma állítását. $\square$

A két lemmát összerakva kimondjuk a következő tételt:

**1.2.4. Tétel.** *Legyen $B \subset \mathbb{R}$ egy nemüres $G_\delta$ halmaz, amire $\lambda(B) = 0$ és $\{t \in \mathbb{R} : B + t \subset B\}$ sűrű. Ekkor $B$ mérhetetlen halmaz.*

*Bizonyítás.* $B$ nyilván Borel-halmaz. Legyen $\mu$ egy olyan eltolásinvariáns mérték, amire $\mu(B) > 0$. Indirekten tegyük fel, hogy $\mu(B)$ $\sigma$-véges. Ekkor a 1.2.1 lemma miatt van egy $C$ kompakt részhalmaza $B$-nek, amire $\mu(C) > 0$ és $\operatorname{int}(C - C) = \emptyset$. De a 1.2.3 lemma szerint $C$-nek nem megszámolhatóan végtelen sok eltoltja van $B$-ben, így az nem lehet $\sigma$-véges. Tehát $B$ mérhetetlen. $\square$

Ezt a tételt a későbbiekben sokszor fogjuk használni. Az első alkalmazása a következő:

**1.2.5. Következmény.** *A Liouville-számok mérhetetlen halmazt alkotnak.*

*Bizonyítás.* Az előző szakasz állításai alapján teljesülnek az 1.2.4 tétel feltételei, így $L$ mérhetetlen halmaz. $\square$

Megjegyezzük, hogy az 1.2.4 tétel feltételei közül egy sem hagyható el. A nemüresség szerepel a mérhetetlenség definíciójában. Ha egy $B$ halmaz Lebesgue-mértéke pozitív, akkor $\sigma$-véges is, és így a Lebesgue-mérték egy megfelelő eltolás-invariáns mérték lesz, tehát $B$ nem mérhetetlen. A racionális számok és a számosságmérték jó ellenpélda olyan halmazra, ami nem $G_\delta$. Végül a $\{t \in \mathbb{R} : B + t \subset B\}$ halmaz sűrűségének szükségességére jó példa a Cantor-halmaz. A Cantor-halmaz Hausdorff-dimenziója $\log 2/\log 3$, és a megfelelő Hausdorff-mérték 1 [7, 3.3 Tétel], így a Cantor-halmaz nem lesz mérhetetlen.

Továbbá az 1.2.4 tétel segítségével további mérhetetlen halmazokat generálhatunk a következő eljárással: Legyen $A$ egy Lebesgue null-mértékű halmaz, $B$ pedig egy szintén nullmértékű $G_\delta$ halmaz, ami tartalmazza $A + \mathbb{Q}$-t. Tekintsük a $H = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}}(B + q)$ halmazt. Ez nyilván $G_\delta$ és $A \subset H$ miatt nemüres, továbbá eltolásinvariáns a racionálisakra nézve, így az 1.2.4 tétel miatt mérhetetlen. Vegyük észre, hogy minden $A$ nullmértékű halmaz lefedhető egy mérhetetlen halmazzal. Mivel a mérhetetlen halmazok megszámolható uniója is mérhetetlen (ez egyszerűen következik a definícióból), így a mérhetetlen halmazok és a nullmértékű halmazok által generált $\sigma$-ideál megegyezik.

# 2. fejezet

# Besicovitch-Eggleston és nem-normális számok

## 2.1. Normális számok

Ebben a fejezetben belátjuk, hogy a nem normális számok halmaza mérhetetlen. Ez az előző fejezetbeli tétel egy egyszerű következménye lesz.

**2.1.1. Definíció.** Egy $x$ valós szám normális, ha $d_1$, $d_2$,... számjegyeire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = 4.5$$

A normális számok halmazát jelöljük $N$-nel.

A fenti definícióban nem számít, hogy azoknál a számoknál, amiknek kétféle felírása van 10-es számrendszerben melyiket választjuk, hiszen az egyikben egy ponttól kezdve csak 0, a másikban meg csak 9 lesz. Nyilván egyik felírás sem tesz eleget a definíciónak.

Ismert, hogy a nagy számok erős törvénye miatt majdnem minden szám normális. Emiatt $N$ nem lehet mérhetetlen, hiszen a Lebesgue-mértéke $\sigma$-véges. Azonban a komplementere már valóban mérhetetlen lesz. Először belátjuk két tulajdonságát a mérhetetlen halmazoknak:

**2.1.2. Állítás.** *Megszámolható sok mérhetetlen halmaz uniója mérhetetlen*

*Bizonyítás.* Legyen $\mu$ egy eltolás-invariáns Borel mérték, és $A = \bigcup_n A_n$, ahol minden $A_n$ mérhetetlen. Ha van olyan $n$, amire $\mu(A_n)$ nem $\sigma$-véges, akkor $A$ se az. Ha nincs ilyen $n$, akkor minden $n$-re $\mu(A_n) = 0$, és így $\mu(A) = 0$. Tehát $A$ valóban mérhetetlen. □

**2.1.3. Állítás.** *Ha $A \triangle B$ (a szimmetrikus differencia) megszámolható sok elemből áll, akkor $A$ pontosan akkor mérhetetlen, ha $B$ is az.*

*Bizonyítás.* Ha $A$ megszámolható sok pontból áll, akkor $B$ is, és a számosság mérték miatt egyik sem mérhetetlen. Ha $A$ nem megszámolható sok pontból áll, akkor $\mu(A \triangle B) = 0$, ahol $\mu$ egy eltolásinvariáns mérték, ami nem a számosságmérték. Tehát $\mu(A) = \mu(B)$ minden eltolásinvariáns mértékre (ez már a számosságmértékre is igaz), így $A$ és $B$ halmazok pontosan ugyanakkor mérhetőek. $\square$

**2.1.4. Tétel.** *A nem-normális számok mérhetetlen halmazt alkotnak.*

*Bizonyítás.* A 2.1.3 állítás miatt elég az állítást belátni $(\mathbb{R} \setminus N) \setminus \mathbb{Q}$-ra. Ezt azért tesszük, hogy a véges tizedestört alakú számok ne okozzanak gondot. Bontsuk fel ezt a következő módon: $(\mathbb{R} \setminus N) \setminus \mathbb{Q} = = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m$ ahol:

$$H_m = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \geq 4.5 + \frac{1}{m} \right\}$$

és

$$G_m = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \leq 4.5 - \frac{1}{m} \right\}$$

Az 2.1.2 állítás miatt elég belátni, hogy minden $H_m$ és $G_m$ halmaz mérhetetlen. Csak az előbbire látjuk be, a másik eset hasonlóan bizonyítható.

A 1.2.4 tételt akarjuk alkalmazni. Jelölje $D$ a véges tizedestört alakban írható számokat. Nyilván $H_m + D \subset H_m$, hiszen véges sok számjegy változik csak meg. Mivel $D$ sűrű, így a tétel egyik feltételét teljesítettük. $H_m \subset \mathbb{R} \setminus N$ és majdnem minden szám normális, így $\lambda(H_m) = 0$. Be kell még látni, hogy $H_m$ egy $G_\delta$ halmaz. Ehhez bontsuk fel az alábbi módon:

$$H_m = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=l}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} > 4.5 + \frac{1}{m} - \frac{1}{k} \right\}$$

A legbelül levő halmaz nyilván nyílt $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$-ban (itt használjuk ki, hogy végtelen sok nem nulla számjegye van $x$-nek), így $H_m$ egy $G_\delta$ halmaz $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$-ban, és $\mathbb{R}$-ben is. $\square$

## 2.2. Besicovitch-Eggleston számok

A Besicovitch-Eggleston számok olyan számok, melyekben a számjegyek gyakorisága adott számhoz konvergál. Jelölje $0.d_1d_2\ldots$ az $x$ szám törtrészét valamilyen $b$ alapú számrendszerben.

**2.2.1. Definíció** (Besicovitch-Eggleston számok)**.** Legyenek $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{b-1}$ nemnegatív valós számok, amelyekre $\sum_{i=0}^{b-1} \alpha_i = 1$. Ekkor

$$BE(\alpha_0, \ldots \alpha_{b-1}) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \forall d = 0 \ldots b-1\text{-re } \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{i : 1 \leq i \leq n, d_i = d\}}{n} = \alpha_d \right\}$$

Az ilyen számok számjegyeinek eloszlása tehát rögzített. Ezen számok közül a $BE\left(\frac{1}{b}, \ldots \frac{1}{b}\right)$ halmazba esők normálisak lesznek. A nagy számok törvényének alkalmazásával kapjuk, hogy még ezek is sokan vannak, azaz majdnem minden valós szám ebbe a halmazba esik:

**2.2.2. Tétel.** *Majdnem minden $x \in \mathbb{R}$-re igaz, hogy $x \in BE\left(\frac{1}{b}, \ldots \frac{1}{b}\right)$.*

*Bizonyítás.* Azt látjuk be, hogy majdnem minden $x$-re a 0-ák aránya a kifejtésben $\frac{1}{b}$-hez tart. Jelölje $X_i$ azt az indikátorváltozót, ami 1, ha az $x$ $i$-dik számjegye 0. Ekkor $P(X_i = 1) = \frac{1}{b}$. A nagy számok erős törvénye miatt

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \to \frac{1}{b}$$

majdnem minden $x$-re. Ugyanez igaz az $1, 2, \ldots, b-1$ számjegyekre is, így ezen események metszete is 1 valószínűségű. Ezzel igazoltuk az állítást. □

Jelölje most az összes fenti típusú halmaz unióját $BE_b$. Belátjuk, hogy ezen számok komplementerei mérhetetlen halmazt alkotnak.

**2.2.3. Tétel.** *A* $\mathbb{R} \setminus BE_b$ *halmaz mérhetetlen.*

*Bizonyítás.* A 2.1.4 tételhez hasonlóan az $(\mathbb{R} \setminus BE_b) \setminus \mathbb{Q}$ halmazra látjuk be az állítást. Bontsuk fel ezt a következő módon:

$$(\mathbb{R} \setminus BE_b) \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{d=0}^{b-1} \bigcup_{\substack{p<q \\ p,q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]}} \left(A_q^d \cap B_p^d\right),$$

ahol

$$A_q^d = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \limsup_{n \to \infty} \frac{\operatorname{card}\{i : 1 \le i \le n, d_i = d\}}{n} \ge q \right\}$$

és

$$B_p^d = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \liminf_{n \to \infty} \frac{\operatorname{card}\{i : 1 \le i \le n, d_i = d\}}{n} \le p \right\}.$$

Az $A_q^d$ és $B_p^d$ halmazok nullmértékűek a 2.2.2 tétel miatt. Továbbá eltolásinvariánsak a véges tizedes tört alakú számokkal való eltolásra is. Ahhoz, hogy a 1.2.4 tételt alkalmazzuk, elég belátni, hogy $A_q^d$ és $B_p^d$ mindketten $G_\delta$ halmazok. Ekkor a metszetük is az, és alkalmazhatjuk a tételt. Mivel

$$A_q^d = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \frac{\operatorname{card}\{i : 1 \le i \le n, d_i = d\}}{n} > q - \frac{1}{l} \right\}$$

és a kapcsos zárójelen belül levő halmaz nyílt $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$-ban, így $A_q^d$ egy $G_\delta$ halmaz $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$-ban és így $\mathbb{R}$-ben is. Ezzel kész a bizonyítás. □

A következő lépésként a Besicovitch-Eggleston számok egy típusáról látjuk be, hogy mérhetetlenek, mégpedig azokról, ahol az $\alpha_i$ számok közül valamelyik 1. Vegyük észre, hogy ekkor a többi $j$ indexre $\alpha_j = 0$, azaz lényegében ”csak egy” számjegy szerepel a felbontásban.

Először lássunk a természetes számok egy halmazáról egy definíciót:

**2.2.4. Definíció.** Legyen $H$ a természetes számok egy részhalmaza. A $H$ halmaz *sűrűsége* a következő limesz értéke (ha létezik):

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{card}(H \cap [1, n])}{n}$$

Az alábbi egyszerű állítások hasznosak lesznek a későbbiekben. Az első állítás szerint két nulla sűrűségű halmaz uniója is az, így a nulla sűrűségű halmazokat tekinthetjük "elhanyagolhatónak" egy bizonyos értelemben.

**2.2.5. Állítás.** *Ha $A$ és $B$ nulla sűrűségű halmazok, akkor $A \cup B$ is az.*

*Bizonyítás.* A következő egyenlőtlenségből triviálisan következik:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{card}((A\cup B)\cap[1,n])}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{card}(A\cap[1,n])}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{card}(B\cap[1,n])}{n}$$

□

**2.2.6. Következmény.** *Ha $A$ és $B$ 1 sűrűségű halmazok, akkor $A \cap B$ is az.*

*Bizonyítás.* Komplementereket véve triviálisan jön az előző állításból. □

A mérhetetlenség bizonyításához a következő lemmát fogjuk használni. Ez a későbbiekben is hasznos lesz, ezért különválasztottuk a bizonyítás többi részétől.

**2.2.7. Lemma.** *Legyen $B$ egy Borel-halmaz, amire $\lambda(B) = 0$, $B + B \subset B$, és $B - B$ nem $F_\sigma$ halmaz. Ekkor $B$ mérhetetlen.*

*Bizonyítás.* Indirekt bizonyítást használunk. Legyen $\mu$ egy eltolás-invariáns Borel-mérték, amire $\mu(B)$ pozitív és $\sigma$-véges. Az 1.2.1. lemma bizonyításában használt módszerrel beláthatjuk, hogy létezik egy $C \subset B$ kompakt halmaz, amire $\mu(c) > 0$. Most kell keresnünk $C$-nek nem megszámolható sok eltoltját $B$-ben.

Transzfinit indukciót fogunk használni, az 1.2.3 lemma bizonyításához hasonlóan: keressük a számoknak egy $(t_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ sorozatát, amelyekre a $C + t_\alpha$ halmazok páronként diszjunktak. A $t_\alpha$ számokat $B$-ből fogjuk választani, ezért $C + t_\alpha \subset B$ minden $\alpha < \omega_1$-re.

Nyilván $(C + t_\alpha) \cap (C + t_\beta)$ pontosan akkor üres, ha $t_\alpha \notin C - C + t_\beta$. Elég azt bizonyítani, hogy minden megszámolható $\alpha$ rendszámra találunk olyan $t_\alpha \in B$ számot, amire $t_\alpha \notin C - C + t_\beta$ , minden $\beta < \alpha$ rendszámra, azaz utóbbi halmazok nem tudják lefedni $B$-t. A $C - C + t_\beta = (C + t_\beta) - C$ halmazok mind a $B - B$ részhalmazai lesznek. Most tegyük fel, hogy $B \subset \bigcup_{\beta<\alpha} (C - C + t_\beta)$. Ekkor:

$$B - B = \bigcup_{\beta,\gamma<\alpha} ((C - C + t_\beta) - (C - C + t_\gamma))$$

Az $\supset$ irányú tartalmazáshoz kihasználjuk, hogy $B - B$ csoport. A jobb oldalon levő halmazok mind zártak, ezért $B - B$ egy $F_\sigma$ halmaz lesz, ami ellentmondás. Tehát tudunk találni megfelelő $t_\alpha$ számokat, és így létezik $C$-nek $\omega_1$ darab páronként diszjunkt eltoltja $B$-ben, tehát $\mu(B)$ nem $\sigma$-véges. □

A következő lemma segítségével beláthatjuk az állítást a $BE(1,0,\ldots,0)$ halmazokra:

**2.2.8. Lemma.** *Jelölje $d_i$ az $x$ szám törtrészének $i$-dik tizedesjegyét, a számrendszer alapszámát $d$, továbbá legyen*

$$G = \{x \in \mathbb{R} : d_n = d_{n+1} = 0 \textit{ vagy } d_n = d_{n+1} = d - 1 \textit{ egy 0 sűrűségű halmazt kivéve}\}.$$

*Ekkor $BE(1,0,\dots,0) - BE(1,0,\dots,0) = G$ és $G$ egy Borel, de nem $F_\sigma$ halmaz.*

*Bizonyítás.* A rövidség kedvéért legyen $B = BE(1,0,\dots,0)$ és

$$S(x) = \{n \in \mathbb{N} : d_n \neq d_{n+1} \text{ vagy } d_n = d_{n+1} \text{ és } d_n \neq 0, d-1\}.$$

Vegyük észre, hogy $G = \{x \in \mathbb{R} : S(x) \text{ egy 0 sűrűségű halmaz}\}$, azaz $S(X)$ a "hibás" indexek halmaza. Első lépésként belátjuk, hogy $B - B = G$.

Először bebizonyítjuk, hogy $B - B \subset G$. Válasszunk két $a, b \in B$ számot. Ha $b$ $d$-adikus (azaz $d$ alapú számrendszerben véges sok számjegyből áll a kifejtése), akkor $(-b)$ is $d$-adikus. $a - b = a + (-{-b}) \in B$, hiszen csak véges sok számjegy változott meg $a$-hoz képest. Tehát feltehető, hogy $b$ nem $d$-adikus. Ekkor $(-b)$ törtérészének $i$-dik számjegye $d - 1 - d_i$ lesz. Valóban, hiszen ezzel a felírással a két számjegysorozat összege 1 lesz, és könnyen látható, hogy $\{-x\} = 1 - \{x\}$. Továbbá $b$ nem $d-$adikus, így csak egyetlen lehetséges kifejtés van. Most jelölje $d_i$, $e_i$, $f_i$ az $a$, $(-b)$, $a + (-b)$ számok törtrészének $i$-dik számjegyét. Vegyük észre, hogy az $e_i$ számok, egy 0 sűrű halmazt kivéve, mind egyenlőek $(d-1)$-gyel. Ekkor az $A = \{i \in \mathbb{N} : d_i = d_{i+1} = 0, e_i = e_{i+1} = d - 1\}$ halmaz 1 sűrűségű a 2.2.6 következmény szerint. Tegyük fel, hogy $i \in A$. Attól függően, hogy az összeadáskor az $i + 2$-dik helyen képződött-e maradék vagy sem, $f_i = f_{i+1} = d - 1$ vagy $f_i = f_{i+1} = 0$ lesz. Ekkor tehát

$$A \subset \{i : f_i = f_{i+1} = 0 \text{ vagy } f_i = f_{i+1} = d - 1\} = \mathbb{N} \setminus S(a + (-b)).$$

Tehát $S(a - b)$ 0 sűrűségű és így $a - b \in G$.

Most belátjuk a másik irányt, azaz $G \subset B - B$-t. Vegyünk egy tetszőleges $x \in G$ elemet, a törtrészének számjegyeit jelölje $d_i$. Ehhez kell találnunk egy olyan $b \in B$ számot, amire $x + b \in B$. Legyenek $\{b\}$ számjegyei az $e_i$ számok. Definiáljuk őket a következő módon (felülről lefelé haladva a szabályokon, az első érvényest használva):

1. Ha $d_i = 0$, akkor $e_i = 0$
2. Ha $d_{i+1} = 0$, akkor $e_i = d - d_i$
3. Egyébként $e_i = d - d_i - 1$

Mivel $x \in G$, ezért egy nulla sűrű halmazt kivéve $d_i = 0$, ezért ugyanezekre a számjegyekre $e_i = 0$. Tehát $b \in B$. Be kell még látni, hogy $x + b \in B$. Jelölje $x + b$ számjegyeit $f_i$. A következő állítást látjuk be:

$$f_i \neq 0 \Leftrightarrow d_i = 0 \text{ és } d_{i+1} \neq 0 \tag{2.1}$$

Ezt elég lesz bizonyítani, hiszen ekkor $\{i : f_i \neq 0\} \subset S(x)$, és így $x + b$ nem nulla számjegyei egy nulla sűrűségű halmazt alkotnak. Most lássuk be az állítást. Először legyen $d_{i+1} = 0$. Ekkor $e_{i+1} = 0$ (az $e_n$ számok definíciójában az első pontot kell figyelembe venni). Tehát az $i + 1$-dik helyről nem érkezik maradék az összeadáskor, ezért $f_i$ csak $d_i$-től és $e_i$-től függ. Ugyan $d_i$ értékétől függ az $d_i + e_i$ összeg (0 vagy $d$ az eredmény), de mindkét esetben $f_i = 0$ (esetleg egy maradék képződik).

Tehát feltehetjük, hogy $d_{i+1} \neq 0$, és elég belátni, hogy $f_i \neq 0 \Leftrightarrow d_i = 0$. Jelölje $k$ az első indexet $i$ után, amire $d_k = 0$. Vegyük észre, hogy $d_{i+1} \neq 0$ miatt $k \geq i+2$. Ekkor $b$ definíciója szerint $e_k = 0$, $e_{k-1} = d - d_{k-1}$ és $e_j = d - d_j - 1$, ha $i+1 \leq j \leq k-2$. A $k$-dik helyen nem képződik maradék az összeadáskor. A $k-1$-dik helyen $d_{k-1} + e_{k-1} = d$, így itt keletkezik egy új maradék. A $k-2$-dik helyen (ha $k-2 > i$) $d_{k-2} + e_{k-2} + 1 = d$, így itt is keletkezik maradék. Ezt az eljárást ismételve kapjuk, hogy az $i+1$-dik helyen is keletkezik maradék. Most, ha $d_i = 0$, akkor $e_i = 0$ így a maradékkal együtt $f_i = 1$. Ha $d_i \neq 0$, akkor $e_i = d - d_i - 1$, és így $d_i + e_i + 1 = d$, tehát $f_i = 0$. Azaz beláttuk, hogy $f_i \neq 0 \Leftrightarrow d_i = 0$, így a (2.1) állítást is, tehát $B - B = G$ valóban.

Most be kell látni, hogy $G$ Borel, de nem $F_\sigma$. Előbbi nyilvánvaló az alábbi felírásból:

$$\begin{aligned} G &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{i : 1 \leq i \leq n, i \in S(x)\}}{n} = 0 \right\} \\ &= \bigcap_k \bigcup_{N_o \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N_0} \left\{ \left| \frac{\operatorname{card}\{i : 1 \leq i \leq n, i \in S(x)\}}{n} \right| < \frac{1}{k} \right\} \end{aligned}$$

A jobb oldal nyilván nyílt, így $G$ Borel. Most belátjuk, hogy $G$ nem egy $F_\sigma$ halmaz. Indirekten bizonyítunk, tegyük fel, hogy $G$ egy $F_\sigma$ halmaz. Álljon $C$ azokból a valós számokból, amik $d$ alapú számrendszerbeli felírásukban csak a 0 és $d-1$ számjegyek szerepelnek. Ez a Cantor-halmazhoz hasonlóan definiált halmaz, és a Cantor-halmaz zártságával megegyezően beláthatjuk, hogy $C$ zárt. Ekkor a $H = G \cap C$ halmaz is $F_\sigma$ halmaz. Jelölje $D$ a $d$-adikus számokat. Definiáljuk az $f : [0{,}1) \setminus D \to [0{,}1) \setminus D$ függvényt a következő módon: ha $x = 0.d_1 d_2 \ldots$, akkor legyen $f(x) = 0.e_1 e_2 \ldots$, ahol

$$e_1 = \begin{cases} 0 & \text{ha } d_1 = 0 \\ d-1 & \text{különben} \end{cases}$$

és

$$e_{n+1} = \begin{cases} e_n & \text{ha } d_n = 0 \\ d-1-e_n & \text{különben} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy $e_n \in \{0, d-1\}$ és $e_{n+1} = e_n$ pontosan akkor, ha $d_n = 0$. Ez jó definíció lesz, hiszen $f(x) \in [0{,}1) \setminus D$, különben $x \in D$ lenne. $f$ folytonos, hiszen $f(x)$ első $n$ számjegye csak $x$ első $n$ jegyétől függ. Továbbá $f^{-1}(H \cap ([0{,}1) \setminus D)) = B \cap ([0{,}1) \setminus D)$. A feltétel miatt $H \cap ([0{,}1) \setminus D)$ $F_\sigma$ halmaz $([0{,}1) \setminus D)$-ben, így $B \cap ([0{,}1) \setminus D)$ is $F_\sigma$ halmaz $([0{,}1) \setminus D)$ -ben, mivel az $f$ általi ősképe. $D$ megszámolható sok pontból áll, ezért $F_\sigma$ halmaz, a komplementere, $[0{,}1) \setminus D$, pedig $G_\delta$. Ekkor léteznek $F_i$ zárt halmazok, hogy

$$B \cap ([0{,}1) \setminus D) = \bigcap_i (F_i \cap ([0{,}1) \setminus D)) = \bigcap_i F_i \cap ([0{,}1) \setminus D)$$

azaz $B \cap ([0{,}1) \setminus D)$ egy $F_\sigma$ és $G_\delta$ halmaz metszete. Ehhez jön még megszámolható sok pont, így kapjuk, hogy $B \cap [0{,}1)$ egy $G_{\delta\sigma}$ halmaz. Most álljon $C'$ azokból a számokból, amelyek $d$-számrendszerbeli kifejtésükben csak 0 és 1 van. Ekkor $B \cap [0{,}1) \cap C'$ még mindig $G_{\delta\sigma}$ halmaz $C'$ zártsága miatt. Vegyük azt a folytonos $g : C' \to \mathbb{R}$ függvényt, ami az $x \in C'$ szám $d$-es számrendszerbeli alakját kettes számrendszerbeliként értelmezi. Ez nyilván folytonos bijekció és $g(B \cap [0,1) \cap C') = B(1,0) \cap [1,0)$. Tehát $B(1,0) \cap [1,0)$ is egy $G_{\delta\sigma}$ halmaz. Ez azonban ellentmondás, hiszen $B(1,0) \cap [0,1)$ valójában egy $F_{\sigma\delta}$ halmaz a következő állítás szerint. □

Most meghatározzuk $B(1,0)$ pontos Borel-osztályát. Ezt visszavezetjük egy másik halmaz Borel-osztályának meghatározására, ami már ismert.

**2.2.9. Tétel.** *$B(1,0)$ pontos Borel-osztálya $F_{\sigma\delta}$, azaz $B(1,0) \in F_{\sigma\delta} \setminus G_{\delta\sigma}$ .*

*Bizonyítás.* Jelölje $2^{\mathbb{N}}$ azt a teret, aminek pontjai az $\mathbb{N}$ részhalmazai, és $A, B \subset \mathbb{N}$ esetén $d(A,B) = 2^{-n-1}$, ahol $n$ az $A \triangle B$ legkisebb eleme (tehát $n$ a legkisebb olyan szám, amire az $A$ és $B$ halmazok különböznek). Tudjuk, hogy az $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ nulla sűrűségű halmaz}\} \in F_{\sigma\delta} \setminus G_{\delta\sigma}$, a bizonyítás például megtalálható [6]-ben. Legyen $H = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ vagy } \mathbb{N} \setminus A \text{ véges}\}$. Vegyük azt az

$$f : 2^{\mathbb{N}} \setminus H \to [0,1] \setminus \mathbb{D}$$

bijekciót, ami az $A$ halmazhoz azt a $0.x_1x_2\ldots$ kettes számrendszerbeli számot rendeli, ahol $x_i = 1 \Leftrightarrow i \in A$. Mivel a $H$-beli elemeket kizártuk, ezért $0.x_1x_2\ldots$ számban végtelen sok 1 és 0 lesz, tehát $f$ valóban bijekció. Nyilván folytonos, továbbá

$$f\,(\mathcal{A} \setminus H) = B(1,0) \cap [0,1] \setminus \mathbb{D},$$

így $\mathcal{A} \setminus H$ és $B(1,0) \cap [0,1] \setminus \mathbb{D}$ pontos Borel osztálya megegyezik a $2^{\mathbb{N}} \setminus H$ illetve a $[0,1] \setminus \mathbb{D}$ terekben. Innen következik, hogy $B(1,0) \cap [1,0]$ pontos Borel osztálya is $F_{\sigma\delta}$. □

Most már csak össze kell rakni az eddig bizonyított lemmákat. A $BE(0,0,1,0,\ldots)$ típusú halmazok (tehát ahol nem a 0 a gyakori számjegy) eltolások segítségével származtathatók a $BE(1,0,\ldots,0)$ halmazból, így a mérhetetlenség is megmarad.

**2.2.10. Tétel.** *Legyenek az $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{d-1}$ számok olyanok, hogy közülük pontosan egynek az értéke 1, a többi pedig 0. Ekkor a $BE(\alpha_0, \ldots, \alpha_{d-1})$ halmaz mérhetetlen.*

*Bizonyítás.* Először belátjuk, hogy a $B = BE(1,0,\ldots,0)$ halmazra $B + B \subset B$. Legyen $a, b \in B$, a számjegyeiket jelölje $a_n$ és $b_n$. Ekkor a 2.2.6 következmény szerint egy nulla sűrűségű halmaz kivételével minden $n$-re $a_n = a_{n+1} = b_n = b_{n+1} = 0$. Ekkor az $n+1$-dik helyről biztos nem érkezik maradék az összeadáskor, így $a + b$ $n$-dik számjegye 0 lesz. Tehát $a + b \in B$. Ekkor a 2.2.7 és 2.2.8 lemmákat használva kapjuk, hogy $BE(1,0,\ldots,0)$ mérhetetlen. Vegyük észre, hogy

$$BE(1,0,\ldots,0) + 0.111\ldots = BE(0,1,0,\ldots,0).$$

Valóban, tetszőleges $b \in BE(1,0,\ldots,0)$-ra jelölje $b$ számjegyeit $b_n$. Ekkor egy nulla sűrűségű halmaz kivételével minden $n$-re $b_n = b_{n+1} = 0$. Az előző érveléshez hasonlóan, az $n+1$-dik helyről nem érkezik maradék (ha $d > 2$), így $c = b + 0.111\ldots$ $n$-dik számjegye 1 lesz. Tehát $c \in BE(0,1,0,\ldots,0)$, azaz $BE(1,0,\ldots,0) + 0.111\ldots \subset BE(0,1,0,\ldots,0)$. A megfordítást ugyanígy lehet belátni, egy tetszőleges

$c \in BE(0{,}1{,}0,\dots,0)$ számot választva, majd hozzáadva $\{-0.11\dots\} = 0.eee\dots$-t, ahol $e = d-1$. Mivel $BE(0{,}1{,}0,\dots,0)$ a $BE(1{,}0,\dots,0)$ eltoltja, ezért ő is mérhetetlen.

Hasonlóan, $BE(0{,}1{,}0,\dots,0) + 0.111\dots = BE(0{,}0{,}1{,}0,\dots,0)$, így ez utóbbi halmaz is mérhetetlen. A bizonyítás egészen $BE(0,\dots,0{,}1{,}0)$-ig működik, utána azonban elromlik: ha $b_n = b_{n+1} = d - - 2$, akkor lehet, hogy az $n+1$-dik helyről érkezik maradék az $n$-dik helyre. A fenti módszer helyett azonban egyszerűen tekinthetjük $-BE(1{,}0,\dots,0) = BE(0,\dots,0{,}1)$ egyenlőséget, ezt már a 2.2.8 lemma bizonyítása közben beláttuk. Ekkor $BE(0,\dots,0{,}1)$-re teljesülnek 2.2.7 lemma feltételei, így ez is egy mérhetetlen halmaz, és ezzel kész az állítás. □

## 2.3. A Besicovitch-Eggleston számok további osztályai

Eddig beláttuk, hogy a Besicovitch-Eggleston számok komplementerei és a $B(1{,}0,\dots)$, $B(0{,}1{,}0,\dots)$, stb. halmazok mind mérhetetlenek. Tudjuk, hogy a $B\left(\frac{1}{b},\dots,\frac{1}{b}\right)$ halmaz nem mérhetetlen, hiszen Lebesgue-mértéke $\sigma$-véges. Fennmaradtak azok az osztályok, ahol valamelyik számjegy sűrűsége nem 0 vagy 1 vagy $\frac{1}{b}$. Ezekről nem ismert, hogy mérhetetlenek-e. Az alábbiakban bemutatunk egy állítást, ami a mérhetetlenség egy gyengébb változata.

**2.3.1. Állítás.** *Legyen $F$ egy nyílt halmaz lezártja, $\mu$ pedig egy eltolás-invariáns Borel-mérték. Legyen $B = BE(\alpha_0,\dots,\alpha_{b-1})$, ahol $\alpha_i < 1$ minden $i$-re és valamilyen $j$-re $\alpha_j \neq \frac{1}{b}$. Ekkor $\mu(B \cap F)$ mindig 0 vagy $\infty$.*

A bizonyítás a [1] cikkből származik. Először kimondunk egy lemmát, amin a bizonyítás alapulni fog.

**2.3.2. Lemma.** *Legyen $F \subset \mathbb{R}$ egy halmaz, amelynek Lebesgue-külső mértékére $0 < \lambda(F) < \infty$. Legyen $E \subset F$ egy mérhető halmaz, amire $\lambda(E) < \lambda(F)$. $\mu$ legyen egy külső mérték. Jelölje $B(c,r)$ a $c$ középpontú $r$ sugarú nyílt gömböt, és tegyük fel, hogy*

$$\mu\left(E \cap B(c,r)\right) \leq \frac{\lambda\left(B(c,r)\right)}{\lambda(F)}\mu(E)$$

*minden $c, r \in \mathbb{R}$ számra. Ekkor $\mu(E) = 0$ vagy végtelen.*

*Bizonyítás.* Indirekten bizonyítunk, azaz tegyük fel, hogy $0 < \mu(E) < \infty$. $\lambda(E) < \lambda(F)$ miatt létezik $E$-nek olyan fedése nyílt $B(c_i, r_i)$ gömbökkel, amire $\sum \lambda\left(B(c_i, r_i)\right) < \lambda(F)$. Ekkor:

$$\begin{aligned} 0 &< \mu(E) = \mu\left(E \cap \left(\bigcup_i B(c_i, r_i)\right)\right) = \mu\left(\bigcup_i \left(B(c_i, r_i) \cap E\right)\right) \\ &\leq \sum_i \mu\left(B(c_i, r_i) \cap E\right) \leq \frac{\mu(E)}{\lambda(F)} \sum_i \lambda\left(B(c_i, r_i)\right) < \mu(E) \end{aligned}$$

Ez nyilván ellentmondás, tehát $\mu(E) = 0$ vagy $\infty$. □

Az állítás belátáshoz a következő, általánosabb tételt fogjuk bizonyítani:

**2.3.3. Tétel.** *Legyen $E \subset \mathbb{R}$ olyan mérhető halmaz, amire $\lambda(\mathbb{R} \setminus E) > 0$. Tegyük fel, hogy létezik olyan $l \geq 2$ egész szám, amire $E$ eltolásinvariáns az összes $\frac{a}{l^k}$ alakú racionális számra (a egész szám). Legyen $\mu$ egy eltolás-invariáns Borel-mérték, $F$ pedig egy nyílt halmaz lezártja. Ekkor $\mu(E \cap F)$ mindig 0 vagy $\infty$.*

Ebből triviálisan következik a 2.3.1 állítás az $l = b$ választással. Valóban, a $b$-adikus számok csak véges sok helyen változtatják meg a számjegyeket, így $B + \frac{a}{b^k} \subset B$. Továbbá $BE\left(\frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{b}\right) \subset \mathbb{R} \setminus B$ miatt $\lambda(\mathbb{R} \setminus B) > 0$ is igaz lesz.

*Bizonyítás.* Elég bizonyítani olyan $F$ halmazokra, amik $\left[0, \frac{a}{l^k}\right]$ alakúak. Ugyanis, ha egy $F'$ halmaz egy nyílt halmaz lezártja, akkor létezik olyan előbbi alakú $F$ halmaz, amire $F + q \subset F'$, ahol $q$ tetszőleges valós szám. Ha $\mu(F) = \infty$, akkor $\mu(F') = \infty$ is igaz. Ha $\mu(F) = 0$, akkor $F'$-t le tudjuk fedni $F$-nek megszámolható sok eltoltjával, és így $\mu(F')$ is nulla.

Sőt, elég a [0,1] intervallumra belátni az állítást, ugyanis az eltolásinvariancia miatt $\mu(E \cap [0,1]) = l^k \mu\left(E \cap \left[0, \frac{1}{l^k}\right]\right)$, így a [0,1] és a $\left[0, \frac{a}{l^k}\right]$ intervallumok mértéke pontosan ugyanakkor 0 vagy végtelen.

Vezessük be az $I(j,k) = \left[\frac{j}{l^k}, \frac{j+1}{l^k}\right]$ jelölést. Mivel $E$ invariáns az $l^k$ nevezőjű eltolásokra, ezért $E \cap I(j,k) = E \cap \left[0, \frac{1}{l^k}\right] + \frac{j}{l^k}$. Ekkor:

$$\mu(E \cap [0,1]) = \sum_{j=0}^{l^k-1} \mu(E \cap I(j,k)) = l^k \mu\left(E \cap \left[0, \frac{1}{l^k}\right]\right),$$

innen az eltolás-invariancia miatt

$$\mu(E \cap I(j,k)) = \frac{\mu(E \cap [0,1])}{l^k}$$

Nyilván minden $(a,b)$ nyílt intervallum előáll diszjunkt $I(j,k)$ intervallumok uniójaként, például felírhatjuk a végpontok $l$-alapú számrendszerbeli kifejtése alapján. Azaz vannak olyan $j_i$ és $k_i$ számok, amire $(a,b) = \bigcup_i I(j_i, k_i)$ és $\mu((a,b)) = \sum_i \mu(I(j_i, k_i))$. Mivel a nyílt gömbök most intervallumok, ezért tetszőleges $c$ és $r$ számokra $B(c,r)$ felírható az előbbi alakban, így

$$\begin{aligned} \mu(B(c,r) \cap E \cap [0,1]) &= \mu\left(\bigcup_i I(j_i, k_i) \cap E \cap [0,1]\right) \leq \sum_i \mu(I(j_i, k_i) \cap E \cap [0,1]) \\ &\leq \mu(E \cap [0,1]) \sum_i \frac{1}{l^{k_i}} = \mu(E \cap [0,1]) \sum_i \lambda(I(j_i, k_i)) \qquad (2.2) \\ &= \mu(E \cap [0,1])\, \lambda(B(c,r)). \end{aligned}$$

Most a 2.3.2 lemmát akarjuk használni. A lemmában szereplő $F$ halmaznak válasszuk meg a [0,1] intervallumot, az ő részhalmazának pedig az $E \cap [0,1]$ halmazt. $\lambda(E \cap [0,1]) < \lambda([0,1])$, különben $\lambda([0,1] \setminus E) = 0$ lenne, és az eltolásinvarianciát használva $\lambda(\mathbb{R} \setminus E) = 0$-t kapnánk. A (2.2) egyenlőtlenség pont a lemma feltételét adja, így a lemma szerint $\mu(E \cap [0,1]) = 0$ vagy $\infty$. De ez pont a tétel állítása az $F = [0,1]$ esetben. □

Ebből a tételből már nyilván következik az állítás. Az $l = b$ helyettesítést használva $B + \frac{a}{b^k} \subset B$, hiszen $\frac{a}{b^k}$-nak csak véges sok nem nulla számjegye van. Továbbá, ahogy már megállapítottuk $\lambda(B) = 0$, így $\lambda(\mathbb{R} \setminus B) > 0$. Tehát alkalmazhatjuk a tételt.

# 3. fejezet

# További példák

Az eddig bemutatott halmazok mind elég ”egyszerűek” voltak abban az értelemben, hogy mindegyik $F_{\sigma\delta}$ vagy $G_{\delta\sigma}$ halmaz volt. Ebben a fejezetben belátjuk, hogy egy mérhetetlen halmaz Borel-osztálya tetszőleges lehet. Továbbá látunk példát tetszőleges Hausdorff-dimenziós mérhetetlen halmazra is.

## 3.1. Példák tetszőleges Borel-osztályú halmazra

Először röviden összefoglaljuk a Borel-hierarchiát alkotó osztályokat és definíciójukat. Ezek tetszőleges metrikus térben ugyanígy definiálhatók, de itt most elég nekünk $\mathbb{R}$-ben nézni őket.

**3.1.1. Definíció.** A Borel halmazok a nyílt halmazok által generált $\sigma$-algebra.

A Borel-hierarchiát alkotó Borel-osztályok definíciója az alábbi:

**3.1.2. Definíció** (Borel-osztályok)**.** Jelölje $\Sigma_1^0$ a nyílt halmazokat, $\Pi_1^0$ a zárt halmazokat. Ezek lesznek a legkisebb Borel-osztályok. Ezután tetszőleges $\alpha$ megszámolható rendszámra legyen:

$$\Sigma_\alpha^0 = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \Pi_{\beta_n}^0, \beta_n < \alpha \right\}$$

$$\Pi_\alpha^0 = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \Sigma_{\beta_n}^0, \beta_n < \alpha \right\}$$

$$\Delta_\alpha^0 = \Sigma_\alpha^0 \cap \Pi_\alpha^0$$

Könnyen belátható, hogy $\Sigma_\alpha^0 = \left\{ \mathbb{R} \setminus A : A \in \Pi_\alpha^0 \right\}$. Véges $\alpha$-ra a következő jelölések is használtak: $F = \Pi_1^0$, $G = \Sigma_1^0$, $F_\sigma = \Sigma_2^0$, $G_\delta = \Pi_2^0$, $F_{\sigma\delta} = \Pi_3^0$, stb. Az alábbi állítások összefoglalják a Borel-osztályok legfontosabb tulajdonságait. A bizonyítások megtalálhatóak a [5, 7] könyvekben.

**3.1.3. Állítás.** *A Borel-halmazok osztálya egyenlő az $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Pi_\alpha^0$ illetve a $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma_\alpha^0$ osztályokkal.*

Másként fogalmazva, minden Borel-halmaz benne van valamelyik Borel-osztályban, azaz a Borel-hierarchia valóban jól leírja a Borel-halmazokat.

**3.1.4. Állítás.** *A $\Pi^0_\alpha$ és $\Sigma^0_\alpha$ osztályok zártak a véges unióra és metszetre.*

**3.1.5. Állítás.** *Minden $\alpha < \beta$ rendszámra $\Sigma^0_\alpha \cup \Pi^0_\alpha \subset \Sigma^0_\beta \cap \Pi^0_\beta$, azaz a Borel-osztályok bővülő rendszert alkotnak.*

**3.1.6. Állítás.** *Minden $\alpha$-ra $\Sigma^0_\alpha \setminus \Pi^0_\alpha \neq \emptyset$, $\Pi^0_\alpha \setminus \Sigma^0_\alpha \neq \emptyset$ és $\bigcup_{\beta<\alpha} \Sigma^0_\beta \cup \Pi^0_\beta \subsetneq \Sigma^0_\alpha$, $\bigcup_{\beta<\alpha} \Sigma^0_\beta \cup \Pi^0_\beta \subsetneq \Pi^0_\alpha$. Másként fogalmazva, a Borel-osztályok folyamatosan nőnek és mindig van új elem a nagyobb osztályokban.*

**3.1.7. Definíció.** Egy $H$ halmaz pontos Borel-osztálya $\Sigma^0_\alpha$, ha $H \in \Sigma^0_\alpha \setminus \Pi^0_\alpha$. Hasonlóan, $H$ pontos Borel-osztálya $\Pi^0_\alpha$, ha $H \in \Pi^0_\alpha \setminus \Sigma^0_\alpha$, illetve $\Delta^0_\alpha$, ha $H \in \Delta^0_\alpha$, de $H \notin \bigcup_{\beta<\alpha} \Sigma^0_\beta \cup \Pi^0_\beta$.

Mielőtt továbbmennénk, finomítjuk azt az állítást, hogy létezik tetszőleges (pontos) Borel-osztályú mérhetetlen halmaz. Ugyanis a $\Delta^0_1$ és $\Sigma^0_1$ osztályok elemei nyíltak, és nyílt halmaz nem lehet mérhetetlen: például a Lebesgue-mértéke egy nyílt $G$ halmaznak pozitív, hiszen tartalmaz egy intervallumot, továbbá $\sigma$-véges, mivel az egész tér is $\sigma$-véges. A következőekben mutatunk példákat minden egyes osztályból. Elsőként $\alpha > 2$-re bizonyítunk, a 2.2.7 lemma segítségével.

**3.1.8. Tétel.** *Minden $\alpha \geq 3$ rendszámra létezik mérhetetlen halmaz a $\Delta^0_\alpha$, $\Sigma^0_\alpha$ és $\Pi^0_\alpha$ pontos Borel-osztályokból.*

*Bizonyítás.* Mauldin a [10] cikkben példát mutat $\mathbb{R}$-nek olyan $B$ részcsoportjaira, amik $\Delta^0_\alpha$, $\Sigma^0_\alpha$ illetve $\Pi^0_\alpha$ osztályúak. Mivel $B$ csoport az összeadásra, ezért $B + B \subset B$ igaz, illetve $B - B = B$ nem $F_\sigma$, ezért a 2.2.7 lemma szerint $B$ mérhetetlen. □

A következőekben adunk egy példát zárt mérhetetlen halmazra. Ez R. O. Davies konstrukciója [2]. Először tekintsük a következő definíciót:

**3.1.9. Definíció.** Legyenek $A$, $B$ Borel-halmazok. Ha $A$ előáll egy $A_0$ Borel-halmaz véges sok eltoltjának diszjunkt uniójaként, $B$ pedig tartalmazza $A_0$ kontinuum-sok diszjunkt eltoltját, akkor ezt $A \ll B$-val jelöljük.

Vegyük észre, hogy ha $\mu$ egy eltolás-invariáns mérték és $\mu(A) > 0$, akkor $\mu(B)$ nem $\sigma$-véges. Ugyanis a fenti $A_0$ halmazra $\mu(A_0) > 0$, és $A_0$-nak kontinuum sok diszjunkt eltoltja van $B$-ben.

Tegyük fel, hogy léteznek olyan $K_1$, $K_2$, … kompakt halmazokat, amikre $\sum \mathrm{diam}(K_i)$ véges és $K_1 \ll K_2 \ll \ldots$. Helyezzük ezeket $2\mathrm{diam}(K_i)$ hosszú nyílt intervallumok belsejébe, és rakjuk az intervallumokat egymás után. Adjuk hozzá ehhez a halmazhoz azt a határpontját, amihez az intervallumok konvergálnak. Az így kapott $K$ halmaz korlátos lesz, és nyilván zárt. Továbbá mérhetetlen is lesz: ha $\mu(K_i) = 0$ minden $i$-re, akkor az uniójuk is nullmértékű, tehát $\mu(K) = 0$. Ha pedig létezik $n$, hogy $\mu(K_n) > 0$, akkor a fenti megjegyzés miatt $\mu(K_{n+1})$ nem $\sigma$-véges, és így $K$ se az.

Most már elég megkonstruálni a fenti tulajdonságú $K_i$ halmazokat. Ehhez először vegyük a természetes számok halmazainak olyan csökkenő $N_r$ sorozatát, amelyekre a következők igazak:

1. $N_r$ végtelen halmaz
2. $N_r \setminus N_{r+1}$ végtelen minden $r$-re

Ilyen sorozat létezik, például a $2^r$-rel osztható számok. Legyen $K_r$ azon számok halmaza, amik az alábbi módon írhatóak:

$$x = \frac{c_r}{8^r} + \frac{c_{r+1}}{8^{r+1}} + \dots,$$

ahol $c_i$ egész, $0 \leq c_i < 8$ és $c_i = 1$ vagy 5, ha $i \in N_r$. Nyilván $\operatorname{diam}(K_r) \leq 8^{-r+1}$ és így $\sum \operatorname{diam}(K_i)$ véges. Továbbá $K_r$ zárt is, így kompakt. Legyen $A_r$ azon számok halmaza, amik az alábbi módon írhatóak:

$$x = \frac{c_{r+1}}{8^{r+1}} + \frac{c_{r+2}}{8^{r+2}} + \dots,$$

ahol a $c_i$ számokra ugyanazok a feltételek vonatkoznak, mint fentebb. Ekkor $K_r$ az $A_r$ halmaz 2 vagy 8 diszjunkt eltoltjának uniója, attól függően, hogy $r \in N_r$ vagy sem. Továbbá $K_{r+1}$ tartalmazza $A_r$ kontinuum sok eltoltját diszjunktan. Ezek az eltoltak azon $A_r + y$ halmazok lesznek, ahol $y$ az alábbi alakú:

$$y = \frac{d_{r+1}}{8^{r+1}} + \frac{d_{r+2}}{8^{r+2}} + \dots,$$

ahol $d_i = 0$ vagy 2, ha $i \in N_r \setminus N_{r+1}$, egyébként 0. Ezekből valóban kontinuum sok van és diszjunktak is, hiszen $y \neq y'$ esetén valamelyik $d_i$ számjegy különböző lesz, és ekkor $A_r + y$-ban $c_i = 1$ vagy 5, de $A_r + y'$-ben $c_i = 3$ vagy 7 (vagy fordítva). Tehát valóban $K_r \ll K_{r+1}$. Ezzel beláttuk, hogy $K$ mérhetetlen:

**3.1.10. Tétel.** *A fenti $K$ halmaz kompakt és mérhetetlen.*

Kis módosítással ez a halmaz jó lesz $\Delta_2^0$ osztályú példának is:

**3.1.11. Tétel.** *Legyen $K'$ az a halmaz, amit úgy kapunk, hogy $K$-ból elhagyjuk a fent hozzáadott torlódási pontot. Ekkor $K'$ mérhetetlen és pontos Borel-osztálya $\Delta_2^0$.*

*Bizonyítás.* A 2.1.3 állítás miatt $K'$ is mérhetetlen. $K'$ nyilván nem zárt, hiszen elhagytuk belőle az egyik torlódási pontot. Nem is nyílt, ez látszik $K_r$ konstrukciójából: minden nyílt halmazban van olyan $x$ szám, aminek $n$-dik számjegye 3, de $n \in N_r$, így $x \notin K_r$. $K'$ egy $F_\sigma$ halmaz, hiszen a $K_r$ kompakt halmazok uniója. Továbbá $G_\delta$ is: legyenek $I_r$ azok a nyílt intervallumok, amikbe $K_r$-t raktuk. Mivel $K_r$ zárt, ezért $G_\delta$ is, így felírható az alábbi alakban:

$$K_r = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_{r,i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} (G_{r,i} \cap I_r),$$

ahol $G_{r,i}$ nyílt halmazok. Ekkor az $I_r$ intervallumok diszjunktsága miatt:

$$K' = \bigcup_{r=1}^{\infty} K_r = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{r=1}^{\infty} (G_{r,i} \cap I_r),$$

itt a jobb oldalon nyílt halmazok uniója van, tehát $K'$ valóban $G_\delta$. Ezzel beláttuk, hogy $K'$ pontos Borel-osztálya valóban $\Delta_2^0$. □

Egy további módosítással könnyen nyerhetünk példát $F_\sigma$ osztályú halmazra:

**3.1.12. Tétel.** *A $K + \mathbb{Q}$ halmaz mérhetetlen és pontos Borel-osztálya $F_\sigma$*

*Bizonyítás.* A 2.1.2 állítás miatt ez valóban mérhetetlen és nyilván $F_\sigma$ halmaz is. Elég belátni, hogy $K + \mathbb{Q} \notin G_\delta$. Mivel a $K_r$ halmazok zártak és üres a belsejük (ezt beláttuk az előző tétel bizonyítása közben), ezért sehol sem sűrűek. A $K+\mathbb{Q}$ halmaz megszámlálható sok $K_r$ uniója, tehát első kategóriás és sűrű. Mivel a sűrű $G_\delta$ halmazok második kategóriásak a Baire kategória-tétel miatt, így $K+\mathbb{Q}$ nem lehet $G_\delta$ halmaz. □

Már minden Borel-osztályra adtunk példát, kivéve $G_\delta$-ra. Az első fejezetben látott Liouville számok pont ilyenek lesznek:

**3.1.13. Tétel.** *L, azaz a Liouville-számok halmaza mérhetetlen és pontos Borel-osztálya $G_\delta$.*

*Bizonyítás.* Az első fejezetben beláttuk, hogy $L$ mérhetetlen, sűrű és $G_\delta$. Utóbbi két tulajdonság miatt második kategóriás is. Tegyük fel, hogy $F_\sigma$ halmaz is, ekkor előáll $L = \bigcup F_i$ alakban, ahol $F_i$ zárt. Mivel $L$ második kategóriás, ezért az egyik $F_i$ nem sehol se sűrű, tehát nem üres a belseje. Így $L$ belseje sem üres, de $L \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ miatt ez lehetetlen. Tehát $L \in G_\delta \setminus F_\sigma$. □

Tehát, összefoglalva a 3.1.8-3.1.13 tételek eredményeit:

**3.1.14. Tétel.** *A $\Delta_1^0$ és a $\Sigma_1^0$ osztályok kivételével minden $\Gamma$ Borel-osztályra létezik olyan A mérhetetlen halmaz, aminek a pontos Borel-osztálya $\Gamma$.*

## 3.2. Példa tetszőleges Hausdorff dimenziójú halmazra

Ebben a szakaszban minden $0 < \alpha \leq 1$ számra mutatunk egy mérhetetlen halmazt, amelynek Hausdorff- és boxdimenziója éppen $\alpha$. Először definiáljuk a különböző dimenziófogalmakat, amikre szükség lesz a tétel kimondásához illetve bizonyításához. Bizonyítás nélkül megemlítjük a különböző dimenziók néhány érdekes tulajdonságát is. A második részben pedig kimondjuk és belátjuk, hogy léteznek tetszőleges Hausdorff-dimenziós mérhetetlen halmazok $\mathbb{R}$-ben.

### 3.2.1. Bevezetés

Először a Hausdorff-dimenziót tekintjük át. Ez sok szempontból a "legszebb" dimenzió, például tartozik hozzá mérték és egész esetekben ez a mérték megegyezik a Lebesgue-mértékkel. Az alábbiakban összefoglaljuk a Hausdorff-dimenzió definícióját és legfontosabb tulajdonságait. A bizonyítások megtalálhatóak például [7]-ban. A definíciók metrikus téren is értelmezhetőek, de itt elég lesz $\mathbb{R}$-et használni.

**3.2.1. Definíció.** Legyen $s \geq 0$ valós szám, $H \subset \mathbb{R}$ és $\delta > 0$. Ekkor legyen

$$\mu_\delta^s(H) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{diam} H_n)^s : H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \text{ és } \mathrm{diam} H_n \leq \delta \right\}.$$

Ha $s = 0$, akkor $0^0 = 1$ kifejtést használjuk. Ekkor az $s$-dimenziós Hausdorff-mérték definíciója:

$$\mu^s(H) = \lim_{\delta \to +0} \mu_\delta^s(H)$$

Vegyük észre, hogy a limesz mindig létezik, hiszen $\mu_\delta^s(H)$ monoton nő, ha $\delta$ csökken. Ekkor $\mu^s$ külső mérték lesz $\mathbb{R}$-en. Továbbá az $s=0$ és $s=1$ speciális esetekben $\mu^s$ egy-egy már ismert mérték:

**3.2.2. Állítás.** *$\mu^0$ a számosság mérték, azaz véges $H$-ra $\mu^0(H)$ egyenlő $H$ elemszámával, egyéb esetben pedig végtelen.*

**3.2.3. Állítás.** *Minden $H \subset \mathbb{R}$ halmazra, és $\delta > 0$-ra $\mu_\delta^1(H) = \mu^1(H) = \lambda(H)$, azaz $\mu^1$ az egydimenziós Lebesgue-mérték.*

A Hausdorff-mértékek segítségével tudjuk definiálni a Hausdorff-dimenziót. Ez a következő:

**3.2.4. Definíció.** Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz Hausdorff-dimenziója a következő szuprémum:

$$\sup\{s \geq 0 : \mu^s(H) > 0\}$$

A dimenzió egy fontos tulajdonságára világít rá a következő tétel:

**3.2.5. Tétel.** *Ha $H$ Hausdorff-dimenziója $s$, akkor:*

$$\mu^t(H) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } t < s \\ 0, & \text{ha } t > s \end{cases}$$

*Bizonyítás.* A $t > s$ eset triviálisan következik a definícióból. Ha $t < s$, akkor létezik egy $u > t$ szám, amire $\mu^u(H) > 0$. Rögzítsünk egy $\delta > 0$, számot és $H$-nak egy $H_n$ fedését legfeljebb $\delta$ átmérőjű elemekkel. Ekkor:

$$\begin{aligned} \mu_\delta^u(H) &\leq \sum_n (\mathrm{diam} H_n)^u = \sum_n (\mathrm{diam} H_n)^{u-t} (\mathrm{diam} H_n)^t \\ &\leq \delta^{u-t} \sum_n (\mathrm{diam} H_n)^t . \end{aligned}$$

Infimumot véve kapjuk, hogy $\mu_\delta^u(H) \leq \delta^{u-t}\mu_\delta^t(H)$. $\mu^u(H) > 0$ miatt minden elég kicsi $\delta$-ra $\mu_\delta^u(H) >$ $> \frac{\mu^u(H)}{2}$. Innen

$$\mu^t(H) \;=\; \lim_{\delta\to+0} \mu_\delta^t(H) \geq \lim_{\delta\to+0} \delta^{t-u}\mu_\delta^u(H) \geq \left(\lim_{\delta\to+0} \delta^{t-u}\right) \frac{\mu^u(H)}{2} = \infty.$$

□

Tehát $s$-nél kisebb dimenziós Hausdorff-mértékekre a $H$ mértéke végtelen, nagyobbakra meg 0. Ez összhangban van azzal, amit egy dimenziótól elvárnánk: egy egyenes vonal a síkon nullmértékű a 2-dimenziós Lebesgue-mértékre nézve. Egy egyenes "elhanyagolható" a síkon, hiszen nem lehet megszámolható sokkal lefedni a teljes síkot. Ugyanígy a Hausdorff-mértékeknél: egy kisebb dimenziós halmaz elhanyagolható egy nagyobb dimenziós mérték szempontjából, tehát logikus, hogy nulla legyen a mérték. Fordítva nézve, egy nagyobb dimenziós halmazról nem tudunk értelmeset mondani egy kisebb dimenzióból nézve, csak azt, hogy "nagy", azaz végtelen a mértéke.

**3.2.6. Következmény.** *Legyen* $H_i \subset \mathbb{R}$. *Ekkor* $\dim_H \bigcup_i H_i = \sup_i \dim_H H_i$.

*Bizonyítás.* Legyen $H = \bigcup_i H_i$. Ha valamilyen $s$-re és $i$-re $\mu^s(H_i) = \infty$, akkor $\mu^s(H) = \infty$, azaz $\dim_H H_i \le \dim_H H$. Innen $\dim_H \bigcup_i H_i \ge \sup_i \dim_H H_i$. A másik irányhoz válasszunk egy tetszőleges $s > \sup_i \dim_H H_i$ számot. Ekkor minden $i$-re $\mu^s(H_i) = 0$, ezért $\mu^s(H) = 0$. Innen $\dim_H H \le s$ következik, ebből pedig $\dim_H \bigcup_i H_i \le \sup_i \dim_H H_i$. □

Megjegyezzük, hogy $\mu^s(H)$ akármi lehet, nem feltétlen kell végesnek vagy pozitívnak lennie. Egyszerű példa a teljes számegyenes: ez 1-dimenziós, és $\mu^1(\mathbb{R}) = \lambda(\mathbb{R}) = \infty$. Az is igaz, hogy tetszőleges dimenziós halmaz létezik. Korábban használtuk, ezért most itt megemlítjük a Cantor-halmaz dimenzióját:

**3.2.7. Tétel.** *Legyen $C$ a Cantor-halmaz. A Cantor-halmaz dimenziója*

$$s = \frac{\log 2}{\log 3}$$

*és* $\mu^s(C) = 1$.

Ezt a következő heurisztikus módszerrel lehet kiszámolni: legyen $C_1$ a Cantor halmaz baloldali része, azaz $C_1 = C \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$ és $C_2$ a jobb oldali rész. Mindkét rész az eredeti $C$ halmaz $\frac{1}{3}$-szoros kicsinyítésének egy eltoltja és $C = C_1 \cup C_2$ diszjunkt unió. Ezért minden $s$-re:

$$\mu^s(C) = \mu^s(C_1) + \mu^s(C_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mu^s(C) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mu^s(C).$$

Ha feltesszük, hogy az $s = \dim_H C$ esetben $0 < \mu^s(C) < \infty$, leoszthatunk $\mu^s(C)$-vel. Az eredmény $1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s$, amiből már következik, hogy $s = \log 2 / \log 3$. Ez a módszer más önhasonló halmazokra is alkalmazható, a pontos állítás a következő (bizonyítás megtalálható [4]-ben):

**3.2.8. Tétel.** *Legyen $F \subset \mathbb{R}$, és legyenek $S_1, S_2, \ldots, S_m$ olyan hasonlóságok, amikre $S_i(F)$ páronként diszjunkt. Jelölje $c_i$ az $S_i$ hasonlósági arányát (azaz $S_i(x) = c_i x + a_i$ alakú). Ha $c_i < 1$ és $F$ invariáns ezekre a hasonlóságokra, azaz*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F),$$

*akkor* $\dim_H F = s$, *ahol*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1.$$

Most rátérünk a Minkowski-dimenzióra. Ez még boxdimenzióként is ismert. A nevét arról kapta, hogy a dimenzió meghatározásához $\varepsilon$ nagyságú téglákkal fedjük le a halmazt.

Fedjük le a síkot egy $\varepsilon$ nagyságú négyzetráccsal. Jelölje $N(\varepsilon)$ azon négyzetek számát, amik belemetszenek a halmazba. Ha most $\varepsilon = \frac{1}{n}$, akkor azt várjuk, hogy egy egyenes szakasz esetén $N(\varepsilon) \approx cn$ valamilyen $c$ konstansra. Ha a halmazunk egy síkbeli nyílt halmaz, akkor $N(\varepsilon) \approx cn^2$ várunk el. Egy $s$ dimenziós halmaznál ennek az analógiájára $N(\varepsilon) \approx cn^s$-t szeretnénk, tehát $N(\varepsilon)$ $n$-alapú logaritmusára vagyunk kíváncsiak. Ezen alapul a boxdimenzió definíciója:

**3.2.9. Definíció.** Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Ekkor a felső boxdimenzió

$$\overline{\dim}_B A = \limsup \frac{\log N(\varepsilon)}{-\log \varepsilon}$$

az alsó boxdimenzió

$$\underline{\dim}_B A = \liminf \frac{\log N(\varepsilon)}{-\log \varepsilon}$$

Ha létezik a limesz, azaz $\overline{\dim}_B A = \underline{\dim}_B A$, akkor a határértéket $\dim_B A$-val jelöljük.

A boxdimenzió egyik érdekes tulajdonsága, hogy a fenti definícióban az $N(\varepsilon)$ számot ki lehet cserélni más típusú fedésekre is. Például jelölje $P(\varepsilon)$ a maximális számát azon $\varepsilon$ sugarú gömböknek, amik diszjunktak, és középpontjaik $A$-ban vannak. Ha a fenti formulákban $N(\varepsilon)$ helyére mindenütt $P(\varepsilon)$-t írunk, akkor egy ekvivalens definíciót kapunk. Egy harmadik lehetséges módszer, hogy azon $\varepsilon$ sugarú gömbök minimális $C(\varepsilon)$ számát tekintjük, amelyek lefedik $A$-t. Ez is ekvivalens lesz az előzőekkel. Ezen állítások bizonyítása egyszerű, megtalálható például [9] könyvben.

A boxdimenzió definíciója szemléletes, és viszonylag egyszerűen ki lehet számolni, hála a rácsfelbontásnak és a sok ekvivalens definíciónak. Hátrányai közé tartozik, hogy csak korlátos halmazra működik, és megszámolható unióra a dimenzió nem marad meg. Például egy egy pontból álló halmaz boxdimenziója nyilván 0, azonban a $\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\right\}$ halmaz dimenziója $\frac{1}{2}$.

Ezt a két hibát küszöbölhetjük ki a felső pakolási dimenzióval:

**3.2.10. Definíció.** Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor a felső pakolási dimenzió:

$$\overline{\dim}_P A = \inf \left\{ \sup_i \overline{\dim}_B A_i : A = \bigcup_i A_i,\ A_i \text{ korlátos} \right\}$$

Ez nyilván megtartja a megszámolható uniót, továbbá $\overline{\dim}_P A \le \overline{\dim}_B A$. Az alsó pakolási dimenziót hasonlóan definiálhatjuk, ott az alsó boxdimenziót használjuk. Azonban a felső pakolási dimenziót előállíthatjuk a Hausdorff-dimenzióhoz hasonló módon, egy mértéken keresztül is. Ezért gyakran a felső pakolási dimenziót egyszerűen csak pakolási dimenzióként hívják.

**3.2.11. Definíció.** Legyen $s \ge 0$ valós szám. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $\delta > 0$. Ekkor

$$P_0^s(A) = \lim_{\delta \to +0} \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} r_i^s : r_i \le \delta, \exists c_i \in A, \text{ hogy a } B(c_i, r_i) \text{ gömbök páronként diszjunktak} \right\}$$

Ez a limesz mindig létezik, hiszen a limeszen belül levő szuprémum értéke csökken, ha $\delta$ csökken. Ez még nem lesz mérték, hiszen a megszámolható uniót nem tartja. De ebből már tudunk képezni egy mértéket az alábbi módon:

$$P^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} P_0^s(A_i) : A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

A pakolási dimenzió definíciója a Hausdorff-dimenzióéhoz nagyon hasonló:

**3.2.12. Definíció.** Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges halmaz. $A$ pakolási dimenziója

$$\dim_P A = \sup \{s : P^s(A) > 0\}$$

Be lehet látni, hogy ez a dimenzió megegyezik a korábban definiált $\overline{\dim}_P A$ számmal. A pakolási mértékekre is igaz a 3.2.5 tétel, azaz először végtelen az $A$ halmaz $s$ dimenziós $P^s$ pakolási mértéke, aztán az $s = \dim_P A$ pont után átvált, és végig nulla lesz a mérték.

Az egyes dimenziófogalmak egymáshoz való viszonyáról szól az alábbi tétel:

**3.2.13. Tétel.** *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ korlátos halmaz. Ekkor*

$$\dim_H H \le \dim_P H \le \dim_B H$$

### 3.2.2. A konstrukció

Az itt megadott konstrukció a Davies-féle halmaz kis módosításával kapható. Az eljárással tetszőleges $0 < s < 1$ boxdimenziójú mérhetetlen halmazt kaphatunk. A halmazok olyanok, hogy a Hausdorff- és boxdimenziójuk megegyezik, így tetszőleges Hausdorff-dimenziójú mérhetetlen halmazt is elő tudunk állítani.

Legyen $a$ egy páratlan pozitív szám és legyen $N_r$ a $2^r$-rel vagy $a$-val osztható számok halmaza. Ekkor az $N_r$ halmazok mind végtelenek, monoton csökkenőek, illetve $N_r \setminus N_{r+1}$ is végtelen. Legyen $\lambda \ge 8$ tetszőleges valós szám. Álljon a $K_r$ halmaz az alábbi alakú számokból:

$$x = \frac{c_r}{\lambda^r} + \frac{c_{r+1}}{\lambda^{r+1}} + \dots,$$

ahol $c_i$ egész, $0 \le c_i < 8$ és $c_i = 1$ vagy 5, ha $i \in N_r$. Helyezzük egymás után a $K_i$ halmazokat úgy, hogy $\operatorname{dist}(K_i, K_{i+1}) = 0$ legyen. Azaz az előző szakaszban levő módszerrel ellentétben a halmazokat "szorosan" egymás után rakjuk. Az így kapott $K = \bigcup_r K_r$ halmaz mérhetetlen lesz a 3.1.10 tétel szerint.

**3.2.14. Állítás.** *A $K_r$ halmaz Hausdorff-dimenziója:*

$$\dim_H K_r = \frac{3a - 2 - \frac{a-1}{2^{r-1}}}{a} \frac{\log 2}{\log \lambda}$$

*Bizonyítás.* Álljon $L$ a $\frac{c_1}{\lambda^1} + \frac{c_2}{\lambda^2} + \dots$ alakú számokból, ahol $c_i$-re ugyanazok a feltételek érvényesek, mint a $K_r$ fenti definíciójában. Vegyük észre, hogy $L$ a $K_r$ halmaz véges sok eltoltjából áll, ezért $\dim_H L = \dim_H K_r$. Tehát elég $L$ dimezióját kiszámolni.

Ha $i \notin N_r$, akkor $c_i$ tetszőleges számjegy lehet (itt számjegy alatt nyolcas számrendszerbeli számjegyet értünk), ha $i \in N_r$, akkor pedig csak 1 vagy 5 lehet. $N_r$ definíciója szerint tehát pontosan az $i = 2^r l$ vagy az $i = ak$ esetekben van külön feltétel a számjegyekre, ezért az $L$ halmaz a $H = \lambda^{-2^r a} L$ véges sok diszjunkt eltoltjából fog állni, mégpedig azon $y = \frac{c_1}{\lambda^1} + \frac{c_2}{\lambda^2} + \dots + \frac{c_{2^r a}}{\lambda^{2^r a}}$-kal, ahol a $c_i$ számjegyekre teljesül a szokásos feltétel. Ha $y_1$ és $y_2$ két ilyen szám akkor $H + y_1$ és $H + y_2$ diszjunktak.

Tehát a 3.2.8 tétel szerint $\dim_H L = s$, ahol

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda^{-2^r as} = 1$$

és $m$ a lehetséges $y$-ok száma. Átrendezve az egyenletet

$$s = -\frac{\log m}{\log \lambda^{-2^r a}}.$$

Már csak $m$ értékét kell meghatároznunk. Ehhez határozzuk meg azon $c_i$ számjegyek $d$ számát, amik csak 1-et vagy 5-öt vehetnek fel. $d$ nem más, mint azon egészek száma az $[1{,}2^r a]$ intervallumban, amik oszthatók $2^r$-rel vagy $a$-val. Tehát $d = a + 2^r - 1$ ($a$ darab $2^r$-rel, és $2^r$ darab $a$-val osztható szám van, de $2^r a$-t kétszer számoltuk). Egy fenti $y$ esetén $d$ darab számjegy kétféle értéket vehet fel, és $2^r a - d$ darab számjegy nyolcféle értéket. Tehát $m = 8^{2^r a - d} 2^d$. Innen:

$$\begin{aligned} s &= -\frac{\log m}{\log \lambda^{-2^r a}} = -\frac{\log 8^{2^r a - d} 2^d}{\log \lambda^{-2^r a}} = -\frac{\log 2^{3 \cdot 2^r a - 2d}}{\log \lambda^{-2^r a}} = \frac{3 \cdot 2^r a - 2d}{2^r a} \frac{\log 2}{\log \lambda} \\ &= \frac{3 \cdot 2^r a - 2 \cdot 2^r - 2a - 2}{2^r a} \frac{\log 2}{\log \lambda} = \frac{3a - 2 - \frac{a-1}{2^{r-1}}}{a} \frac{\log 2}{\log \lambda} \end{aligned}$$

□

**3.2.15. Következmény.** *A $K$ halmaz Hausdorff-dimenziója:*

$$\dim_H K = \frac{3a-2}{a} \frac{\log 2}{\log \lambda}$$

*Bizonyítás.* Emlékezzünk vissza, hogy $K = \bigcup_r K_r$, ezért $\dim_H K = \sup_r \dim_H K_r$. $r \to \infty$ esetén $\frac{3a-2-\frac{a-1}{2^{r-1}}}{a} \to \frac{3a-2}{a}$, így az előző állításból rögtön kapjuk a bizonyítást. □

**3.2.16. Következmény.** *A $K$ halmaz boxdimenziójára:*

$$\underline{\dim}_B K \geq \frac{3a-2}{a} \frac{\log 2}{\log \lambda}$$

*Bizonyítás.* Következik abból, hogy a Hausdorff-dimenzió a boxdimenzió alsó becslése. □

Most be kell látnunk a boxdimenzióra a felső becslést.

**3.2.17. Tétel.** *A $K$ halmaz boxdimenziója*

$$\dim_B K = \frac{3a-2}{a} \frac{\log 2}{\log \lambda}$$

*Bizonyítás.* Az alsó becslés szerepelt, a felső becslést kell belátni. Ehhez először figyeljük meg, hogy $\mathrm{diam} K_r < 2\lambda^{-r+1}$. Innen $\mathrm{diam} \bigcup_{r \geq k+1} K_r < 4\lambda^{-k}$ . Álljon $L$ azokból a számokból, amik $\frac{c_1}{\lambda^1} + \frac{c_2}{\lambda^2} + \dots$ alakban írhatóak, ahol $c_i$ 1 vagy 5 lehet, ha $a$ osztja $i$-t. Ekkor $K_r \subset L$ minden $r$-re.

A feladatunk megszámolni, hány $\lambda^{-ka}$ hosszú intervallummal lehet lefedni $K$-t, jelölje ezt $N(k)$. Osszuk két részre a $K_r$ halmazokat. $r > ka$ esetén $\bigcup_{r>ka} K_r$ lefedhető négy darab $\lambda^{-ka}$ hosszú intervallummal. Az $r \leq ka$ esetén azt számoljuk meg, hogy $L$ hány darab intervallummal fedhető le. Jelöljük ezt a számot $M(k)$-val. Ekkor $\bigcup_{r\leq ka} K_r$ lefedhető legfeljebb $kaM(k)$ darab intervallummal.

$M(k)$ meghatározásához azt kell észrevenni, hogy $x \in L$ esetén az első $ka$ számjegy közül pontosan $k$ darab veheti fel csak az 1-et vagy az 5-öt. Tehát $M(k) \leq 8^{ka-k}2^k = 2^{3ka-2k}$. Összefoglalva, $N(k) \leq$ $\leq 4 + ka2^{3ka-2k}$. Tehát

$$\begin{aligned}
\dim_B K &\leq \limsup_{k\to\infty} -\frac{\log N(k)}{\log \lambda^{-ka}} \leq \limsup_{k\to\infty} -\frac{2\cdot ka2^{3ka-2k}}{\log \lambda^{-ka}} \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{1+3ka-2k+\log_2 ka}{ka}\frac{\log 2}{\log \lambda} \\
&= \frac{3a-2}{a}\frac{\log 2}{\log \lambda}
\end{aligned}$$

□

**3.2.18. Tétel.** *Minden* $0 < s \leq 1$ *számra létezik* $H \subset \mathbb{R}$ *mérhetetlen halmaz, hogy* $\dim_H H =$ $= \dim_B H = s$.

*Bizonyítás.* Először nézzük az $s < 1$ esetet. Jelöljük $K_{a,\lambda}$-val a fentebb elkészített halmazokat. Mivel ezeknél a halmazoknál a Hausdorff- és a boxdimenzió megegyezik, ezért a továbbiakban nem különböztetjük meg őket. $K_{a,\lambda}$ dimenziója a fenti állítások szerint $\left(3-\frac{2}{a}\right)\frac{\log 2}{\log \lambda}$. $\lambda \geq 8$ miatt $\frac{\log 2}{\log \lambda}$ a $\left(0, \frac{1}{3}\right]$ intervallumban veszi fel az értékeit, és itt minden számot felvesz. Tehát rögzített $a$-ra $\lambda$ növelésével $\dim K_{a,\lambda}$ minden értéket felvesz a $\left(0{,}1-\frac{2}{3a}\right]$ intervallumban. Ha $a \to \infty$, akkor $1-\frac{2}{3a} \to 1$, így minden $s \in (0{,}1)$ számra léteznek $a$ és $\lambda$ számok, hogy $\dim K_{a,\lambda} = s$.

Most belátjuk az $s = 1$ esetet. Legyen $H_n$ olyan mérhetetlen halmaz, hogy $\dim H_n = 1 - \frac{1}{n}$. Ekkor a 2.1.2 állítás miatt a $H = \bigcup_n H_n$ halmaz is mérhetetlen és $\dim H \geq 1 - \frac{1}{n}$ minden $n$-re, azaz $\dim H = 1$. □

Megjegyezzük, hogy van nulla Hausdorff-dimenziós mérhetetlen halmaz, például a Liouville-számok. Ennek a bizonyítása megtalálható [13]-ban.

# Irodalomjegyzék


[1] Y. Bugeaud, M. M. Dodson, és S. Kristensen. Zero-infinity laws in Diophantine approximation. *Q. J. Math.*, 56(3):311–320, 2005.

[2] R. O. Davies. Sets which are null or non-sigma-finite for every translation invariant measure. *Mathematika*, 18(02):161–162, 1971.

[3] M. Elekes és T. Keleti. Borel sets which are null or non-$\sigma$-finite for every translation invariant measure. *Adv. Math.*, 201:102–115, 2011.

[4] K. Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.* Wiley, 2003.

[5] A. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995.

[6] H. Ki és T. Linton. Normal numbers and subsets of $\mathbb{N}$ with given densities. *Fundam. Math.*, 144(2):163–179, 1994.

[7] M. Laczkovich. Valós függvénytan. Egyetemi jegyzet.

[8] D. G. Larman. The approximation of $G_\delta$-sets, in measure, by $F_\sigma$-sets. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 61(01):105–107, 1965.

[9] P. Mattila. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1999.

[10] R. D. Mauldin. On the Borel subspaces of algebraic structures. *Indiana Univ. Math. J.*, 29(2):261–265, 1980.

[11] R. D. Mauldin. Problem Session at the Millenium Symposium. Denton, Texas, 2000.

[12] L. Olsen. On the exact Hausdorff dimension of the set of Liouville numbers. *Manuscripta Math.*, 116(2):157–172, 2005.

[13] J. C. Oxtoby. *Measure and Category: A Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1980.