

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Kaposi Ágoston

GRÁF 3-SOKASÁGOK

Szakdolgozat
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Témavezető:

Dr. Némethi András

egyetemi tanár
Geometriai Tanszék



Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás	4
1. Bevezetés	5
2. Alapfogalmak	7
2.1. Sokaság	7
2.2. Nyaláb	8
2.3. Metszet (Intersection)	9
2.4. Euler-szám	12
2.5. Homológiák	13
3. Sokaságok osztályozása	15
3.1. Egy- és kétdimenziós sokaságok	15
3.2. Háromdimenziós sokaságok	16
3.2.1. Kanonikus felbontás - Prímfelbontás	17
3.2.2. Kanonikus felbontás - Tóruszfelbontás	18
3.3. Magasabb dimenziós sokaságok	18
4. Gráf 3-sokaságok	20
4.1. Csővezeték gráf (Plumbing graph)	20
4.2. Csővezeték szerkesztés (Plumbing)	20
4.3. Metszési mátrix	23
4.4. Csővezeték ekvivalencia (Plumbing calculus)	23
5. 3-sokaságok mint felületszingularitások linkjei	27
5.1. Homogén polinom linkjei	27
5.2. Rezolúció	28
5.3. Példák	31
5.4. Lencseterek	32
Irodalomjegyzék	35

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kifejezni köszönetemet témavezetőmnek, Némethi Andrásnak, hogy felhívta figyelmemet a témára, hogy segédkezett a tételek megértésében és az összefüggések megtalálásában, valamint hogy bármikor elérhető volt, amikor segítségre volt szükségem.

1. fejezet

Bevezetés

A szakdolgozat elsődleges célja a gráf 3-sokaságok bemutatása és az ezek leírására alkalmazott eszközök rövid számbavétele. A gráf 3-sokaságoknak csak egy speciális esetét vizsgáljuk, amikor minden sokaság és minden leképezés irányított és differenciálható.

A sokaságok osztályozása már a definíció megalkotása óta érdekelte a matematikusokat. A dimenziótól függően kétféle osztályozást különböztetünk meg: az alacsonyabb és a magasabb dimenziójú sokaságok osztályozását. Az osztályozás alacsonyabb (négy vagy kevesebb) dimenziójú esetekben geometriai struktúrák alapján végezhető el. A magasabb (négynél nagyobb) dimenziós sokaságok osztályozása absztrakt úton, különböző részsokaságok mentén történő szétvágásokkal végezhető el. A háromnál kisebb dimenziókban a topológiai osztályozás teljes mértékben leírható. A három vagy annál magasabb dimenziókban az osztályozás nem teljeskörű, sok nyitott kérdés áll még a matematikusok előtt.

A háromdimenziós sokaságok osztályozásán belül egy speciális típus a gráf 3-sokaságok esete. Ezek számokkal dekorált gráfok ekvivalenciaosztályai és sokaságok közti megfeleltetéssel előálló sokaságok, amelyeknek az osztályozása már a dekorált gráfok tulajdonságaira vezethető vissza.

A sokaságok gráfokhoz való rendelése speciális szabályok szerint történik. Ez a szerkesztés megköveteli a nyaláboknak és a nyalábok Euler-számainak ismeretét. Ezeket ismertetjük a 2. fejezetben.

Ezután a 3. fejezetben röviden leírjuk az egy- és kétdimenziós sokaságok osztályozását, majd áttekintjük a 3-sokaságok általános topológiai osztályozásának módszereit, végül leírjuk a hasonló módon történő osztályozás nehézségét az ennél magasabb dimenziós esetekben.

A 4. fejezetben pontosan leírjuk a sokaságok gráfokhoz való rendelésének algoritmusát. A speciálisan dekorált gráfok csúcsaihoz egyesével rendelhető egy-egy 3-sokaság. Ezeknek az élek szerinti összeragasztása tórusz mentén

történik, ami szemléletünkben hasonlít a csővezetékek egymáshoz kapcsolódásához, ezért a szerkesztést erről nevezzük el. Majd megvizsgáljuk [7] és [6] alapján azokat a gráf osztályokat, melyekből diffeomorf 3-sokaságok szerkesztődnek. A gráfok közti összefüggéseket csővezeték ekvivalenciának hívjuk és az ezeket összekötő lépéseket csővezeték kalkulushoz nevezzük.

Sok ismert 3-sokaság leírható a fenti módszerrel, ezeket fogjuk vizsgálni az 5. fejezetben. Példáinkat a komplex felületszingularitás vizsgálatának segítségével írhatjuk le, mert ezek linkjei gráf 3-sokaságokat adnak. Először a legegyszerűbb esetekkel foglalkozunk, például egy homogén polinom által megadott szingularitás linkjével. A bonyolultabb esetek tárgyalásához szükség van a rezolúció fogalmára, melyet az 5.3. részben vezetünk be. Ennek segítségével fogjuk megvizsgálni a lencsetereket mint gráf 3-sokaságokat.

A dolgozatomban az irányított gráf 3-sokaságok ma ismert tulajdonságainak egy részét mutatja be. A továbbiakban szeretnék jobban elmélyülni az irányítatlan esetben és az irányított eseteket leíró szingularitáselméletben.

2. fejezet

Alapfogalmak

2.1. Sokaság

A topologikus terek egyik nagy családjába tartoznak a differenciálható sokaságok. Ezek definíciója egyszerű: M topologikus tér, melyen adott $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ atlasz, melyben minden $\alpha \in \mathcal{A}$ -ra $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfizmus, $M = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$, továbbá minden $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ -ra $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ leképezéstől megköveteljük, hogy diffeomorfizmus legyen mindenhol, ahol értelmes. (Ha csak homeomorfizmust követelünk meg, akkor topologikus sokaságról beszélünk.) Az n számot M dimenziójának nevezzük. A differenciálható sokasághoz tehát tartozik egy differenciálható struktúra, amely atlaszok ekvivalenciaosztályaiból áll. Az $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ párokat térképeknek hívjuk.

A definícióból levezethető néhány általános tulajdonság, például hogy egy sokaság metrizálható, vagy az útösszefüggőségi komponensek száma megegyezik az összefüggőségi komponensek számával.

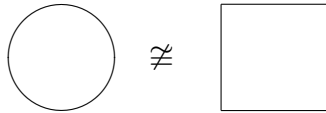
A legegyszerűbb példák differenciálható sokaságokra az olyan jól ismert egyszerű felületek, mint a gömbfelszín vagy a tórusz, ahol minden pontnak van egy nyílt körlap környezete, ami beágyazva \mathbb{R}^3 -ba differenciálható sokaság mint \mathbb{R}^3 részsokasága. Az egyik legegyszerűbb tér, amit ismerünk, és nem tekinthető sokaságnak, az általános helyzetű kúp, amit ha beágyazunk \mathbb{R}^3 -ba részsokaságként, akkor egy nem differenciálható struktúrát kapunk. Megjegyzendő, hogy ha a kúp alapja S^1 , akkor ezen is megadható differenciálható struktúra, de nem feltétlenül mint \mathbb{R}^3 részsokasága.

Ahhoz, hogy matematikailag pontosan vizsgálhassuk a sokaságokat, meg kell határoznunk egy pontos definíciót az ekvivalenciára – vagyis arra, hogy mikor mondhatjuk két térről, hogy azonosak. Ezt a leképezések segítségével tesszük meg, a diffeomorf tereket fogjuk azonosnak tekinteni.

Egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ leképezés C^∞ -osztályú, ha minden koordinátafüggvénye C^∞ -osztályú. Legyen X és Y két differenciálható sokaság és $f : X \rightarrow Y$ folytonos leképezés. Tetszőleges $x \in X$ -re választunk megfelelő $\varphi_\alpha : U_\alpha^X \rightarrow V_\alpha^X, \psi_\beta : U_\beta^Y \rightarrow V_\beta^Y$ térképeket, amelyekre igaz, hogy $x \in U_\alpha \subset X$ és $f(x) \in U_\beta \subset Y$. Akkor f definíció szerint C^∞ -osztályú x -ben, ha $\varphi_\alpha^{-1} \circ f \circ \psi_\beta : V_\alpha^X \rightarrow V_\beta^Y$ leképezés C^∞ -osztályú $\varphi_\alpha(x)$ -ben. Továbbá azt mondjuk, hogy f C^∞ -osztályú, ha f minden $x \in X$ -ben C^∞ -osztályú.

A C^∞ -osztályú leképezéseket sima leképezéseknek is hívjuk.

$X, Y \subset \mathbb{R}^n$ -ekre egy $f : X \rightarrow Y$ sima leképezést diffeomorfizmusnak hívunk, ha injektív és szürjektív, és az inverzleképezés $f^{-1} : Y \rightarrow X$ is sima. X és Y diffeomorfak, ha létezik ilyen diffeomorfizmus köztük. A diffeomorfizmus így ekvivalenciarelációt határoz meg a terek között. Az egymással diffeomorf tereket tekintjük tehát azonosnak. Például a kör és a négyzet beágyazva \mathbb{R}^2 megszokott differenciálható struktúrájába egymással nem diffeomorfak:



Az így megalkotott ekvivalenciával vizsgáljuk a sokaságokat.

A következőkben minden leképezést simának, minden sokaságot differenciálhatónak tekintünk, amíg ezt nem jelezzük külön másképp.

2.2. Nyaláb

A gráf 3-sokaságok definíciójához és megértéséhez szükség van a nyalábok definiálására sokaságok felett.

Definíció 2.1. Egy (X, E, p, F) struktúrát fibrált nyalábnak hívunk, ha X, E, F differenciálható sokaságok, $p : E \rightarrow X$ szürjektív sima leképezés és rendelkezik a következő tulajdonsággal:

Minden $x \in X$ -re létezik egy $U \subset X$ környezete x -nek, melyhez van egy $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ diffeomorfizmus, melyre $p(\varphi^{-1}(y, t)) = y$ minden $(y, t) \in U \times F$ -re, tehát a következő diagram kommutál (pr_1 az U -ra való

$$\begin{array}{ccc}
 p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\
 & \searrow p & \downarrow pr_1 \\
 & & U
 \end{array}$$

vetítés).

Ebből látható, hogy ekkor $p^{-1}(x)$ diffeomorf F -fel minden $x \in X$ -re.

Az E -t totális térnek, X -et bázis sokaságnak, F -et fibrumnak hívjuk.

Az (X, E, p, F) nyalábot az egyszerűség kedvéért az alábbi módon szoktuk jelölni:

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow p \\ & & X \end{array}$$

Ez a definíció egy újabb módszert ad nyalábok szerkesztésére.

Legyen X atlasza $\{(U_\alpha^X, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Tekintjük a $\sqcup_\alpha V_\alpha^X \times F$ teret, amelyen a következő ekvivalenciarelációt vezetjük be.

Minden α, β indexpárra $(x, f) \in \varphi_\alpha^X(U_\alpha^X \cap U_\beta^X) \times F \subset V_\alpha^X \times F$ azonosul $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x), g_{\beta\alpha}(x)f) \in V_\beta^X \times F$ párral, ahol $g_{\beta\alpha}(x)$ az F fibrum egy diffeomorfizmusa. A $\{g_{\beta\alpha}\}_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}}$ leképezéseknek teljesíteniük kell a következő feltételeket: $g_{\alpha\alpha} = id_F$ és $g_{\gamma\beta} \circ g_{\beta\alpha} = g_{\gamma\alpha}$, ahol értelmezhetők. Ekkor $\sqcup_\alpha V_\alpha^X \times F / \sim$ egy E differenciálható sokaságot ad. Továbbá a $V_\alpha^X \times F \rightarrow V_\alpha^X$ projekció egy nyalábleképezést ad.

Példa 2.2. Egy X differenciálható n -sokaság esetében a tangens nyaláb egy \mathbb{R}^n fibrumú nyaláb. Itt a megfelelő $g_{\beta\alpha}(x)$ leképezés a $d(g_{\beta\alpha}^{-1})_x$ Jacobi-mátrixa.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & TX \\ & & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

Két azonos fibrummal azonos bázis sokaság felett definiált fibrált nyaláb sem feltétlenül azonos. Ennek vizsgálatára vezetjük be a metszet fogalmát, amelynek segítségével lehetőségünk lesz két fibrált nyaláb megkülönböztetésére.

2.3. Metszet (Intersection)

A metszetet a dolgozatban csak irányított esetben vizsgálom. (Irányítatlan esetben lényegében ugyanez végigmondható, ha minden konkrét számot, ahol az irányítástól függenek az előjelek, csak mod 2 nézzük.) Forrásként [2]-t használtam.

Legyenek X, Y, Z perem nélküli sokaságok, X kompakt részsokasága, Y zárt részsokasága Z -nek, továbbá tegyük fel, hogy $\dim X + \dim Y = \dim Z$.

Definíció 2.3. X és Y transzverzális egymásra, ha minden p metszéspontban a tangens terek csak p -ben metszik egymást. Ezt $X \pitchfork Y$ szimbólummal jelöljük. Az $f : X \rightarrow Z$ és a $g : Y \rightarrow Z$ leképezések transzverzálisak, ha

minden metszetbeli pontnál a teljes tangensteret generálják direkt összegként a tangensleképezések, tehát $f(x) = z = g(y)$ -re $df_x T_x(X) \oplus dg_y T_y(Y) = T_z(Z)$ minden $z \in f(X) \cap g(Y)$ -ra.

Ha $\dim X + \dim Y > \dim Z$, akkor a definícióban csak a generálást követeljük meg a tangensleképezésektől, tehát $df_x T_x(X) + dg_y T_y(Y) = T_z(Z)$ minden $z \in f(X) \cap g(Y)$ -ra.

Megjegyzés 2.4. Látható, hogy ha a leképezések a részsokaságok beágyazásai Z sokaságba, akkor az első definíciónak megfelelő tulajdonságot kapjuk. De ezzel az általánosabb definícióval definiáltuk egy f és Y transzverzális tulajdonságát is, ha vesszük az f -nek és Y beágyazásának a transzverzális tulajdonságát.

Definíció 2.5. Legyen $\dim X + \dim Y = \dim Z$, $f : X \rightarrow Z$ transzverzális Y -ra. Ekkor $f^{-1}(Y)$ véges sok pont. Minden $f^{-1}(Y)$ -beli ponthoz tartozik egy ± 1 irányítási szám, amit az ösképeinek irányításából kapunk a következőképpen.

Ha $f(x) = y \in Y \subset Z$, akkor

$$df_x T_x(X) \oplus T_y(Y) = T_y(Z).$$

Mivel df_x izomorfizmus a $df_x T_x(X)$ és $T_x(X)$ közt, ezért $T_x(X)$ irányítása meghatároz egy irányítást $df_x T_x(X)$ téren. Definíció szerint x -nél az irányítási szám $+1$, ha a $df_x T_x(X)$ és $T_y(Y)$ direkt összeg kanonikus irányítása a $T_y(Z)$ irányítását adja, és -1 , ha nem.

Definiáljuk az $I(f, Y)$ metszési számot az összes metszetbeli ponthoz tartozó irányítási szám összegeként.

Az így definiált metszési számról látjuk, hogy egymással irányítástartóan diffeomorf sokaságokra invariáns.

Legyen X egy W kompakt sokaság határa.

Tételezzük fel, hogy $f : X \rightarrow Z$ kiterjed $F : W \rightarrow Z$ leképezéssé, ami transzverzálisan metszi Y -t. Ekkor $F^{-1}(Y)$ egy kompakt irányított peremes 1-sokaság, amely diffeomorf legalább egy $[0, 1]$ és esetleg néhány S^1 véges uniójával, (ahogyan a 3.1. résznél megjegyezzük), és ennek pereme $\partial F^{-1}(Y) = f^{-1}(Y)$. Az irányított $[0, 1]$ szakasz peremének irányításai $+1$ és -1 előjellel szerepelnek, ezek összege 0, az $I(f, Y)$ -ban szereplő irányítási számok algebrai összege nulla. Tehát ezzel bizonyítottuk:

Állítás 2.6. Ha $X = \partial W$ sokaság, W kompakt, Y részsokasága Z -nek, és $f : X \rightarrow Z$ leképezés kiterjed Y -ra transzverzális $F : W \rightarrow Z$ leképezéssé, akkor $I(f, Y) = 0$. (Az F transzverzálitása ebben az állításban elhagyható, mert bármely leképezés kicserélhető egy vele homotóp transzverzálisra)

Ennek segítségével beláthatjuk a következő tételt:

Állítás 2.7. *Két C^∞ -homotóp leképezésnek mindig ugyanaz a metszési száma.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $f_0, f_1 : X \rightarrow Z$ homotópok, és mindketten transzverzálisak Y -ra. Legyen $F : I \times X \rightarrow Z$ homotópia f_0 és f_1 közt. Megjegyezzük, hogy F kicserélhető egy olyan leképezésre, amely transzverzális Y -ra. Ekkor $I(\partial F, Y) = 0$ a 2.6. állítás szerint. Mivel $\partial(I \cap X) = X \sqcup -X$, és

$$\partial F^{-1}(Y) = f_1^{-1}(Y) - f_0^{-1}(Y),$$

tehát

$$I(f_1, Y) - I(f_0, Y) = I(\partial F, Y) = 0.$$

■

A 2.5. definíciót csak Y -ra transzverzális leképezésekre értelmezhetjük, viszont a definíció könnyen kiterjeszthető általánosabb esetekre is. Legyen $g : X \rightarrow Z$. Válasszunk egy f leképezést, amely homotóp g -vel és transzverzális Y -ra, és definiáljuk $I(g, Y)$ -t $I(f, Y)$ -nal. Ahogy a 2.7. állításban láttuk, ez a szám nem függ f választásától. Vegyük észre, hogy az így kapott definíció szerint tetszőleges leképezésekre fennállnak a 2.6. és a 2.7. állítások.

Tekintsük a metszési számnak a következő speciális esetét. Ha X is részsokasága Z -nek, akkor definiálhatjuk X metszési számát Y -nal. Vegyük a $\varphi : X \rightarrow Z$ leképezést, azaz X beágyazását Z -be, és definiáljuk $I(X, Y)$ -t $I(\varphi, Y)$ -nal. Ha X transzverzális Y -ra, akkor $I(X, Y)$ az $X \cap Y$ halmaz pontjainak algebrai összege lesz, ahol $z \in X \cap Y$ metszéspont $+1$ értékkel számolódik, ha X és Y összegirányítása (ebben a sorrendben) Z irányítását adják Z -ben, és -1 , ha az ellentéteset. Ha X és Y is kompaktnak, akkor sorrendcserével két metszési számot is definiálunk, amelyek nem feltétlenül egyenlők: $I(X, Y) = (-1)^{\dim X \dim Y} I(Y, X)$, mert $\dim X \dim Y$ darab egymás melletti bázispárnak a cserélését kell elvégezni a két irányítás összehasonlításában.

Tudjuk, hogy X deformálásával nem változik a metszési szám. Ahhoz, hogy ugyanezt belássuk Y deformálásánál is, tekintsük a következő általánosítást. Definiáljuk a metszési számot két $f : X \rightarrow Z$ és $g : Y \rightarrow Z$ függvényre. (Természetesen ha Y részsokasága Z -nek, vehetjük a g leképezést a Z -be történő beágyazásnak, és akkor az eredeti esetet kapjuk vissza.) Tekintsük először a transzverzális esetet, tehát feltesszük, hogy $f \bar{\cap} g$.

Definiáljuk f és g lokális metszési számát (local intersection number) $f(x) = g(y) = z$ metszéspontban $+1$ -nek, ha $df_x T_x(X) \oplus dg_y T_y(Y)$ a $T_z(Z)$ irányítását adja, és -1 -nek, ha az ellentéteset. Jelöljük $I(x, y)$ szimbólummal. Legyen $I(f, g)$ a lokális metszési számok (algebrai) összege.

Példa 2.8. Legyen Z összefüggő, és legyen $\dim X = \dim Z$. Definiáljuk egy tetszőleges $f : X \rightarrow Z$ leképezés fokát egy tetszőleges $y \in Z$ ponttal vett metszési számával: $\deg f = I(f, \{y\})$.

Állítás 2.9. Az f leképezés foka nem függ y megválasztásától.

Bizonyítás: Legyen $y \in Z$. Feltételezhetjük, hogy f transzverzális y -ra, különben vegyünk f helyett egy vele homotóp leképezést, amely már transzverzális y -ra. Ekkor vegyük y beágyazását Z -be: $\tilde{y} : \{y\} \rightarrow Z$. $I(f, \{y\}) = I(f, \tilde{y})$.

Mivel két tetszőleges $y_1, y_2 \in Z$ -re a beágyazások C^∞ -homotópok, ezért f foka y_1 -ben és y_2 -ben ugyanakkora. ■

Egy f leképezés fokának számításakor ezért vehetünk egy y reguláris értéket, amely érték ősképeinek algebrai összege lesz a fok: $I(f, \{y\}) = \sum_{f(x)=y} \pm 1$, aszerint, hogy a $df_x : T_x(X) \rightarrow T_y(Y)$ izomorfizmus megőrzi vagy felcseréli az irányítást.

Mivel a fokot a metszési számmal definiáltuk, ezért a definícióból következik, hogy C^∞ -homotopikusan invariáns.

2.4. Euler-szám

A gráf 3-sokaságokat felületek feletti S^1 -nyalábokkal fogjuk definiálni, melyeket egy konkrét eljárás szerint fogunk összeragasztani (ez lesz a csővezeték szerkesztés, plumbing). Az S^1 -nyalábok karakterizálását az Euler-szám segítségével tesszük meg.

Definíció 2.10. Tekintsünk egy X irányított felületet, azaz egy irányított 2-sokaságot. Legyen egy X feletti $0 \in D^2$ fibrumú sokaság E . Tegyük fel, hogy a fibrum 0 -eleme globálisan értelmezhető. Nézzük az $f : X \rightarrow E$ leképezést, melyet a következőképpen definiálunk: minden $x \in X$ -re $f(x) = f(x, 0)$, ahol $0 \in D^2$, tehát megadja X egy beágyazását E totális térbe. Ezt zérószelésnek hívjuk. Definiáljuk E nyaláb Euler-számát $e(E) = I(f, f)$ -fel. Tehát legyen g leképezés f -fel homotóp és $f \bar{\cap} g$. Ekkor az Euler-szám $e(E) = I(f, g)$.

Definíció 2.11. Ha az előbbihez hasonlóan E sokaság X felület feletti S^1 -nyaláb, akkor használjuk azt az állítást, hogy egy tetszőleges S^1 -nyaláb egyértelmű módon kiegészíthető D^2 -nyalábbá úgy, hogy a határa legyen az eredeti S^1 -nyaláb. Legyen az így kapott 4-sokaság E' .

Definiáljuk E S^1 -nyaláb Euler-számát a kiterjesztett E' nyaláb Euler-számával: $e(E) = e(E')$.

Az Euler-szám a – diffeomorfizmus erejéig egyértelmű – kiterjesztés miatt jóldefiniált.

2.5. Homológiák

Ebben a részben definiálni fogjuk a homológiákat, melyeket a gráf 3-sokaságok tárgyalásakor fogunk használni. Mivel minden 3-sokaság triangulálható ([5]-ben bizonyítva), ezért elég a szimpliciális homológiákat néznünk, mivel minden tárgyalt sokaságunk szimpliciális komplexusként előállítható. A definiáláshoz [3] és [9] szolgáltak forrásként.

Definíció 2.12. Legyen $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_r\}$ tetszőleges, r elemű halmaz. $\mathcal{K} \subset P(\mathcal{A})$ -t szimpliciális komplexusnak (és elemeit szimplexeknek) nevezzük, ha a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. Minden egy elemből álló halmaz szimplex: $\{a_i\} \in \mathcal{K}$ minden i -re.
2. Egy szimplexnek minden nemüres részhalmaza szimplex: $\tau \subset \sigma \in \mathcal{K} \Rightarrow \tau \in \mathcal{K}$.

Egy $q + 1$ elemű szimplexet q -szimplexnek mondunk.

Legyen σ egy q -szimplex. Rendeljünk hozzá egy standard Euklideszi $|\sigma|$ q -szimplexet, ahol $|\sigma|$ csúcsait a sorrend megtartásával azonosítjuk σ elemeivel. Jelölhetjük $|\sigma|$ -t $[v_0, \dots, v_q]$ szimbólummal is, ahol $\sigma = \{v_0, \dots, v_q\}$. Ezt σ topológiai realizálásának nevezzük. Legyen $|\sigma|$ topológiája az euklideszi térből örökölt topológia.

Definíció 2.13. A \mathcal{K} elemei topologikus realizálásainak unióját \mathcal{K} topologikus realizálásának nevezzük. (Ebben a térben $|\tau|$ természetesen azonosul $|\sigma|$ részszeleivel, ha $\tau \subset \sigma$.) Jelölése: $|\mathcal{K}|$. A $|\mathcal{K}|$ topológiáját a következőképpen definiáljuk: egy $A \subset |\mathcal{K}|$ akkor és csak akkor nyílt (vagy zárt), ha minden $\sigma \in \mathcal{K}$ -ra $A \cap |\sigma|$ nyílt (vagy zárt) $|\sigma|$ -ban.

Definíció 2.14. Egy M sokaság triangulálható, ha létezik (\mathcal{K}, φ) , ahol \mathcal{K} szimpliciális komplexus, és $\varphi : |\mathcal{K}| \rightarrow M$ homeomorfizmus.

Megjegyzés 2.15. Minden 3-sokaságnak létezik egy triangulálása. [5]

Legyen M differenciálható 3-sokaság, és \mathcal{K} ennek egy triangulálásából származó szimpliciális komplexus.

Jelölje $[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]$ a $|\sigma| = [v_0, \dots, v_n]$ n -dimenziós szimplexnek az i -edik csúcsát elhagyva kapott $(n - 1)$ -szimplexet.

Minden $n \geq 0$ -ra jelölje $\Delta_n(M)$ a \mathcal{K} n -dimenziós szimplexei által generált kommutatív szabad csoportot. $\Delta_n(M)$ elemeit n -láncoknak hívjuk.

Definiálunk egy $\partial_n : \Delta_n(M) \rightarrow \Delta_{n-1}(M)$ leképezést a következő módon:

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \{v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n\}$$

Állítás 2.16. Minden n -re $\partial_{n-1}\partial_n = 0$.

Bizonyítás:

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \{v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n\}$$

és

$$\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_{i < j} (-1)^i (-1)^{j-1} \{v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n\} + \sum_{i > j} (-1)^i (-1)^j \{v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n\}$$

Tehát minden σ -ra a két szumma kiejt egymást. ■

Ekkor a

$$\Delta_n(M) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(M) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(M) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

lánckomplexust kapjuk, melynél minden n -re $\partial_{n-1}\partial_n = 0$.

Definíció 2.17. A $\text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ faktorcsoportot M sokaság n -edik homológiacsoportjának hívjuk, és $H_n(M)$ -mel jelöljük.

3. fejezet

Sokaságok osztályozása

A matematikusokat a sokaság definíciójának megalkotása óta érdekelte, hogy milyen k -sokaságok létezhetnek, hányféle különböző k -sokaság hozható létre adott k -ra. Ennek vizsgálata nagy k esetén komoly matematikai eszközöket igényel. Egy- és kétdimenziós sokaságok esetén diffeomorfizmus erejéig viszonylag könnyen belátható, hogy milyen sokaságok léteznek. Háromdimenziótól kezdve ez már komoly problémákat jelent.

3.1. Egy- és kétdimenziós sokaságok

Az egy- és kétdimenziós sokaságok osztályozása teljes mértékben leírható.

Tétel 3.1. *Az egydimenziós sokaságokat a kompaktság és a peremesség pontosan meghatározza:*

1. *Minden összefüggő perem nélküli kompakt differenciálható 1-sokaság diffeomorf S^1 -gyel.*
2. *Minden összefüggő perem nélküli nem kompakt differenciálható 1-sokaság diffeomorf \mathbb{R} -val.*
3. *Minden összefüggő peremes kompakt differenciálható 1-sokaság diffeomorf $[0, 1]$ -mal.*
4. *Minden összefüggő peremes nem kompakt differenciálható 1-sokaság diffeomorf $[0, \infty)$ -mal.*

A tétel bizonyítása [1]-ben megtalálható.

A kétdimenziós kompakt sokaságokat felületeknek hívjuk. Kétféle kanonikus felületet különböztetünk meg:

1. g darab tórusz összefüggő uniója. Ennek genusa g , S_g -vel jelöljük. Ha $g = 0$, akkor S^3 -at értünk rajta. Ezek irányíthatóak
2. g darab projektív sík összefüggő uniójára, ezt S_{-g} -vel jelöljük. Ezek nem irányíthatóak.

(Az összefüggő uniót a 3.2.1. részben definiáljuk.)

Tétel 3.2. *Egy irányított, kompakt, összefüggő 2-sokaság diffeomorf S_g -vel valamely $g \geq 0$ -ra.*

Egy nem irányítható, kompakt, összefüggő 2-sokaság diffeomorf S_g -vel, ahol $g < 0$.

Az irányítható 2-sokaságokat fogjuk használni ebben a tézisben a gráf 3-sokaság definiálásakor.

3.2. Háromdimenziós sokaságok

Ebben a részben szeretnénk bemutatni, hogy milyen fajta zárt 3-sokaságokat vizsgáltak eddig a matematikusok, milyen módszerek vannak az osztályozásukra. Megjegyezzük, hogy jelenlegi tudásunk szerint nincsen teljesen általános leírása az összes 3-sokaságnak, tehát ez egy máig nyitott topológiai probléma. Körülbelül az 1980-as évekre körvonalazódtak a következőekben tárgyalt módszerek, leginkább Thurston munkássága nyomán, valamint Jaco-Shalen és Johansson topológiai eredményei nyomán, felhasználva az előtte levő 50 év eredményeit.

Egy nagy előnye a 3-dimenziós sokaságoknak, hogy a differenciálható és topologikus sokaságok osztályozása megegyezik ebben a dimenzióban. Bing és Moise megmutatták az 1950-es években, hogy minden topologikus 3-sokaság triangulálható szimpliális komplexusokra, amely kombinatorikus értelemben egyértelmű (bármely két triangulálásból kapott szimpliális komplexusnak van közös finomítása) [5]. Továbbá feltételezve, hogy a sokaság differenciálható, ez a trianguláció lehet sima, és diffeomorfizmus erejéig egyértelmű. Mivel minden 3-sokaságnak egyértelmű differenciálható struktúrája van, ezért a diffeomorf és homeomorf itt ugyanazt jelenti. A következőekben, ahogyan a tézis többi részében is, differenciálható sokaságokat tekintünk, és köztük levő diffeomorfizmusokat vizsgálunk.

Sokaság alatt összefüggő sokaságot értünk, a tézisben csak irányíthatókat vizsgálunk.

A sokaságoknak egyik legerősebb és a legismertebb topológiai invariánsa a fundamentális csoport.

Vegyünk egy egyszerűen összefüggő zárt 3-sokaságot. Ez S^3 -mal ekvivalens a Poincaré sejtés bizonyítása értelmében, melyet Perelman oldott meg.

Amint látni fogjuk, a nem egyszeresen összefüggők között már lesz több példa arra, hogy nem diffeomorf tereknek lehet ugyanaz a fundamentális csoportja.

3.2.1. Kanonikus felbontás - Prímfelbontás

Prímekre történő felbontást (prime decomposition) először Kneser írta le 1930 körül. Egy perem nélküli M 3-sokaság tartalmaz egy beágyazott S^2 -t, szétvághatjuk két részre e mentén. Ekkor M_1 -et és M_2 -t kapjuk, amelyek S^2 peremmel rendelkező 3-sokaságok. Ezeket a peremeket megszüntethetjük egy D^3 hozzáragasztásával ($\partial D^3 = S^2$). Ekkor perem nélküli N_1, N_2 sokaságokat kapunk, melyek zártak, ha az eredeti M is az volt. Ilyenkor mondjuk, hogy M az N_1 és N_2 összefüggő uniója. Ezt az $M = N_1 \# N_2$ szimbólummal jelöljük. Az így kapott műveletünkről látható, hogy kommutatív és asszociatív. A definícióból látszik, hogy minden M 3-sokaságból leválasztható S^3 , tehát $M = M \# S^3$. Ha ez az egyetlen mód, ahogyan összefüggő unióra bonthatjuk M -et, akkor prím sokaságnak mondjuk. Ezzel ekvivalens definíciót kapunk, ha azt mondjuk, hogy minden beágyazott S^2 egy gömböt határol.

Alexander alaptétele 1924-ből azt mondja, hogy minden S^2 -vel diffeomorf felület S^3 -ban egy gömböt határol mindkét oldalán, ebből következik, hogy S^3 prím sokaság. Itt megjegyezhetjük, ha S^3 nem volna prím sokaság, akkor a Poincaré sejtés nem volna igaz, mivel $S^3 = M \# N$ esetén $\pi_1(S^3) = \pi_1(M) * \pi_1(N)$ Van Kampen tétele nyomán, ahol $\pi_1(M)$ vagy $\pi_1(N)$ nemtriviálisak, mivel M vagy N nem egyszeresen összefüggő.

Kneser tétele szerint minden M kompakt irányítható 3-sokaság felírható $M = P_1 \# \dots \# P_n$ alakban, ahol P_i prím sokaság, és a felírás egyértelmű S^3 -ak elhagyásának és a sorrend erejéig.

Ennek létezése a Poincaré sejtéssel könnyen látszik abból az algebrai tételből, hogy egy végesen generált csoport nem írható fel tetszőlegesen sok csoport szorzataként.

Ezzel még sajnos nem egyértelmű a felírás, mert figyelni kell, hogy azonosításkor, amikor az összefüggő uniót készítjük, az irányítás pont ellentétes legyen ahhoz, hogy a kapott 3-sokaság irányítható legyen. A ragasztott 3-sokaság irányítása függ a kiindulási sokaságok irányításától és a ragasztás irányításától. Ha feltesszük, hogy a prím sokaságaink irányítottak, akkor egyértelmű az összefüggő unió készítése az irányítások figyelembe vételével.

Irányított esetben tekinthetjük a következő összefüggő uniókat: $M \# N$ és $M \# -N$. Ezek csak akkor lesznek azonosak, ha létezik $N \rightarrow N$ irányításváltó diffeomorfizmus. Azonban sok prím sokaság nem diffeomorf önmagával irányításváltóan. Ebben az esetben $M \# N$ és $M \# -N$ két nem

diffeomorf 3-sokaság, azonban a fundamentális csoportjuk Van Kampen tétel következtében izomorf.

Definiáljuk a 3-sokaságokra a prímség után az irreducibilitást: egy M 3-sokaság irreducibilis, ha minden S^2 részsokasága egy D^3 részsokaságának pereme.

Bizonyítható, hogy az egyetlen irányított prim sokaság, amely nem irreducibilis, az $S^1 \times S^2$ [4].

3.2.2. Kanonikus felbontás - Tóruszfelbontás

A primfelbontáson túl van egy másik felbontási típus, melyet az 1970-es évek közepén talált ki Johannson és Jaco-Shalen.

Legyen M irányított 3-sokaság. M -nek egy S 2-részsokaságát összenyomhatatlan felületnek nevezzük, ha S nem S^2 és nem D^2 , és $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ injektív.

Be van bizonyítva, hogy egy beágyazott tórusz, amely nem egy S^3 részsokaságban van vagy nem egy beágyazott tömör tórusz pereme, összenyomhatatlan. Ez egy következménye a Loop Theoremnek, mely szerint ha M egy kompakt irányított S 2-részsokaságára $\varphi : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ nem injektív, akkor létezik egy $D \subset M$ 2-lemez, ahol $D \cap S = \partial D$, és ∂D a $\text{Ker } \varphi$ -nek egy nemtriviális elemét reprezentálja.

Seifert-sokaságnak hívjuk a szabad S^1 -hatással rendelkező 3-sokaságokat. Kompakt felületek feletti S^1 -nyalábok speciális Seifert-sokaságok. Hívjuk atorikusnak azokat a sokaságokat, melyek tóruszt csak pontrahúzhatóan tartalmaznak.

A tóruszfelbontás alaptétele a következőt állítja: ha M egy irreducibilis irányított kompakt 3-sokaság, akkor létezik összenyomhatatlan tóruszok diszjunkt uniója T_1, \dots, T_n M -ben, hogy M -et T_i mentén elvágva M_i sokaságot kapunk, mely Seifert-sokaság vagy atorikus sokaság. Minden M_i -beli összenyomhatatlan tórusz izotóp ∂M_i -val. Az ilyen jellegű felbontás egyértelmű M -ben izotóp tóruszok erejéig.

A tórusz mentén való vágás megfelel a gráf 3-sokaságok csővezeték szerkesztésénél történő módszernek. (A gráf 3-sokaságok esetén a tóruszfelbontás mindig Seifert-sokaságokat eredményez.)

3.3. Magasabb dimenziós sokaságok

Az általánosított Poincaré-sejtés $n \geq 4$ dimenzióban az 1980-as évekre lett bizonyítva, utoljára az $n = 4$ eset, amit 1982-ben Freedman bizonyította a topologikus esetben. A tétel használata nehézkes Markov-tétele miatt,

mely szerint két véges csoportrepresentáció izomorfiáját eldöntő algoritmus nem létezik. Az alábbi állítás nyomán látjuk, hogy négynél magasabb dimenzióban a sokaságok osztályozása nem lehetséges algoritmikus úton.

Állítás 3.3. *Adott G végesen reprezentált csoporthoz létezik n -dimenziós sokaság, melynek fundamentális csoportja G minden $n \geq 4-r$ -re.*

Bizonyítás: Vegyük G reprezentációját: $G = \langle a_1, \dots, a_n | w_1 = e, \dots, w_r = e \rangle$, ahol e az egységelem. Vegyük n darab $S^1 \times S^{n-1}$ összefüggő unióját. Ennek fundamentális csoportja $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Minden relációhoz vegyünk egy γ reprezentáló hurkot, és ennek egy kis környezetét, mely diffeomorf $S^1 \times D^{n-1}$ -gyel. Ezt bármely tetszőleges hurok elkerülheti, így ezt elhagyva a térből nem változik a fundamentális csoport. Helyette $D^2 \times S^{n-2}$ -t ragasztva (melynek pereme azonos az elhagyott részével) γ a továbbiakban e -t állítja elő Van Kampen tétele miatt, így ennek r alkalommal történő végrehajtásával olyan n -sokaságot kapunk, melynek fundamentális csoportja G . ■

4. fejezet

Gráf 3-sokaságok

Ebben a részben megmutatjuk, hogy egy dekorált gráfhoz hogyan rendelünk hozzá egy 3-sokaságot.

4.1. Csővezeték gráf (Plumbing graph)

A csővezeték gráf (angolul plumbing graph) egy olyan irányítatlan gráf, melynek minden v csúcsához két szám van rendelve. Az egyik szám e_v az Euler-szám, mely egy tetszőleges egész szám. A másik g_v egy nemnegatív egész szám. A g_v szám egy irányított felület genusát kódolja (a 2-sokaságok osztályozásánál, a 3.1. résznél láttuk.) Jelölésük a gráfon úgy történik, hogy mindkét számot a csúcs mellé írjuk, g_v -t szögletes zárójelben.



Ha a csővezeték gráfból csak az uv él környezetét szeretnénk ábrázolni, a következő ábrát használjuk:



4.2. Csővezeték szerkesztés (Plumbing)

Rögzítsünk egy Γ csővezeték gráfot, csúcshalmazát jelölje \mathcal{V} , élhalmazát \mathcal{E} . Jelölje $M(\Gamma)$ azt az irányított 3-sokaságot, amelyet a következőképpen kapunk. Minden $v \in \mathcal{V}$ -re legyen B_v az S_v feletti S^1 -nyaláb totális

tere. Legyen a nyalábleképezés $\{\pi_v : B_v \rightarrow S_v\}$. Rögzítsünk B_v -nek egy irányítását. Legyen S_v genusa g_v és a B_v nyaláb Euler-száma e_v . Minden uv él B_u és B_v egy sajátos ragasztását definiálja.

Rögzítsünk egy v csúcsot. Minden hozzá tartozó élhez vegyünk egy p pontot S_v -ből. Tekintsük ennek D_p kis lemez környezetét S_v -ben. $\pi_v^{-1}(D_p)$ természetesen megfeleltethető $D_p \times S^1$ szorzattal. Ennek határa: $\partial D_p \times S^1 = S^1 \times S^1$. Vegyük egy $(u, v) \in \mathcal{E}$ élhez tartozó B_u és B_v totális tereket, melyekre $p \in S_u$ és $q \in S_v$. Ekkor a fent leírt módon mindkét pont meghatároz $\partial D_p \times S^1$ és $\partial D_q \times S^1$ tóruszokat. Mindkét halmaz diffeomorf $S^1 \times S^1$ -gyel. Feleltessük meg őket $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix által meghatározott módon, tehát $(z_1, z_2), (z_3, z_4) \in S^1 \times S^1$ -re $(z_1, z_2) \sim (z_4, z_3)$. Ezt a ragasztást elvégezzük minden uv élre. A többszörös élek esetén több pontnál végezzük el az azonosítást, a hurokélek esetében a csúcshoz tartozó S_v két különböző pontjának a környezeteit azonosítjuk. Az így megszerkesztett 3-sokaságot jelöljük $M(\Gamma)$ -val.

Ha rögzítjük B_v és S_v irányítását, amelyek a nyaláb irányítását is meghatározzák, akkor a fenti ragasztás egyértelműen meghatározza a létrejövő $M(\Gamma)$ 3-sokaság irányítását is.

Ha Γ nem összefüggő, akkor vegyük Γ_i összefüggő részgráfoknak megfelelő $M(\Gamma_i)$ 3-sokaságokat, és vegyük ezeknek összefüggő unióját. Az üres gráfnak 3-dimenziós gömbfelszín feleltetjük meg: $M(\emptyset) = S^3$.

Az $M(\Gamma)$ 3-sokaság szerkesztéséhez hasonlóan minden Γ csővezeték gráfhoz egy $P(\Gamma)$ peremes irányított 4-sokaságot is megszerkeszthetünk. Erre $\partial P(\Gamma) = M(\Gamma)$ igaz. Ha a szerkesztésben az S^1 -nyaláb helyett D^2 -lemeznyalábot veszünk, és a megfeleltetés hasonlóan a fentiekhez $\pi_u^{-1}(D_p)$ és $\pi_v^{-1}(D_q)$ (amelyek ebben az esetben $D^2 \times D^2$ -vel diffeomorfak) közt történik a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ azonosítással.

Az így kapott definícióval egy tetszőleges Γ véges irányítatlan gráfhoz hozzárendeltünk egy irányított $M(\Gamma)$ 3-sokaságot. Szeretnénk meghatározni azt, hogy két különböző gráf mikor határozza meg ugyanazt a 3-sokaságot. Ezt a csővezeték ekvivalencia adja meg (4.4. rész)

Nézzünk néhány egyszerűbb példát, hogy hogyan is néz ki az egy csúcsú gráfhoz rendelt sokaság. (Ezek pontosan az S^1 -nyalábok.)

Példa 4.1. *A legegyszerűbb eset, ha az Euler-szám 0, ekkor a nyaláb triviális. Tehát ilyenkor a genus meghatározza a sokaságot.*

A 3-dimenziós gömböt megegyezés szerint az üres gráffal is jelölhetjük, ez felírható +1 és -1-es Euler-számú S^2 feletti S^1 -nyalábként is (amint látni fogjuk a következő paragrafusban és a 4.2. állításban).

A komplex projektív egyenes S^2 -nek felel meg. Tekintsük \mathbb{CP}^1 -et mint egy projektív egyenes \mathbb{CP}^2 -ben és legyen T tubuláris környezete. Ennek kis módosítása, hogy transzverzális legyen önmagára, legyen \mathbb{CP}^1 . Ekkor az önmetszése $+1$ (mert két projektív egyenes \mathbb{CP}^2 -ben egy pontban metszi egymást). Tehát T azonosítható $P(\Gamma)$ -val és $M(\Gamma)$ -val, ahol az egyetlen csúcs Euler-száma $+1$. Mivel $\mathbb{CP}^2 - T$ pereme S^3 , ezért $\partial T = M(\Gamma) = S^3$.

$$\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ [g] & [0] & [0] \\ S^1 \times S_g & S^3 & S^3 \end{array}$$

Állítás 4.2. A -1 Euler-számú, 0 genusú felület feletti S^1 -nyaláb S^3 -mal diffeomorf.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy S^2 diffeomorf \mathbb{CP}^1 -gyel. Tekinthejtük az \mathbb{CP}^1 feletti S^1 -nyalábokat is. Ennél egy kicsit általánosabban, vegyük az \mathbb{CP}^1 feletti \mathbb{C} vektornyalábokat:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & M \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{CP}^1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{CP}^1 \end{array}$$

Vegyük \mathbb{CP}^1 következő \mathcal{F} felbontását: $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}_x \sqcup \mathbb{C}_y$, ahol $x \in \mathbb{C}_x, y \in \mathbb{C}_y$ -re, $x \sim \frac{1}{y}$. Ezt a nyaláb ragasztása a következőképpen egészíti ki:

$$\mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_u \sqcup \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_v.$$

Megszerkesztünk egy \mathbb{CP}^1 feletti \mathbb{C} -nyalábot a következő \sim azonosítással: $(x, u) \in \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_u$ és $(y, v) \in \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_v$ -re $x \sim \frac{1}{y}$ és $v \sim f(x)u$, ahol $f(x) = x^{-n}$.

Bizonyítani fogjuk, hogy ennek a fibrált térnek az Euler-száma n .

Szerkesszünk két egymásra transzverzális szelést a totális térben. Legyen s_0 a zérószelés: $x \in \mathbb{C}_x$ -re $s_0(x) = (x, 0) \in \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_u$ és $y \in \mathbb{C}_y$ -re $s_0(y) = (y, 0) \in \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_v$. Erről a szelésről látható, hogy jól ragasztódik \sim által. Legyen egy másik szelés: s , amely $x \in \mathbb{C}_x$ -re $s(x) = (x, 1)$. Ez a \mathbb{C}_y -on a következő módon ragad jól: $y \in \mathbb{C}_y$ -ra: $s(y) = (y, y^n)$, mert ekkor $x \neq 0$ -ra $(\frac{1}{x}, 1) \sim (y, x^{-n} \cdot 1) = (y, y^n)$.

$n \geq 1$ -re ennek és a zérószelésnek metszete csak $y = 0$ -ban van, $v = 0$ és $v = y^n$ transzverzális metszetszáma n . Azaz kis perturbálással n -szer fogják metszeni egymást. És mindegyik metszés $+1$ -gyel számolódik. Tehát n a nyaláb Euler-száma.

Vegyük $n = -1$ esetet. Itt s szelés $x \in \mathbb{C}_x$ -re és $y \in \mathbb{C}_y$ -ra: $s(x) = (x, 1), s(y) = (y, \frac{1}{y})$. Ennek nincsen metszete a zérószeléssel, mert nem tudjuk

definiálni $y = 0$ pontban. Cseréljük le tehát $\|y\| \leq 1$ -re s függvényt $s(y) = \bar{y}$ -ra. Ez $\|y\| = 1$ -re megegyezik $\frac{1}{y}$ -nal, tehát kis módosítással egy sima szelést kaphatunk belőle úgy, hogy $y \geq 1 + \varepsilon$ -ra marad $s(y) = \frac{1}{y}$. $x \in \mathbb{C}_x$ -re s -t úgy módosítsuk, hogy a neki megfelelő pontokat adja. Ekkor már lesz metszése s -nek és s_0 -nak $\mathbb{C}_y \ni y = 0$ -ban. Az irányítást a konjugálás pont megfordítja, tehát itt a lokális metszési szám -1 , tehát az Euler-száma ennek a térnek -1 , mert ez volt az egyetlen metszés.

A -1 Euler-számú $P(\Gamma)$ \mathbb{C} -nyaláb a következőképpen is realizálható (mint \mathbb{C}^2 felfűzése). Azonosítjuk \mathbb{CP}^1 -et a \mathbb{C}^2 origón átmenő egyenesével. Legyen $I = \{(v, L) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 \mid v \in L\}$ incidencia sokaság. Ekkor $I \rightarrow \mathbb{P}^1, (v, L) \mapsto L$ egy \mathbb{C} -nyaláb, amely Euler-száma -1 , és I azonosítható $P(\Gamma)$ -val, ahol Γ -nak egyetlen csúcsa $g = 0$ és $e = -1$ dekorációkkal.

Koordinátákkal $v = (z_1, z_2), L = [w_1 : w_3]$, I -t a $z_1 w_2 = z_2 w_1$ egyenlet adja. \mathbb{C}_x -en $w_1 \neq 0, [w_1 : w_2] = [1 : w_2/w_1] = [1 : x]$. \mathbb{C}_y -on $w_2 \neq 0, [w_1 : w_2] = [w_1/w_2 : 1] = [y : 1]$. Tehát $y = \frac{1}{x}$. \mathbb{C}_x felett, $z_1 w_2 = z_2 w_1$ egyenlet átalakul $z_2 = x z_1$ egyenletté, z_1 azonosítható u lineáris koordinátával, tehát $z_1 = u, z_2 = xu$. Hasonlóan, \mathbb{C}_y felett $z_1 = z_2 y, z_2 = v, z_1 = vy$. Tehát az azonosítás $v = z_2 = xu = x^{-n}u$, azaz $n = -1$.

Ha kicseréljük a fenti \mathbb{C} -nyalábot a megfelelő D^2 -nyalábra, akkor $I = \{(v, L) \in D^4 \times \mathbb{CP}^1 \mid v \in L\} \simeq P(\Gamma)$. Az első koordinátára való vetítés $I \rightarrow D^4$ bijektív a peremen, azaz $M(\Gamma) = \partial P(\Gamma) = \partial D^4 = S^3$. ■

4.3. Metszési mátrix

Definíció 4.3. Γ csővezeték gráf minden v csúcsa meghatároz egy 2-ciklust $H_2(P(\Gamma))$ -ban, ezeket jelöljük E_v -vel ($v \in \mathcal{V}$). Ekkor $H_2(P(\Gamma))$ -t ezek szabadon generálják. Jelöljük I -vel az $\{(E_u, E_v)\}_{u,v \in \mathcal{V}}$ $n \times n$ metszési mátrixot, ahol $n = |\mathcal{V}|$. Ekkor ez meghatározza a gráf Euler-számait és az éleket úgy, hogy $I_{u,v} = e_v$, ha $u = v$ és az élek száma u és v közt, ha $u \neq v$.

4.4. Csővezeték ekvivalencia (Plumbing calculus)

Ebben a részben szeretnénk megmutatni, hogy mikor azonos két csővezeték gráfhoz rendelt sokaság. Ez azt is megmutatja, hogy ha ugyanazt a sokaságot kétféle csővezeték gráffal reprezentálunk, akkor hogyan viszonyulnak ezek a gráfok egymáshoz. A lépéseket, melyekkel az egyik gráfból a másikba eljuthatunk, csővezeték kalkulusnak hívjuk. Kétféle tulajdonságot követelünk

meg a lépéseinktől:

1. Egy lépés vagy az inverze ne változtasson a szerkesztett $M(\Gamma)$ sokaságon irányított diffeomorfizmus erejéig.
2. Ha $M(\Gamma_1)$ és $M(\Gamma_2)$ sokaságok egymással irányítottan diffeomorfak, akkor Γ_1 -ből el lehessen jutni a megadott lépésekkel Γ_2 gráfhoz.

Nevezzük megengedett lépésnek az olyan lépést, amely nem változtat irányított diffeomorfizmus erejéig a szerkesztett sokaságon.

A következő lépések megengedettek:

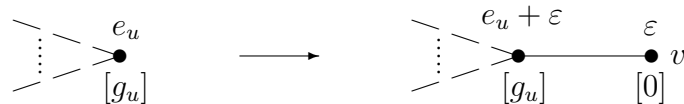
1. Felfújás - lefújás (Blowing up - blowing down)

A gráf csúcsszámának növelésére használhatjuk a következő lépéseket, a csúcsszám csökkentésére ezeknek az inverzét, ε mindig ± 1 -et jelent:

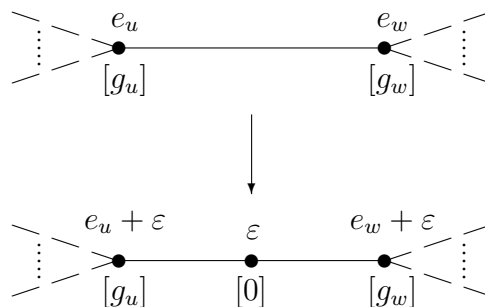
Egy izolált csúcs hozzávétele 0 genuszal és ε Euler-számmal.

$$\Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_0 + \begin{matrix} \varepsilon \\ \bullet \\ [0] \end{matrix}$$

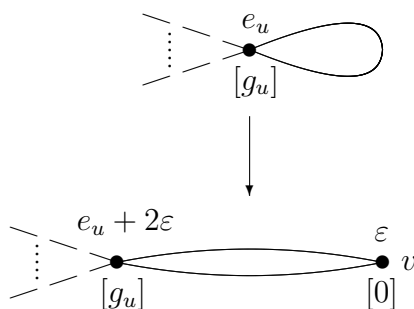
Egy v csúcs hozzávétele $g_v = 0$ genuszal és $e_v = \varepsilon$ Euler számmal, egy éllel csatlakozva egy u csúcshoz, ekkor az e_u növekszik ε -nal.



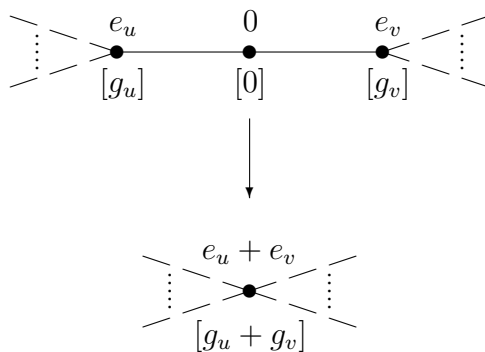
Egy kétfokú v csúcs ($g_v = 0, e_v = \varepsilon$) hozzávétele uw élre: uw él megszűnik, és helyette uv és vw élek lesznek, e_u és e_w növekszik ε -nal.



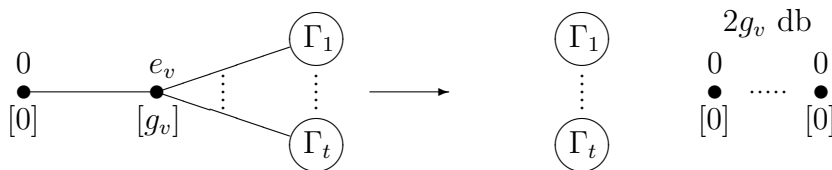
Egy u csúcshoz tartozó hurokél helyett v csúcs és két uv él, ahol $g_v = 0, e_v = \varepsilon$ és e_u növekszik 2ε -nal.



2. **0-lánc elhagyása** A gráfban következő esetben elhagyhatunk egy csúcsot, és kettőt egybeilleszthetünk az következő esetben: egy 0 genusú 0 Euler-számú kétfokú csúcs, melynek szomszédai u és v :



3. **Szétvágás** Ha Γ olyan alakú, hogy egy g_v genusú csúcsához $\Gamma_1, \dots, \Gamma_t$ összefüggő részgráfok csatlakoznak egy-egy éllel, valamint egy 0 Euler-számú, 0 genusú csúcs, ekkor kicserélhető $\Gamma_1, \dots, \Gamma_t$ diszjunkt uniójára, valamint $2g_v$ darab 0 Euler-számú 0 genusú csúcsra:

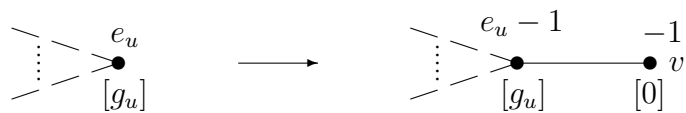


Megjegyzés 4.4. Változtassuk Γ csővezeték gráfon az összes Euler-számot ellentettjére, jelölje az így kapott gráfot $-\Gamma$. Ekkor $M(-\Gamma) = -M(\Gamma)$.

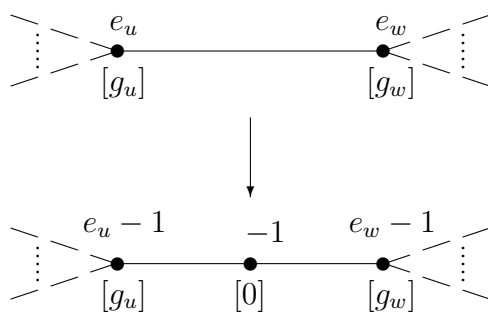
Általában nem tekintjük az összes gráfot, amely ugyanazt a szerkesztett sokaságot jelenti, hanem csak egy bizonyos családját gráfoknak, melyekre már kevesebb lépés megengedett. Gyakran csak azokat a gráfokat tekintjük, melyek összefüggőek, és negatív definit a metszési mátrixuk. Ezekre csak az él

és csúcs felfújása -1 -es Euler-számú csúccsal és ezeknek inverzei jelentenek megengedett lépést.

Egy csúcs felfújása:



Egy él felfújása:



5. fejezet

3-sokaságok mint felületszingularitások linkjei

5.1. Homogén polinom linkjei

Ebben a részben azt vizsgáljuk meg, hogy egy három változós homogén komplex polinommal hogyan határozhatunk meg egy 3-sokaságot, majd megnézzük néhány példát.

Példa 5.1. Vegyünk egy $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ homogén polinomot, amelynek foka legalább egy. Feltételezzük, hogy f -nek csak a $\mathbf{0}$ -ban lehet szinguláris helye, azaz $\{p \in \mathbb{C}^3 \mid \partial f(p) = 0\} = \{\mathbf{0}\}$. Ebben az esetben a $\{f = 0\}$ zérushelyek halmaza 2 komplex dimenziós és sima az $\mathbf{0}$ komplementerében. Tekintsük \mathbb{CP}^2 azon definícióját, ahol $x, y \in \mathbb{C}^3$ azonosak, ha $x = \lambda y$ valamely $\lambda \in \mathbb{C}^*$ számra. Ez meghatároz egy \mathbb{C}^* -nyalábot \mathbb{CP}^2 felett. $\{f = 0\}$ halmaz \mathbb{C}^* -beli elemekre a koordinátánként való szorzásra invariáns, tehát vehetjük az így kapott \mathbb{CP}^2 -beli részhalmazát $\{f = 0\}$ -nek: C_d -t, melynek komplex dimenziója 1. A beágyazással kapunk egy fibrált nyalábot az C_d és \mathbb{CP}^2 felett:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 - \{\mathbf{0}\} & & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \{f = 0\} - \{\mathbf{0}\} \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & \mathbb{CP}^2 & & & & C_d \end{array}$$

Vegyük $\{f = 0\}$ metszetét egy elég kicsi $\varepsilon > 0$ -ra S_ε^5 -tel. Legyen $L = \{f = 0\} \cap S_\varepsilon^5$. Ekkor $\dim_{\mathbb{R}} L = 3$, mert $\dim_{\mathbb{R}} \{f = 0\} = 4$ és $\dim_{\mathbb{R}} S^5 = 5$ és a metszés transzverzális. Ez invariáns a koordinátánként való szorzásra minden $\lambda \in S^1$ -re, tehát az így kapott leképezéssel egy S^1 -nyalábot kapunk C_d felett ($\dim_{\mathbb{R}} C_d = 2$):

$$\begin{array}{ccc}
S^1 & \longrightarrow & L \\
& & \downarrow \\
& & C_d
\end{array}$$

Az L $\mathfrak{3}$ -sokaságot az $\{f = 0\}$ halmaz linkjének nevezzük. Az általános definíció 5.6. tételben található.

Példa 5.2. Legyen $f = x^d + y^d + z^d$. Ekkor $\dim_{\mathbb{C}} \{f = 0\} = 2$ és f -nek $\mathbf{0}$ -ban izolált szingularitása van, mert minden parciális derivált csak $\mathbf{0}$ -ban tűnik el. Az így kapott sokaság Euler-száma $-d$ lesz, a C_d bázis tér genusa $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Vegyük az első három esetet: $d = 1$ -re S^3 -at kapjuk, $d = 2$ -re $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ -at kapjuk $d = 3$ -ra már nem közismert $\mathfrak{3}$ -sokaság, amit kapunk. A gráfjuk:

$$\begin{array}{ccc}
-1 & -2 & -3 \\
\bullet & \bullet & \bullet \\
[0] & [0] & [1] \\
d = 1 & d = 2 & d = 3
\end{array}$$

A fenti példában $P(\Gamma)$ a következőképpen realizálható (hasonlóan \mathbb{C}^2 origóbeli felfűzéséhez).

Azonosítjuk $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ -t \mathbb{C}^3 origón átmenő egyenesével. Legyen $I = \{(v, L) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \mid v \in L\}$. Az $I \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ egy \mathbb{C} -nyaláb (ezt nevezzük $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ tautologikus nyalábjának). Ez az $\{f = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ algebrai görbére megszorítva a következőt adja: $I_f = \{(v, L) \in \mathbb{C}^3 \times C_d \mid v \in L\}$. A $(v, L) \mapsto L \in C_d$ vetítés egy \mathbb{C} -nyaláb C_d felett, amelyhez rendelt D^2 -nyaláb azonosul $P(\Gamma)$ -val.

A $\phi : I_f \rightarrow \{f = 0\} \subset \mathbb{C}^3$, $(v, L) \mapsto v$ vetítés az $\{f = 0\}$ tér egy olyan módosítása, amely izomorfizmus $\{f = 0\} - \{\mathbf{0}\}$ felett, de $\phi^{-1}(\mathbf{0}) = C_d$. Továbbá I_f egy sima tér. Általában az $\{f = 0\}$ egy sima térre való kicserélése nemhomogén esetben sokkal nehezebben szerkeszthető meg. A rezolúcióelmélet ezt adja meg.

5.2. Rezolúció

Definíció 5.3. Tekintsünk egy X komplex algebrai sokaságot ($X = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_1(x) = 0, \dots, f_k(x) = 0\}$, ahol $f_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, és $f(\mathbf{0}) = 0$), amelynek $\mathbf{0}$ az egyetlen szinguláris pontja.

Definíció szerint $\phi : \tilde{X} \rightarrow U$ az $(X, \mathbf{0})$ tér egy rezolúciója, ha teljesülnek a következők:

1. \tilde{X} differenciálható sokaság,
2. U egy kis környezete $\mathbf{0}$ -nak X -ben,

3. $\phi|_{\phi^{-1}(U - \{\mathbf{0}\})} : \phi^{-1}(U - \{\mathbf{0}\}) \rightarrow U - \{\mathbf{0}\}$ izomorfizmus,

4. $\phi^{-1}(C)$ kompakt, ha C kompakt.

$E = \phi^{-1}(U \cap \{\mathbf{0}\})$ halmazt kivételes halmaznak hívjuk. Ha $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$, akkor E komplex algebrai görbék uniója.

Azt mondjuk, hogy egy ϕ rezolúció jó, ha $\phi^{-1}(\mathbf{0})$ komponensei transzverzálisan metszik egymást \tilde{X} -ban.

Megjegyzés 5.4. Minden X -hez létezik jó rezolúció.

A következőekben feltételezzük, hogy $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$ és rögzítünk egy jó rezolúciót.

Legyen $\phi : (\tilde{X}, E) \rightarrow (X, \mathbf{0})$ a jó rezolúció. Itt E -t ϕ kivételes halmazának hívjuk. Gyakran $\{E_v\}_{v=1}^s$ -t írunk E irreducibilis komponenseire.

Továbbá rögzíthetünk egy f algebrai függvényt X téren. Az általános elmélet szerint létezik egy olyan $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ rezolúció, amelyre $(f \circ \phi)^{-1}(0)$ egy transzverzális divizor (normal crossing divisor). Ezt nevezzük (X, f) pár beágyazott rezolúciójának.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \\ \downarrow \phi & \searrow f \circ \phi & \\ X & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \end{array}$$

Itt minden $x \in (f \circ \phi)^{-1}(0)$ -ra léteznek X -beli lokális koordináták (z_1, \dots, z_d) , amelyekre $(f \circ \phi)(z_1, \dots, z_d) = \prod_{i=1}^d z_i^{\alpha_i}$, ahol $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Bármely $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ esetén definiáljuk ϕ metszési mátrixát $I_{vu} = I(E_v, E_u)$ módon.

Legyen $(X, \mathbf{0})$ $\mathbf{0}$ -beli szingularitású felület. Legyen $f : (X, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ egy analitikus függvény rajta. Legyen $(V(f), \mathbf{0}) = (f^{-1}(0), \mathbf{0})$. Legyen $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ egy jó beágyazott rezolúciója $(X, V(f))$ párnak. Legyen E a kivételes halmaza ϕ -nek, melynek irreducibilis felbontása $\{E_v\}_{v \in \mathcal{V}}$. Legyen $S(f)$ a $\phi^{-1}(V(f) - \{\mathbf{0}\})$ halmaz lezártja. Ezt nevezzük f -nek ϕ szerinti transzformáltjának. Ennek irreducibilis felbontása legyen $\{S_a\}_{a \in \mathcal{A}}$.

Definíció 5.5. Definiáljuk (X, f) pár rezolúciós gráfját a következő módon. A csúcsok legyenek: $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cup \mathcal{A}$, ahol \mathcal{W} elemei, a nemnyíl csúcsok megfelelnek E_v -knek, míg \mathcal{A} elemei, a nyíl csúcsok S_v -knek. Az élek halmaza legyen \mathcal{E} . Ha $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ divizorok metszik egymást k -szor, akkor v_1 és v_2 közt legyen k él.

A dekorálás legyen a következő: $w \in \mathcal{W}$ dekorációja: e_w Euler-szám (azaz E_w önmetszése \tilde{X} -ban), g_w genusa E_w -nek és m_w multiplicitás. Az $a \in \mathcal{A}$ elemeit dekoráljuk m_a multiplicitással. Minden $v \in \mathcal{V}$ -re az m_v multiplicitás az $f \circ \phi$ zérushelyének multiplicitását jelenti (ezt a lokális koordinátáknál α_i -k adják). Az m_v multiplicitást zárójelben tüntetjük fel a gráf ábráján. (A nyíl csúcsokra csak a multiplicitást írjuk.) Például, ha f egy izolált szingularitást jelenít meg, akkor $m_a = 1$ minden $a \in \mathcal{A}$ -ra.

Ezek a dekorációk nem függetlenek. Bármely $w \in \mathcal{W}$ esetén

$$m_w e_w + \sum m_v = 0,$$

ahol az összegzés $v \in \mathcal{V}$ és $wv \in \mathcal{E}$ élek szerint történik (lásd a következő megjegyzés 3. pontját).

A rezolúció és a csővezeték szerkesztés közti kapcsolatot a következő tétel adja.

Tétel 5.6. Legyen $X \subset \mathbb{C}^n$ egy komplex 2-sokaság (mint 5.3. résznel) és legyen S_ε^{2n-1} egy kis ε sugarú gömbfelület. Akkor $X \cap S_\varepsilon^{2n-1} = L$ egy irányított 3-sokaság. Ezt nevezzük X linkjének. Ha $\phi: \tilde{X} \rightarrow X \cap B_\varepsilon^{2n-1}$ egy jó rezolúció, akkor $\partial \tilde{X}$ azonosítható $L = X \cap S_\varepsilon^{2n-1}$ -nal. Továbbá, \tilde{X} azonosítható $P(\Gamma)$ -val, ahol Γ a ϕ rezolúciós gráfja.

Minden E_v tubuláris környezete azonosítható E_v feletti e_v Euler-számú D^2 -nyalábbal, és az élek az $E_v \cap E_u$ metszeten létrejövő ragasztást kódolják.

Megjegyzés 5.7. A rezolúciós gráf tulajdonságai

1. A rezolúciós gráf összefüggő.
2. A rezolúciós gráf egyértelműen meghatározza a linket, hiszen a link pontosan $M(\Gamma)$. Ugyanakkor több gráf is ugyanazt az $M(\Gamma)$ linket határozhatja meg.

Pontosabban: egy -1 -görbe felfújása illetve lefújása újabb gráfot eredményez, de a két gráf ugyanazt a 3-sokaságot határozza meg. A következő ábrák mutatják E_v egy pontjának felfújását és $E_v \cap E_w$ metszéspontjának felfújását:





A link gráf 3-sokaságként való realizálásában a fenti két lépés adja az összes lehetséges ambiguitásokat.

3. Legyen I a metszési mátrixa. Az 5.2. képlet a következőképpen is értelmezhető (V_w jelöli a w -vel szomszédos csúcsokat):

$$\sum_{v \in \mathcal{W}} m_v I_{v,w} + \sum_{a \in \mathcal{A} \cap V_w} m_a = 0 \quad \forall w \in \mathcal{W} \text{-re.}$$

Ez nagyon fontos technikai eszköz a gráfok Euler-számainak meghatározásához.

4. Az I metszési mátrix negatív definit.

5.3. Példák

Példa 5.8. Legyen $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4, \varphi(s, t) = (x, y, z, w) := (s^3, s^2t, st^2, t^3)$. Definiáljuk az X komplex felületet mint $\text{Im } \varphi \subset \mathbb{C}^4$, ekkor $\dim_{\mathbb{C}} \text{Im } \varphi = 2$ és X -nek csak $\mathbf{0}$ szingularis pontja. Megadhatjuk X -et három egyenlettel:

$$X = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4 \left| \begin{array}{l} xz = y^2 \\ xw = yz \\ yw = z^2 \end{array} \right. \right\}.$$

Ennél kevesebb egyenlettel nem adható meg. A következő Jacobi-mátrix rangja mindig kisebb mint 3 X pontjaira: $\left\{ \begin{array}{cccc} z & -2y & x & 0 \\ w & -z & -y & x \\ 0 & w & -2z & y \end{array} \right\}$.

Vizsgáljuk meg az első minort, a többi hasonlóan megy: $\left| \begin{array}{ccc} z & -2y & x \\ w & -z & -y \\ 0 & w & -2z \end{array} \right| = 2z^3 + xw^2 - 4yzw + yzw = 2z^3 - 2yzw + xw^2 - yzw = 2z(z^2 - yw) + w(xw - yz)$, ami 0, ha $(x, y, z, w) \in X$.

Mivel ezek is homogén polinomok, és mindegyik másodfokú, ezért elmondható az előző esetben tárgyalt módszerhez hasonlóan, hogy akkor gráf 3-sokaságot kapunk, ha ezt elmetsszük $S^7 \subset \mathbb{C}^4$ -gyel.

Az így kapott tér $L(3, 1)$, gráfja (a számolás az 5.12. részénél van leírva):

$$\begin{array}{c} -3 \\ \bullet \\ [0] \end{array}$$

5.4. Lencseterek

Definíció 5.9. Vegyünk egy véges ciklikus csoportot, \mathbb{Z}_n -t. Vegyük ennek egy realizációját a komplex egységkörön: $\mathbb{Z}_n = \langle \xi \rangle, \xi^n = 1$. Vegyük $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ -n az alábbi csoportthatást:

$$\xi * (x, y) = (\xi x, \xi^q y),$$

ahol $1 \leq q < n$ és $(q, n) = 1$. Az így kapott hatással faktorizálva S^3 -at $L(n, q)$ lencseteret kapjuk: $L(n, q) = S^3 / \xi_{*(\cdot)}$.

Példa 5.10. Vegyük $\mathbb{R}P^3$ -at, melyet megkaphatunk $S^3 / p \sim -p$ -ből. Mivel az azonosítás $-1 * (x, y) = (-x, -y)$ módon történik, ez a \mathbb{Z}_2 csoporttal való hatás, tehát $\mathbb{R}P^3 = L(2, 1)$. Ennek csővezeték gráfja:

$$\begin{array}{c} -2 \\ \bullet \\ [0] \end{array}$$

Bizonyítás: Tekintsük a $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3, \varphi(s, t) = (s^2, t^2, st)$ leképezést. És tekintsük $p \sim -p$ megfeleltetést \mathbb{C}^2 -en. Ekkor φ bijektív lesz $X = \text{Im } \varphi$ -re. Vegyük X linkjét, azaz elmetszését S^5 -tel. Ez a lencseteret adja a bijektív megfelelés miatt. Vizsgáljuk meg \mathbb{C}^3 invariáns: $xy = z^2$ minden pontra, tehát vehetjük $\mathbb{C}^3 /_{xy=z^2}$ megszorítást. Tehát $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 | xy = z^2\} \simeq \{(u, v, w) \in \mathbb{C}^3 | u^2 + v^2 + w^2 = 0\}$, mert a $(a, b, c, d) \mapsto (a+d, b-c, a-d, b+c)$ leképezés egy lineáris invertálható transzformáció $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$ -en. Ez a $d = 2$ eset az 5.2. példában. ■

Az 5.2. példában nem bizonyítottuk, hogy az Euler-szám $-d$, mert kellett hozzá a rezolúció fogalma, ezért ezt most tesszük meg.

Állítás 5.11. Az 5.2. példában leírt 3-sokaság csővezeték gráfja egy csúcsból áll, a dekorációk: $e = -d, g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Bizonyítás: Felfűjjük a \mathbb{C}^3 teret : $I = \{(v, L) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}P^2 | v \in L\}$. Tekintsük az $x = 0$ térképet. A többi térképre a következő számítás hasonlóan elvégezhető. Az $I \rightarrow \mathbb{C}^3$ felfűjás koordinátás felírása $x = \alpha, y = \alpha\beta, z = \alpha\gamma$. Legyen X tér a $\{x^d + y^d + z^d = 0\}$ halmaz. Az egyenletbe helyettesítést elvégezve $\alpha^d(1 + \beta^d + \gamma^d) = 0$ egyenletet kapjuk. Az $\alpha = 0$

reprezentálja az egyetlen kivételes divizort. Mivel ezen a térképen ez egy affin egyenes, ezért a projektívizáltja egy projektív egyenes. Az X tér felfújítja: $\{(1 + \beta^d + \gamma^d) = 0\}$. Ez sima lesz (nem tűnik el egyszerre az összes parciális derivált). Definiáljuk az $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}, f(x, y, z) = ax + by + cz$ leképezést, amit megszorítunk X -re. Ennek felemeltje $\alpha(a + b\beta + c\gamma)$ lesz. Az $\alpha = 0$ a kivételes divizor menti eltűnés. A másik $(a + b\beta + c\gamma)$ egyenlet az eredeti $\{\alpha = 0, 1 + \beta^d + \gamma^d = 0\}$ halmazt d pontban metszi, minden metszésre kapunk egy divizort. Alkalmazva így az 5.7. megjegyzés 3. pontját az $e + \sum_{i=1}^d 1 = 0$ egyenletet kapjuk, amiből következik, hogy az egyetlen csúcs Euler-száma $-d$.

A d -edfokú projektív sima görbe az úgy nevezett genus formulából következően $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$. ■

Állítás 5.12. Az $L(n, 1)$ lencsetér csövezeték gráfja a következő:

$$\begin{array}{c} -n \\ \bullet \\ [0] \end{array}$$

Bizonyítás: Csak az $n = 3$ esetet bizonyítjuk, a többit hasonlóan bizonyíthatjuk.

Tekintsük a $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4, \varphi(s, t) = (s^3, s^2t, st^2, t^3)$ leképezést. A \mathbb{C}^2 teret faktorizáljuk az $(x, y) \sim (\xi x, \xi y)$ azonosítással, ahol $\xi^3 = 1$. A φ leképezés bijektív megfeleltetést ad \mathbb{C}^2/\sim és $\text{Im } \varphi$ közt.

Az $\text{Im } \varphi$ megegyezik a \mathbb{C}^4 térrel a következő egyenletekkel faktorizálva: $xz = y^2, xw = yz, yw = z^2$. Fűjjük fel \mathbb{C}^4 -et: $I = \{(v, L) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{CP}^3 | v \in L\}$.

Tekintjük az $x = 0$ térképét \mathbb{CP}^3 -nak a I -ben, ennek levetítése \mathbb{C}^4 -re a következő koordinátázás: $x = \alpha, y = \alpha\beta, z = \alpha\gamma, w = \alpha\delta$. A többi térképen is hasonló a leírás. Ekkor az egyenletek a következő módon néznek ki:

$$\begin{array}{llll} xz = y^2 & \rightarrow & \alpha^2\gamma = \alpha^2\beta^2 & \rightarrow & \gamma = \beta^2 \\ xw = yz & \rightarrow & \alpha^2\delta = \alpha^2\beta\gamma & \rightarrow & \delta = \beta\gamma \\ yw = z^2 & \rightarrow & \alpha^2\beta\delta = \alpha^2\gamma^2 & \rightarrow & \beta\delta = \gamma^2 \end{array}$$

Az $\alpha = 0$ reprezentálja a kivételes divizort, ezért elhagyható az egyenletekből. Látható, hogy az első kettőből következik a harmadik, így a harmadikat is elhagyhatjuk. A kapott két egyenlet: $\gamma = \beta^2, \delta = \beta\gamma = \beta^3$. Tehát α és β meghatározza a többi koordinátát. Ezzel a felfűjás megfelel \mathbb{C}^2 -nek, amely egy sima sokaság, tehát ezen a térképen ez egy jó rezolúció.

Tekintsük az $f : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}, f(x, y, z, w) = ax + by + cz + dw$ leképezést, ahol $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$. Ez a rezolúción a következő egyenletet adja: $f(\alpha, \beta) =$

$\alpha(a + b\beta + c\beta^2 + d\beta^3)$. Az $\alpha = 0$ a kivételes divizoron való eltűnése, a második tag elég általános a, b, c, d esetén 3 különböző gyököt eredményez. Így ebből három darab egyszeres multiplicitású nyilat kapunk. Felírjuk az 5.7. megjegyzés 3. pontjában kapott egyenletet: $1 \cdot e + 1 + 1 + 1 = 0$, ahol a három $+1$ nyilak miatt van. Ebből kapjuk, hogy az Euler-szám -3 . ■

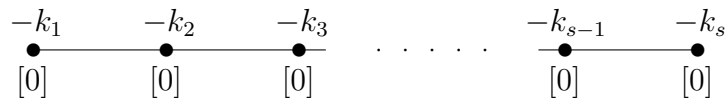
A teljesség kedvéért leírjuk a következő megjegyzést, amely általános lencseterekre adja meg a csővezeték gráfot. Ezt a típusú csővezeték gráfot bambusznak hívjuk.

Megjegyzés 5.13. Minden lencsetér csővezeték gráfja megkapható a következő módon. Legyen $L(n, q)$ lencsetér. Írjuk fel $\frac{n}{q}$ -t negatív lánc tört alakjában:

$$\frac{n}{q} = k_1 - \frac{1}{k_2 - \frac{1}{k_3 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{k_s}}}}$$

Ahol $k_1, \dots, k_s \geq 2$ egészek.

Ekkor $L(n, q)$ csővezeték gráfja a következő:



Irodalomjegyzék

- [1] D. Gale: *The Classification of 1-Manifolds: A Take-Home Exam*, The American Mathematical Monthly Vol. 94, No. 2 (Feb., 1987), pp. 170-175
- [2] V. Guillemin, A. Pollack: *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974
- [3] A. Hatcher: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002
- [4] A. Hatcher: *Notes on Basic 3-Manifold Topology*, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3Mfds.pdf>
- [5] E. E. Moise: *Affine structures in 3-manifolds*, Annals of Mathematics, Vol. 56 (Jul., 1952), pp. 96-114
- [6] A. Némethi: *Normal Surface Singularities*, (előkészületben levő könyv)
- [7] W. D. Neumann: *A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves*, Trans. Amer. Math. Soc. 268 (1981), 299-344
- [8] W. D. Neumann Graph 3-manifolds, Splice diagrams, Singularities, <http://www.math.columbia.edu/~neumann/preprints/graphmans0.1.pdf>
- [9] E. Spanier: *Algebraic topology*, McGraw-Hill, 1966