Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Nemarkhimédeszi Funkcionálanalízis

Lévai Orsolya

BSc Szakdolgozat

Témavezető:
Zábrádi Gergely, adjunktus

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2019

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Zábrádi Gergelynek a hosszas magyarázatokat, a gyors válaszokat és hogy mindig segítő szándékkal fordult felém.
Köszönet illet továbbá mindenkit, aki bármilyen nemben hozzájárult a dolgozat elkészüléséhez, akár szakmai, akár lelki támogatást nyújtva.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1. A dolgozat témája

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

A háromszög-egyenlőtlenség egy nagyon természetesen adódó fogalom. Már általános iskolában megtanuljuk, hogy csak úgy tudunk háromszöget szerkeszteni adott oldalhosszakkal, ha előtte megbizonyosodunk róla, hogy bármelyik két oldalhosszunk összege nagyobb a harmadiknál. Gimnáziumban megismerkedünk a 2- és 3-dimenziós vektorterekkel és alakzatokat modellezünk vektorokkal. Itt is a legtermészetesebb, hogy két pont között a legrövidebb út a közéjük húzott egyenes, ami ismét csak a háromszög-egyenlőtlenség következménye. Később egyetemen az ilyen vektorterek általánosításaként rajzolódik ki előttünk a funkcionálanalízis, mely gépezetének egyik legalapvetőbb építőeleme még mindig a háromszög-egyenlőtlenség. De mi maradna meg belőle, ha egy erősebb egyenlőtlenséget követelnénk meg az abszolútérték és a norma definíciójánál?

$$|a+b| \leq \max(|a|; |b|)$$

Ez az ultrametrikus egyenlőség. Ha a háromszög-egyenlőtlenség helyett ezt tesszük fel, akkor bontakozik ki előttünk a nemarkhimédeszi funkcionálanalízis elmélete. Dolgozatom célja a nemarkhimédeszi funkcionálanalízis alapjainak felépítése, majd pár klasszikus funkcionálanalízisbeli tétel belátása a nemarkhimédeszi esetben is. A dolgozatban Peter Schneider Nonarchimedean Functional Analysis [1] című jegyzetében szereplő eredményeket ismertetek.

1.2. Jelölések

- A nyomtatott nagy K betű nemarkhimédeszi testet jelöl. Ezen kívül nyomtatott nagy V és W-betűvel vannak jelölve a nemarkhimédeszi vektorterek.

- Nyomtatott kis a és b betű jelöli a nemarkhimédeszi testek elemeit, illetve nyomtatott kis v és w a vektorokat.

- $B_\epsilon(\cdot)$ illetve $B_\epsilon^-(\cdot)$ jelöli a $\cdot$ körüli ϵ sugarú zárt illetve nyílt gömböt (testekben és vektorterekben is)

- $\mathfrak{o}$ jelöli a zárt egységkörlapot a nemarkhimédeszi testekben, $\mathfrak{m}$ pedig a nyílt egységkörlapot.

- A^* jelöli az $A \subseteq K$ halmaz invertálható elemeit, $|A|$ A elemeinek abszolútértékeinek halmazát, $\|K\|$ pedig a $K \subseteq V$ halmaz elemeinek normáinak halmazát.

- $\mathbb{Q}_p$ jelöli a p-adikus számok testét, $\mathbb{C}_p$ pedig $\mathbb{Q}_p$ algebrai lezártjának teljessé tételét.

- B^c jelöli a B halmaz komplementerét.

- p és q nemarkhimédeszi félnormákat jelölnek.

- $L(p)$ illetve $L^-(p)$ jelölik a p félnorma szerinti zárt illetve nyílt egységrácsot.

- L, M és N rácsokat jelölnek.

- p_L jelöli az L rácshoz tartozó Minkowski-funkcionált.

- $V(q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}; \epsilon)$ jelöli a $q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}$ félnormák szerinti ϵ sugarú zárt rácsok metszetét.

- $\overline{A}$ jelöli az A halmaz topológiai lezártját

- $Co(A)$ jelöli az A halmaz konvex burkát

- B korlátos halmazt jelöl

- $Hom_K(V; W)$ jelöli a $V \to W$ lineáris leképezések halmazát.

- $\mathcal{L}(V;W)$ jelöli a $V \to W$ folytonos lineáris operátorok halmazát.
- V' jelöli $\mathcal{L}(V;K)$-t, azaz a $V \to K$ folytonos lineáris funcionálok halmazát.
- $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(V;W)$ jelöli $\mathcal{L}(V;W)$-t a $\mathcal{B}$-topológiával, $\mathcal{L}_b(V;W)$ $\mathcal{L}(V;W)$-t az erős topológiával, $\mathcal{L}_s(V;W)$ pedig $\mathcal{L}(V;W)$-t a gyenge topológiával ellátva.

2. Nemarkhimédeszi testek

2.1. A nemarkhimédeszi abszolútérték és tulajdonságai

2.1. Definíció. (**nemarkhimédeszi abszolútérték**) Legyen K egy test. Ekkor egy $|\cdot| : K \to \mathbb{R}$ leképezést nemarkhimédeszi abszolútértéknek nevezünk, ha

1. $|a| \geq 0 \qquad \forall a \in K$-ra
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3. $|ab| = |a||b| \qquad \forall a, b \in K$-ra
4. $|a + b| \leq max(|a|, |b|) \qquad \forall a, b \in K$-ra

Az első három tulajdonságig ez a definíció egyezik a szokásos abszolútértékek definíciójával, míg a háromszög-egyenlőtlenséget egy sokkal erősebb tulajdonság, az úgynevezett **ultrametrikus egyenlőtlenség** váltja fel. Ebben a szakaszban látni fogjuk, hogy ez a változtatás egy teljesen új, az ember elvárásainak néhol igencsak ellentmondó topológiai struktúrával látja el az alaptestet. A triviális ellenpéldák elkerülése érdekében feltesszük, hogy az abszolútértékünk nemtriviális, azaz

5. $\exists a \in K : |a| \neq 0; 1.$

Könnyen látható, hogy $|-1| = |1| = 1$, amiből $|n*1| \leq 1$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$ következik. Ez speciálisan azt jelenti, hogy $\{|n*1| : n \in \mathbb{Z}\}$ korlátos halmaz $\mathbb{R}$-ben. Innen ered az elnevezés is, hiszen a valós számtestben feltett **arkhimédeszi axióma** azt mondja ki, hogy minden valós számhoz létezik nála nagyobb egész szám, azaz az egészek abszolútértékeinek halmaza nem korlátos $\mathbb{R}$-ben.

2.2. Állítás. *Ha K nemarkhimédeszi abszolútértékkel van ellátva és $a, b \in K$ olyanok, hogy $|a| \neq |b|$, akkor $|a + b| = max(|a|, |b|)$*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $|a| < |b|$. Ekkor

$$|a| < |b| = |(a + b) - a| \leq max(|b + a|, |a|) = |b + a|, \text{ tehát}$$
$$|b| \leq |a + b| \leq max(|a|, |b|) = |b|$$

□

A K test a $d(a,b) := |b-a|$ távolságfüggvénnyel metrikus teret alkot. Ebben a szokásos módon definiált nyílt és zárt gömbök azonban meglepő topológiai tulajdonságokkal rendelkeznek.

2.3. Definíció. (**nyílt és zárt gömbök**) A $B_\epsilon(a) := \{b \in K : |b-a| \leq \epsilon\}$ halmazt az a körüli ϵ sugarú zárt gömbnek, a $B_\epsilon^-(a) := \{b \in K : |b-a| < \epsilon\}$ halmazt pedig az a körüli ϵ sugarú nyílt gömbnek nevezzük.

Az első dolog, amit érdemes meggondolni, az az, hogy a 0 körüli ϵ sugarú gömb az ultrametrikus egyenlőtlenségnek köszönhetően zárt az összeadásra, ezért tekinthetünk rá úgy, mint egy Abel-csoport részcsoportjára. Ezen a megfigyelésen alapszik a következő állítás bizonyítása:

2.4. Állítás. ***(gömbök tulajdonságai)***

1. $B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(a') \neq \emptyset \Rightarrow B_\epsilon(a) = B_\epsilon(a')$

2. $B_\epsilon(a)$ *nyílt-zárt* K*-ban*

3. Ha B *és* B' *gömbök és* $B \cap B' \neq \emptyset$*, akkor* $B \subseteq B'$ *vagy* $B' \subseteq B$

4. K *totálisan összefüggéstelen*

Bizonyítás.

1. Mivel a 0 körüli ϵ sugarú gömb részcsoport, ezért minden $a \in K$-ra az a körüli ϵ sugarú gömb ennek a récsoportnak egy mellékosztálya K-ban. Két mellékosztály metszete pedig csak akkor nem üres, ha megegyeznek.

2. Az előző pontban leírtak miatt látszik, hogy rögzített ϵ mellett az ϵ sugarú gömbök partícióját adják K-nak. Speciálisan egy nyílt gömb komplementere nyílt gömbök uniója, tehát nyílt.

3. Tegyük fel, hogy $\epsilon \leq \epsilon'$. Ekkor $B_\epsilon(a) \subseteq B_{\epsilon'}(a)$ miatt az állítás 1. pontjának felhasztnálásával $B_{\epsilon'}(a') = B_{\epsilon'}(a) \supseteq B_\epsilon(a)$.

4. Legyen M összefüggőségi komponense K-nak és legyen $a \in M$. Az állítás 2. pontja miatt $B_\epsilon(a) \cap M$ nyíltzárt M-ben. Emiatt $M \subseteq B_\epsilon(a)$ $\forall \epsilon > 0$, tehát $M = \{a\}$

□

2.5. Megjegyzés.

1. A nemarkhimédeszi abszolútérték folytonos függvény
2. Az összeadás és szorszás, mint $K \times K \to K$ függvények, folytonosak

Bizonyítás.

1. Jelölje $|\cdot|_\infty$ a szokásos abszolútértéket $\mathbb{R}$-en. Ekkor $\forall b \in B_\epsilon^-(a)$-ra $\big||b| - |a|\big|_\infty = \big||(b-a)+a| - |a|\big|_\infty \leq \big|\max(|b-a|, |a|) - |a|\big|_\infty < \epsilon$
2. Összeadás: ha $b_0 \in B_\epsilon^-(a_0)$ és $b_1 \in B_\epsilon^-(a_1)$, akkor $b_0 + b_1 \in B_\epsilon^-(a_0 + a_1)$. Szorzás: ha $b_0 \in B_\epsilon^-(a_0)$ és $b_1 \in B_\epsilon^-(a_1)$, akkor $b_0 b_1 \in B^-_{\epsilon \max(\epsilon, |a_0|, |a_1|)}(a_0 a_1)$, mivel $b_0 b_1 - a_0 a_1 = (b_0 - a_0)(b_1 - a_1) + (b_0 - a_0)a_1 + a_0(b_1 - a_1)$.

□

2.6. Definíció. (**Nemarkhimédeszi test**) Egy testet akkor hívunk nemarkhimédeszi testnek, ha nemarkhimédeszi értékeléssel van ellátva és erre az értékelésre nézve teljes, azaz minden Cauchy-sorozat konvergens. Innentől jelöljön K mindig nemarkhimédeszi testet.

Láttuk tehát, hogy a gömbök most nem csak topológiai, hanem algebrai struktúrát is hordoznak. A továbbiakban gyakran fogjuk használni, hogy az egységgömb a szorzásra nézve is zárt, így részgyűrűt alkot. Ennek a részgyűrűnek a tulajdonságait foglalja össze a következő állítás:

2.7. Állítás. ***(az egységgömb, mint részgyűrű)***

1. *$\mathfrak{o} := \{a \in K : |a| \leq 1\}$ integritási tartomány, hányadosteste pedig K*
2. *$\mathfrak{m} := \{a \in K : |a| < 1\}$ $\mathfrak{o}$ egyetlen maximális ideálja*
3. *Ha $\mathfrak{o}^*$ jelöli $\mathfrak{o}$ invertálható elemeit, akkor $\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o} \setminus \mathfrak{m}$*
4. *Minden végesen generált $\mathfrak{o}$-beli ideál főideál*

Bizonyítás.

1. $\mathfrak{o}$ nyilván integritási tartomány, mert egy test részgyűrűje. Továbbá mivel K test, ezért $\forall b \in K$-hoz $\exists b^{-1} \in K$, hogy $1 = |bb^{-1}| = |b||b^{-1}|$, tehát b és b^{-1} közül legalább az egyik $\mathfrak{o}$-ban van. Ekkor a
$$b \mapsto \begin{cases} \frac{b}{1} & \text{ha } |b| \leq 1 \\ \frac{1}{b^{-1}} & \text{ha } |b| > 1 \end{cases}$$
leképezés mentén látszik, hogy K $\mathfrak{o}$ hányadosteste

2. $\mathfrak{m}$ nyilván részgyűrűje $\mathfrak{o}$-nak. Ezen kívül ha $m \in \mathfrak{m}$ és $o \in \mathfrak{o}$, akkor $|mo| = |m||o| < 1 \Rightarrow mo \in \mathfrak{m}$, tehát $\mathfrak{m}$ ideálja $\mathfrak{o}$-nak. $\mathfrak{m}$ maximalitása innen egyértelmű.

3. $\mathfrak{o}$-ban nyilván csak az 1-abszolútértékű elemek invertálhatók.

4. Legyen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}$ végesen generált ideál és legyen a az egyik maximális abszolútértékű generátor. Be fogjuk látni, hogy ekkor $\mathfrak{a} = a\mathfrak{o}$.

   Először is megjegyezzük, hogy $a\mathfrak{o} = B_{|a|}(0)$. Jelöljük most az a által generált ideált (a)-val. $(a) \subseteq B_{|a|}(0)$ egyértelmű. Legyen most $|b| \leq |a|$. Ekkor $\frac{b}{a} \in \mathfrak{o}$ és $b = a\frac{b}{a} \in a\mathfrak{o}$, tehát $(a) \supseteq a\mathfrak{o}$.

   Mivel láttuk, hogy az $\mathfrak{o}$-beli főideálok a 0 körüli gömbok, ezért (a) tartalmazza az összes többi generátor által generált ideált is. Mivel a gömbök az összeadásra is zártak, ezért a közösen generált ideál is (a)-ban marad.

□

Még a dolgozat elején láttuk, hogy $\mathfrak{o}$ tartalmazza az egységelem összes egész számszorosát, sőt, most még azt is láttuk, hogy $\mathfrak{o}$ hányadosteste K, ezért szokás $\mathfrak{o}$-t az **egészek gyűrűjének** nevezni. Fontos azonban kikötni, hogy az már nem igaz, hogy $\mathfrak{o}$ mindenképp csak az egységelem egész számszorosaiból áll.

Vessünk most egy pillantást a nemarkhimédeszi értékelések értékkészletére. Fontos észrevenni, hogy egy nemarkhimédeszi értékelés értékkészlete nem feltétlenül adja ki az egész $\mathbb{R}_+$-ot, sőt, még az sem biztos, hogy sűrű halmazt alkot benne. Ez egy osztályozását teszi lehetővé a nemarkhimédeszi testeknek.

2.8. Definíció. (**Diszkrét értékelésű nemarkhimédeszi test**) Egy K nemarkhimédeszi test diszkrét értékelésű, ha $|K^*|$ diszkrét halmaz $\mathbb{R}_+^*$-ban.

2.9. Állítás. ***(Diszkrét értékelések értékkészlete)*** *A $|K^*| \subseteq \mathbb{R}_+^*$ részcsoport vagy diszkrét vagy sűrű. Ha diszkrét, akkor $\exists\ 0 < r < 1$, hogy $|K^*| = r^{\mathbb{Z}}$.*

Bizonyítás. Ha $|K^*|$ nem sűrű $\mathbb{R}_+^*$-ban, akkor $\log|K^*|$ nem sűrű $\mathbb{R}$-ben, sőt, $\mathbb{R}_-$-ban sem sűrű, mivel $|K^*|$-ban minden elemnek van multiplikatív inverze, így $\log|K^*|$-ban minden elemnek van additív inverze. Legyen tehát $p := \sup(\log|K^*| \cap\,]-\infty;0[)$. Indirekt be fogjuk látni, hogy p maximum.

Tegyük fel tehát, hogy p nem maximum. Ekkor $\exists\ p_1 < p_2 < \dots$ $\log|K^*|$-beliek, hogy $p_n \to p$, tehát $p_i - p_{i+1}$ egy $\log|K^*| \cap\,]-\infty;0[$ -beli nullsorozat, amiből $p = 0$ következik (különben p nem lenne supremum). Ebből viszont az következik, hogy $\log|K^*|$-nak a nulla tetszőleges környezetében eleme, azaz $\forall \epsilon > 0\ \exists\ \sigma \in \log|K^*|$, hogy $-\epsilon < \sigma < 0$. Vegyünk tetszőleges $\tau \in \mathbb{R}^-$-t és hozzá $m \in \mathbb{Z}^+$-t úgy, hogy $m\sigma \le \tau < (m-1)\sigma$. Ekkor $0 \le \tau - m\sigma < -\sigma < \epsilon$, tehát találtunk τ-hoz tetszőlegesen közel $\log|K^*|$-belit, azaz $\log|K^*|$ megiscsak sűrű $\mathbb{R}$-ben. $\lightning$

Legyen most $r := \max(|K^*| \cap\,]0;1[)$. Ekkor tetszőleges $s \in K^*$-hoz $\exists m \in \mathbb{Z}$, hogy $r^{m+1} < s \le r^m$, tehát $r < \frac{s}{r^m} \le 1$, ami r maximalitása miatt pontosan azt jelenti, hogy $s = r^m$. Tehát $|K^*| = r^{\mathbb{Z}}$. $\square$

2.10. Állítás. ***(Egészek gyűrűje diszkrét értékelésű testben)*** *Az $\mathfrak{o}$ egészek gyűrűje egy diszkrét értékelésű testben mindig főideálgyűrű.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}$ ideál. Az előző tétel értelmében $\exists a \in \mathfrak{a}$, hogy $|a| = \max\{|b| : b \in \mathfrak{a}\}$. Ekkor $\mathfrak{a} = a\mathfrak{o}$, mivel láttuk, hogy az ideálok gömbök. $\square$

2.2. Példák nemakrkhimédeszi testekre

2.11. Példa. ***(A p-adikus számok teste, $\mathbb{Q}_p$)***

Legyen $p \in \mathbb{N}$ prím. Definiálhatjuk a p-adikus abszolút értéket: $|a|_p := p^{-r}$, ha $a = p^r \frac{n}{m}$, ahol n és m is relatív prím p-hez. Ha erre az abszolútértékre nézve teljessé tesszük $\mathbb{Q}$-t, akkor kapjuk $\mathbb{Q}_p$-t, a p-adikus számok testét. $\mathbb{Q}_p$ lokálisan kompakt, diszkrét értékelésű test.

2.12. Megjegyzés. $\mathbb{Q}_p$ összes véges bővítésére egyértelműen ki tudjuk terjeszteni a p-adikus abszolútértéket, így azok is nemarkhimédeszi testet alkotnak. Ezek is lokálisan kompakt, diszkrét értékelésű testek.

2.13. Példa. *($\mathbb{Q}_p$ **algebrai lezártjának teljessé tétele,** $\mathbb{C}_p$)*

Míg a valós számoknál az algebrai lezárás csak egy másodfokú bővítést jelent, addig $\mathbb{Q}_p$-nél az algebrai lezárt foka végtelen $\mathbb{Q}_p$ fölött. Vegyük példának az $x^n - p$ polinomot. Ez irreducibilis $\mathbb{Q}_p$ fölött minden $n > 0$ egészre, amit, akárcsak a $\mathbb{Q}$ fölötti irreducibilitást, a Schönemann-Eisenstein kirtériumból könnyen levezethetünk. Ebből látszik, hogy minden n-re létezik $\mathbb{Q}_p$-nek n-edfokú bővítése.

A p-adikus abszolútértéket a Hensel-lemma felhasználásával egyértlemű-en ki tudjuk terjeszteni az algebrai lezártra, de ezzel a kiterjesztéssel ellátva belátható, hogy az nem lesz teljes. $\mathbb{Q}_p$ algebrai lezártjának teljessé tételét jelöljük $\mathbb{C}_p$-vel. Ez a test ugyan algebrailag izomorf a komplex számokkal, de nem lokálisan kompakt. $|\mathbb{C}_p|$ már sűrű $\mathbb{R}^+$-ban, de még mindig megszámlálható számosságú. Fontos megemlíteni, hogy a Krasner-lemma felhasználásával belátható, hogy $\mathbb{C}_p$ továbbra is algebrailag zárt.

2.14. Példa. *(**A formális Laurent-sorok teste,** $\mathbb{C}\{\{T\}\}$)*

Nemarkhimédeszi testet alkot a formális Laurent-sorok teste, $\mathbb{C}\{\{T\}\}$ is, ha a következő abszolútértéket vezetjük be rajta: $|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n| := e^{-\min\{n:a_n\neq 0\}}$. Ebben az egészek gyűrűje a $\mathbb{C}$ fölötti formális hatványsorok gyűrűje, $\mathbb{C}[[T]]$. Mivel $\mathbb{C}[[T]] = \bigcup_{a\in\mathbb{C}} a + T\mathbb{C}[[T]]$ nyílt halmazok végtelen diszjunkt uniója, ezért $\mathbb{C}\{\{T\}\}$ nem lokálisan kompakt.

2.3. Teljesség

Már a definícióban feltettük, hogy egy nemarkhimédeszi test teljes a rajta megadott értékelésre nézve. Az előző pár példából is látszik azonban, hogy ez nem garantálja, hogy a testünk topológiája szép is lesz. Tételek kimondásakor ezért gyakran kell megszorításokat tenni a test topológiai tulajdonságaival kapcsolatban. A leggyakrabban használt ilyen megszorítás a teljességfogalom egy erősebb változata, a **szferikus teljesség**.

Legyen $A \subseteq K$ tetszőleges részhalmaz. Értelmezzük ekkor a következő függvényt: $d(A) := \sup\{|b-a| : a, b \in A\}$, melyet nevezhetünk a halmaz átmérőjének is. Ha most olyan $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ egymásba skatulyázott K-beli gömböket tekinünk, amikre $d(B_n) \to 0$, akkor a szokott teljességfogalom azt mondja, hogy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ nem lehet üres, hiszen $a_n \in B_n$-t véve egy Cauchy-sorozatot kapunk, melynek $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$-beli elemhez kell konvergálnia. Az átmérőkről szóló feltétel elhagyásával azonban nem minden térben fog teljesülni, hogy a metszet nemüres.

2.15. Példa. ***(Nem szferikusan teljes nemarkhimédeszi test)***

Legyen $K := \mathbb{C}_p$. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat, ami részhalmazként sűrű $\mathbb{C}_p$-ben. (Ilyen például $\mathbb{Q}$ algebrai lezártja, az algebrai számok teste.) Legyen $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív valósak rögzített sorozata, amire $1 > \epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \frac{1}{2}$.

Definiáljuk a következő relációt: $a \backsim_1 b$, ha $|b-a| \leq \epsilon_1$. Ez egy ekvivalenciareláció, aminek ekvivalenciaosztályait gömbök adják. A sugaruk pedig ϵ_1, mivel $|\mathbb{C}_p^*|$ sűrű $\mathbb{R}_+^*$-ban. Biztosan több, mint egy ekvivalenciaosztály van, mivel $\epsilon_1 < 1$. Speciálisan rögzíthetünk olyan B_1 ekvivalenciaosztályt, hogy $a_1 \notin B_1$.

B_1-en ismét bevezetünk egy ekvivalenciarelációt, ezúttal $a, b \in B_1$-re $a \backsim_2 b$, ha $|b-a| \leq \epsilon_2$. Hasonlóképpen, mint előbb, most is találunk B_2 gömböt, amire $a_2 \notin B_2$.

Indukcióval kapunk tehát egy $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egymásba skatulyázott gömbök sorozatát, amire $a_n \notin B_n$ és $d(B_n) = \epsilon_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Indirekt módon be fogjuk látni, hogy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$.

Tegyük fel, hogy $\exists\, b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Ekkor $B_n = B_{\epsilon_n}(b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$-re. Mivel $\epsilon_n > \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ezért $B_{\frac{1}{2}} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. ebből viszont az következik B_n választása miatt, hogy $a_n \notin B_{\frac{1}{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ami ellentmond $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sűrűségének. $\lightning$

2.16. Definíció. (**Szferikus teljesség**) Egy K nemarkhimédeszi test szferikusan teljes, ha tetszőleges $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ gömbökre $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$.

2.17. Megjegyzés. Ha egy K test lokálisan kompakt, akkor biztosan szferikusan teljes is. Vegyük észre, hogy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset \Leftrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c = K$. Ha $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ nyílt gömbök, akkor $B_1^c \subseteq B_2^c \subseteq \dots$ nyílt gömbök felszálló láncát alkotják. Tegyük most fel indirekt, hogy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$, azaz ekvivalensen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c = K$. Ha $U \subseteq K$ kompakt, akkor ezesetben a $(B_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerből kiválasztható U-nak véges fedése. Ez azt jelenti, hogy létezik véges sok B_n, melyeknek a metszete nem tartalmaz U-belit.

Mivel a terünkben minden gömb kompakt, ezért ez az okoskodás eljátszható B_1-el is, amiből azt kapnánk, hogy létezik véges sok B_n, melyeknek B_1-el vett metszete üres, ami ellentmond a gömbök egymásba skatulyázottságának. $\lightning$

2.18. Következmény. *$\mathbb{Q}_p$ és véges bővítései lokálisan kompaktak, tehát szferikusan teljesek. $\mathbb{C}_p$-ről a példánkban beláttuk, hogy nem szferikusan teljes.*

2.19. Állítás. *Ha K szferikusan teljes és $(B_i)_{i\in I}$ olyan gömbök családja K-ban, hogy $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ $\forall i, j \in I$, akkor $\bigcap_{i\in I} B_i \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Válasszunk ki $(i_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$ indexeket úgy, hogy $d(B_{i_1}) \geq d(B_{i_2}) \geq \dots$ és hogy $\forall i \in I\ \exists n \in \mathbb{N}$, hogy $d(B_i) \geq d(B_{i_n})$. Ekkor a nemarkhimédeszi gömbök tulajdonságait (2.4) kihasználva azt kapjuk, hogy $B_{i_1} \supseteq B_{1_2} \supseteq \dots$ és $\forall i \in I\ \exists n \in \mathbb{N}$, hogy $B_i \supseteq_{i_n}$. Tehát $\bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{i_n} \neq \emptyset$. $\square$

2.20. Állítás. *Minden K diszkrét értékelésű nemarkhimédeszi test szferikusan teljes*

Bizonyítás. Legyenek $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ gömbök K-ban. Ekkor $d(B_n)$ csökkenő $|K^*|$-beli sorozat, ami a diszkrétség miatt vagy stabilizálódik (ekkor $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$-ben teljes gömb is van) vagy 0-ba tart. Ekkor azonban a nemarkhimédeszi testek teljessége miatt nem lehet a metszet üres, mint ahogyan azt a 2.3 szakasz bevezetőjében is láttuk. $\square$

Egy további fogalom, amire szükségünk lesz később, az a szummábilitás. Az ultrametrikus egynelőtlenségnek köszönhetően a végtelen sorok konvergenciája és a tagok felcserélhetősége sokkal egyszerűbben működik, mint a klasszikus arkhimédeszi abszolútértéknél.

2.21. Definíció. (**Szummábilitás**) Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ K-beli sorozat pontosan akkor szummábilis, ha $a_n \to 0$, továbbá ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ minden $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutációra.

3. Nemarkhimédeszi topologikus vektorterek

3.1. Rácsok és nemarkhimédeszi félnormák

Már a nemarkhimédeszi testeknél is láttuk, hogy az algebrai és a topologikus struktúrák szoros összefüggésben vannak egymással. Ez topologikus vektortereknél sincsen máshogyan, hiszen mint látni fogjuk, egy topolóiát meg tudunk adni félnormák családjával vagy ekvivalensen nekik megfeleltetett algebrai struktúrák, úgynevezett **rácsok** családjával.

3.1. Definíció. (**Nemarkhimédeszi félnorma**) Legyen V egy K feletti vektortér. Egy $q : V \to \mathbb{R}$ függvény nemarkhimédeszi félnorma, ha

1. $q(av) = |a|q(v) \qquad \forall a \in K, v \in V$
2. $q(v + w) \leq \max(q(v); q(w)) \qquad \forall v, w \in V$

3.2. Megjegyzés. (**Félnormák tulajdonságai**)

- $q(0) = |0|q(0) = 0$
- $q(v) = \max(q(v); q(-v)) \geq q(0) = 0 \qquad \forall v \in V$
- $\big|q(v) - q(w)\big|_\infty \leq q(v - w) \qquad \forall v, w \in V$
- Ha $v, w \in V$ olyanok, hogy $q(v) \neq q(w)$, akkor $q(v+w) = \max(q(v), q(w))$. Ennek a bizonyítása ugyanúgy megy, mint a testeknél.

Mivel láttuk, hogy az $\mathfrak{o}$ egységgömb részgyűrű a nemarkhimédeszi testekben, ezért általában $\mathfrak{o}$-modulusként tekintünk a nemarkhimédeszi testek feletti vektorterekre. Beszélhetünk tehát az $\mathfrak{o}$-részmodulusokról.

3.3. Definíció. (**Rács**) Egy L rács olyan $\mathfrak{o}$-részmodulus, melyre $\forall v \in V$-hez $\exists a \in K^*$, hogy $av \in L$.

3.4. Megjegyzés. (**Rácsok tulajdonságai**)

- Egy rács nem feltétlenül szabad $\mathfrak{o}$-modulus
- Rács őse lineáris leképezésnél rács
- Ha L és L' is rács, akkor $L \cap L'$ is rács, ugyanis:

  Legyen $v \in V$, $a, a' \in K^*$, hogy $av \in L$ és $a'v \in L'$. Ha $a \notin \mathfrak{o}$, akkor $a^{-1} \in \mathfrak{o}$. Ekkor $v = a^{-1}(av) \in a^{-1}L \subseteq L$. Feltehető tehát, hogy $a, a' \in \mathfrak{o}$. Ekkor $aa'v \in L \cap L'$.

3.5. Definíció. (**Minkowski-funkcionál**) Egy $L \subseteq V$ rács Minkowski-funkcionálja a $p_L : V \to \mathbb{R} \qquad v \mapsto \inf_{v \in aL} |a|$ leképezés.

3.6. Állítás. *p_L félnorma V-n.*

Bizonyítás.

- Tetszőleges $b \in K^*$-ra és $v \in V$-re

$$p_L(bv) = \inf_{bv \in aL} |a| = \inf_{v \in b^{-1}aL} |a| = \inf_{v \in aL} |ba| = |b| \inf_{v \in aL} |a| = |b| p_L(v)$$

- $p_L(v + w) \leq \max(p_L(v), p_L(w))$, mivel ha $a, b \in K$ olyanok, hogy $|b| \leq |a|$, akkor $aL + bL = aL$.

□

3.7. Definíció. (**Rács félnormához**) Legyen $L(q) := \{v \in V : q(v) \leq 1\}$ és legyen $L^-(q) := \{v \in V : q(v) < 1\}$.

3.8. Állítás. *Ez a két halmaz rács V-ben*

Bizonyítás. Mivel a nemarkhimédeszi félnormákra teljesül az ultrametrikus egynelőtlenség, ezért $L(q)$ és $L^-(q)$ $\mathfrak{o}$-részmodulus. Kikötöttük, hogy az abszolútértékünk nemtriviális, tehát $\exists a \in K^*$, amire $|a^n| \to 0$. Ekkor $\forall v \in V$-hez $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $q(a^n v) = |a^n| q(v) < 1$. □

3.9. Állítás. ***(A megfeleltetés tulajdonságai)***

1. *$\forall L \subseteq V$ rácsra $L^-(p_L) \subseteq L \subseteq L(p_L)$*
2. *$\forall q : V \to \mathbb{R}$ félnormára $c_0 := \sup_{|b|<1} |b|$ mellett $c_0 p_{L(q)} \leq q \leq p_{L(q)}$*

Bizonyítás.

1. Definació szerint $p_L(v) \leq 1$ $\forall v \in L$-re. Ha $p_L(v) < 1$, akkor $v \in aL$ valamely $a \in K$-ra, amire $|a| < 1$, speciálisan $v \in L$.
2. Legyen $a \in K^*$. Ekkor $v \in aL(q) \Leftrightarrow q(v) \leq |a|$. Ezért $p_{L(q)}(v) = \inf_{q(v) \leq |a|} |a|$, tehát $p_{L(q)} \geq q$.

   Ha $|b| < 1$, akkor $|b| \inf_{q(v) \leq |a|} |a| < p_{L(q)}(v)$, tehát $\exists a \in K$, hogy $q(v) \leq |a|$ és $|ba| < p_{L(q)}(v)$.Az utóbbi miatt $v \notin baL(q)$, tehát $|b||a| < q(v)$. Innen $c_0 p_{L(q)}(v) \leq c_0 |a| \leq q(v)$.

□

3.2. Konvex halmazok

3.10. Definíció. (**Konvex halmaz**) $A \subseteq V$ konvex halmaz, ha $A = \emptyset$ vagy $A = v + A_0$, ahol $v \in V$ és $A_0 \subseteq V$ $\mathfrak{o}$-részmodulus.

3.11. Megjegyzés. Ekkor A egyértelműen meghatározza A_0-t és

- Ha $0 \in A$, akkor A $\mathfrak{o}$-részmodulus
- $v + A$ és bA is konvex, ahol $v \in V$ és $b \in K$ tetszőlegesek
- B is konvex halmaz, akkor $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ is konvex
- A K-lineáris képe és ősképe is konvex

Az arkhimédeszi esetben a konvexitás azt jelentette, hogy a halmaz tetszőleges két pontját összekötő szakasz is része a halmaznak. Nemarkhimédeszi esetben az összekötő szakasz, mint alakzat nem igazán értelmezhető, hiszen már a gömbök sem tekinthetőek "gömbalakúnak". Az sem igaz viszont, hogy ez a tulajdonság teljesen elveszik a nemarkhimédeszi vektorterek esetében, ugyanis fennáll, hogy A pontosan akkor konvex, ha $\alpha v + \beta w \in A$ minden $v, w \in A$-ra és olyan $\alpha, \beta \in K$-ra, melyre $|\alpha| \leq 1$, $|\beta| \leq 1$, és $\alpha + \beta = 1$.

3.12. Állítás. *Ha $(A_i)_{i \in I}$ konvex halmazok családja, akkor*

1. *$\bigcap_{i \in I} A_i$ is konvex*
2. *Ha $\forall i, j \in I$-hez $\exists k \in I$, hogy $A_i \cup A_j \subseteq A_k$, akkor $\bigcup_{i \in I} A_i$ is konvex.*

Bizonyítás.

1. Feltehető, hogy $\bigcap A_i \neq \emptyset$. Legyen $v \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Ekkor minden $i \in I$-re $A_i = v + B_i$ valamely $B_i \subseteq V$ $\mathfrak{o}$-részmodulusra. Ezt felhasználva kapjuk, hogy $\bigcap_{i \in I} A_i = v + \bigcap_{i \in I} B_i$, tehát a metszet konvex.
2. Ismét feltehető, hogy $\exists v \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Vezessük be az I-beli indexek következő részhalmazát: $J := \{i \in I : v \in A_i\}$. Ekkor az állítás feltétele miatt $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in J} A_i$. tudjuk továbbá, hogy $\forall i \in J$-re $A_i = v + B_i$ a megfelelő B_i $\mathfrak{o}$-részmodulusokra, tehát $\bigcup_{i \in I} A_i = v + \bigcup_{i \in J} B_i$. A feltétel miatt $\bigcup_{i \in J} B_i$ $\mathfrak{o}$-részmodulus, tehát $\bigcup_{i \in I} A_i$ konvex.

□

3.3. Lokálisan konvex nemarkhimédeszi topologikus vektorterek

A klasszikus arkhimédeszi esetben a lokálisan konvex vektorterek topológiáját több módon is meg lehet adni. Az eredeti definíció szerint egy vektortér akkor lokálisan konvex, ha a 0-nak létezik konvex halmazokból álló környezetbázisa és megmutatható, hogy a lokálisan konvex topológiák pontosan azok, melyeket egy félnormacsalád indukál. Ezt az eredményt fogjuk most átvinni a nemarkhimédeszi esetre.

Legyen $(L_j)_{j \in J}$ olyan nemüres rácsok családja a V nemarkhimédeszi vektortéren, melyekre

(lk1) Tetszőleges $j \in J$ és $a \in K^*$-ra $\exists k \in J$, hogy $L_k \subseteq aL_j$

(lk2) Tetszőleges $i, j \in J$-re $\exists k \in J$, hogy $L_k \subseteq L_i \cap L_j$

Nyílvánvaló, hogy minden rács és így velük együtt az eltoltjaik is konvexek. A második feltétel jelentése tehát a következő: Tetszőleges két $v + L_i$ és $v' + L_j$ alakú konvex halmaz metszete vagy üres, vagy tartalmaz $w + L_k$ alakú konvex halmazt.

A feltételek továbbá biztosítják, hogy a $(v + L_j)_{v \in V, j \in J}$ konvex halmazok egy topológia bázisaként tekinthetők.

3.13. Definíció. (**Lokálisan konvex topológia és vektortér**) Ezt a topológiát hívjuk az $(L_j)_{j \in J}$ család által meghatározott lokálisan konvex topológiának. Egy K feletti vektortér lokálisan konvex, ha lokálisan konvex topológiával van ellátva.

Hasonlóan, mint a testeknél, itt is meggondolható, hogy a rácsok, akárcsak a gömbök a testeknél, additív részcsoport mellékosztályai lévén partícióját adják a vektortérnek. Innen látszik, hogy ebben a topológiában tetszőleges $v \in V$-re a $(v + L_j)_{j \in J}$ halmazok egyszerre nyílt és zárt környezetbázisát is adják v-nek.

3.14. Állítás. *Ha V lokálisan konvex, akkor a $V \times V \to V$ összeadás és a $K \times V \to V$ szorzás folytonos műveletek.*

Bizonyítás. Az összeadás folytonos, mivel $(v + L_j) + (w + L_j) \subseteq ((v + w) + L_j)$. A szorzás folytonosságához vegyünk tetszőleges $a \in K$, $v \in V$ és $j \in J$-t. Mivel L_j rács, ezért van egy olyan $b \in K^*$, hogy $bv \in L_j$. Az ilyen $b \in K^*$-ok nyílt halmazt alkotnak K-ban, ugyanis minden rács $\mathfrak{o}$-részmodulus, így ha $c \in K$ olyan, hogy $|c| \leq |b|$, akkor $cv \in L_j$ is teljesül. **(lk1)** és **(lk2)** miatt találunk olyan $k \in J$-t is, hogy $aL_k + bL_k \subseteq L_j$. Ezért $(a + b)(v + L_k) = av + bv + aL_k + bL_k \subseteq av + L_j$. $\square$

3.15. Megjegyzés. Mivel egy nemtriviális vektortéren a skalárral való szorzás semmiképp sem folytonos a diszkrét topológia szerint, ezért a diszkrét topológia nem lehet lokálisan konvex.

Célunk most, hogy az arkhimédeszi esethez hasonlóan félnormákkal is megadjuk a lokálisan konvex topológiákat. Tekintsük tehát a $(q_i)_{i \in I}$ félnormák családját a V nemarkhimédeszi vektortéren. Ez a család meghatároz egy topológiát V-n a következő értelemben: Legyen τ a leggyengébb olyan topológia, melyre a $q_i : V \to \mathbb{R}^+$ félnorma folytonos minden $i \in I$-re és tetszőleges $v \in V$-re a v-vel való eltolás is folytonos.

Rögzítsünk most $r \in \mathbb{N}$-et és egy $\epsilon > 0$ valós számot. Ezekre definiáljuk a $V(q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}; \epsilon) := \{v \in V : q_{i_1}(v), \ldots, q_{i_r}(v) \leq \epsilon\}$ halmazt.

3.16. Állítás. *Ez a halmaz rács V-ben.*

Bizonyítás. Mivel $V(q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}; \epsilon) = V(q_{i_1}; \epsilon) \cap \cdots \cap V(q_{i_r}; \epsilon)$ és mivel két rács metszete mindig rács, ezért elég egytelen $V(q_i; \epsilon)$-ról belátnunk, hogy rács. Egy ilyen halmaz a félnormák definíciója szerint nyilvánvalóan $\mathfrak{o}$-részmodulus. Válasszunk $a \in K^*$-ot úgy, hogy $|a| \leq \epsilon$. Ekkor $aL(q_i) \subseteq V(q_i; \epsilon)$. Könnyen látható, hogy ha egy $\mathfrak{o}$-részmodulus tartalmaz rácsot, akkor ő maga is rács, így $V(q_i; \epsilon)$-ról ezzel beláttuk, hogy rács. $\square$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az ilyen $V(q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}; \epsilon)$ alakú rácsok rendelkeznek **(lk1)** és **(lk2)** tulajdonságokkal, így lokálisan konvex topológiát határoznak meg. Következő lépésként meg fogjuk mutatni, hogy ez a topológia egybeesik a megfelelő félnormák által indukált topológiával.

3.17. Állítás. *A* $(q_i)_{i\in I}$ *félnormák által meghatározott topológia* V*-n megegyezik a* $\{V(q_{i_1},\dots,q_{i_r};\epsilon) : r\in\mathbb{N}; i_1,\dots i_r\in I;\epsilon>0\}$ *rácsok által meghatározott topológiával.*

Bizonyítás. Jelölje τ a félnormák által és τ' a rácsok által meghatározott topológiát V-n.

Könnyen látható, hogy τ-ban az összes $v+V(q_{i_1},\dots,q_{i_r};\epsilon)$ konvex halmaz nyílt, hiszen ez feltétele a félnormák és az eltolások folytonosságának. Emiatt azonnal látszik, hogy τ erősebb τ -nél. Elég tehát annyit látnunk, hogy τ' kielégíti a τ-t defnináló két tulajdonságot, azaz folytonosak benne mind a félnormák, mind az eltolások. Az eltolások folytonossága azonnal adódik a 3.14-es állításból.

A q_i félnormák folytonosságához legyen $]\alpha;\beta[\subseteq\mathbb{R}$ nyílt intervallum és $v_0\in q_i^{-1}(]\alpha;\beta[)$ egy vektor. Két eset lehetséges:

- ha $q_i(v_0)>0$, akkor legyen $0<\epsilon<q_i(v)$. Mivel $q_i(v_0+v)=q_i(v_0)$ minden $v\in V(q_i;\epsilon)$-ra, ezért $v_0+V(q_i;\epsilon)\subseteq q_i^{-1}(]\alpha;\beta[)$, tehát az őskép nyílt τ'-ben.

- ha $q_i(v_0)=0$, akkor legyen $0<\epsilon<\beta$, ahonnan $\alpha<0<q_i(v_0+v)\leq q_i(v)\leq\epsilon<\beta$ minden $v\in V(q_i;\epsilon)$-ra, tehát $v_0+V(q_i;\epsilon)\subseteq q_i^{-1}(]\alpha;\beta[)$, ami ismét az őskép nyíltságát jelenti τ'-ben.

□

Láttuk tehát, hogy az összes félnormacsalád által indukált topológia megadható olyan rácsokkal, melyek lokálisan konvex topológiát határoznak meg. Most már csak az állítás fordítottját kéne megmutatnuk, tehát azt, hogy tetszőleges lokálisan konvex topológiához találunk olyan félnormacsaládot, amely pont őt indukálja. Ehhez lesz segítségünkre a már korábban definiált **Minkowski-funkcionál**.

3.18. Állítás. *Az $(L_j)_{j\in J}$ rácsok által meghatározott lokálisan konvex topológia megegyezik a $(p_{L_j})_{j\in J}$ Minkowski-funkcionálok által meghatározott topológiával.*

Bizonyítás. Jelölje ismét τ' a rácsok által és τ a $p_j := p_{L_j}$ Minkowski-funkcionálok által indukált topológiát.

Legyen $\epsilon > 0$ adott. Ehhez válasszunk $a \in K^*$-ot, amire $|a| \leq \epsilon$. a 3.9-es állítás miatt ekkor $aL_j \subseteq V(q_j; \epsilon)$. **(lk2)**-ből meg azt kapjuk, hogy $V(p_j; \epsilon)$ nyílt τ'-ben. Így, ugyanúgy, mint az előző állítás bizonyításában, azt kapjuk, hogy τ' erősebb τ-nál.

Ahhoz, hogy lássuk, hogy τ is erősebb τ'-nél, legyen $b \in K$ olyan, hogy $0 < |b| < 1$. a 3.9-es állítást használva kapjuk, hogy $V(p_j; |b|) \subseteq L_j$, tehát L_j nyílt τ-ban, ami azt jelenti, hogy τ erősebb τ'-nél. $\square$

Ez a két állítás együtt tehát azt mondja nekünk, hogy a lokálisan konvex topológiák pontosan a félnormacsaládok által meghatározott topológiák.

3.19. Állítás. *Ha L rács V-ben és q félnorma V-n, akkor*

1. *q folytonos V-n $\Leftrightarrow$ $L^-(q)$ (vagy ekvivalensen $L(q)$) nyílt V-ben*
2. *L nyílt V-ben $\Leftrightarrow$ p_L folytonos V-n*

Bizonyítás.

1. $\Rightarrow$: $L^-(q)$ $\mathbb{R}^+$ egy nyílt részhalmazának őse, tehát nyílt V-ben. Mivel L_q $L^-(q)$ eltoltjainak uniója, ezért $L^-(q)$ nyíltságából következik L_q nyíltsága.

   $\Leftarrow$: $L(q)$ nyíltságából a 3.17-es állítás bizonyítása alapján következik, hogy tetszőleges $\beta > 0$ esetén $\forall]\alpha; \beta[\subseteq \mathbb{R}$-re és $v_0 \in q^{1-}(]\alpha; \beta[)$-ra találunk olyan $a \in K^*$-ot, amire $q^{1-}(]\alpha; \beta[)$ tartalmazza $v_0 + aL(q)$-t, ami v_0 nyílt környezete, tehát q folytonos.

2. $\Leftarrow$: p_L folytonosságából definíció szerint következik $L^-(p_L)$ folytonossága. Mivel $L^-(p_L) \subseteq L$, ezért L is nyílt.

   $\Rightarrow$: a 3.9-es állításból kapjuk, hogy $L(p_L)$ is nyílt V-ben. Ekkor az állítás első pontját használva p_L folytonosságát kapjuk.

$\square$

3.20. Állítás. *Legyen V ellátva az $(L_j)_{j\in J}$ rácsok vagy a nekik megfelelő $(q_i)_{i\in I}$ félnormák által indukált topológiával. Ekkor* $\overline{\{0\}} = \bigcap_{j\in J} L_j = \bigcap_{i\in I} q_i^{-1}(0)$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy L_j nyílt-zárt $\forall j \in J$-re, ezért $\overline{\{0\}} \subseteq \bigcap_{j\in J} L_j$. Másfelől, ha $v \notin \overline{\{0\}}$, akkor van egy olyan L_k rács, hogy $0 \notin v + L_k$, tehát $v \notin L_k$, azaz $\overline{\{0\}} \supseteq \bigcap_{j\in J} L_j$, amiből az állítás rácsokra vonatkozó része nyilvánvalóan következik.

A félnormákra vonatkozó állítás belátásához elég a következőt meggondolni: Mivel tudjuk, hogy $V(q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}; \epsilon)$ környezetbázisa a nullvektornak, ezért $\bigcap_{i\in I} q_i^{-1}(0) = \bigcap_{r,i_r,\epsilon} V(q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}; \epsilon) = \bigcap_{j\in J} L_j$. □

3.21. Következmény. *A következő három állítás ekvivalens:*

1. *V Hausdorff*
2. *$\forall v \in V$-re, amire $v \neq 0$ $\exists j \in J$, hogy $v \notin L_j$*
3. *$\forall v \in V$-re, amire $v \neq 0$ $\exists i \in I$, hogy $q_i(v) \neq 0$.*

Bizonyítás. Mivel a lokálisan konvex topológiák eltolásinvariánsak, ezért V Hausdorffsága ekvivalens azzal, hogy minden V-beli nemnulla vektor szeparálható a nullvektortól. Az előző állítás fényében pedig könnyen látszik, hogy a 2. és 3. állításunk pont ezt mondja ki. □

Fontos megjegyezni, hogy hogyha V topológiáját a $(q_i)_{i\in I}$ félnormák indukálják, akkor ha tetszőleges $F \subseteq I$ **véges** részhalmazt veszünk és definiáljuk hozzá a $q_F := \max_{i\in F} q_i$ félnormát, akkor olyan $(q_F)_{F\subseteq I}$ félnormarendszert kapunk, ami már önmagában meghatározza a topológiát, sőt, a $v + V(q_F; \epsilon)$ konvex halmazok a topológia bázisát adják.

3.4. Konvex halmazok lokálisan konvex topológiában

3.22. Állítás. *Legyen V lokálisan konvex nemarkhimédeszi vektortér és $A \subseteq V$ konvex halmaz. Ekkor*

1. *$\overline{A}$ konvex*
2. *Ha A nem nyílt, akkor $int(A) = \emptyset$*
3. *Ha A nyílt, akkor A zárt*
4. *Ha A a nullvektor nyílt környezete, akkor A rács*

Bizonyítás. Feltehető, hogy A nemüres $\mathfrak{o}$-részmodulus.

1. Mivel láttuk, hogy lokálisan konvex topológiákban az összeadás és a skalárral való szorzás folytonos műveletek, ezért $\overline{A}$ is konvex.
2. Ha $\exists v \in int(A)$, akkor $v + L \subseteq A$ valamely $L \subseteq V$ rácsra. Mivel A $\mathfrak{o}$-részmodulus, ezért magát L-et is tartalmazza, tehát nyílt.
3. Ha A nyílt, akkor a lokálisan konvex topológiák definíciója szerint tartalmaznia kell nyílt rácsot, így ő maga is rács. Rácsokról meg láttuk, hogy hogyha nyíltak, akkor zártak is. Ez egyben a 4. állítást is bizonyította.

□

3.23. Definíció. (**Konvex burok**) Az $S \subseteq V$ halmaz konvex burka a $Co(S) := \bigcap\{S \subseteq A \subseteq V : A \text{ } konvex\}$ halmaz.

3.24. Megjegyzés. Mivel láttuk, hogy tetszőlegesen sok konvex halmaz metszete konvex, ezért $Co(S)$ a legkisebb S-et tartalmazó konvex halmaz. Az imént láttuk azt is, hogy konvex halmaz lezártja konvex, ezért $\overline{Co(S)} = \overline{Co(\overline{S})}$.

3.25. Állítás. *Minden $S \subseteq V$ halmazra teljesülnek a következők:*

1. *Ha S nyílt, akkor $Co(S)$ is az*
2. *$\overline{Co(S)} = \bigcap\{S \subseteq A \subseteq V : A$ konvex zárt$\}$*

Bizonyítás.

1. Ha $S = \emptyset$, akkor $Co(S) = \emptyset$. Ha S nemüres, akkor az eltolásinvariancia miatt feltehetjük, hogy $0 \in S$. Ekkor $Co(S)$ $\mathfrak{o}$-részmodulus, tehát mivel S tartalmaz nyílt rácsot, ezért $Co(S)$ is, tehát mindketten nyíltak.
2. Az előző állítás első pontja szerint $\overline{Co(S)}$ zárt és konvex

□

Fontos megjegyzés, hogy a korlátosság fogalma nem csak metrikus térben vezethető be, hanem már lokálisan konvex vektorterek esetében is tudunk korlátos halmazokról beszélni. Az eddig látottak alapján jogosan merül fel a gondolat, hogy a lokálisan konvex vektorterek esetén a rácsok úgy viselkednek, mint a nemarkhimédeszi testek gömbjei. Ez a párhuzam egy korlátosságfogalmat is felvet, ami, mint azt látni fogjuk, tényleg korlátosságot jelent az indukáló félnormák szerint.

3.26. Definíció. (**Korlátosság**) $B \subseteq V$ korlátos, ha tetszőleges $L \subseteq V$ nyílt rácshoz van olyan $a \in K$, hogy $B \subseteq aL$.

Rögtön látszik, hogy minden véges halmaz korlátos, sőt, korlátos halmazok véges uniója is korlátos. A definícióból az is adódik, hogy hogyha V topológiáját a (q_i) félnormacsalád indukálja, akkor fennáll a következő ekvivalencia: $B \subseteq V$ korlátos $\Leftrightarrow \sup_{v \in B}(q_i(v)) < \infty$ $\forall i \in I$-re.

3.27. Állítás. *Ha $B \subseteq V$ korlátos, akkor a B által generált $\mathfrak{o}$-részmodulus, így $Co(B)$ is korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $L \subseteq V$ nyílt rács és $a \in K$ olyan, hogy $B \subseteq aL$. Mivel aL zárt $\mathfrak{o}$-részmodulus, ezért tartalmazza a B által generált $\mathfrak{o}$-részmodulust is. □

4. Nemarkhimédeszi normált terek

4.1. Alapfogalmak

4.1. Definíció. (**Norma**) Egy q nemarkhimédeszi félnorma V-n nemarkhimédeszi norma, ha $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = 0$. Ilyenkor a $(V; q)$ párost normált térnek hívjuk.

Ilyenkor V a normával metrikus, így Hausdorff teret alkot.

4.2. Definíció. (**Nyílt és zárt gömbök**) A $B_\epsilon(v) := \{w \in V : \|w-v\| \leq \epsilon\}$ halmazt a v körüli ϵ sugarú zárt, míg a $B_\epsilon^-(v) := \{w \in V : \|w - v\| < \epsilon\}$ halmazt a v körüli ϵ sugarú nyílt gömbnek hívjuk.

Vegyük rögtön észre, hogy a nulla középpontú gömbök rácsot alkotnak, így konvexek. Továbbá mivel fennáll $B_\epsilon(v) = v + B_\epsilon(0)$, ezért tetszőleges gömb konvex. A nulla középpontú gömbök rács voltából az is adódik, hogy rögzített ϵ-ra az ϵ sugarú gömbök partícióját adják V-nek, így minden gömb nyílt-zárt. Mivel topologikus vektortérben vagyunk, ezért az összeadás és a skalárral való szorzás természetesen a normált terek esetében is folytonos.

Nyílvánvalóan minden normából származó topológia lokálisan konvex. Az, hogy melyek azok a lokálisan konvex topológiák, amiket norma indukál, azonban már némi meggondolást igényel.

4.3. Állítás. *V topológiáját pontosan akkor indukálja egyetlen félnorma, ha van korlátos rács V-ben.*

Bizonyítás. Ha V topológiáját a q félnorma indukálja, akkor $L(q)$ korlátos és nyílt rács.

Ha L_0 korlátos nyílt rács V-ben, akkor pedig $q := q_{L_0}$ mellett a 3.19-es állítás 2. pontja szerint q folytonos, így tetszőleges ϵ-ra a $V(q; \epsilon)$ rács nyílt V-ben. 3.9 miatt pedig $V(q; (|a_L| + 1)^{-1}) \subseteq L$, így q indukálja a topológiát. $\square$

Tudjuk, hogy hogy V topológiája norma által indukált, akkor V biztosan Hausdorff. A 3.21-es állításból pedig rögtön látszik, hogy minden Hausdorff topológiát normák egy családja indukál. Ezt összevetve az előző állítással a következőt kapjuk:

4.4. Következmény. *Legyen V Hausdorff. Ekkor V topológiáját pontosan akkor indukálja egyetlen norma, ha létezik korlátos rács V-ben.*

4.5. Definíció. (**Banach tér**) Egy K feletti normált teret Banach-térnek hívunk, ha teljes metrikus teret alkot a norma által indukált metrikával.

4.6. Definíció. (**Folytonos lineáris operátorok tere**) Ha $(V; \|\cdot\|_V)$ és $(W; \|\cdot\|_W)$ K feletti normált terek, akkor a V és W közti folytonos lineáris operátorok terének hívjuk az $\mathcal{L}(V;W) := \{f \in Hom_K(V;W) : f\ folytonos\}$ függvények halmazát.

Az összeadás és a skalárral való szorzás folytonosságának köszönhetően a folytonos lineáris operátorok tere lineáris atlerét adja $Hom_K(V;W)$-nek.

4.7. Állítás. *Ha $f : V \to W$ K-lineáris leképezés, akkor a következő két állítás ekvivalens:*

1. *f folytonos*
2. *$\exists c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, hogy $\|f(v)\| \leq c\|v\|$ $\forall v \in V$*

Bizonyítás. **2 $\Rightarrow$ 1**: Legyen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat V-ben, amire $v_n \to v$ valamely $v \in V$-re. Ekkor $v_n - v \to 0$, tehát $\|v_n - v\| \to 0$. *2* miatt pedig $\|f(v_n) - f(v)\| = \|f(v_n - v)\| \leq c\|v_n - v\| \to 0$, tehát f folytonos.

1 $\Rightarrow$ 2: Ha f folytonos, akkor $\exists\ 0 < \epsilon < 1$, hogy $f^{-1}(B_1(0)) \supseteq B_\epsilon(0)$. Mivel az abszolútérték nemtriviális, ezért feltehető, hogy $\epsilon = |a|$ valamely $a \in K$-ra. Ekkor $\|f(v)\| \leq 1$, ha $\|v\| \leq |a|$.

Legyen most $v \neq 0$ tetszőleges és $m \in \mathbb{Z}$ olyan, hogy $|a|^{m+2} < \|v\| \leq |a|^{m+1}$. Ekkor $\|f(v)\| = |a|^m \|f(a^{-m}v)\| \leq |a|^m < |a|^{-2}\|v\|$. $\square$

Most is azt kaptuk tehát, hogy a folytonos lineáris operátorok megegyeznek a korlátos lineáris operátorokkal, így ismét bevezethetjük az operátornorma fogalmát.

4.8. Definíció. (**Operátornorma**) $\mathcal{L}(V;W)$ nomrált tér K fölött az $\|f\| := \sup\{\frac{\|f(v)\|}{\|v\|} : v \in V \setminus \{0\}\} = \sup\{\frac{\|f(v)\|}{\|v\|} : v \in V\ 0 < \|v\| \leq 1\}$ normával. Ezt a normát operátornormának hívjuk.

Mivel korántsem biztos, hogy $\|V\|$ megegyezik $|K|$-val, sőt, még abban sem lehetünk biztosak, hogy egyáltalán létezik 1 normájú vektor V-ben, ezért általában **nem igaz**, hogy $\|f\| = \sup\{\|f(v)\| : v \in V, \|v\| = 1\}$.

4.9. Állítás. *Ha W Banach-tér, akkor $\mathcal{L}(V;W)$ is Banach-tér az operátornormával.*

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy tetszőleges $\mathcal{L}(V;W)$-beli Cauchy sorozat. Ekkor az $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy $\mathbb{R}$-ben, tehát $\mathbb{R}$ teljessége miatt $\exists \lim_{n\to\infty}\|f_n\|$.

Mivel $\|f_{n+1}(v)-f_n(v)\| = \|(f_{n+1}-f_n)(v)\| \leq \|f_{n+1}-f_n\|\|v\|$, ezért $f_n(v)$ Cauchy W-ben $\forall v \in V$-re. Definiálhatjuk tehát az $f(v) := \lim_{n\to\infty} f_n(v)$ függvényt.

A skalárral való szorzés és az összeadás folytonosságából rögtön következik, hogy f lineáris. Mivel $\|f(v)\| = \lim_{n\to\infty}\|f_n(v)\| \leq \lim_{n\to\infty}\|f_n\|\|v\|$, ezért f folytonos is, tehát $f \in \mathcal{L}(V;W)$.

$$\|f-f_n\| = \sup\left\{\frac{\|(f-f_n)(v)\|}{\|v\|}\right\} =$$

$$= \sup\left\{\frac{\|\lim_{m\to\infty} f_m(v) - f_n(v)\|}{\|v\|}\right\} \leq \sup_{m\geq n}\|f_{m+1}-f_m\|$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyságát kihasználva kapjuk tehát, hogy $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. $\square$

Következésképp $\mathcal{L}(V;K)$ az alaptest, mint egydimenziós K-vektortér Banachsága miatt mindig Banach-tér.

4.10. Definíció. (**Duális tér**) $\mathcal{L}(V;K)$-t, azaz a V **folytonos lineáris funkcionáljainak** terét V duális terének szoktuk hívni és V'-vel jelöljük.

4.2. A normákról

Az arkhimédeszi esetben láttuk, hogy véges dimenzióban minden norma ekvivalens, azaz ugyanazt a topológiát indukálják. Ezt most a nemarkhimédeszi esetre is belátjuk.

4.11. Állítás. *Az egyetlen lokálisan konvex Hausdorff topológia a K^n véges dimenziós nemarkhimédeszi vektortéren a $\|(a_1, \ldots, a_n)\| := \max_{1 \leq 1 \leq n} |a_n|$ maximum-norma által indukált topológia.*

Bizonyítás. Három lépésben fogunk bizonyítani.

1. *A maximumnorma által indukált topológia erősebb minden más lokálisan konvex topológiánál K^n-en*:

   Jelölje $e_1, \ldots, e_n$ K^n standard bázisát és legyen q tetszőleges félnorma K^n-en. Ekkor $\forall q \in K^n$-re $q(v) \leq (\max_{1 \leq i \leq n} q(e_i))\|v\|$, tehát a q szerinti topológiában minden nyílt rácsot megtalálunk a maximum-norma által indukált topológiában is.

2. *Tetszőleges lokálisan konvex Hausdorff topológia K^n-en gyengíthető egyetlen p norma által indukált topológiává*:

   Legyen $(q_i)_{i \in I}$ a topológiát indukáló félnormacsalád. 3.21 miatt ekkor $\{0\} = \bigcap_{i \in I} q_i^{-1}(0)$. Mivel $q_i^{-1}(0)$ lineáris altér, ezért a véges dimenzió miatt már véges sok $q_{i_1}, \ldots q_{i_r}$ félnormára $q_{i_1}^{-1}(0) \cap \cdots \cap q_{i_r}^{-1}(0) = \{0\}$. Ekkor a $p := \max_{1 \leq k \leq r} q_{i_k}$ norma rendelkezik a keresett tulajdonsággal.

3. *Tetszőleges p K^n feletti normára az $id : (K^n; p) \to (K^n; \|\cdot\|)$ identikus leképezés folytonos*:

   A 4.7-es állítás miatt elég találnunk egy olyan $c > 0$-t, hogy $\|v\| \leq cp(v)$ $\forall v \in V$-re. Ezt n-re való teljes indukcióval keressük meg.

   - $n = 1$: $c := p(1)$ választással $\|v\| \leq p(1)p(v)$.
   - $n - 1 \to n$: $p\big|_{K^{n-1}}$-hez az indukciós feltétel miatt találunk olyan $c_1 > 0$-t, hogy $\|v\| \leq c_1 p(v) \quad \forall v \in V := K_{e_1} \bigoplus \cdots \bigoplus K_{e_{n-1}} \subset K^n$-re. V teljes $\|\cdot\|$-val, így teljes p-vel is, tehát zárt $(K^n; p)$-ben. Ez azt jelenti, hogy

     $$1 \leq c_2 := \frac{p(e_n)}{\inf_{v \in V} p(e_n - v)} < \infty$$

Legyen $c := \max(c_1c_2; \frac{c_2}{p(e_n)}) > 0$ és legyen $w \in K^n$ tetszőleges. Írjuk fel w-t $v + be_n$ alakban, ahol $v \in V$ és $b \in K$. Mivel $c > c_1$, ezért elég azon w-ket tekintenünk, melyekre $b \neq 0$. Ekkor

$$p(w) = |b|p(b^{-1}v + e_n) \geq |b|p(e_n)c_2^{-1} = p(be_n)c_2^{-1}$$

Felhasználva az ultrametrikus egyenlőtlenséget a következőt kapjuk:

$$p(v) = p(w - be_n) \leq \max(p(w); p(be_n)) \leq c_2 p(w)$$

$$\|w\| = \max(\|v\|; |b|) \leq \max(c_1; p(e_n)^{-1}) \max(c_1^{-1}\|v\|; |b|p(e_n)) \leq$$
$$\leq cc_2^{-1} \max(p(v); p(be_n)) \leq cp(w)$$

□

Nézzünk most meg pár lokálisan konvex topológiát, amivel el tudjuk látni $\mathcal{L}(V; W)$-t. Ehhez két megfigyelés lesz segítségünkre. Legyen $B \subseteq V$ korlátos. Ekkor

1. tetszőleges $M \subseteq W$ nyílt rácsra $\mathcal{L}(B; M) := \{f \in \mathcal{L}(V; W) : f(B) \subseteq M\}$ rács $\mathcal{L}(V; W)$-ben
2. tetszőleges p folytonos félnormára W-n $p_B(f) := \sup_{v \in B} p(f(v))$ félnorma $\mathcal{L}(V; W)$-n, $p \circ f$ pedig olyan folytonos félnorma V-n, amire $p(f(B))$ korlátos $\mathbb{R}$-ben. Ezért ekkor $L(p_B) = \mathcal{L}(B; L_p)$.

Vehetünk tehát egy tetszőleges $\mathcal{B}$ V-beli korlátos halmazok csaldját. Eyg ilyen család meghatároz egy topológiát $\mathcal{L}(V; W)$-n a következő értelemben:

4.12. Definíció. (**$\mathcal{B}$-topológia**) A topológia indukáló félnormái legyenek a $\{p_B : B \in \mathcal{B}, p\, folytonos\, félnorma\, W-n\}$ félnormák. Az ezen félnormák által indukált topológiát hívják $\mathcal{B}$-topológiának és ha $\mathcal{L}(V; W)$ ezzel a topológiával van ellátva, akkor $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(V; W)$-vel jelöljük.

4.13. Állítás. *Ha $\mathcal{B}$ véges unióra zárt, akkor a $\mathcal{B}$-topológia meghatározó rácsai a $\{\mathcal{L}(B; M) : B \in \mathcal{B}, M \subseteq W$ nyílt rács$\}$ $\mathcal{L}(V; W)$-beli rácsok.*

Bizonyítás. Először is ellenőriznünk kell, hogy a szóban forgó rácsok valóban kielégítik-e a lokálisan konvex topológiákat indukáló rácsokra vonatkozó feltételeket. (azaz **(lk1)**-et és **(lk2)**-t)

Ha M nyílt rács W-ben, akkor nyílván tetszőleges $a \in K^*$-ra aM is nyílt rács W-ben. Ezért tetszőleges $a \in K^*$-ra $a\mathcal{L}(B;M) \subseteq \mathcal{L}(B;aM)$ is eleme a halmazrendszernek, tehát **(lk1)** teljesül.

Ha pedig M és N nyílt rácsok W-ben, akkor $M \cap N$ is nyílt rács. Ha B_1 és B_2 V-beli korlátos halmazok, akkor $\mathcal{L}(B_1;M) \cap \mathcal{L}(B_2;N) \supseteq \mathcal{L}(B_1 \cup B_2; M \cap N)$, ami $\mathcal{B}$ unióra zártsága miatt úgyszintén eleme a halmazrendszernek, tehát (**lk2**) is teljesül.

$L^-(p_{M_B}) \subseteq \mathcal{L}(B; L^-(p_M)) \subseteq \mathcal{L}(B;M)$ miatt az összes $\mathcal{L}(B;M)$ rács nyílt a $\mathcal{B}$-topológiában, tehát a $\mathcal{B}$-topológia gyengébb a rácsok által meghatározott topológiánál.

Másrészt legyen valamely $r \in \mathbb{N}$-re $p_{1_{B_1}}, \dots, p_{r_{B_r}}$ véges sok a $\mathcal{B}$-topológia meghatározó félnormái közül és legyen $a \in K^*$ tetszőleges. Legyen továbbá $B := B_1 \cup \dots \cup B_r$ és $M := a(L(p_{1_{B_1}}) \cap \dots \cap L(p_{r_{B_r}}))$. Ekkor $\mathcal{L}(B;M) \subseteq V(p_{1_{B_1}}, \dots, p_{r_{B_r}}; |a|)$, tehát a $\mathcal{B}$-topológia erősebb is a rácsok által meghatározott topológiánál, így a két topológia megegyezik. □

$\mathcal{B}$-ből kiindulva a 3.27-es állítás segítségével definiálhatunk egy (általában nagyobb) $\widetilde{\mathcal{B}}$ korlátos halmazok családját a következőképp:

$\widetilde{\mathcal{B}} := \{B \subseteq V korl. : \exists a \in K^*, \exists B_1, \dots, B_m \in B \ (m \in \mathbb{N}),$ *hogy* $aB \subseteq B_1 \cup \dots \cup B_m$ *által generált* $\mathfrak{o}$*-részmodulus lezártjának*$\}$. Ez a $\widetilde{\mathcal{B}}$ család már zárt véges unióra.

4.14. Állítás. *A $\mathcal{B}$ és a $\widetilde{\mathcal{B}}$-topológiák megegyeznek.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy a $\widetilde{\mathcal{B}}$-topológia erősebb a $\mathcal{B}$-topológiánál. A fordított tartalmazáshoz legyen $M \subseteq W$ nyílt rács és $B \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Válasszunk ezekhez $a \in K^*$-ot és $B_1, \dots B_m \in \mathcal{B}$-t, hogy aB benne van $\bigcup_{i=1}^m B_i$ által generált $\mathfrak{o}$-részmodulus lezártjában. Ekkor $a[\mathcal{L}(B_1;M) \cap \dots \cap \mathcal{L}(B_m;M)] \subseteq \mathcal{L}(B;M)$, tehát a $\mathcal{B}$-topológia is erősebb a $\widetilde{\mathcal{B}}$-topológiánál. □

4.15. Állítás. *Ha W Hausdorff és $\bigcup_{B \in \mathcal{B}}$ sűrű alteret feszít ki V-ben, akkor $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(v;W)$ is Hausdorff.*

Bizonyítás. A 3.21-es állítás 2. feltételét fogjuk ellenőrizni $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(V;W)$-re.

Legyen $0 \neq f \in \mathcal{L}(V;W)$. Mivel $\bigcup_{B \in \mathcal{B}}$ sűrű alteret feszít ki V-ben, ezért találunk olyan $B \in \mathcal{B}$-t és $v \in B$-t, hogy $f(v) \neq 0$. Mivel W Hausdorff, ezért találunk olyan $M \subseteq W$ nyílt rácsot, melyre $f(v) \notin M$. Eszerint $f \notin \mathcal{L}(B;M)$. □

Nézzünk most meg pár példát $\mathcal{B}$-topológiára:

4.16. Példa. *(**Gyenge topológia**)*
Álljon most $\mathcal{B}$ V egypontú halmazaiból. Ez a topológia a pontonkénti konvergenciát adja, mivel két függvény pontosan akkor lesz közel benne egymáshoz, haminél több ponton vesznek fel egymáshoz minél közelebbi értéket. $\mathcal{L}(V;W)$-t a gyenge topológiával $\mathcal{L}_s(V;W)$-vel szoktuk jelölni.

4.17. Példa. *(**Erős topológia**)*
Legyen $\mathcal{B} := \{B \subseteq V : B \text{ korlátos}\}$. Ez a lokálisan egyenletes konvergencia topológiája, hiszen itt két függvény akkor lesz egymáshoz közel, ha nem csak pontonként, hanem tetszőleges korlátos halmazon közel vannak egymáshoz. $\mathcal{L}(V;W)$-t az erős topológiával $\mathcal{L}_b(V;W)$-vel szoktuk jelölni.

A 4.15-es állítás fényében azonnal látszik, hogy mind a gyenge, mind az erős topológia Hausdorff.

4.18. Állítás. *Ha V és W normált terek, akkor $\mathcal{L}_b(V;W)$ topológiáját az operátornorma indukálja.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{B}$ V összes korlátos halmazainak családját. Jelöljük ezen kívül $\mathcal{B}_0$-al a $B_1(0)$ V-beli egységgömböt tartalmazó halmazt. Mivel $\widetilde{\mathcal{B}_0} = \widetilde{\mathcal{B}}$, ezért a 4.14 állításunk segítségével látjuk, hogy $\mathcal{L}_b(V;W)$ topológiáját a $\|f\|' := \sup_{\|v\|\leq 1}\|f(v)\|$ norma indukálja. Azonnal látszik, hogy $\|f\|' \leq \|f\|$ $\forall f \in \mathcal{L}(V;W)$-re.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy a két norma ekvivalens, még találnunk kéne valamilyen $c > 0$ konstansot, amire $\|f\| \leq c\|f\|'$. Ehhez vegyünk tetszőleges $b \in K^*$-ot úgy, hogy $0 < |b| < 1$. Ekkor tetszőleges $0 \neq v \in B_1(0)$ vektorhoz találunk olyan $m(v) \in \mathbb{Z}$-t, hogy $|b^{m(v)+1}| < \|v\| \leq |b^{m(v)}|$. Ekkor

$$\|f\| = \sup_{0<\|v\|\leq 1} \frac{\|f(v)\|}{\|v\|} = \sup_{0<\|v\|\leq 1} \frac{\|f(b^{-m(v)}v)\|}{\|b^{-m(v)}v\|} = \sup_{|b|<\|v\|\leq 1} \frac{\|f(v)\|}{\|v\|} \leq |b|^{-1}\|f\|'$$

□

4.3. Ekvifolytonos halmazok és a Banach-Steinhaus tétel

4.19. Definíció. (**Ekvifyolytonos halmaz**) Egy $H \subseteq Hom_K(V;W)$ halmaz függvényei ekvifolytonosak, ha tetszőleges $M \subseteq W$ nyílt rácshoz találunk oylan $L \subseteq V$ rácsot, hogy $f(L) \subseteq M$ minden $f \in H$-ra.

4.20. Megjegyzés. Nyílvánvaló, hogy minden ekvifolytonos halmaz nem csak $Hom_K(V;W)$-nek, hanem $\mathcal{L}(V;W)$-nek is részhalmaza.

Ez a tulajdonság gyakorlatilag ugyanaz, mint a szokásos egyenletes korlátosság az arkhimédeszi esetben. Ugyanis, mint azt a következő állításban látni fogjuk, már tetszőleges $\mathcal{B}$-topológiában is igaz, hogy minden ekvifolytonos halmaz korlátos. Azt is meg fogjuk mutatni, hogy megfelelő topológiák mellett az ekvifolytonos halmazok megegyeznek a korlátos halmazokkal.

4.21. Állítás. *Tetszőleges $\mathcal{B}$-topológiában igaz, hogy minden $H \subseteq \mathcal{L}(V;W)$ ekvifolytonos halmaz korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(V;W)$ tetszőleges nyílt rács. $\mathcal{L}$ nyíltsága miatt ekkor találunk olyan $M \subseteq W$ nyílt rácsot és $B \in \widetilde{\mathcal{B}}$-ot, hogy $\mathcal{L}(B;M) \subseteq \mathcal{L}$. H ekvifolytonosságát használva kapjuk egy olyan $L \subseteq V$ nyílt rács létezését, melyre $f(L) \subseteq M$ minden $f \in H$-ra. Mivel B korlátos ezért választhatunk olyan $a \in K^*$-ot is, hogy $B \subseteq aL$. Innen következik, hogy $f(B) \subseteq aM$ $\forall f \in H$-ra, tehát $H \subseteq a\mathcal{L}(B;M) \subseteq a\mathcal{L}$. $\square$

4.22. Megjegyzés. Mivel tudjuk tehát, hogy minden H ekvifolytonos halmaz korlátos is, ezért a 3.27-es állítást alkalmazva kapjuk, hogy a H által generált $\mathfrak{o}$-részmodulus és így $Co(H)$ is korlátos.

Általános $\mathcal{B}$-topológiában a megfordítás, hogy minden korlátos halmaz ekvifolytonos, azonban nem igaz. Szükségünk van tehát valamilyen megszorításra $\mathcal{L}(V;W)$ topológiájára vonatkozóan.

Ehhez gondoljuk meg a következőt: A korlátosság definíciójából adódóan nyílván tetszőleges $L \subseteq V$ nyílt rácsra teljesül, hogy

(bor) Tetszőleges $B \subseteq V$ korlátos halmazhoz találunk olyan $a \in K$-t, hogy $B \subseteq aL$.

Vegyük észre, hogy minden olyan $\mathfrak{o}$-részmodulus, amely kielégíti a (bor) tulajdonságot, az szükségszerűen rács, mivel minden egyelemű halmaz korlátos.

4.23. Definíció. (**Bornologikus tér**) Egy V lokálisan konvex vektorteret bornologikusnak hívunk, ha minden olyan rács, ami kielégíti a (bor) tulajdonságot, nyílt V-ben.

4.24. Állítás. *Ha V bornologikus tér, akkor $H \subseteq V$ ekvifolytonos $\Leftrightarrow$ korlátos $\mathcal{L}_b(V;W)$-ben.*

Bizonyítás.
$\Rightarrow$: Mivel az erős topológia a legerősebb $\mathcal{B}$-topológia, ezért a 4.21-es állítást használva az állításnak ez az iránya nyílvánvaló.
$\Leftarrow$: Legyen most H korlátos és legyen $M \subseteq V$ nyílt rács. Definiáljuk az $L := \bigcap_{f \in H} f^{-1}(M)$ halmazt. Erről szeretnénk látni, hogy nyílt rács. Az $f \in H$ függvények linearitása miatt L nyílván $\mathfrak{o}$-részmodulus. Tehát csak annyit kéne látnunk, hogy kielégíti a (bor) tulajdonságot, ami rögtön adná, hogy nyílt rács.

Ehhez legyen $B \subseteq V$ tetszőleges korlátos halmaz. Ekkor $\mathcal{L}(B;M)$ rács V-ben, tehát H korlátossága miatt létezik egy olyan $a \in K^*$, hogy $H \subseteq a\mathcal{L}(B;M) = \mathcal{L}(B;aM)$. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy $f(B) \subseteq aM$ minden $f \in H$-ra, tehát $b \subseteq aL$. Ez viszont azt jelenti, hogy L kielégíti a (bor) feltételt, tehát nyílt rács. $\square$

Láttuk tehát, hogy bornologikus terekben az ekvifolytonos és az operátornormában korlátos halmazok egybeesnek. Az arkhimédeszi esetből azonban ismerjük a Banach-Steinhaus tételt, amely bizonyos feltételek mellett ugyanezt az ekvivalenciát a gyenge topológia szerint korlátos halmazokra is biztosította. Szerencsénkre a tétel átmegy a nemarkhimédeszi esetre is.

4.25. Definíció. (**Hordós tér**) A V lokálisan konvex vektorteret hordós térnek hívjuk, ha minden V-beli zárt rács nyílt is

4.26. Állítás. *Minden Banach-tér hordós tér.*

Bizonyítás. A Baire-féle kategóriatételből [2] tudjuk, hogy minden teljes metrikus tér, így minden Banach-tér is második kategóriájú halmaz, azaz tetszőleges megszámlálható zárt halmazokkal való fedésében találunk olyan zárt halmazt, melynek belseje nem üres. Természetesen fontos meggondolni, hogy a Baire-féle kategóriatétel nemarkhimédeszi esetben is teljesül, de mivel a tétel általános teljes metrikus terekről szól, ezért nem szükséges újra belátnunk a nemarkhimédeszi esetre is. Be fogjuk tehát látni, hogy minden V második kategóriájú tér hordós tér.

Ehhez legyen $L \subseteq V$ zárt rács és legyen $a \in K$ olyan, hogy $|a| > 1$. Ekkor $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} a^n L$. Ekkor természetesen van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $a^n L$ belseje nemüres amiből következik, hogy L belseje nemüres, ami azt jelenti, hogy találunk olyan $v \in L$ vektort és $L' \subseteq V$ nyílt rácsot, hogy $v + L' \subseteq L$, azaz L tartalmazza v egy nyílt környezetét. Ekkor L természetesen tartalmazza L'-t is, így szükségképpen nyílt. □

4.27. Tétel. ***(Banach-Steinhaus)*** *Ha V egy hordós tér, akkor tetszőleges $\mathcal{L}_s(V;W)$-beli korlátos halmaz ekvifolytonos.*

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq W$ egy nyílt rács és definiáljuk hozzá ismét az $L := \bigcap_{f\in H} f^{-1}(M)$ $\mathfrak{o}$-részmodulust. Célunk megint az, hogy erről belássuk, hogy nyílt rács.

Mivel L zárt halmazok metszete, ezért nyílvánvalóan zárt, tehát mivel V hordós tér, ezért elég belátnunk róla, hogy rács. Ehhez legyen $v \in V$ tetszőleges vektor. Mivel H korlátos $\mathcal{L}_s(V;W)$-ben, ezért találunk olyan $a \in K^*$-ot, hogy $H \subseteq a\mathcal{L}(\{v\}; M)$. Ebből az következik, hogy $a^{-1}(v) \in L$, tehát L rács. □

4.4. A Banach-féle zárt gráf és nyílt leképezés tételek nemarkhimédeszi vektortereken

4.28. Definíció. (**Lineáris leképezés gráfja**) Legyenek v és W lokálisan konvex vektorterek. Ekkor egy $f : V \to W$ lineáris függvény gráfjának hívjuk a

$$\Gamma(f) := \{(v; f(v)) : v \in V\} \subseteq V \times W$$

halmazt.

4.29. Állítás. *Ha f folytonos és W Hausdorff, akkor $\Gamma(f)$ zárt $V \times W$-ben.*

Bizonyítás. Mivel W Hausdorff, ezért a $\Delta \subseteq W \times W$ átló zárt. Viszont fennáll $\Gamma(f) = (f \times \mathrm{id})^{-1}(\Delta)$, tehát $\Gamma(f)$ zárt halmaz folytonos függvénynél vett őse, így zárt. □

4.30. Tétel. ***(Zárt gráf tétel)*** *Ha V lokálisan konvex hordós tér és W Banach-tér, akkor tetszőleges $f : V \to W$ lineáris leképezésre teljesül, hogy ha $\Gamma(f)$ zárt, akkor f folytonos.*

Bizonyítás. Vegyünk egy $M \subseteq W$ nyílt rácsot. A feladatunk, hogy belássuk, hogy $f^{-1}(M)$ nyílt rács. Ehhez vegyük észre, hogy az $\overline{f^{-1}(M)}$ zárt rács V hordóssága miatt biztosan nyílt, így elég azt megmutatnunk, hogy $\overline{f^{-1}(M)} = f^{-1}(M)$.

Ehhez vegyünk egy olyan $M = M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ nyílt rácsok leszálló láncát W-ben, melyek környezetbázisát adják a nullvektornak. Ekkor $\overline{f^{-1}(M)} = \overline{f^{-1}(M_1)} \supseteq \overline{f^{-1}(M_2)} \supseteq \dots$ nyílt rácsok leszálló lánca V-ben.

Vegyünk egy tetszőleges $v \in \overline{f^{-1}(M)}$-et. Indukcióval találunk ekkor olyan $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, hogy $v-(v_1+v_2+\dots+v_n) \in \overline{f^{-1}(M_{n+1})}$. Ebből definiálhatjuk a $v'_n := v_1+\dots+v_n$ sorozatot. Mivel $f(v'_{n+1})-f(v'_n) = f(v_n+1) \in M_{n+1}$, ezért $(f(v'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy M-ben, tehát W Banachsága és M zártsága miatt konvergál valamely $w \in M$-hez. Célunk, hogy megmutassuk, hogy $w = f(v)$. Ehhez természetesen elég azt megmutatnunk, hogy tetszőleges $L \subseteq V$ és $N \supseteq W$ nyílt rácsokra $\Gamma(f) \cap ((v + L) \times (w + N)) \neq \emptyset$, azaz $f(v)$ és W tetszőlegesen közel vannak egymáshoz.

Mivel $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ környezetbázisa a nullvektornak, ezért minden $N \subseteq W$ nyílt rácshoz találunk egy olyan $m \in \mathbb{N}$-et, hogy $M_m \subseteq N$. Ekkor természetesen $f(v'_m) - w \in N$.

Mivel $v - v'_m \in \overline{f^{-1}(M_M + 1)} \subseteq f^{-1}(M) + L$, ezért találunk olyan $u \in f^{-1}(M)$-t, hogy $v - v'_m - u \in L$. Ebből következik, hogy $v'_m + u \in v + L$, tehát $f(v'_m) + f(u) \in w + N + M_{n+1} \subseteq w + N$. □

Ahhoz, hogy a nyílt leképezés tételt be tudjuk látni, szükségünk lesz egy módszerre, hogy normált terek lineáris altérrel vett faktorán értelmezzünk egy topológiát.

4.31. Definíció. (**Hányadostopológia**) Ha V normált tér és $U \subseteq V$ lineáris altér, akkor faktortopológiának hívjuk a $\|v+U\|' := \inf_{u \in U} \|v+u\|$ norma által indukált topológiát ${}^{V}/_{U}$-n.

4.32. Állítás. *Ha V Banach-tér és $U \subseteq V$ zárt lineáris altér, akkor ${}^{V}/_{U}$ is Banach-tér a faktortopológiával.*

Bizonyítás. Mint az a hányadostopológia definíciójánál is láttuk, ${}^{V}/_{U}$ normált teret alkot a faktortopológiával. Meg kell mutatnunk, hogy teljes is.

Ehhez vegyünk egy $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot úgy, hogy $(v_n+U)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy ${}^{V}/_{U}$-ben. Legyen továbbá $L_1 \supseteq L_2 \supseteq \dots$ nyílt rácsok olyan leszálló lánca, amely környezetbázisát adja a nullvektornak. Ekkor alkalmas részsorozatra áttérve feltehtjük, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$-re $v_{n+1} - v_n \in L_n + U$.

Ekkor nyílván találunk olyan $w_{n+1} \in L_n$-t, hogy $v_{n+1} - v_n - w_{n+1} \in U$. Ezen sorozat segítségéfel definiálhatjuk a $v_n' := v_1 + \sum_{i=2}^{n} w_n$ $(v_1' := v_1)$ sorozatot. Mivel $v_{n+1}' - v_n' = w_{n+1} \in L_n$, ezért a $(v_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy V-ben, tehát konvergál valamely $v \in V$-hez. Emiatt $(v_n+U)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n'+U)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál $(v+U)$-hoz ${}^{V}/_{U}$-ban. $\square$

4.33. Definíció. (**Nyílt leképezés**) Egy $f : V \to W$ folytonos leképezés nyílt, ha nyílt halmazt nyíltba visz.

4.34. Tétel. *(**Nyílt leképezés tétel**) Legyen V Banach-tér és W egy hordós Hausdorff tér. Ekkor minden $f : V \to W$ szürjektív folytonos lineáris operátor nyílt.*

Bizonyítás. Mivel W Hausdorff, ezért $Ker(f)$ zárt V-ben. A 4.32-es állítást alkalmazva kapjuk, hogy ekkor ${}^{V}\Big/_{Ker(f)}$ is Banach-tér a faktortopológiával. Ezen kívűl a $V \to {}^{V}\Big/_{Ker(f)}$ természetes vetítés nyílt leképezésa faktortopológia definíciója szerint. Mivel nyílt leképezések kompozíciója nyílt leképezés, ezért elég megmutatnunk, hogy az f által indukált ${}^{V}\Big/_{Ker(f)} \to W$ folytonos lineáris bijekció nyílt leképezés. Más szavakkal feltehetjük, hogy f bijektív.

Bijektív függvény esetén a nyíltság ekvivalens az inverz folytonosságával, tehát a 4.30-es tétel miatt elég azt megmutatnunk, hogy $\Gamma(f^{-1})$ zárt $W \times V$-ben.

A 4.29-as állításból azonnal következik, hogy $\Gamma(f)$ zárt $V \times W$-ben. $\Gamma(f^{-1})$ viszont $\Gamma(f)$ megfelelője a $W \times V \to V \times W \quad (w; v) \mapsto (v; w)$ homeomorfizmusnál, így zárt. $\square$

Hivatkozások

[1] Peter Schneider, Nonarchimedean Functional Analysis

[2] Kristóf János, Topologikus vektorterek és normált algebrák