

Szakdolgozat

Lineáris algebrai egyenletrendszerek iterációs megoldásai

Eitner Bea

Matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Faragó István, tanszékvezető egyetemi docens

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2009

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Direkt módszerek	6
2.1. Gauss-elimináció	6
2.2. Főelemkiválasztás	7
2.3. LU-felbontás	8
2.4. Cholesky-felbontás	9
3. Iterációs megoldási módszerek	11
3.1. A stacionárius iteráció	13
3.1.1. Jacobi-iteráció, Gauss-Seidel iteráció	15
3.1.2. A SOR-módszer	18
3.1.3. Az egyszerű iteráció	18
3.2. A stacionárius iteráció konvergenciája szimmetrikus, szigorúan pozitív definit (szpd) mátrixok esetén	19
3.2.1. A Jacobi-iteráció konvergenciája	22
3.2.2. A SOR-módszer konvergenciája	23
3.2.3. Az egyszerű iteráció konvergenciája	24
3.3. A Csebisev-iteráció	26
3.3.1. A Csebisev polinomok	26
3.3.2. A Csebisev-iteráció paramétere	28
3.4. Iterációs eljárások M-mátrixok esetén	32
4. Összefoglalás	35

1. fejezet

Bevezetés

Lineáris algebrai egyenletrendszernek nevezzük az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_m \end{aligned} \tag{1.1}$$

egyenletrendszert, ahol a_{ij}, b_i ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$) adott valós számok, x_i ($i = 1, \dots, n$) ismeretlen valós számok. Az a_{ij} számokat az (1.1) egyenletrendszer együtthatóinak nevezzük és b_i az i -edik egyenlet szabad tagja. Az (1.1) egyenletrendszert homogénnek nevezzük, ha $b_1 = \dots = b_m = 0$, ellenkező esetben inhomogénnek mondjuk. Az (1.1) egyenletrendszert szabályosnak nevezzük, ha $m = n$, azaz az egyenletek és az ismeretlenek száma egyenlő.

Jelölje

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

az együtthatómátrixot

$$b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

az oszlopvektorokat.

Ekkor az (1.1) rendszer tömören

$$Ax = b$$

alakban írható fel. Lineáris algebrai egyenletrendszerek a modellezés számos területén keletkeznek, például a mechanikában, a villamosságtanban, a gazdasági elemzések során stb. A matematikában is gyakran találkozunk olyan problémával, amely ilyen rendszer megoldására vezethető vissza (például: nem lineáris egyenletrendszerek, differenciálegyenletek numerikus megoldása, interpolációs és approximációs feladatok).

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $b \in \mathbb{R}^n$. Ekkor a megoldás pontosan egyértelmű, ha $\det(A) \neq 0$, azaz létezik A^{-1} (A mátrix reguláris).*

Egy lehetséges megoldási módszer a Cramer-szabály: Jelölje A_j azt a mátrixot, amelyet a reguláris A mátrixból úgy kapunk, hogy a j -edik oszlop helyére a b oszlopvektort tesszük. Ekkor

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Gyakorlati szempontból az eljárás alig alkalmazható, mert nagy műveletigényű, kizárólag kis méretű mátrixok esetén érdemes használni. A Cramer-szabály numerikusan nem stabilis, azaz a bemenő adatoktól a megoldás nem függ folytonosan. Alapkövetelmény egy megoldási módszerrel szemben, hogy adott pontosságú közelítő megoldás minél kevesebb művelettel legyen meghatározható (a numerikus módszer hatékonysága).

A lineáris algebrai egyenletrendszereket megoldó eljárások két nagy csoportba sorolhatók: direkt és iterációs módszerek. A megoldási módszer kiválasztása leginkább az adott mátrixtól függ. A szakdolgozat célja részben bemutatni a direkt módszereket és részletesen ismertetni az iterációs megoldási lehetőségeket, valamint rávilágítani előnyeire és esetleges hátrányaira a direkt módszerekkel összehasonlítva.

2. fejezet

Direkt módszerek

Ide tartozik a Gauss-elimináció, a teljes- és részleges főelemkiválasztás, LU-felbontás és a Cholesky-felbontás. A direkt módszerek alkalmazásával pontos adatokat feltételezve, a számításokat pontosan elvégezve, véges sok művelettel a pontos megoldás meghatározható (a kerekítési hibákat figyelmen kívül hagyva).

2.1. Gauss-elimináció

Az $Ax = b$ rendszer, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ adott mátrix, $b \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$ esetén az eliminációs módszer a következőképpen jár el. Ha $a_{11} \neq 0$, akkor az első egyenlet $l_{i1} := \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ -szeresét kivonjuk az i -edik ($i > 1$) egyenletből. Ez a kiküszöbölési eljárás. Jelölje az A mátrix elemeit $a_{ij} = a_{ij}^{(1)}$, a kivonás során $i > 1$ esetben létrejövő új elemeket pedig $a_{ij}^{(2)}$, ahol

$$a_{ij}^{(2)} := a_{ij}^{(1)} - l_{i1}a_{1j}^{(1)}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$b_i^{(2)} := b_i^{(1)} - l_{i1}b_1^{(1)}, \quad j = 2, \dots, n.$$

Az első lépés után a következő egyenletrendszert kapjuk

$$a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}$$

$$a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}$$

$$\vdots$$

$$a_{n2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}.$$

Második lépésben feltesszük, hogy $a_{22}^{(2)} \neq 0$. Majd hasonlóan járunk el az első sor alatti $(n-1) \times (n-1)$ -es egyenletrendszerrel. Folytatva az eliminációt az alábbi rendszerhez jutunk feltéve, hogy $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ minden $k = 3, \dots, n-1$ -re.

$$a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}$$

$$a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}$$

$$\vdots$$

$$a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)}$$

Ha az utolsó egyenletben $a_{nn}^{(n)} \neq 0$, akkor x_n értékét könnyen megadhatjuk az $x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$ összefüggésből. Majd fordított sorrendben haladva a visszahelyettesítéssel x_{n-1}, \dots, x_1 is ugyanígy adódik. A kiküszöbölési eljárást tipikusan $a_{ii}^{(i)} = 1$ formában hajtjuk végre.

2. Tétel. *A Gauss-elimináció pontosan akkor végezhető el, ha az (1.1) egyenletrendszer A mátrixában az összes bal felső főminor nemzérus*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \neq 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Az első $n-1$ feltétel biztosítja a Gauss-elimináció kiküszöbölési részének végrehajthatóságát, az utolsó pedig a visszahelyettesítés beindítását.

2.2. Főelemkiválasztás

Az elimináció során főelemnek nevezzük azt a főátlóbeli elemet amelyikkel éppen elosztjuk az aktuális sort. Az elimináció stabilis, ha ez a legnagyobb abszolút értékű elem a mátrixban. Részleges főelemkiválasztást végzünk, ha

csak az aktuális sorból, vagy csak az aktuális oszlopból választjuk ki a legnagyobb abszolút értékűt. Teljes főelemkiválasztás esetén az egész mátrixban keressük a legnagyobb elemet. Ahhoz, hogy a kiválasztott elem a főátlóba kerüljön sor és oszlopcseréket hajtunk végre a mátrixban. Mindkét fajta (részleges, teljes) főelemkiválasztásnál a szóba jöhető elemek olyan oszlopban és sorban állnak, amelyeket az elimináció még nem normált le, vagy nullázott ki. Megfelelően nagy számot választva szorzónak bármelyik sor eleméből lehet főelem.

2.3. LU-felbontás

Az LU-felbontás során az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszerben szereplő A mátrixot felbontjuk $A = LU$ szorzatra, ahol L alsó háromszög, U pedig egy felső háromszög mátrixot jelöl.

3. Tétel. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik egyértelmű LU-felbontása, ha $\det(A_i) \neq 0$, $(i = 1, \dots, n - 1)$.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \dots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

L és U mátrix elemeinek kiszámítása a következő képletek segítségével történik

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad i \leq j \quad j = i, \dots, n$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right] \quad i > j \quad i = j + 1, \dots, n.$$

Az LU-felbontás segítségével $Ax = LUx = L(Ux) = b$ megoldásához $Ly = b$, $Ux = y$ megoldására van szükség. E két egyenletrendszer megoldása triviális. Az $Ly = b$ megoldása

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_k \quad i = 1, \dots, n.$$

Majd $Ux = y$ egyenletrendszer megoldása

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left[y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik}x_k \right] \quad i = n, \dots, 1.$$

Ha a Gauss-elimináció kiküszöbölési része során megőrizzük az l_{ik} szorzókat, akkor az eljárás végén megkapjuk L és U mátrixot, tehát az LU-felbontást is. Ilyen értelemben az LU-felbontás ekvivalens a Gauss-elimináció kiküszöbölési részével.

2.4. Cholesky-felbontás

A Cholesky-felbontás abban az esetben létezik, ha az A mátrix szimmetrikus, pozitív definit.

Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix pozitív definit, ha $x^T Ax > 0$ teljesül minden $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ vektor esetén.

Ha A szimmetrikus, pozitív definit mátrix, akkor felírható $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$ alakban. Ez a mátrix Cholesky-felbontása. Az \tilde{L} mátrixot az LU-felbontásból kaphatjuk meg

$$A = LU, \quad \tilde{L} = LD,$$

ahol $D = \text{diag}(\sqrt{u_{ii}})$.

A Cholesky-felbontás megadható az LU-felbontás nélkül is, ha egyenként számoljuk ki az $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$ mátrix elemeit

$$\tilde{l}_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad \tilde{l}_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{l}_{ik}^2}, \quad \tilde{l}_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{l}_{ik}\tilde{l}_{jk}}{\tilde{l}_{jj}}, \quad j = 1, \dots, i-1.$$

Látható, hogy főként kis vagy közepes méretű mátrixok, illetve teli mátrixok esetén érdemes a direkt eljárást választani. A másik nagy, lineáris egyenletrendszereket megoldó módszercsalád az iterációs megoldási módszerek.

3. fejezet

Iterációs megoldási módszerek

A gyakorlati feladatoknál, ami legtöbbször nagyméretű, ritka mátrixú egyenletrendszereket jelent, a direkt módszer fő problémája a nagy tárigény. Meg kell gondolni érdemes-e a pontos megoldást kiszámítani (kerekítési hibáktól eltekintve), hiszen általában a mátrix és a jobboldali vektor is hibás. Azt jelenséget, amikor a direkt eljárás során olyan helyen keletkezik nemzérus elem, ahol eredetileg nulla állt, feltöltődésnek nevezzük. A direkt módszerek általában feltöltődést eredményeznek. Ez problémát jelent, növeli a tárigényt, hiszen a nulla elemeket nem tároljuk, vagyis helyet kell biztosítani az újonnan keletkezett elemeknek. Kivéve a sávmátrixokat, ahol a főátló körüli diagonális sávon kívül nulla elemek állnak és a direkt módszerek alkalmazása során a sáv szélesség megmarad. Az iterációs eljárások legfőbb előnye a nagyméretű rendszerekre történő alkalmazhatóságuk. Ritka mátrixok esetén is iterációt használunk. Ritka mátrixról beszélünk, ha a nemzérus elemek aránya (egy-egy szerzőknél kb. 20 százalék) kicsi n^2 -hez képest, ahol n az A mátrix rendjét jelöli. Az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldása során a tárigényt csökkentjük azáltal, hogy A nem nulla elemeit nem tároljuk. Az iterációs módszer hátránya lehet az esetleges lassú konvergencia, ugyanis egy olyan vektorsorozat előállítását jelenti, amely a pontos megoldáshoz konvergál. Az egy lépéses iterációs módszerek általános alakja

$$x^{(m+1)} = S_m x^{(m)} + f, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

ahol $S_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f \in \mathbb{R}^n$. A kezdetben adott, tetszőleges $x^{(0)}$ vektorból kiindulva határozzuk meg a soron következő $x^{(m)}$ értékét és ezek segítségével -elvárásaink szerint- egyre jobban megközelítjük az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldását. Felmerülő kérdések:

- Hogyan válasszuk meg az $x^{(0)}$ kezdeti vektort?
- Mikor hagyjuk abba az iterációt, mi a leállás kritériuma?
- Konvergens-e az iteráció? Ha igen, hova tart, mikor tart az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldásához?

Gyakorlatban kezdeti vektornak a nullvektort választják és így $x^{(1)} = f$. (Általában nem érdemes a kezdeti vektor kiszámításába több munkát fektetni, mint amennyibe egy iterációs lépés kerül.) Fontos elméleti kérdés a konvergencia. Ehhez szükség van először két másik fogalom tisztázására és a (3.1) iteráció stacionárius alakjára

$$x^{(m+1)} = Sx^{(m)} + f, \quad (3.2)$$

ahol (3.1) képletben szereplő S_m mátrix nem változik, minden iterációs lépésnél S marad.

Definíció. Az X lineáris teret lineáris normált térnek nevezzük, ha létezik $d : X \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés, úgynevezett norma

- $d(x) \geq 0$ minden $x \in X$ -re,
- $d(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $d(\alpha x) = |\alpha| d(x)$,
- $d(x + y) \leq d(x) + d(y)$.

Definíció. (Banach-tér)

Egy X normált teret Banach-térnek nevezünk, ha teljes, azaz minden X -beli Cauchy-sorozatnak létezik határértéke X -ben.

Tegyük fel, hogy az iteráció az X Banach-térben adott, azaz $f, x^{(0)} \in X$ és S az X -et saját magába képezi le.

Definíció. A (3.2) stacionárius iteráció adott $x^{(0)}$ kezdeti vektor mellett konvergál, ha az $\{x^{(m)}\}$ sorozat konvergens az X Banach-tér $\|\cdot\|$ normájában (a normált tér definíciójában $d(x)$). Ha ez tetszőleges $x^{(0)}$ -ra teljesül, akkor az iterációs eljárást konvergensnek nevezzük.

A konvergencia elégséges feltételét adja a következő tétel:

4. Tétel. Legyen X Banach-tér, $S : X \rightarrow X$ leképezés minden $x_1, x_2 \in X$ esetén eleget tesz a $\|Sx_1 - Sx_2\| \leq q\|x_1 - x_2\|$ feltételnek, ahol $q \in [0, 1)$ rögzített konstans.

Ekkor az $x^{(m+1)} = Sx^{(m)} + f$ iterációval előállított $\{x^{(m)}\}$ sorozat konvergens.

A tétel levezetése az [1]-es irodalomban, mint az 1.17. Tétel bizonyítása szerepel.

Következmény. Ha $x^{(m)} \rightarrow x^*$, akkor nyilván

$$x^* = Sx^* + f,$$

azaz x^* az $(I - S)x = f$ egyenlet megoldása. Ezért, ha

$$I - S = A,$$

akkor $x^{(m)}$ az

$$Ax = f$$

feladat megoldásához tart.

3.1. A stacionárius iteráció

Az egylépéses iterációk általános alakja

$$B_{m+1} \frac{x^{(m+1)} - x^{(m)}}{\tau_{m+1}} + Ax^{(m)} = b,$$

ahol $B_{m+1}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $b \in \mathbb{R}^n$ adottak, B_{m+1} mátrix reguláris és $\tau_{m+1} \in \mathbb{R}$ paraméterek sorozata. Az iteráció stacionárius, ha $B_{m+1} = B$ és $\tau_{m+1} = \tau$, vagyis B független m értékétől

$$B \frac{x^{(m+1)} - x^{(m)}}{\tau} + Ax^{(m)} = b. \quad (3.3)$$

A (3.3) iteráció felírható

$$x^{(m+1)} = (I - B^{-1}A\tau)x^{(m)} + \tau B^{-1}b$$

alakban. Ekkor

$$\begin{aligned} S &= I - B^{-1}A\tau \\ f &= \tau B^{-1}b. \end{aligned}$$

Így, ha a (3.3) iteráció konvergens, akkor

$$\begin{aligned} A &= I - S = B^{-1}A\tau \\ f &= \tau B^{-1}b \end{aligned}$$

miatt a

$$\begin{aligned} B^{-1}A\tau x &= \tau B^{-1}b \\ Ax &= f \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásához tart.

A konvergencia szükséges és elégséges feltétele:

5. Tétel. *A stacionárius iterációs eljárás pontosan akkor konvergens, ha $\rho(S) = \max |\lambda(S)| < 1$, azaz $\rho(I - B^{-1}A\tau) < 1$. A $\rho(S)$ kifejezéssel az S mátrix spektrálsugarát jelöljük.*

Ez a tétel gyakorlati szempontból fontos, hiszen viszonylag könnyen ellenőrizhető feltételt ad a konvergenciára.

A (3.2) stacionárius iterációban szereplő S mátrix és az f vektor megadására egy általános lehetőség a következő:

$A = K - Q$, ahol a K reguláris mátrix.

Ekkor

$$b = Ax = Kx - Qx, \quad Kx = Qx + b$$

így

$$Kx^{(m+1)} = Qx^{(m)} + b$$

illetve

$$x^{(m+1)} = Sx^{(m)} + f, \quad S := K^{-1}Q, \quad f := K^{-1}b$$

6. Állítás. Ha $\|S\| < 1$ (ez elégséges feltétele az 5. tételben szereplő állításnak), akkor $x^{(m+1)} = Sx^{(m)} + f$ iteráció konvergens.

Ez a Banach-fixpont tétel következménye, hiszen $x = \varphi(x)$ alakú az egyenlet, $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és $\varphi(x) = Sx + f$ kontrakció

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|S(x) - S(y)\| = \|S(x - y)\| \leq \|S\| \|x - y\|.$$

Az iterációt $K(x^{(m+1)} - x^{(m)}) + Ax^{(m)} = b$ alakban is felírhatjuk, K -t preconditionálási mátrixnak nevezzük. A K^{-1} mátrixot általában nem számítjuk ki, helyette vesszük a K LU -, vagy LDU -felbontását. Utóbbi esetben L az A mátrix alsó, U a felső háromszög része a diagonális nélkül, $D := \text{diag}(A)$. A $K = D$ a Jacobi-iterációt, $K = L + D$ eset pedig a Gauss-Seidel iterációt adja.

3.1.1. Jacobi-iteráció, Gauss-Seidel iteráció

Feltesszük, hogy A invertálható ($\det A \neq 0$) és létezik P , úgynevezett permutáló mátrix, hogy $PAx = Pb$. Legyen $PA = \tilde{A}$ és $Pb = \tilde{b}$. Ekkor elérhető, hogy \tilde{A} diagonálisában ne szerepeljen nulla elem, vagyis $a_{ii} \neq 0$, minden $i = 1, \dots, n$ esetén.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

Ekkor $a_{ii} \neq 0$ miatt a (3.4) egyenletből x_i kifejezhető

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j + b_i \right).$$

Felépíthető egy iteráció, ahol $x_i^{(m)}$ az i -edik ismeretlen m -edik közelítése. A legkézenfekvőbb iteráció

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m)} + b_i \right) \quad i = 1, \dots, n.$$

Ez a Jacobi-iteráció koordinátás alakja, az $x_i^{(0)}$ kezdővektor tetszőleges, rögzített. A mátrixos alak meghatározásához $A = L + D + U$ felbontásra lesz szükség.

$Ax = b$ felírható $(L + D + U)x = b$ alakban, innen $Dx = -Lx - Ux + b$ -t kapjuk, mivel D invertálható (hiszen A diagonálisából áll) ezért x kifejezhető

$$x = -D^{-1}Lx - D^{-1}Ux + D^{-1}b.$$

Ekkor a Jacobi-iteráció mátrixos alakja

$$x^{(m+1)} = -D^{-1}Lx^{(m)} - D^{-1}Ux^{(m)} + D^{-1}b,$$

$$Dx^{(m+1)} + (L + U)x^{(m)} = b,$$

$$D(x^{(m+1)} - x^{(m)}) + Dx^{(m)} + (L + U)x^{(m)} = b,$$

$$D(x^{(m+1)} - x^{(m)}) + Ax^{(m)} = b.$$

A Gauss-Seidel iteráció mátrixos alakja

$$(D + L)x^{(m+1)} + Ux^{(m)} = b,$$

amely átrendezve

$$(D + L)(x^{(m+1)} - x^{(m)}) + (D + L + U)x^{(m)} = b.$$

Az iteráció így felírható

$$(D + L)(x^{(m+1)} - x^{(m)}) + Ax^{(m)} = b$$

alakban. Látható, hogy a két módszer a (3.3) stacionárius iteráció speciális esete, $B_{m+1} = D$, $\tau_{m+1} = 1$ választással a Jacobi, $B_{m+1} = L + D$, $\tau = 1$ -re pedig a Gauss-Seidel iterációt kapjuk.

Numerikus példa:

Megvizsgáljuk, hogy a Jacobi vagy a Gauss-Seidel iteráció közelít-e gyorsabban az $Ax = b$ egyenletrendszer pontos megoldásához. Legyen

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ekkor a pontos megoldás

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Az első iterációs lépés utáni eredmény:

$$x_{jacob_i}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.400 \\ 1.333 \\ 1.500 \\ 2.000 \end{pmatrix}, \quad x_{gauss}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.400 \\ 0.866 \\ 1.177 \\ 0.925 \end{pmatrix}$$

Látható, hogy a Gauss-Seidel iteráció egy lépés után jobban közelíti a pontos megoldást. A negyedik iterációs lépést tekintve:

$$x_{jacob_i}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.846 \\ 0.876 \\ 0.825 \\ 0.808 \end{pmatrix}, \quad x_{gauss}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1.009 \\ 1.025 \\ 1.016 \\ 0.980 \end{pmatrix}$$

Míg a Jacobi módszer esetében két tizedesnyi eltérés tapasztalható, addig a Gauss-Seidel iterációnál az eltérés századokban mérhető és a hetedik iterációs lépés után ezredes pontossággal közelíti meg a megoldást, míg a Jacobi módszer még ekkor is századokkal eltér. Tehát a Gauss-Seidel iteráció ebben az esetben gyorsabban konvergál az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldásához.

3.1.2. A SOR-módszer

A Gauss-Seidel módszer

$$(D + L)(x^{(m+1)} - x^{(m)}) + Ax^{(m)} = b$$

algoritmusát egy ω paraméter bevezetésével általánosítható

$$(D + \omega L)\frac{x^{(m+1)} - x^{(m)}}{\omega} + Ax^{(m)} = b. \quad (3.5)$$

A (3.5) iterációt SOR-módszernek nevezzük ($\omega = 1$ eset pont a Gauss-Seidel módszert adja). A mátrixos és a koordinátás alak megadása

$$(D + \omega L)x^{(m+1)} - (D + \omega L)x^{(m)} + \omega(L + D + U)x^{(m)} = \omega b,$$

$$(D + \omega L)x^{(m+1)} - (Dx^{(m)} - \omega Dx^{(m)}) + \omega Ux^{(m)} = \omega b,$$

$$(D + \omega L)x^{(m+1)} = [(1 - \omega)D - \omega U]x^{(m)} + \omega b.$$

A $(D + \omega L)$ mátrix invertálható, mert alsó háromszög mátrix és a diagonálisában nem nulla elemek állnak. Ezért $x^{(m+1)}$ kifejezhető

$$(E + \omega D^{-1}L)x^{(m+1)} = [(1 - \omega)E - \omega D^{-1}U]x^{(m)} + \omega D^{-1}b,$$

azaz

$$x_i^{(m+1)} = (1 - \omega)x_i^{(m)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(m)} + b_i \right),$$

$$i = 1, \dots, n \quad m = 0, 1, \dots$$

Itt is, akár a Gauss-Seidel iterációnál szükség van $a_{ii} \neq 0$ teljesülésére tetszőleges i -re.

3.1.3. Az egyszerű iteráció

Az iteráció egyszerű, ha $x^{(0)}$ adott és $Ax = b$ egyenletrendszer megoldását

$$\frac{x^{(m+1)} - x^{(m)}}{\tau} + Ax^{(m)} = b \quad m = 0, 1, \dots$$

alakban keressük. Az eljárást relaxált Jacobi módszernek is hívják, mert $A = D^{-1}A$ és $b = D^{-1}b$ helyettesítéssel, $\tau = 1$ esetén éppen a Jacobi iterációt kapjuk. A konvergencia sebessége növelhető τ optimális megválasztásával, ha az A mátrix speciális alakú.

7. Tétel (Az egyszerű iteráció optimális paramétere). *Legyen $0 < a \leq \lambda(A) \leq b$ és A mátrix szimmetrikus, szigorúan pozitív definit. Ekkor az iterációnak van egyértelműen meghatározott optimális paramétere, segítségével az egyszerű iteráció a lehető leggyorsabban konvergál a pontos megoldáshoz, amikor*

$$\tau = \frac{2}{a+b}.$$

3.2. A stacionárius iteráció konvergenciája szimmetrikus, szigorúan pozitív definit (szpd) mátrixok esetén

Definíció. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szigorúan pozitív definit (szpd), ha létezik olyan $\delta > 0$, hogy $(Ax, x) \geq \delta(x, x)$ teljesül minden $x \in \mathbb{R}^n$ -re ($x \neq 0$).

Megmutatható, hogy reguláris mátrixok esetén a pozitív definités és szpd fogalmi egybeesnek. Ha A szpd mátrix, akkor $A > 0$ jelölést használjuk.

$$B \frac{x^{(m+1)} - x^{(m)}}{\tau} + Ax^{(m)} = b \tag{3.6}$$

Jelölje x^* az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer megoldását.

Az $e_m = x^{(m)} - x^*$ vektorsorozatot hibavektornak hívjuk. A (3.6) iteráció konvergál az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldásához, ha

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e_m = 0. \tag{3.7}$$

8. Állítás. *Tegyük fel, hogy A szimmetrikus, szpd mátrix. Ha*

$$B - 0.5\tau A > 0, \tag{3.8}$$

akkor a (3.6) iteráció konvergens.

Bizonyítás.

Legyen $J_m := (Ae_m, e_m)$, ekkor $J_m \geq 0$, mert A szpd mátrix.

$$B \frac{e_{m+1} - e_m}{\tau} + Ae_m = 0 \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

A (3.9)-as egyenlet előáll

$$B \frac{x^{(m+1)} - x^{(m)}}{\tau} + Ax^{(m)} = b \quad (3.10)$$

$$B \frac{x^* - x^*}{\tau} + Ax^* = b \quad (3.11)$$

(3.10) és (3.11) különbségként. Ebből következik, hogy

$$B_{m+1} = (B - \tau A)e_m,$$

$$e_{m+1} = (E - \tau B^{-1}A)e_m,$$

$$Ae_{m+1} = (A - \tau AB^{-1}A)e_m,$$

$$(Ae_{m+1}, e_{m+1}) = ((A - \tau AB^{-1}A)e_m, (E - \tau B^{-1}A)e_m),$$

$$(Ae_{m+1}, e_{m+1}) = (Ae_m, e_m) - \tau(AB^{-1}Ae_m, e_m) - \tau(Ae_m, B^{-1}Ae_m) + \tau^2(AB^{-1}Ae_m, B^{-1}Ae_m).$$

Mivel A mátrix szimmetrikus, ezért

$$(AB^{-1}Ae_m, e_m) = (B^{-1}Ae_m, Ae_m) = (Ae_m, B^{-1}Ae_m)$$

$$J_{m+1} = J_m - 2\tau(Ae_m, B^{-1}Ae_m) + \tau^2(AB^{-1}Ae_m, B^{-1}Ae_m)$$

$$y_m := B^{-1}Ae_m \quad e_m := A^{-1}By_m$$

$$J_{m+1} = J_m - 2\tau(Ae_m, y_m) + \tau^2(Ay_m, y_m) = J_m - 2\tau(AA^{-1}By_m, y_m) + \tau^2(Ay_m, y_m)$$

$$J_{m+1} = J_m - 2\tau(By_m, y_m) + \tau^2(Ay_m, y_m) = J_m - 2\tau((B - 0.5\tau A)y_m, y_m).$$

A $B - 0.5\tau A > 0$, így a skaláris szorzat $((B - 0.5\tau A)y_m, y_m) \geq 0$.

Ekkor $J_{m+1} \leq J_m$, a (J_m) sorozat monoton csökken és $J_m \geq 0$, ezért létezik határértéke

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J_m = J.$$

A $J_{m+1} = J_m - 2\tau ((B - 0.5\tau A)y_m, y_m)$ összefüggésben tudjuk, hogy J_{m+1} és J_m egyaránt tart J -hez. Ezért

$$\lim_{m \rightarrow \infty} ((B - 0.5\tau A)y_m, y_m) = 0.$$

Másrészt, a közrefogási tételt alkalmazva

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|y_m\|^2 = 0,$$

hiszen a következő becslés igaz rá

$$((B - 0.5\tau A), y_m) \geq \delta \|y_m\|^2 \geq 0.$$

Alkalmazva a rendőr-elvet, az $e_m = A^{-1}By_m$ elemre érvényes a

$$0 \leq \|e_m\| \leq \|A^{-1}B\| \|y_m\|$$

becslés, ahol $\|y_m\|$ -ről tudjuk, hogy tart nullához. A hibavektorok sorozatának határértéke

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e_m = 0,$$

tehát a (3.6) iteráció a definíció szerint konvergál az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldásához. \square

3.2.1. A Jacobi-iteráció konvergenciája

9. Állítás. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix szimmetrikus és szigorúan diagonálisan domináns, azaz

$$a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (3.12)$$

Ekkor a Jacobi-módszer konvergens.

Bizonyítás.

Belátandó (3.8) alapján a $D - 0.5A > 0$ egyenlőtlenség, mert a Jacobi-iteráció esetén $B = D$ és $\tau = 1$.

Mivel $D - 0.5A > 0$ a $2D > A$ feltételt jelenti, ezért

$(2Dx, x) \geq (Ax, x)$ kell teljesülnön minden x -re.

A továbbiakhoz szükség van a következő becslésre

$$a_{ij}x_i x_j \leq |a_{ij}| |x_i| |x_j| \leq |a_{ij}| \frac{1}{2}(|x_i|^2 + |x_j|^2) = |a_{ij}| \frac{1}{2}(x_i^2 + x_j^2).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} (Ax, x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \frac{1}{2}(x_i^2 + x_j^2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| x_j^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n |a_{ji}| x_i^2. \end{aligned}$$

Az A mátrix szimmetriája miatt ($a_{ij} = a_{ji}$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| x_i^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| x_i^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| x_i^2 \right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(|a_{ii}| + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right). \end{aligned}$$

Az (3.12) szerint:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right) &\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 (a_{ii} + a_{ii}) = \\ &= 2 \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 = 2(Dx, x) = (2Dx, x) \end{aligned}$$

Így $2D > A$, ahol $(Dx, x) = \sum_i a_{ii} x_i^2$. \square

3.2.2. A SOR-módszer konvergenciája

10. Tétel (Cahan). *Legyen A szimmetrikus, szpd mátrix. Ekkor $\omega \in (0, 2)$ esetén a SOR-módszer konvergens.*

Bizonyítás.

$$B = D + \omega L, \quad \tau = \omega, \quad A = L + D + U$$

Mivel A szimmetrikus $U = L^T$.

Ekkor $B - 0.5\tau A = (D + \omega L) - 0.5\omega A > 0$ igazolása a cél.

$$\begin{aligned} (Ax, x) &= ((L + D + U)x, x) = (Lx, x) + (Dx, x) + (Ux, x) = \\ &= (Lx, x) + (Dx, x) + (x, Lx) = 2(Lx, x) + (Dx, x) \\ ((B - 0.5\tau A)x, x) &= ((D + \omega L)x, x) - 0.5\omega(Ax, x) = \\ &= (Dx, x) + \omega(Lx, x) - 0.5\omega(2(Lx, x) + (Dx, x)) = \\ &= (Dx, x) + \omega(Lx, x) - \omega(Lx, x) - 0.5\omega(Dx, x) = (1 - 0.5\omega)(Dx, x) > 0. \end{aligned}$$

Ugyanis, ha $\omega \in (0, 2)$, akkor $1 - 0.5\omega > 0$, így igaz lesz, hogy $B - 0.5\tau A > 0$. \square

Következmény. A Gauss-Seidel-iteráció szpd mátrixokra, $\omega = 1$ választás esetén konvergens.

3.2.3. Az egyszerű iteráció konvergenciája

Az egyszerű iteráció

$$\frac{x^{(m+1)} - x^{(m)}}{\tau} + Ax^{(m)} = b \quad (3.13)$$

alakban írható fel.

11. Állítás. *Ha az A mátrix szpd mátrix, akkor a $\tau < \frac{2}{\lambda_{max}}$ feltétel teljesülése esetén a (3.13) iteráció konvergens.*

Bizonyítás.

A (3.8) összefüggés szerint, a $B - 0.5\tau A > 0$ feltétel ellenőrzésére lesz szükség. Most $B = E$, tehát valójában $E - 0.5\tau A > 0$ -t kell belátni.

A feltétel, hogy az $E - 0.5\tau A$ mátrix sajátértékei nagyobbak legyenek nullánál. Legyenek A mátrix sajátértékei a következők

$$0 < \lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A).$$

Mind pozitívak, mert A szigorúan pozitív definit mátrix.

Jelölje G az $E - 0.5\tau A$ mátrixot, ekkor G mátrix sajátértékei

$$\lambda_i(G) = 1 - 0.5\tau\lambda_i(A) \quad i = 1, \dots, n.$$

Az algebrai művelet átvihető, mert a fenti mátrixok sajátvektorai megegyeznek. Ekkor elég igazolni, hogy

$$\min \lambda_i(G) > 0,$$

azaz

$$\min \lambda_i(G) = 1 - 0.5 \max \lambda_i(A) = 1 - 0.5\lambda_{max}, \quad (3.14)$$

ahol $\lambda_{max} = \lambda_n(A)$. A (3.14) összefüggést átrendezve kapjuk

$$0.5\tau\lambda_{max} < 1,$$

vagyis

$$\tau < \frac{2}{\lambda_{max}}.$$

Így az állítást beláttuk. \square

12. Állítás. A $\tau < \frac{2}{\lambda_{max}}$ feltétel szükséges feltétel is.

Bizonyítás.

Legyen $A\mu_n = \lambda_n\mu_n$ és válasszuk kezdeti vektornak az $x^{(0)} := x^* - \mu_n$ vektort. Megmutatjuk, hogy ekkor a

$$\frac{x^{(m+1)} - x^{(m)}}{\tau} + Ax^{(m)} = b \quad (3.15)$$

iteráció divergens. Korábban beláttuk, hogy $e_m = x^* - x^{(m)}$ hibára

$$\frac{e_{m+1} - e_m}{\tau} + Ae_m = 0. \quad (3.16)$$

Az $x^{(0)}$ megválasztása miatt $e_0 = x^* - x^{(0)} = \mu_n$.

Ekkor (3.16) átrendezésével

$$e_m = (E - \tau A)e_{m-1} = (E - \tau A)(E - \tau A)e_{m-2} = (E - \tau A)^2 e_{m-2} = (E - \tau A)^m e_0$$

$$e_m = (E - \tau A)^m \mu_n.$$

A (3.15) iteráció pontosan akkor konvergens, ha a (3.7) feltételnek eleget tesz.

$$\begin{aligned} (E - \tau A)\mu_n &= \mu_n - \tau A\mu_n = \mu_n - \tau\lambda_n\mu_n = (1 - \tau\lambda_n)\mu_n \\ (E - \tau A)^2\mu_n &= (E - \tau A)(E - \tau A)\mu_n = (E - \tau A)((1 - \tau\lambda_n)\mu_n) = \\ &= (1 - \tau\lambda_n)(E - \tau A)\mu_n = (1 - \tau\lambda_n)(1 - \tau\lambda_n)\mu_n = (1 - \tau\lambda_n)^2\mu_n \end{aligned}$$

Ekkor látható, hogy

$$(E - \tau A)^m \mu_n = (1 - \tau\lambda_n)^m \mu_n$$

$$e_m = (1 - \tau\lambda_n)^m \mu_n.$$

Tehát $\lim_{m \rightarrow \infty} e_m = 0 \iff |1 - \tau\lambda_n| < 1$.

Mivel $\lambda_n > 0$ ezért $1 - \tau\lambda_n > -1$ feltétel $\tau \geq \frac{2}{\lambda_{max}}$ esetén nem teljesül, így a $\tau < \frac{2}{\lambda_{max}}$ valóban szükséges feltétele a konvergenciának. \square

3.3. A Csebisev-iteráció

A Csebisev iteráció olyan nem stacionárius iterációs eljárás, amely az egyszerű iterációval m lépést hajt végre és minden lépésben más iterációs paramétert használ

$$\frac{x^{(m+1)} - x^{(m)}}{\tau_m} + Ax^{(m)} = b. \quad (3.17)$$

A (3.17) iterációt kizárólag szimmetrikus, szigorúan pozitív definit mátrixok esetén alkalmazzuk.

3.3.1. A Csebisev polinomok

A Csebisev polinom gyökeivel x_1, x_2, \dots, x_m alappontokat határozunk meg, amelyeket interpolálva $L_m(x)$ interpolációs polinom maximális hibája a lehető legkisebb. Az $f(x)$ függvényt szeretnénk interpolációval közelíteni

$$L_m(x_i) = f(x_i),$$
$$\min \left[\max_{[-1,1]} |f(x) - L_m(x)| \right], \quad (3.18)$$

ahol $L_m(x)$ a Lagrange interpolációs polinom.

Olyan m -ed fokú polinomokat keresünk, amelyeknek a nullától való eltérése minimális. Megvizsgáljuk, hogy létezik-e ilyen polinom.

Jelölje $R_m(x)$ a következő polinomot:

$$R_m(x) := \cos(m \arccos x)$$

Ha $\alpha := \arccos x$, akkor

$$\begin{aligned} & \cos((m+1)\alpha) + \cos((m-1)\alpha) = \\ & = (\cos(m\alpha)\cos\alpha - \sin(m\alpha)\sin\alpha) + (\cos(m\alpha)\cos\alpha + \sin(m\alpha)\sin\alpha) = \\ & = 2\cos(m\alpha)\cos\alpha. \end{aligned}$$

Vagyis az $R_{m+1}(x) + R_{m-1}(x) = 2xR_m(x)$ összefüggés alapján $R_m(x)$ valóban polinom.

Mivel $R_0(x) = 1$, $R_1(x) = x$, ezért $R_2(x) = 2x^2 - 1, \dots$

$R_m(x)$ polinomban x^m együtthatója 2^{m-1} lesz.

Definíció. Ekkor a

$$T_m(x) = \frac{R_m(x)}{2^{m-1}} = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x) = 2^{1-m} \cos(m \arccos x)$$

polinomot Csebisev polinomnak nevezzük.

Adjuk meg Csebisev polinom gyökeit a $[-1, 1]$ intervallumon

$$\begin{aligned} T_m(x) = 0 &\iff \frac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x) = 0 \\ m \arccos x &= \frac{2k+1}{2} \pi \\ x_k &= \cos\left(\frac{2k+1}{2m} \pi\right) \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

A következő állítás bizonyítása során belátjuk, hogy a Csebisev polinom eleget tesz a (3.18) képletben meghatározott feltételnek.

13. Állítás. *Legyen $Q \in P_m$ tetszőleges polinom. Ekkor*

$$\max_{[-1,1]} |Q_m(x)| \geq \max_{[-1,1]} |T_m(x)| = \frac{1}{2^{m-1}}, \quad (3.20)$$

azaz $T_m(x)$ tér el a legkevésbé a nullától.

Bizonyítás.

Indirekt tegyük fel, hogy:

$$\max_{[-1,1]} |Q_m(x)| < \max_{[-1,1]} |T_m(x)| = \frac{1}{2^{m-1}}$$

Tekintsük a $H_m(x) = T_m(x) - Q_m(x)$ polinomot. Ekkor $H_m(x) \in P_{m-1}$, tehát legfeljebb $m-1$ -ed fokú polinom.

$$\operatorname{sgn} H_m(\hat{x}_k) = \operatorname{sgn}(T_m(\hat{x}_k) - Q_m(\hat{x}_k)) = \operatorname{sgn}\left((-1)^k \frac{1}{2^{m-1}} - Q_m(\hat{x}_k)\right) = \operatorname{sgn}(-1)^k$$

A $H_m(x)$ polinom a $[-1, 1]$ intervallumon m -szer vált előjelet, ami éppen azt jelenti, hogy m darab gyöke van. Ez ellentmondás, hiszen $H_m(x) \in P_{m-1}$. \square

Tegyük fel, hogy a polinom nem $[-1, 1]$ -en, hanem egy tetszőleges $[a, b]$ intervallumon van értelmezve. Tekintsük a következő transzformáltat

$$t = \left(\frac{2}{b-a} \right) x - \frac{b+a}{b-a}.$$

Ekkor a $T_m(t)$ polinom az $[a, b]$ intervallumot $[-1, 1]$ -re képezi le.

$$\begin{aligned} T_m(t) &= \frac{1}{2^{m-1}} \frac{(b-a)^m}{2^m} \cos \left(m \arccos \left(\frac{2x - (b+a)}{b-a} \right) \right) = \\ &= \frac{(b-a)^m}{2^{2m-1}} \cos \left(m \arccos \left(\frac{2x - (b+a)}{b-a} \right) \right) \end{aligned}$$

A Csebisev polinom gyökei, ahol $T_m(t)$ a $[-1, 1]$ -en értelmezett polinomokat jelöl

$$x = \left(\frac{b-a}{2} \right) t + \frac{a+b}{2}$$

tehát

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \left(\frac{2k+1}{2m} \pi \right) \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Ekkor a Csebisev polinom nullhelyei megegyeznek az interpolációs polinom mérési pontjainak helyeivel.

3.3.2. A Csebisev-iteráció paramétere

A (3.17) iteráció hibaegyenletére megadható a következő iterációs képlet

$$e_1 = (I - \tau_1 A) e_0$$

$$\vdots$$

$$e_m = (I - \tau_m A) e_{m-1}$$

$$e_m = (I - \tau_m A)(I - \tau_{m-1} A) \dots (I - \tau_1 A) e_0 = p_m(A) e_0.$$

Legyen $p_m(\lambda) := \prod_{i=1}^m (1 - \tau_i \lambda)$.

A $p_m(\lambda)$ teljesíti a $p(0) = 1$ normalizációs feltételt. Tegyük fel, hogy minden $\lambda = \lambda(A)$ sajátérték valós, illetve ismertek a sajátértékek határai

$$a \leq \lambda \leq b.$$

Vegyük észre, hogy $p_m(\lambda)$ a $p_m(A)$ mátrix sajátértéke. Ekkor a $p_m(A)$ mátrix spektrálsugár becslése

$$\rho(p_m(A)) = \max_{\lambda \in \lambda(A)} |p_m(\lambda)| \leq \max_{a \leq \lambda \leq b} |p_m(\lambda)|.$$

A $p_m(\lambda)$ polinom egyértelműen meghatározott m darab gyöke és a $p_m(0) = 1$ normalizációs feltétel által. A módszer konvergens, ha a (3.7) feltételt teljesíti.

Ezért az összes m -ed fokú polinom közül keressük azt, amelyre

$$\min_{p_m \in P_m} \left(\max_{a \leq \lambda \leq b} |p_m(\lambda)| \right), \quad (3.21)$$

ahol P_m a legfeljebb m -ed fokú polinomok osztálya. A (3.21) minimalizálását a τ_i megfelelő megválasztásával tudjuk elérni. A (3.21) feladat megoldása $R_m(x)$ polinom segítségével történik

$$p_m(\lambda) = \frac{R_m\left(\frac{b+a-2\lambda}{b+a}\right)}{R_m\left(\frac{b+a}{b-a}\right)}, \quad (3.22)$$

ahol

$$R_m(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^m (x - \sqrt{x^2 - 1})^m}{2}. \quad (3.23)$$

Ekkor R_m argumentumában

$$x = \frac{b + a - 2\lambda}{b - a}$$

leképezés az $[a, b]$ intervallumot $[-1, 1]$ -re képezi le.

A (3.23) képlet részletes levezetése:

A három tagú rekurziók egy általános alakja

$$p_{m+1} = (\alpha_m x - \beta_m) p_m - \gamma_m p_{m-1}.$$

Most legyen $\alpha_m = \alpha, \beta_m = \beta, \gamma_m = \gamma$ minden m -re. A rekurzió megoldását $p_m = c\rho^m$ alakban szeretnénk megkapni. Ekkor ρ -ra felírható másodfokú egyenlet

$$\rho^2 - (\alpha x - \beta)\rho + \gamma = 0.$$

Innen a gyökök

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\alpha x - \beta \pm \sqrt{(\alpha x - \beta)^2 - 4\gamma} \right). \quad (3.24)$$

Általában $\alpha \neq 0$ és $\rho_1 \neq \rho_2$, a Viéte-formula alapján $\rho_2 = \frac{\gamma}{\rho_1}$. A másodfokú rekurzió megoldása megadható $c_1\rho_1^m$ és $c_2\rho_2^m$ lineáris kombinációjaként

$$p_m = c_1\rho_1^m + c_2\rho_2^m. \quad (3.25)$$

Az $m = 0$, $m = 1$ eseteket tekintve

$$p_0 = c_1 + c_2, \quad p_1 = c_1\rho_1 + c_2\rho_2.$$

Innen kifejezhetők a c_1, c_2 konstansok

$$c_1 = \frac{p_0\gamma - p_1\rho_1}{\gamma - \rho_1^2}, \quad c_2 = \frac{p_1\rho_1 - \rho_1^2 p_0}{\gamma - \rho_1^2}.$$

Megmutattuk, hogy $R_m(x)$ polinomra teljesül

$$R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = x, \quad R_2(x) = 2x^2, \dots$$

és emellett $R_{m+1}(x) = 2xR_m(x) - R_{m-1}(x)$ ($m \geq 1$).

Mivel $R_m(x)$ főegyütthatója 2^{m-1} , a (3.24) egyenlet szerint

$$\rho_1 = x + \sqrt{x^2 - 1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{\rho_1}.$$

Ez alapján a konstansok

$$c_1 = \frac{1 - x(x + \sqrt{x^2 - 1})}{1 - x(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} = \frac{1 - x(x + \sqrt{x^2 - 1})}{2(1 - x^2 - x\sqrt{x^2 - 1})} = \frac{1}{2}.$$

Ekkor

$$R_0(x) = c_1 + c_2 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2}.$$

A (3.25) kifejezés figyelembevételével adódik a keresett kifejezés

$$R_m(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^m (x - \sqrt{x^2 - 1})^m}{2}.$$

Az optimális τ_m paraméterek meghatározásához szükség van a $p_m(\lambda)$ polinom gyökhelyeinek megadására.

Rögzített m esetén, (3.19) alapján $R_m(x)$ polinom gyökei

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2m}\pi\right) \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Innen már könnyen megkapjuk a megfelelő λ_i -ket,

$$x_i = \frac{b+a-2\lambda_i}{b-a}$$

egyenletet kell megoldanunk. Kifejezhetőek azok a λ_i számok (rögzített m mellett), amelyek mellett a $p_m(\lambda)$ nulla értéket vesz fel. Előállítottuk az azonosan nulla függvényt legjobban approximáló $p_m(\lambda)$ polinomot. A továbbiakban még igazolni, kell hogy a $p_m(\lambda) = \prod_{i=1}^m (1 - \tau_i \lambda)$ polinom azonos (3.22) polinommal. Ehhez elégséges megkövetelni a két polinom gyökeinek egybeesését, illetve a polinomok normáltságát. Mivel a $p_m(\lambda)$ polinom gyökei már ismertek és λ_i -vel egyenlők, a $\prod_{i=1}^m (1 - \tau_i \lambda)$ polinom pedig lineáris tényezők szorzataként adott, így $\tau_i = \frac{1}{\lambda_i}$ választása esetén a $\prod_{i=1}^m (1 - \frac{\lambda}{\lambda_i})$ polinomot kapjuk, amelynek gyökei egybeesnek a $p_m(\lambda)$ polinommal. A két polinom értéke megegyezik a $\lambda = 0$ helyen is. Ez azt jelenti, hogy a $\prod_{i=1}^m (1 - \frac{\lambda}{\lambda_i})$ teljesen egybeesik a $p_m(\lambda)$ polinommal, gyökei a $\lambda = \lambda_i$ pontokban vannak. A $p_m(\lambda) = \prod_{i=1}^m (1 - \tau_i \lambda)$ szorzat tényezőit nullával egyenlővé téve a τ_i paraméterek egyszerűen meghatározhatók

$$\tau_i = \frac{2}{b+a-(b-a)x_k} = \frac{2}{b+a-(b-a)\cos\left(\frac{2k+1}{2i}\pi\right)} \quad i = 1, \dots, m.$$

Ezek a Csebisev-iteráció optimális paraméterei $\tau_i = \frac{1}{\lambda_i}$ esetén.

3.4. Iterációs eljárások M-mátrixok esetén

A lineáris egyenletrendszerek iteratív megoldásánál fontos szerepet kap az M-mátrixok osztálya.

Definíció. Azt mondjuk, hogy A mátrix nemnegatív mátrix, ha $a_{ij} \geq 0$ minden i, j -re. Jelölés: $A \geq 0$.

Definíció. Az A mátrix "nagyobb vagy egyenlő", mint a B mátrix ha $A - B \geq 0$, azaz $A \geq B$.

Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot M-mátrixnak nevezzük, ha $a_{ij} \leq 0$ minden i, j -re ($i \neq j$), létezik olyan $g \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy $g > 0$ és $Ag > 0$.

Egy új fogalom bevezetésére van szükség ahhoz, hogy az iterációs eljárások konvergenciáját M-mátrixok esetén tanulmányozzuk:

Definíció. Legyen $A = P - Q$, ahol P reguláris és $P^{-1} \geq 0$, $Q \geq 0$. A $P - Q$ mátrix az A mátrix reguláris felbontása, ha $\rho(P^{-1}Q) < 1$ feltétel teljesül. Ha A -nak $P - Q$ reguláris felbontása, akkor az 5.tétel alapján a (3.2) képletben szereplő stacionárius iteráció konvergens.

14. Tétel (Reguláris felbontás létezése). *Legyen az A mátrix M-mátrix. Ekkor A reguláris és létezik inverze.*

A tétel bizonyítása az [1]-es irodalomban található, az 1.7 lemma levezetéseként.

15. Tétel (Reguláris felbontás létezése). *Legyen az A mátrixban $a_{ij} \leq 0$ minden i, j -re ($i \neq j$). Az A mátrixnak pontosan akkor létezik reguláris felbontása, ha A egy M-mátrix.*

A tétel levezetése az [1]-es irodalomban, mint az 1.20. Lemma bizonyítása szerepel.

16. Tétel (M-mátrixok reguláris felbontása). *Legyen A egy M-mátrix, $A = P - Q$, P reguláris és $P^{-1} \geq 0$, $Q \geq 0$. Ekkor $P - Q$ az A mátrix reguláris felbontása.*

Bizonyítás.

Azt kell belátni, hogy a $P^{-1}Q$ mátrixra a $\rho(P^{-1}Q) < 1$ feltétel teljesül.

Legyen $e := (1, \dots, 1)^T$. Mivel A egy M-mátrix, ezért $g > 0$ esetén $Ag > 0$.
Jelölje $G := \text{diag}(g_i)$, ekkor

$$PGe = Pg > Qg = Qge \geq 0$$

$$e > G^{-1}P^{-1}QGe \geq 0.$$

Innen következik, hogy

$$1 > \|G^{-1}P^{-1}QGe\|_{(\infty)} = \|G^{-1}P^{-1}QG\|_{(\infty)} \geq \rho(G^{-1}P^{-1}QG) = \rho(P^{-1}Q).$$

Tehát $\rho(P^{-1}Q) < 1$, ezzel a tételt beláttuk. \square

17. Tétel. *A Gauss-Seidel iteráció minden M-márixra konvergens.*

Bizonyítás.

Ha A egy M-mátrix, akkor létezik olyan g , hogy $g > 0$ és $Ag > 0$. A mátrixot $A = L + D + U$ alakba írva, $L + D$ mátrix is M-mátrix lesz

$$(L + D)g \geq Ag > 0, \quad U \leq 0.$$

Ekkor a mátrixokat a következőképpen választjuk meg

$$A = P - Q, \quad P = L + D, \quad Q = -U,$$

ahol

$$P^{-1} = (L + D)^{-1} \geq 0, \quad Q = -U \geq 0.$$

Innen következik az állítás a 15. Tétel segítségével. \square

18. Tétel. *Ha A mátrix M-mátrix és $0 < \omega \leq 1$, akkor a SOR-módszer*

$$(D + \omega L) \frac{x^{(m+1)} - x^{(m)}}{\omega} + Ax^{(m)} = b$$

konvergens.

Bizonyítás.

A SOR-módszer mátrixos alakja:

$$(D + \omega L)(x^{(m+1)} - x^{(m)}) + \omega Ax^{(m)} = \omega b := f$$

vagyis

$$Px^{(m+1)} = Qx^{(m)} + f$$

ahol

$$P := D + \omega L$$

$$Q := D(1 - \omega) - \omega U. \quad (3.26)$$

Azt kell belátni, hogy $P^{-1} \geq 0$ komponensenként, ha $0 < \omega \leq 1$. Ekkor Q nemnegativitása látható a (3.26) képletből. A P ezekre az ω értékekre M-mátrix. Ha A M-mátrix és

$$a_{ij} \leq p_{ij} \leq 0, \quad (i \neq j)$$

$$0 < a_{ii} < p_{ii},$$

akkor P is M-mátrix. Ugyanis P mátrix előjeleloszlása megfelelő.

Tudjuk, hogy $P \geq A$ és $g > 0$ esetén $Ag > 0$, ebből következik, hogy

$$Pg \geq Ag > 0.$$

Mivel $P - Q = \omega A$, ez pozitív ω -ra M-mátrix, ezért az állítás 15. Tételből következik. \square

Az M-mátrixok osztálya speciális mátrixosztály. Legyen A mátrix reguláris és inverze nemnegatív, akkor $Ag = e$ megoldása pozitív. Ha g vektornak lenne nulla komponense, akkor A^{-1} tartalmazna egy csupa nulla sort. Ekkor ha A előjeleloszlása megegyezik az M-mátrixokéval, akkor A valóban M-mátrix. A -val együtt A^T is M-mátrix. Hasznos tulajdonsága e mátrixoknak, hogy létezik LU-felbontása és ez Gauss-eliminációval előállítható.

4. fejezet

Összefoglalás

A lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldása direkt és iterációs módszerekkel egyaránt lehetséges. Az iterációs eljárások előnye látható az olyan $Ax = b$ lineáris egyenletrendszerek megoldásánál, amelyeknek mátrixa nagyméretű, ritka. Ekkor a direkt módszereknél a nagy tárigény jelent problémát. A gyakorlati feladatok megoldása legtöbbször nagyméretű, ritka mátrixokkal való számolást igényel. Az iterációk hátránya általában a lassú konvergencia, hiszen a módszer során olyan vektorsorozatot állítunk elő, amely a pontos megoldáshoz konvergál. A legegyszerűbb esetben az iterációs eljárás

$$x^{(m+1)} = Sx^{(m)} + f, \quad m = 0, 1, \dots$$

alakban adható meg. E képlet és a kezdetben adott, tetszőleges $x^{(0)}$ kezdeti vektor segítségével meghatározzuk $x^{(m)}$ értékét, egyre jobban közelítve az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldását. Az S mátrix iterációs paramétert is tartalmazhat, amelyet megfelelően megválasztva az iteráció gyorsítható.

Irodalomjegyzék

- [1] Stoyan Gisbert, Takó Galina: *Numerikus módszerek I.* Typotex, Budapest (2005)
- [2] G. I. Marcsuk: *A gépi matematika numerikus módszerei* Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1976)
- [3] Faragó István: *Alkalmazott Analízis I.* ELTE kézirat
- [4] A. Berman, R. J. Plemmons: *Nonnegative matrices in the mathematical sciences* Academic Press, New York (1979)
- [5] Richard S. Varga: *Matrix iterative analysis* Prentice Hall, Englewood Cliffs (1962)