

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Takács Sára
Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

**PEREMÉRTÉK-FELADATOK NUMERIKUS
MEGOLDÁSA**

Szakedolgozat

Témavezető: Kurics Tamás, egyetemi tanársegéd
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Budapest, 2009

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
1.1. Rövid összefoglaló a dolgozat témájáról	3
1.2. Motiváció	4
2. Peremérték-feladat megoldása egydimenzióban	6
2.1. Egyértelmű megoldás	7
2.2. Létezik a megoldás	10
2.3. Gyenge megoldások	12
3. Numerikus módszerek	14
3.1. Belövéses módszer	14
3.2. Véges differencia módszer	19
3.3. Végeselem módszer	30
3.4. Összefoglalás	36
4. A függelék	37
4.1. M-mátrixok tulajdonságai	37
4.2. Funkcionálanalízis alapok	38
4.3. Elméleti alapok a végeselem módszerhez	43
5. B függelék	44
5.1. Belövéses módszer algoritmus	44
5.2. Véges differencia algoritmus	46

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Rövid összefoglaló a dolgozat témájáról

Jelen dolgozat a peremérték-feladatok numerikus módszereibe ad betekintést. Az első részben a peremérték-feladatok megoldhatóságáról és a megoldások egyértelműségéről adok elméleti bevezetést, illetve levezetem a peremérték-problémák gyenge megoldásait.

A második részben bemutatom a három numerikus módszert. Elsőként a az ún. *belövéses módszert* (Shooting method), aminek a lényege, hogy a peremérték-feladatot kezdetiérték-feladatra vezet vissza, és a kezdeti deriváltat lényegében próbálgatással becsli. Azaz egy tetszőleges becsült kiindulási értéket addig javít, amíg az eredményben a másik végpont tetszőleges közelségbe kerül a megadotthoz. Második módszer a *véges differencia módszer*. Ez a módszer egy szűkebb problémakörre ad közelítő megoldást. Adott egy peremérték feladat, olyan jobboldallal ami csak az időtől függő változótól függ. Ebben az esetben a folytonos megoldást egy numerikus rácsfüggvénnyel közelítjük, amit pedig egy egyszerű, bár kellően finom közelítés esetén meglehetősen nagy méretű lineáris egyenletrendszerrel számítunk. A harmadik módszer a *végeselem módszer*, melyről csak röviden lesz szó, elmélete magas szintű funkcionálanalízis ismereteket igényel. Mindhárom módszert egy-egy részletesen levezetett példával illusztrálok.

Az A függelékben a fenti módszerekhez fűződő elméleti háttérismeretek mutatom be, a véges differencia módszerhez tartozó *M-mátrixok* elméletét, illetve a végeselem módszerhez tartozó lineáris terek elméletét vázlatosan. A B függelékben pedig a dolgozatban bemutatott példák kiszámításához használt programok forráskódját ismertetem.

1.2. Motiváció

Az alábbiakban bemutatok két, a gyakorlati életben előforduló fizikai példát, melyek megoldását másodrendű differenciálegyenletek peremérték-problémájára tudunk visszavezetni, kiszámításukat pedig a későbbiekben tárgyalt numerikus megoldások megkönnyítik.

1. Célbalövési probléma

A számegyenes 0 pontjában állunk, adott egy L távolság. Kérdés: milyen szögbe kell az ágyút beállítani, hogy a golyó pontosan L -ben csapódjon be? A modellben feltételezzük, hogy az x irányú sebesség állandó és az y irányú elmozdulás pedig csak a gravitációtól függ. Vagyis a légellenállást és egyéb tényezőket nem vettünk figyelembe. Jelölje $x = x(t)$, $y = y(t)$ az x illetve y irányú elmozdulásokat, u pedig az x irányú sebességet. Ekkor

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= u & x(0) &= 0 \\ \ddot{y}(t) &= -g & y(0) &= 0\end{aligned}$$

A második sorra alkalmazzuk a láncszabályt¹:

$$-g = \ddot{y}(t) = \frac{d}{dt}\dot{y} = \frac{d\dot{y}}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{y}}{dx} u = u \frac{d}{dx}\dot{y} = u \frac{d}{dx}\left(u \frac{dy}{dx}\right) = u^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Átrendezve az alábbi közönséges differenciálegyenletet kapjuk, homogén peremfeltétellel:

$$\begin{aligned}y''(x) &= -\frac{g}{u^2} \\ y(0) &= 0 & y(L) &= 0\end{aligned}$$

¹ $\frac{d}{dt}(y(x(t))) = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$

A pontos megoldás:

$$y(x) = \frac{gx}{2u^2}(L - x)$$

2. Gerenda meghajlása

Az alábbi feladat az [5] könyvből származik.

Adott egy, a két végén megtámasztott vízszintes gerenda, amire függőleges irányú erő hat. Feladatunk meghatározni a meghajlott gerenda maximális behajlását, illetve adott maximális behajlás esetén a gerenda hosszát. Jelölje P a legnagyobb terhelést, L a gerenda hosszát, J a gerenda metszetének tehetetlenségi nyomatékát, E a rugalmassági modulust, a pedig a gerenda vége és az erő támaszpontja közötti távolságot. Tegyük fel, hogy a P, L, J, a értékek mind ismertek az adott gerendára. Mindkét feladathoz szükséges meghatározni a gerenda neutrális szálának függvényét. Azt az $u(x)$ függvényt, amely mentén a gerenda rostjai erőhatásra nem deformálódnak. A neutrális szál görbületi sugarára vonatkozó képlet:

$$R = \frac{EJ}{M},$$

ahol M a hajlítónyomaték, $M = -Pa$. A görbületi sugarra ismert képlet:

$$R = \frac{(1 + u'^2)^{\frac{3}{2}}}{u''},$$

ahol u'^2 értékét elhanyagolhatjuk, mert a gerenda meghajlásánál az érintő $\frac{du}{dx}$ iránytangense minden pontban nagyon kicsi. A neutrális szál differenciálegyenlete ekkor az alábbi alakú, a végpontokban pedig nincs elmozdulás, tehát homogén peremfeltétellel:

$$\begin{aligned} u''(x) &= -\frac{Pa}{EJ} = \text{állandó} \\ u(0) &= 0, \quad u(L) = 0 \end{aligned}$$

Ha nem hanyagoljuk el az elhajlás érintő iránytangensét, akkor pedig az

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x, u'(x), u(x)) = -\frac{Pa}{EJ}(1 + u'^2)^{\frac{3}{2}} \\ u(0) &= 0, \quad u(L) = 0 \end{aligned}$$

peremérték-feladatot kapjuk, amit numerikus módszerekkel meg tudunk oldani.

2. fejezet

Peremérték-feladat megoldása egydimenzióban

Jelen fejezet a [2] könyv második fejezete alapján készült. Megmutatom, hogy egy másodrendű közönséges differenciálegyenleten alapuló peremérték-feladatnak milyen feltételek mellett létezik megoldása, illetve egyértelmű-e ez a megoldás.

Egy inhomogén másodrendű lineáris differenciálegyenletet Dirichlet-peremfeltétellel:

$$\begin{cases} \mathcal{A}u := -(au')' + bu' + cu = f & \Omega = (0, 1)\text{-en} \\ u(0) = u_0 \quad u(1) = u_1 \end{cases} \quad (2.1)$$

ahol az a, b, c együtthatók $a(x), b(x), c(x)$ sima függvények, kellően sokszor folytonosan differenciálhatóak, valamint

$$a(x) \geq a_0 > 0 \text{ és } c(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega} = [0, 1]\text{-en.} \quad (2.2)$$

Tekintsük először is azt a speciális esetet, amikor $a \equiv 1$ és $b, c \equiv 0$. Ekkor a kiindulási feladat

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in \Omega\text{-n} \\ u(0) = u_0 \quad u(1) = u_1 \end{cases} \quad (2.3)$$

feladatra redukálódik. Ennek a feladatnak egyértelmű a megoldása, ui. kétszer integrálva megkapjuk $u(x)$ -et:

$$u(x) = - \int_0^x \int_0^y f(s) ds dy + \alpha x + \beta$$

ahol $\beta = u(0) = u_0$, α -t pedig Ω másik végpontjában megadott érték felhasználásával számoljuk a következő integrállal:

$$\int_0^1 \int_0^y f(s) ds dy + \alpha + u_0 = u(1) = u_1$$

Ha speciálisan $f \equiv 0$ is teljesül, akkor

$$\begin{cases} -u''(x) = 0 & x \in \Omega\text{-n} \\ u(0) = u_0 & u(1) = u_1 \end{cases} \quad (2.4)$$

a (2.4) alakban felírt egyenlet megoldása lineáris, azaz

$$u(x) = (u_1 - u_0)x + u_0 = u_0(1 - x) + u_1x,$$

vagyis $u(0) \leq u(x) \leq u(1)$, a függvény minden belső pontban az intervallum végpontjaiban felvett függvényértékek között van, tehát u maximumát és a minimumát az intervallum végpontjaiban veszi fel. Ezt általánosítja a következő tétel.

2.1. Egyértelmű megoldás

1. Tétel (Maximum-elv). $Au := -(au')' + bu' + cu = f$ Legyen $u \in C^2(\bar{\Omega})$ és $Au \leq 0$ Ω -n. Ekkor

$$1. \text{ ha } c = 0 \implies \max_{\bar{\Omega}} u = \max \{u(0), u(1)\}$$

$$2. \text{ ha } c \geq 0 \implies \max_{\bar{\Omega}} u \leq \max \{u(0), u(1), 0\}$$

Ha $Au \geq 0$, akkor a függvény minimumára állnak fenn hasonló állítások.

Bizonyítás:

1. (a) Először vegyünk egy szigorúbb feltételt, mint amit a tétel eredetileg kimond tegyük fel, hogy $\mathcal{A}u < 0$ $\mathcal{A}u \leq 0$ helyett. Ha u -nak van maximuma egy $x_0 \in \Omega$ belső pontban, akkor $u'(x_0) = 0$ és $u''(x_0) \leq 0$.

$$\mathcal{A}u := -(au')' + bu' + cu = -a'u' - au'' + bu' + 0u$$

Helyettesítsük be az egyenletbe x_0 maximumhelyet:

$$0 > \mathcal{A}u(x_0) = -a'(x_0)u'(x_0) - a(x_0)u''(x_0) + bu'(x_0) =$$

ahol az első és harmadik tag kiesik, mert $u'_0(x_0) = 0$, így:

$$= -a(x_0)u''(x_0) \geq 0,$$

mert $a(x_0) \geq a_0$ szigorúan pozitív számnál és $u''(x_0) \leq 0$, mert x_0 maximum, vagyis szorzatuk nemnegatív, ami ellentmondás.

- (b) Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}u \leq 0$. Legyen φ olyan függvény, hogy $\varphi \geq 0$ $\bar{\Omega}$ -on és $\mathcal{A}\varphi < 0$ Ω -n. (Például $\varphi = e^{\lambda x}$ jó, ha λ elég nagy.) $\mathcal{A}\varphi = (-a\lambda^2 + (b - a')\lambda)\varphi < 0$, ha λ elég nagy. Indirekten tegyük fel, hogy u függvény felveszi a maximumát egy x_0 belső pontban, de a végpontokban nem. Ekkor $v = u + \varepsilon\varphi$ is ilyen függvény, ha ε elég kicsi. $\mathcal{A}v = \mathcal{A}u + \varepsilon\mathcal{A}\varphi < 0 \quad \forall x \in \Omega$ -ra, ami ellentmondás.
2. $c \geq 0$ $\mathcal{A}u \leq 0$. Kell: $\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max\{u(0), u(1), 0\}$.

Ha $u \leq 0$ Ω -n, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben tegyük fel, hogy $\max_{\bar{\Omega}} u = u(x_0) > 0$. De ez ellentmondás ugyanis $x_0 \neq 0$ és $x_0 \neq 1$. Vegyük Ω -ának egy (α, β) maximális részintervallumát, melyre $x_0 \in (\alpha, \beta)$ és $u > 0$. Ekkor legyen $\tilde{\mathcal{A}}u := \mathcal{A}u - cu < 0$ (α, β) -n. Az 1. pontban beláttottak alapján $u(x_0) = \max\{u(\alpha), u(\beta)\}$ valamint α és β nem lehetnek mindketten Ω belső pontjai, így ellentmondásba kerültünk az (α, β) intervallum megválasztásával. Tehát $u(x_0) = \max\{u(0), u(1)\}$. \square

2. Tétel. Ha $u \in C^2(\bar{\Omega})$, akkor $\exists C \geq 0$, melyre

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \max\{|u(0)|, |u(1)|\} + C\|\mathcal{A}u\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

A 2. tétel bizonyítása a [2] könyvben megtalálható.

1. Következmény. A peremértékprobléma megoldása egyértelmű.

Bizonyítás: Indirekten tegyük fel, hogy u és v is megoldásai

$$\mathcal{A}u = f \quad u(0) = u_0 \quad u(1) = u_1$$

feladatnak. Legyen $w = u - v$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathcal{A}w &= \mathcal{A}u - \mathcal{A}v = f - f = 0 & \Omega &= (0, 1)\text{-en és} \\ w(0) &= 0 \quad w(1) = 0. \end{aligned}$$

Az előző tétel alapján: $\|w\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \max\{|w(0)|, |w(1)|\} + C\|\mathcal{A}w\|_{C(\bar{\Omega})}$. Vagyis $w(x) \equiv 0$ $\bar{\Omega} = [0, 1]$ -en, tehát $u = v$.

2. Következmény. Ha

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = f & \Omega\text{-n} \\ u(0) = u_0 \quad u(1) = u_1 \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} \mathcal{A}v = g & \Omega\text{-n} \\ v(0) = v_0 \quad v(1) = v_1 \end{cases}$$

akkor $\|u - v\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \max\{|u_0 - v_0|, |u_1 - v_1|\} + C\|f - g\|_{C(\bar{\Omega})}$, azaz a feladat stabil.

3. Következmény. $\mathcal{A}u = f$ Ω -n $u(0) = u_0$ $u(1) = u_1$ és $f \leq 0$ $u_0, u_1 \leq 0$, akkor $u \leq 0$.

Bizonyítás: Ha feltesszük, hogy $\mathcal{A}u = f \leq 0$, és alkalmazzuk a maximum elvet, mely szerint $\max_{\bar{\Omega}} u = \max\{u(0), u(1), 0\} = 0$, tehát u legfeljebb 0 lehet.

4. Következmény (Monotonitás).

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = f & \Omega\text{-n} \\ u(0) = u_0 \quad u(1) = u_1 \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} \mathcal{A}v = g & \Omega\text{-n} \\ v(0) = v_0 \quad v(1) = v_1 \end{cases}$$

és $f \leq g$, $u_0 \leq v_0$, $u_1 \leq v_1$. Ekkor $u \leq v$.

Bizonyítás: Legyen $w = u - v$ ismét a különbségfüggvény. A feltételek szerint $\mathcal{A}w = f - g \leq 0$. $w(0) = u_0 - v_0 \leq 0$ $w(1) = u_1 - v_1 \leq 0$. Alkalmazva az előző következményt megkapjuk az állítást.

2.2. Létezik a megoldás

Konkrét megoldás előállítására a $b \equiv 0$ speciális esetben.

Mostantól

$$\mathcal{A}u := -(au')' + cu \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (2.5)$$

és keressük az $\mathcal{A}u = f \quad u(0) = 0 = u(1)$ feladat megoldását.

Legyenek U_0 és U_1 megoldásai az

$$\begin{aligned} \mathcal{A}U_0 &= 0 \quad \Omega\text{-n} \quad U_0(0) = 1, \quad U_0(1) = 0 \\ \mathcal{A}U_1 &= 0 \quad \Omega\text{-n} \quad U_1(0) = 0, \quad U_1(1) = 1 \end{aligned}$$

feladatoknak. Ilyen U_0, U_1 függvények léteznek, tekintsük ugyanis az

$$\mathcal{A}u = 0 \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot, aminek tudjuk, hogy létezik megoldása. És $u(1) \neq 0$, mert ha $u(1) = 0$ lenne $\mathcal{A}u = 0 \quad u(0) = 0$ mellett, akkor $u \equiv 0$ függvény lenne, de ez ellentmond annak, hogy $u'(0) = 1$. Elérhető (például alkalmas konstanssal megszorozva), hogy $\mathcal{A}u = 0 \quad u(0) = 0 \quad u(1) = 1$ legyen, ez lesz U_1 . U_0 -t is hasonlóan állíthatjuk elő.

3. Tétel. *Legyen $b=0$. A (2.5)-beli alakú $\mathcal{A}u = f, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad \Omega$ -n feladat megoldása:*

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy, \quad \text{ahol}$$

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\kappa} U_0(x) U_1(y) & \text{ha } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{\kappa} U_1(x) U_0(y) & \text{ha } 0 \leq x \leq y \leq 1 \end{cases} \quad \text{Green-függvény, és ahol}$$

$$\kappa = a(x)(U_0(x)U_1'(x) - U_0'(x)U_1(x)) \equiv \text{konstans.}$$

Bizonyítás: Először belátjuk, hogy $\kappa \neq 0$ konstans. Felhasználjuk, hogy

$$\mathcal{A}U_0 = -(aU_0')' + cU_0 = 0,$$

amiből következik, hogy

$$(aU_0)' = cU_0 \text{ és } (aU_1)' = cU_1.$$

Felírjuk κ deriváltját, és ha ez 0 lesz akkor κ konstans:

$$\kappa'(x) = U_0(aU_1)' + U_0'aU_1' - U_1(aU_0)' - U_1'aU_0' = 0$$

Behelyettesítve $x = 0$ -t

$$\kappa(0) = a(0)(U_1'(0) - 0) \neq 0,$$

mert $a(0) \geq a_0$ pozitív számmal, és $U_1'(0)$ sem lehet nulla, ugyanis ellenkező esetben $U_1(0) = 0$ lenne, így U_1 azonosan nulla függvény lenne, ami ellentmond $U_1(1) = 1$ -nek. $\mathcal{A}U_1 = 0$ $U_1(0) = 0$, $U_1(1) = 1$ egyenletekben mindhárom egyenlőség helyettesíthető " \geq "-vel, így alkalmazhatjuk a 3. következményt, miszerint $U_1 \geq 0$, így $U_1'(0) > 0$, ami ekvivalens azzal, hogy $\kappa > 0$.

Másodszor belátjuk, hogy a fent definiált u függvény kielégíti a homogén peremfeltételeket, (azaz $u(0) = 0$ és $u(1) = 0$ -t):

$$u(0) = \int_0^1 G(0, y)f(y)dy = \frac{1}{\kappa}U_1(0)U_0(y)f(y)dy = 0$$

$$u(1) = \int_0^1 G(1, y)f(y)dy = \frac{1}{\kappa}U_0(1)U_1(y)f(y)dy = 0$$

$u(x)$ -be behelyettesítve a homogén peremfeltételeket

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x G(x, y)f(y)dy + \int_x^1 G(x, y)f(y)dy = \\ &= \frac{1}{\kappa}U_0(x) \int_0^x U_1(y)f(y)dy + \frac{1}{\kappa}U_1(x) \int_x^1 U_0(y)f(y)dy \end{aligned}$$

deriváljuk

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{\kappa} \left(U_0'(x) \int_0^x U_1(y)f(y)dy + U_0(x)U_1(x)f(x) \right) + \\ &+ \frac{1}{\kappa} \left(U_1'(x) \int_x^1 U_0(y)f(y)dy - U_1(x)U_0(x)f(x) \right) \end{aligned}$$

Kell még, hogy $(au')' = cu$

$$\begin{aligned}
-(au')'(x) &= -\frac{1}{\kappa} \left(a(x)U_0'(x) \right)' \int_0^x U_1(y)f(y)dy - \\
&\quad -\frac{1}{\kappa} \left(a(x)U_1'(x) \right)' \int_x^1 U_0(y)f(y)dy - \\
&\quad -\frac{1}{\kappa} a(x)(U_0(x)U_1'(x) - U_0'(x)U_1(x))f(x) = \\
&= -\frac{1}{\kappa} c(x)U_0(x) \int_0^x U_1(y)f(y)dy - \\
&\quad -\frac{1}{\kappa} c(x)U_1(x) \int_x^1 U_0(y)f(y)dy + f(x) = \\
&= -c(x) \int_0^1 G(x,y)f(y)dy + f(x)
\end{aligned}$$

Azaz $(-au')' + cu = f$, ezzel a tételt bebizonyítottuk. \square

2.3. Gyenge megoldások

A fentiekben láttuk, hogy egyértelmű megoldása létezik egy peremérték-feladatnak. Ebben a részben az egyváltozós peremérték-problémát az $L_2 = L_2(\Omega)$ Hilbert-térben tárgyaljuk, és levezetjük az ún. *gyenge megoldásokat*, ami a következő fejezetben tárgyalt *végeselem módszer*hez lesz fontos. A felhasznált funkcionálanalízisbeli eszközöket az A függelékben ismertetem.

Tekintsük az alábbi peremérték-problémát homogén peremfeltétellel:

$$\begin{cases} \mathcal{A}u := -(au')' + bu' + cu = f & \Omega = (0, 1)\text{-en} \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Feltesszük, hogy az a, b, c együtthatók kellően sima függvények és a (2.2) feltételek helyett az

$$a(x) \geq a_0 > 0 \quad \text{és} \quad c(x) - \frac{b'(x)}{2} \geq 0$$

feltételek teljesülnek $\forall x \in \bar{\Omega}$ -n.

Szorozzuk be a differenciálegyenletet egy $\varphi \in C_0^1 = C_0^1(\Omega)$ ún. *tesztfüggvény*vel. $C_0^1(\Omega)$ a folytonosan differenciálható és az értelmezési tartomány szélén 0 értéket felvevő függvények tere. Integráljuk a (2.6)-beli differenciálegyenletet az Ω intervallumon

$$\int_0^1 (-(au')' + bu' + cu)\varphi dx = \int_0^1 f\varphi dx$$

Parciálisan integráljunk és használjuk ki, hogy $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$:

$$\int_0^1 (au'\varphi' + bu'\varphi + cu\varphi)dx = \int_0^1 f\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^1 \quad (2.7)$$

Vezessük be az alábbi bilineáris formát:

$$a(v, w) = \int_0^1 (av'w' + bv'w + cvw)dx$$

és $L(w)$ lineáris funkcionált:

$$L(w) = (f, w) = \int_0^1 fw dx$$

Kihhasználva, hogy C_0^1 sűrű $H_0^1 = H_0^1(\Omega)$ -n a (2.7)-t felírhatjuk a következőképpen:

$$a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1 \quad (2.8)$$

A (2.6) feladat u megoldását *gyenge megoldás*nak nevezzük, ha $u \in H_0^1$ és a (2.8) fennáll.

3. fejezet

Numerikus módszerek

A fejezetben tárgyalt három numerikus módszert [1] mutatja be.

3.1. Belövéses módszer

Az

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u') & a \leq x \leq b \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \end{cases} \quad (3.1)$$

peremértékproblémát szeretnénk megoldani, úgy hogy azt a következő kezde-tiérték feladattá alakítjuk

$$\begin{aligned} u'' &= f(x, u, u') \\ u(a) &= \alpha \\ u'(a) &= s \end{aligned} \quad (3.2)$$

ahol $s \in \mathbb{R}$ tetszőleges paraméter. Azaz megpróbáljuk s -et úgy megválasz-tani, hogy s az ismeretlen függvény a -beli érintőének meredeksége legyen. Ez általában nem szokott sikerülni, így a következő algoritmus segítségével közeledünk a megfelelő s -hez. Mivel a kiinduló feladat peremérték probléma, olyan s -et keresünk, amire a (3.2) $u(x, s)$ megoldása teljesíti $u(b, s) = \beta$ -t, azaz s paraméterrel is a megoldásfüggvény b -ben β kell legyen.

Ezért definiálom a következő $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt:

$$F(s) := u(b, s) - \beta$$

Azt az s^* -ot keressük, amire

$$F(s^*) = 0.$$

A kereséshez egy gyökkereső algoritmust kell segítségül hívni. A belövéses módszer a Newton-módszert használja, ami a függvény deriváltja segítségével közelíti a gyököt. ($s_n \rightarrow s^*$):

$$s_{n+1} = s_n - \frac{F(s_n)}{F'(s_n)}.$$

Azonban problémát jelent F deriváltjának meghatározása. F' kiszámításához definiáljuk az alábbi v segédfüggvényt:

$$v := \frac{\partial u}{\partial s}$$

és

$$u''(x, s) = f(x, u(x, s), u'(x, s))$$

s -szerinti deriváltját írjuk fel a v függvény segítségével:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} u''(x, s) &= \partial_1 f(x, u(x, s), u'(x, s)) \cdot 0 + \\ &+ \partial_2 f(x, u(x, s), u'(x, s)) \cdot v + \\ &+ \partial_3 f(x, u(x, s), u'(x, s)) \cdot \frac{\partial u'(x, s)}{\partial s}. \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy a Newton-módszerbeli $F'(s_n)$ meghatározható legyen, ki kell számolnunk az alábbi segédfüggvény által meghatározott kezdetiérték feladatot:

$$\begin{cases} v''(x, s) = f_u(x, u(x, s), u'(x, s))v(x, s) + f_{u'}(x, u(x, s), u'(x, s))v'(x, s) \\ v(a, s) = 0, \quad v'(a, s) = 1 \end{cases}$$

Tehát $F'(s) = v(b, s)$, ahol v a fenti feladat megoldása.

Algoritmus

1. $s \in \mathbb{R}$ választása (kezdeti meredekség taláalomra)
2. Az $u'' = f(x, u, u')$, $u(a) = \alpha$, $u'(a) = s$ kezdetiérték feladatot oldjuk meg numerikusan
3. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned}v'' &= \partial_2 f(x, u, u') \cdot v + \partial_3 f(x, u, u') \cdot v' \\v(a) &= 0 \quad v'(a) = 1\end{aligned}$$

feladatot is.

4. Ha $|u(b) - \beta| < \epsilon \rightarrow \text{STOP}$
Ha $|u(b) - \beta| \geq \epsilon$, akkor $s_{n+1} := s_n - \frac{u(b) - \beta}{v(b)}$ és folytassuk a 2. lépéstől.

1. Példa. Vegyük az alábbi peremértékproblémát:

$$u'' = u^3, \quad u(1) = \sqrt{2}, \quad u(2) = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

pontos megoldása az $u(x) = \sqrt{2}/x$. Numerikusan is megoldjuk a fenti algoritmus használatával. Először vegyük az

$$u'' = u^3, \quad u(1) = \sqrt{2}, \quad u'(1) = s,$$

kezdeti érték feladatot. Oldjuk meg numerikusan az Euler-módszerrel. Ehhez a másodrendű kezdetiérték-feladatot elsőrendű differenciaegyenlet rendszerré alakítjuk az alábbiak szerint:

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} w \\ u^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ s \end{pmatrix}$$

A Newton-iteráció elkezdéséhez válasszuk s -et 0-nak. (A pontos kezdeti s érték $s = -\sqrt{2} = -1.414214$ lenne.) Az F' kiszámolásához szükséges

$$v'' = \partial_u f \cdot v + \partial_w f \cdot v' = 3u^2 v$$

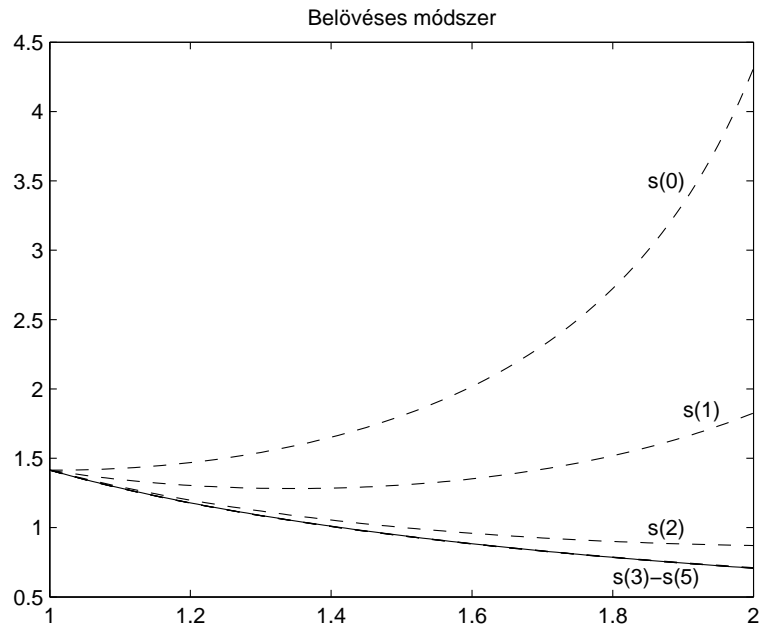
másodrendű differenciálegyenletet is elsőrendű rendszerré kell alakítani:

$$\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} z \\ 3u^2v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A fenti differenciálegyenletrendszert ugyancsak az Euler-módszerrel oldjuk meg. Így tovább tudunk lépni az s^* -ot, mint gyököt kereső ciklusban. A program akkor áll meg, ha $F(s)$ kisebb lesz, mint egy előre beállított ϵ , jelen esetben $\epsilon = 10^{-6}$, vagy ha elér bizonyos lépésszámot. Példánkban már hat lépés elég volt, hogy $F(s)$ értéke ϵ -nál kisebb legyen. A numerikus eredményeket az alábbi táblázatok mutatják, lefuttatva három különböző lépéshosszra. (A program forráskódja a B függelékben található.)

h=0.1		h=0.01		h=0.001	
s	F(s)	s	F(s)	s	F(s)
0	2.5018	0	3.6034	0	3.8177
-1.0873	0.4810	-0.7975	1.1191	-0.7513	1.2493
-1.4054	0.0226	-1.3107	0.1636	-1.2851	0.2065
-1.4218	0.0037	-1.4126	0.0039	-1.4101	0.0065
-1.4218	0.0001	-1.4151	0.0000	-1.4143	0.0000
-1.4218	0.0000	-1.4151	0.0000	-1.4143	0.0000

A megoldásokat ábrázoltam is az alábbi ábrán. A folytonos vonal a pontos megoldást jelöli, a szaggatottak pedig a belövéses módszer algoritmusának megoldásfüggvényei. Mint látható, a megoldások egyre közelítik a pontos függvénygörbét, az utolsó három lépésben már nincs is szemmel látható eltérés.



Többszörös belövéses módszer

Rosszul kondicionáltságból fakadó numerikus problémák azt jelentik, hogy s nagyon kicsi megváltoztatása nagyon nagy megváltozást idéz elő a végponti megoldásban. Rosszul kondicionált feladatot az egyszerű belövéses módszerrel nem tudunk megoldani. Az ilyen esetek orvoslására való a *többszörös belövéses módszer*.

Az $[a, b]$ intervallumot felosztjuk n db részintervallumra

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

u és s \mathbb{R}^n -beli vektorok,

$$u := (u_0, \dots, u_{n-1})^T, \quad s := (s_0, \dots, s_n)^T.$$

Nézzük az alábbi kezdetiérték problémát

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u') & [x_j, x_{j+1}]\text{-en,} \\ u(x_j) = u_j \\ u'(x_j) = s_j \end{cases}$$

minden $j = 0, \dots, n - 1$ -re.

x_1, \dots, x_{n-1} -ben az $u(\cdot, u_j, s_j)$ megoldás egybeesik az első deriváltjával (a függvény kétszer folytonosan differenciálható $[a, b]$ -n és $u(b) = \beta$ is teljesül).

Kapunk $2n-1$ db nemlineáris egyenletet $2n-1$ db ismeretlennel:

$$u_1, \dots, u_{n-1}, s_0, \dots, s_{n-1}.$$

A Newton-módszer itt is alkalmazható.

3.2. Véges differencia módszer

A peremérték-problémák közelítését megvalósító véges differencia módszerek lényege, hogy a differenciálegyenletbeli deriváltakat differenciákkal helyettesítjük. Az egyszerűség kedvéért csak lineáris differenciálegyenleteket vizsgálunk.

Tekintsük az alábbi másodrendű lineáris differenciálegyenletet, inhomogén peremfeltétellel $\Omega = (0, 1)$ -en:

$$\begin{cases} \mathcal{A}u := -au'' + bu' + cu = f & \Omega = (0, 1) \\ u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \end{cases} \quad (3.3)$$

ahol

$$a = a(x) > 0, \quad b = b(x), \quad c = c(x) \geq 0 \quad (3.4)$$

$\bar{\Omega}$ -n értelmezett folytonos függvények, és tegyük fel, hogy $u \in C^4(\bar{\Omega})$.

Diszkretizáció

Osszuk fel a $(0, 1)$ intervallumot M egyenlő részre. x_0, x_1, \dots, x_M $M + 1$ darab rácspont,

$$x_0 = 0, \quad x_M = 1, \quad x_j = jh, \quad h = \frac{1}{M}, \quad j = 0, \dots, M.$$

A belső osztópontokban a második deriváltat az alábbi differenciával közelítjük:

$$\partial\bar{\partial}U_j \approx \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} \quad j = 1, \dots, M-1. \quad (3.5)$$

Ha pedig b nem azonosan nulla függvény, akkor az első deriváltakat a belső osztópontokban az alábbi három differencia közül az egyikkel becsülhetjük:

1. haladó differencia: $\partial U_j \approx \frac{U_{j+1} - U_j}{h}$
2. retrográd differencia: $\bar{\partial} U_j \approx \frac{U_j - U_{j-1}}{h}$
3. centrális differencia: $\hat{\partial} U_j \approx \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h}$

Jelen dolgozatban a harmadikat, a centrális differenciát használom az első derivált közelítésére.

Új jelöléseket vezetünk be:

$$a_j := a(x_j), \quad b_j := b(x_j), \quad c_j := c(x_j), \quad f_j := f(x_j)$$

csak a rácspontokban értelmezett függvények. Ekkor a (3.3) helyett az alábbi formulával dolgozunk:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_h U_j = -a_j \partial\bar{\partial}U_j + b_j \hat{\partial}U_j + c_j U_j = f_j; \\ U_0 = u_0, \quad U_1 = u_1 \end{cases}$$

Keressük az

$$U = (U_0, U_1, \dots, U_{M-1}, U_M)$$

vektort, ahol U_1, \dots, U_{M-1} ismeretlenek, U_0 és U_M pedig a peremértékek.

Ha x_j egy belső osztópont, akkor a rá vonatkozó egyenlet:

$$-a_j \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} + b_j \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h} + c_j U_j = f_j$$

h^2 -tel megszorozva az egyenlet mindkét oldalát és elvégezve az egyszerűsítéseket

$$(2a_j + h^2 c_j)U_j - (a_j - \frac{hb_j}{2})U_{j+1} - (a_j + \frac{hb_j}{2})U_{j-1} = h^2 f_j$$

alakú egyenleteket kapunk

$$j = 1, 2, \dots, M-1\text{-re,}$$

ami az alábbi lineáris egyenlőségrendszerre vezet:

$$AU = g, \quad (3.6)$$

ahol keresendő az U vektor; A $(M-1) \times (M-1)$ -es mátrix, U és g $M-1$ dimenziós vektorok, ahol g annyiban különbözik f -től, hogy dimenziója két-tővel kisebb, azaz f első és utolsó elemét nem tartalmazza, illetve g első és utolsó koordinátáit úgy módosítottuk, hogy a peremfeltételek is szerepeljenek az egyenletrendszerben. Tehát $M+1$ darab osztópont esetén a lineáris egyenletrendszer $M-1$ dimenziós. Az A mátrix általános alakjában a j -edik sor:

$$A_{.,j} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \dots 0 & -a_j - \frac{hb_j}{2} & 2a_j + h^2c_j & -a_j + \frac{hb_j}{2} & 0 \dots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

Részletesebben nézzük az alábbi példát. Legyen $M=5$, vagyis a $(0,1)$ intervallumot öt egyenlő részre osszuk fel. Így a végpontokat is beleértve hat osztópontunk van, a lépésköz $h = 1/5$. Keressük az $U = (U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5)$ vektort ahol $U_0 = u_0$ és pedig $U_5 = u_1$. Az egyenletrendszerünk tehát négy soros lesz:

$$\begin{cases} (2a_1 + \frac{c_1}{9})U_1 - (a_1 - \frac{b_1}{6})U_2 - (a_1 + \frac{b_1}{6})U_0 = \frac{f_1}{9} \\ (2a_2 + \frac{c_2}{9})U_2 - (a_2 - \frac{b_2}{6})U_3 - (a_2 + \frac{b_2}{6})U_1 = \frac{f_2}{9} \\ (2a_3 + \frac{c_3}{9})U_3 - (a_3 - \frac{b_3}{6})U_4 - (a_3 + \frac{b_3}{6})U_2 = \frac{f_3}{9} \\ (2a_4 + \frac{c_4}{9})U_4 - (a_4 - \frac{b_4}{6})U_5 - (a_4 + \frac{b_4}{6})U_3 = \frac{f_4}{9} \end{cases}$$

Mátrixos alakja pedig:

$$\begin{pmatrix} 2a_1 + \frac{c_1}{9} & -a_1 + \frac{b_1}{6} & 0 & 0 \\ -a_2 - \frac{b_2}{6} & 2a_2 + \frac{c_2}{9} & -a_2 + \frac{b_2}{6} & 0 \\ 0 & -a_3 - \frac{b_3}{6} & 2a_3 + \frac{c_3}{9} & -a_3 + \frac{b_3}{6} \\ 0 & 0 & -a_4 - \frac{b_4}{6} & 2a_4 + \frac{c_4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix},$$

ahol a jobboldalon $g \neq h^2 f$, de csak az első és utolsó komponenseiben különbözik tőle, melyek a ki vannak egészítve peremfeltételekkel. Vagyis

$$g = \begin{pmatrix} \frac{f_1}{9} + (a_1 + \frac{b_1}{6})u_0 \\ \frac{f_2}{9} \\ \frac{f_3}{9} \\ \frac{f_4}{9} + (a_4 - \frac{b_4}{6})u_1 \end{pmatrix}$$

A B függelékben bemutatok egy a fenti azámításokkal dolgozó példát Matlab forráskóddal.

Az alábbiakban a következő kérdések megválaszolására kerül sor:

1. Egyértelműen megoldható-e a (3.6)-beli egyenletrendszer?
2. Mekkora a hiba az u_j approximált megoldás és az $u(x_j)$ pontos megoldások között?
3. Konvergál-e a közelítő megoldás a pontos megoldáshoz, ha $h \rightarrow 0$?

4. Tétel. *Ha h elég kicsi, akkor a (3.6) egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van.*

Bizonyítás: Az A mátrix tridiagonális, mint láttuk. Diagonálisan domináns, ha h elég kicsi, ugyanis:

$$\left| -a_j - \frac{hb_j}{2} \right| + \left| -a_j + \frac{hb_j}{2} \right| \leq 2a_j + h^2 c_j > 0 \quad \square$$

A következő állításban belátjuk, hogyha a fentiek és még egyéb feltételek – amik az A mátrixra szintén fennállnak – teljesülnek, akkor A invertálható, azaz a (3.6) lineáris egyenletrendszer megoldható.

1. Állítás. *Ha A mátrix tridiagonális, diagonálisan domináns, a mellékátlókban nincs 0 elem és $|a_{11}| > |a_{12}|$, akkor A -nak létezik inverze.*

Bizonyítás:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots \\ 0 & c_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Tegyük fel, hogy létezik $A = LU$ felbontás. Ekkor L és U a következőképpen néznek ki, ugyanis a Gauss-elimináció meghagyja a háromatlósságot:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_1 & 1 & & & \\ & l_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & & & \\ & u_2 & v_2 & & \\ & & u_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & v_{n-1} \\ & & & & u_n \end{pmatrix}$$

Az $A = LU$ i -edik sorából az alábbiakat jelenti:

$$(c_{i-1}, a_i, b_i) = (l_{i-1}, 1, 0) \begin{pmatrix} u_{i-1} & v_{i-1} & 0 \\ 0 & u_i & v_i \\ 0 & 0 & u_{i+1} \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a_i = l_{i-1}v_{i-1} + u_i \\ b_i = v_i \\ c_i = l_{i-1}u_{i-1} \end{cases} \quad (3.7)$$

Kihasználjuk, hogy $|a_1| > |b_1|$ és $|a_i| \geq |b_i| + |c_{i-1}|$. Ezért a rendszer megoldása: $a_1 = u_1, b_1 = v_1 \implies |u_1| > |v_1| \implies u_1 \neq 0$.

Teljes indukcióval belátjuk, hogy u_i sem nulla: ha $u_i \neq 0$ és $|u_i| > |v_i|$, akkor $u_{i+1} \neq 0$ és $\|u_{i+1}\| > \|v_{i+1}\|$. A (3.7)-ben kapott egyenletrendszert átrendezve, és a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva:

$$\begin{aligned} |u_{i+1}| &= |a_{i+1} - l_i v_i| \geq |a_{i+1}| - |l_i| |v_i| = |a_{i+1}| - \frac{|c_i|}{|u_i|} |v_i| > \\ &> |a_{i+1}| - |c_i| \geq |b_{i+1}| = |v_{i+1}| \\ &\implies u_{i+1} \neq 0 \end{aligned}$$

Így U főátlójában csupa nemnulla elem áll, ezért létezik A^{-1} . \square

Speciális eset

Nézzük az olyan hiányos másodrendű differenciálegyenletet, ahol

$$a \equiv 1, \quad b \equiv 0, \quad c \equiv 0.$$

Ekkor a (3.3)-beli differenciálegyenletünk így írható:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (0, 1) \\ u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \end{cases}$$

A (3.6) egyenletrendszer pedig

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{M-1} \end{pmatrix}$$

alakúra egyszerűsödik. Egészítsük ki az egyenletrendszert $M+1$ dimenziósra:

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} h^2 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & \dots & 0 & 0 & h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{M-1} \\ U_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{M-1} \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Jelölje a mátrixot \tilde{A}_h , a szorzóvektort U_h , a jobboldalt pedig f_h .
Egyenletrendszerünk tehát

$$\tilde{A}_h U_h = f_h,$$

ahol $U_h = (U_0, \dots, U_M)$, $f_h = (u_0, f_1, \dots, f_{M-1}, u_1)$ és $f_i = f(x_i)$.

2. Állítás. \tilde{A}_h M -mátrix¹.

Bizonyítás: A definíció alapján kell egy $g \in \mathbb{R}^{M+1}$, hogy egyrészt g pozitív legyen, másrészt $\tilde{A}_h g > 0$ legyen.

Legyen

$$g_i = 2(x_i - x_i^2).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} g(x) &= 2 + (x - x^2) > 0 \quad x \in (0, 1)\text{-en} \\ -g''(x) &= 2 > 0 \end{aligned}$$

Tehát $g > 0$, az első feltétel teljesül.

Másodszor kell: $\tilde{A}_h g > 0$.

$$(\tilde{A}_h g)_0 = \frac{1}{h^2} h^2 g_0 = 2 + x_0 - x_0^2 = 2 + 0 - 0 = 2 > 0$$

$$(\tilde{A}_h g)_M = \frac{1}{h^2} h^2 g_M = 2 + x_M - x_M^2 = 2 + 0 - 0 = 2 > 0$$

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_h g)_i &= \frac{1}{h^2} [(-1)g_{i-1} + 2g_i - 1g_{i+1}] = \\ &= \frac{1}{h^2} [-2 - x_{i-1} + x_{i-1}^2 + 4 + 2x_i - 2x_i^2 - 2 - x_{i+1} + x_{i+1}^2] = \\ &= \frac{1}{h^2} [-(i-1)h + ((i-1)h)^2 + 2ih - 2(ih)^2 - (i+1)h + ((i+1)h)^2] = \\ &= \frac{1}{h^2} [-ih + h + i^2 h^2 - 2ih^2 + h^2 + 2ih - 2i^2 h^2 - ih - h + i^2 h^2 + 2ih^2 + h^2] = \\ &= \frac{1}{h^2} 2h^2 = 2 \end{aligned}$$

Vagyis

$$\tilde{A}_h g = \begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix} > 0$$

□

¹Az M -mátrixok tulajdonságairól szóló definíciókat és állításokat a függelék M -mátrixok című fejezetében taglalom.

Mivel \tilde{A}_h M-mátrix, így invertálható és $\|g\|_\infty = 2 + \frac{1}{4}$

$$\|\tilde{A}_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{\|g\|_\infty}{\min_i (Ag)_i} = \frac{2 + \frac{1}{4}}{2} = 1 + \frac{1}{8}$$

2. Példa. Bemutatok egy konkrét példát, ami megmutatja hogyan is számolunk a véges differencia módszer segítségével. A peremértékfeladat a következő:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) = \frac{\cos x}{(\sin x + 1)^2} & \Omega = (0, 1)\text{-en} \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Legyen az osztópontok száma 5, ekkor négy részre osztjuk fel az intervallumot, a lépésköz pedig $1/4$. Azaz $M = 4$, $h = 1/4$.

$$x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1 \quad j = 0, \dots, 4.$$

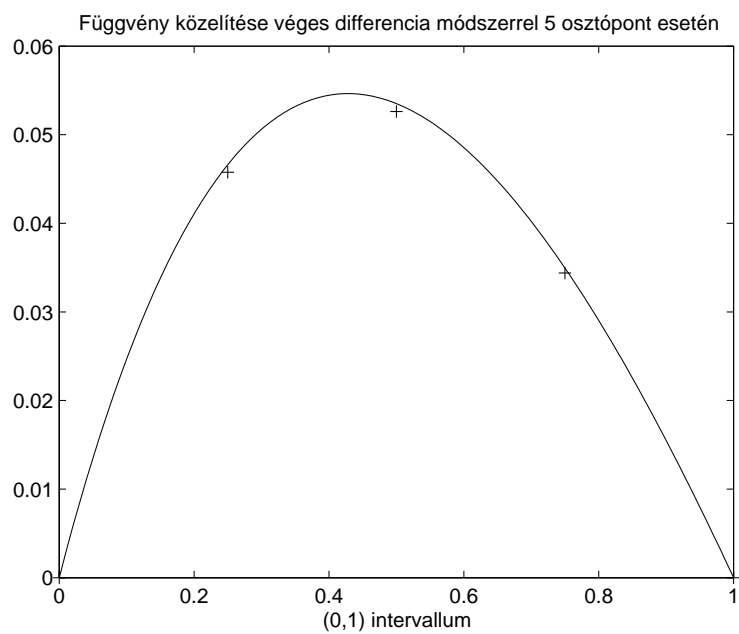
$$A = \begin{pmatrix} 32 & -16 & 0 \\ -16 & 32 & -16 \\ 0 & -16 & 32 \end{pmatrix} \quad f_h = \begin{pmatrix} 0.6227 \\ 0.4010 \\ 0.2587 \end{pmatrix}$$

Mert

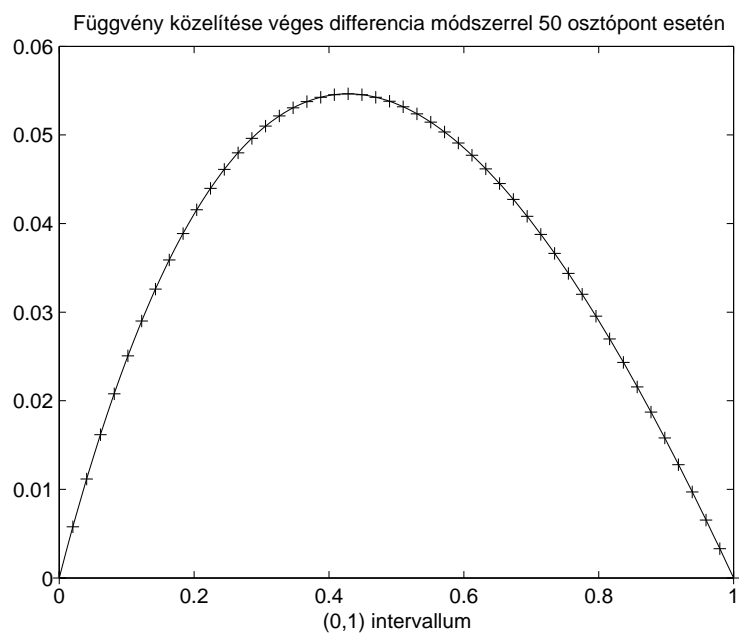
$$\frac{\cos 0.25}{(\sin 0.25 + 1)^2} = 0.6227, \quad \frac{\cos 0.5}{(\sin 0.5 + 1)^2} = 0.4010 \quad \frac{\cos 0.75}{(\sin 0.75 + 1)^2} = 0.2587$$

Megoldjuk az $AU_h = f_h$ egyenletrendszert, majd kiírom a kapott értékeket. U_h közelítő, mellette u_h pontos értékek, majd ábrázolom:

$$U_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0458 \\ 0.0526 \\ 0.0344 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0466 \\ 0.0535 \\ 0.0350 \\ 0 \end{pmatrix}$$



A lenti ábrán pedig ugyanennek a feladatnak a megoldása egy nagyobb ($h = 50$ -es) lépésközzel. (Mindkét ábrán a folytonos vonal jelöli a pontos megoldást, a keresztek pedig az approximációt.)



Hibabecslés

1. Lemma (A második deriváltat közelítő differencia hibája). *Tegyük fel, hogy a (3.3) megoldása $u \in C^4[a, b]$. Ekkor*

$$\left| \partial \bar{\partial} U(x_j) - u''(x_j) \right| \leq Ch^2 \|u^{(4)}\|_{C(\bar{\Omega})}$$

Bizonyítás:

$$\frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1}))}{h^2} - u''(x_j) = \frac{u(x_j + h) - 2u(x_j) + u(x_j - h))}{h^2} - u''(x_j) =$$

Fejtsük Taylor-sorba, $x_{j-1} < \eta < x_j < \xi < x_{j+1}$:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h^2} \left(u(x_j) + hu'(x_j) + \frac{h^2}{2}u''(x_j) + \frac{h^3}{6}u'''(x_j) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi) - 2u(x_j) + \right. \\ &\quad \left. + u(x_j) - hu'(x_j) + \frac{h^2}{2}u''(x_j) - \frac{h^3}{6}u'''(x_j) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\eta) \right) - u''(x_j) = \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\eta) + O(h^5) \right) = \frac{h^2}{12} \frac{u^{(4)}(\xi) + u^{(4)}(\eta)}{2} + O(h^5) = \end{aligned}$$

Alkalmazzuk a Darboux-Bolzano tételt, mely szerint $\frac{f(a)+f(b)}{2} = f(\xi)$, így

$$= \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\rho),$$

vagyis

$$|\partial \bar{\partial} U(x_j) - u''(x_j)| \leq h^2 \|u^{(4)}\|_{C(\bar{\Omega})} h^2 \frac{1}{12}$$

□

Ahogy a kezdetiérték feladat esetében itt is átöröklődik a lokális diszkrétizációs hiba rendje a globális hibáéba. A fenti hibabecslés általában nem praktikus (a megoldás négyszer folytonosan differenciálhatóságának megkövetelése miatt), azért a gyakorlatban a hibát h és $h/2$ lépésközök eredményeiből becslik.

5. Tétel. A (3.3) feladat megoldása centrális differencia használata esetében konvergens és

$$\|U_h - u_h\|_\infty \leq Ch^2,$$

ahol $u_h = (u_0, u_1, \dots, u_M)$ és $U_h = (U_0, U_1, \dots, U_M)$ illetve $u_i = u(x_i)$. (Azaz ha $h \rightarrow 0$, akkor $\|u_h - U_h\|_\infty \rightarrow 0$.)

Bizonyítás:

$$\tilde{A}_h U_h = f_h \quad \implies \quad U_h = \tilde{A}_h^{-1} f_h,$$

ahol $f_h = (u_0, f_1, \dots, f_{M-1}, u_1)^T$

$$\begin{aligned} \|U_h - u_h\|_\infty &= \|\tilde{A}_h^{-1} f_h - u_h\|_\infty = \|\tilde{A}_h^{-1}(f_h - \tilde{A}_h u_h)\|_\infty \leq \\ &\leq \|\tilde{A}_h^{-1}\|_\infty \|f_h - \tilde{A}_h u_h\|_\infty \leq \frac{9}{8} \|\tilde{\Psi}_h\|_\infty, \end{aligned}$$

ahol $\tilde{\Psi}_h = \tilde{A}_h u_h - f_h$ képlethiba.

$$\tilde{\Psi}_h = \begin{cases} (\partial \bar{\partial} u)_i - u''(x_i) & i = 1, 2, \dots, M-1 \\ 0 & i = 0, M \end{cases}$$

□

Véges differencia módszer elliptikus differenciálegyenletekre

Vegyük a

$$\begin{cases} -\Delta u + qu = r & D\text{-n} & D = (0, 1) \times (0, 1) \\ u = 0 & \partial D\text{-n} \end{cases} \quad (3.8)$$

elliptikus peremérték problémát, ahol $\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ Laplace-operátort jelöli. Ekvidisztáns rácshálót választunk: $x_{ij} = (ih, ij)$. A Laplace-operátort az alábbi differenciasémával közelítjük:

$$\Delta u(x_{ij}) \approx \frac{1}{h^2} [u(x_{i+1,j}) + u(x_{i-1,j}) + u(x_{i,j+1}) + u(x_{i,j-1}) - 4u(x_{i,j})]$$

ami kielégíti az

$$\frac{1}{h^2} [(4 + h^2 q_{ij})u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}] = r_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

egyenletrendszert, ahol u_{ij} közelítő érték, $u(x_{ij})$ pontos megoldás, és $q_{ij} = q(x_{ij})$, $r_{ij} = r(x_{ij})$ -t jelöli. Kiegészítve a peremfeltételekkel

$$\begin{aligned} u_{0,j} = u_{n+1,j} &= 0 & j &= 0, \dots, n+1 \\ u_{i,0} = u_{i,n+1} &= 0 & i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.10)$$

6. Tétel. *A (3.9) és a (3.10) egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van minden $h > 0$ esetén.*

7. Tétel. *Tegyük fel, hogy a (3.8)-ben adott feladat megoldása négyszer folytonosan differenciálható. Ekkor a véges differenciás approximáció hibabecslését a következő formulával számítjuk:*

$$|u(x_{ij}) - u_{ij}| \leq \frac{h^2}{96} \left[\left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \right\|_{\infty} \right], \quad i, j = 1, \dots, n$$

3.3. Végeselem módszer

A függelék 4.3. fejezetében kimondott Riesz és Lax-Milgram tételekre épül az alábbi módszer. A tételek bizonyítása az [1] könyvben található.

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = r \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

A végeselem a (3.11) differenciálegyenletre a homogén peremfeltétellel a *Galjorkin módszer* alkalmazásán alapszik, a spline tereket közelítő altereként használva. Megjegyezzük, hogy a polinomok nem alkalmasak közelítő altérnek, mert rosszul kondicionált teli-mátrixos lineáris rendszerekhez vezetnek. Vegyük a lineáris spline-ok esetét. Az

$$x_j := a + jh, \quad j = 0, \dots, n+1, \quad h = (b-a)/(n+1), \quad n \in \mathbb{N}$$

lépésközzel válasszuk a folytonos és darabonként lineáris függvények terét X_n -nek. Azaz

$$\forall u \in X_n : \quad u \in C[a, b], \quad u(a) = u(b) = 0$$

és minden egyes $[x_{j-1}, x_j]$ részintervallumon egybeesik egy P_1 -beli polinommal $j = 0, \dots, n$ -re. E spline tér belüli függvények a $H_0^1[a, b]$ térhez tartoznak darabonként konstans gyenge deriváltakkal.

X_n báziselemeinek az ún. *kalapfüggvényeket* választjuk:

$$w_k(x) := \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{k-1}), & x \in [x_{k-1}, x_k], \\ \frac{1}{h}(x_{k+1} - x), & x \in [x_k, x_{k+1}], \\ 0 & x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}]. \end{cases} \quad (3.12)$$

Minden $u \in X_n$ felírható

$$u = \sum_{k=1}^n \alpha_k w_k,$$

alakban, ahol $\alpha_k = u(x_k)$ $k = 1, \dots, n$. Így

$$S(w_j, w_k) = \int_a^b \{p w_j' w_k' + q w_j w_k\} dx = 0$$

ha $(x_{j-1}, x_{j+1}) \cap (x_{k-1}, x_{k+1}) = \emptyset$, azaz ha $|j - k| > 2$. Ekkor az $S(w_j, w_k)$ mátrix a (3.12) kalapfüggvények, mint báziselemek mellett tridiagonális és ritkamátrix. A mátrix elemeit következőképpen számítjuk:

$$S(w_j, w_j) = \frac{1}{h^2} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} p(x) dx + \frac{1}{h^2} \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} q(x)(x - x_{j-1})^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x)(x_{j+1} - x)^2 dx \right\}$$

és

$$S(w_j, w_{j+1}) = S(w_{j+1}, w_j) = -\frac{1}{h^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x) dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x)(x_{j+1} - x)(x - x_j) dx,$$

és az egyenletrendszer jobb oldala:

$$F(w_j) = \frac{1}{h} \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} r(x)(x - x_{j-1}) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} r(x)(x_{j+1} - x) dx \right\}.$$

A fenti képletek illusztrálják a véges elem módszer két általános tulajdonságát:

1. Minden részintervallumon ugyanazzal a képlettel számítjuk ki az együtt-hatókat
2. A Galjorkin módszert szeretnénk diszkrétte tenni, ezért használjuk a numerikus kvadratúraformulákat. Lineáris spline-okkal approximálva p, q, r -et:

$$S(w_j, w_j) \approx \frac{1}{2h}(p_{j-1} + 2p_j + p_{j+1}) + \frac{h}{12}(q_{j-1} + 6q_j + q_{j+1})$$

és

$$S(w_j, w_{j+1}) \approx \frac{-1}{2h}(p_j + p_{j+1}) + \frac{h}{12}(q_j + q_{j+1})$$

a mátrixelemekre és

$$F(w_j) \approx \frac{h}{6}(r_{j-1} + 4r_j + r_{j+1})$$

a jobb oldalakra, ahol $p_j = p(x_j), q_j = q(x_j), r_j = r(x_j)$ ahogy a korábbi fejezetekben is. A (3.6) véges differencia módszerbeli lineáris egyenlet-rendszerhez hasonlóan a fenti rendszer is irreducibilis és gyengén diagonálisan domináns, így a Jacobi-iteráció konvergenciája gyorsítható relaxációs módszerekkel.

A lineáris spline-okkal végzett végeselem módszer hibájának levezetéséhez szükségünk van a lineáris spline interpoláció hibájának becslésére a H^1 normára tekintettel.

2. Lemma. *Legyen $f \in C[a, b]$. Legyen $R_1 f := f - L_1 f$ a és b végpontokra illeszkedő lineáris interpoláció. Ekkor az alábbi becslések igazak $R_1 f$ -re:*

$$\|R_1 f\|_{L^2} \leq (b - a)^2 \|f''\|_{L^2},$$

$$\|(R_1 f)'\|_{L^2} \leq (b - a)^2 \|f''\|_{L^2}.$$

8. Tétel. *A lineáris spline-okkal végzett végeselem approximáció hibája a (3.11) differenciálegyenletre a homogén peremfeltétellel az alábbi képlettel számítható ki:*

$$\|u_n - u\|_{H^1} \leq C \|u''\|_{L^2} h,$$

ahol C tetszőleges pozitív konstans.

Bizonyítás: Felhasználva a fenti lemmabeli egyenlőtlenségeket és feltéve, hogy minden részintervallum hossza h , a $w_n \in X_n$ lineáris interpoláló spline-ra $w_n(x_j) = u_n(x_j)$, $j = 0, \dots, n$ feltételekkel azt kapjuk, hogy

$$\|w'_n - u'\|_{L^2} \leq \|u''\|_{L^2} h$$

és

$$\|w_n - u\|_{L^2} \leq \|u''\|_{L^2} h$$

így

$$\inf_{v \in X_n} \|v - u\|_{H^1} \leq \|w_n - u\|_{H^1} \leq (1 + b - a) \|u''\|_{L^2} h. \quad \square$$

3. Példa.

$$\begin{cases} -u''(x) = 1 \\ u(-1) = 0 \quad u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

A fenti differenciálegyenletet szeretnénk megoldani a Dirichlet-peremfeltétellel a végeelem módszer alkalmazásával. Szorozzuk be a (3.13) differenciálegyenletet egy $\varphi(x)$ tesztfüggvénnyel, ami az intervallum két végpontjában 0-t vesz fel és folytonosan differenciálható:

$$-u''\varphi = \varphi$$

Majd integráljuk mindkét oldalt a $[-1, 1]$ intervallumon.

$$\int_{-1}^1 -u''\varphi = \int_{-1}^1 \varphi$$

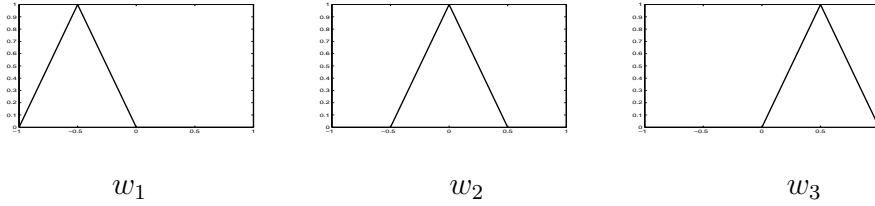
Az egyenlet baloldala:

$$\int_{-1}^1 -u''\varphi = [-u'\varphi]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 u'\varphi' = \int_{-1}^1 u'(x)\varphi'(x)dx = \int_{-1}^1 \varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in C_0^1[-1, 1]$$

Mivel $C_0^1[-1, 1]$ sűrű $H_0^1[-1, 1]$ -ben, ezért

$$\int_{-1}^1 u'\varphi' = \int_{-1}^1 \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1[-1, 1]\text{-re} \quad (3.14)$$

Ezt úgy oldjuk meg, hogy H_0^1 helyett egy véges dimenziós altérben keressük megoldást. Legyen például $\dim=3$.



Keressük a megoldást abban az altérben, amelyet a $w_1, w_2, w_3 \in H_0^1[-1, 1]$ függvények feszítenek ki.

$$u = \sum_{i=1}^3 c_i w_i$$

Összeget tudunk tagonként deriválni:

$$u' = \sum_{i=1}^3 c_i w_i'$$

Folytatva a (3.14)-beli egyenlet bal oldalát

$$\int_{-1}^1 u' \varphi' = \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^3 c_i w_i' \varphi' = \sum_{i=1}^3 c_i \int_{-1}^1 w_i' \varphi'$$

Összekapcsolva a jobboldallal:

$$\sum_{i=1}^3 c_i \int_{-1}^1 w_i' \varphi' = \int_{-1}^1 \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1[-1, 1]\text{-re}$$

De ezt most csak az altér elemire követeljük meg: $\forall \varphi \in \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$. Elég ha a báziselemekre teljesül:

$$\sum_{i=1}^3 c_i \int_{-1}^1 w_i' w_j' = \int_{-1}^1 w_j \cdot 1 \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.15)$$

ahol a jobb oldalon az "1"-es a (3.13)-beli jobboldal, vagyis $f(x)$ függvény.

Írjuk mátrixos alakba a (3.15)-beli egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} \int_{-1}^1 w_1' w_1' & \int_{-1}^1 w_2' w_1' & \int_{-1}^1 w_3' w_1' \\ \int_{-1}^1 w_1' w_2' & \int_{-1}^1 w_2' w_2' & \int_{-1}^1 w_3' w_2' \\ \int_{-1}^1 w_1' w_3' & \int_{-1}^1 w_2' w_3' & \int_{-1}^1 w_3' w_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 w_1 \\ \int_{-1}^1 w_2 \\ \int_{-1}^1 w_3 \end{pmatrix}$$

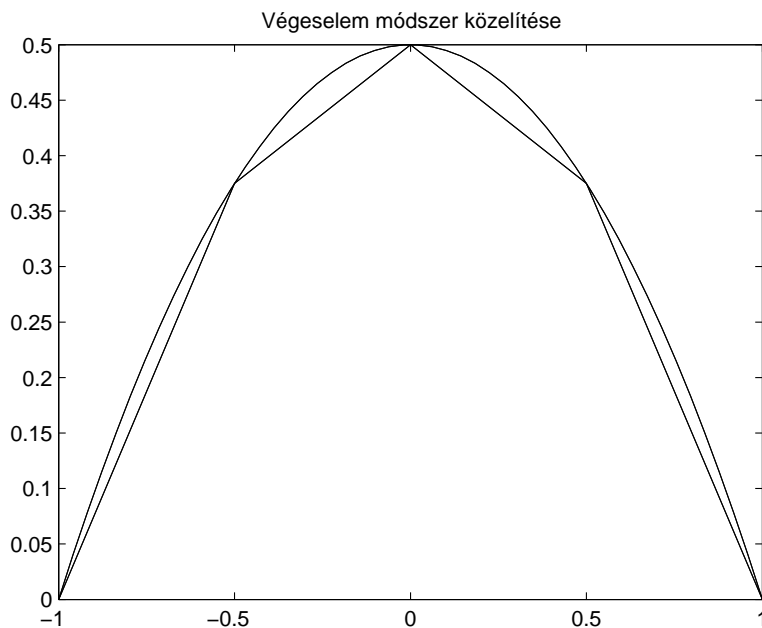
Behelyettesítve a mátrixba a konkrét értékeket

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Kiszámolva a fenti egyenletrendszert

$$c = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/2 \\ 3/8 \end{pmatrix}$$

$$U(x) = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = \frac{3}{8} w_1 + \frac{1}{2} w_2 + \frac{3}{8} w_3$$



Az ábrán a töröttvonal a végelem módszer $U(x)$ eredménye, a görbe pedig az $u(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ pontos megoldás három dimenziós altérben. (A pontosság a dimenziószám növelésével javítható.)

3.4. Összefoglalás

Három numerikus módszert mutattam be különböző közönséges differenciálegyenletek peremérték-feladataira. A belövéses módszer esetén nincs semmilyen megkötés sem a differenciálegyenletre (az expliciten kifejezett $u'' = f(x, u, u')$ egyenlet jobboldala bármilyen lehet), sem a peremfeltételekre, kifejezetten nem-lineáris feladatok közelítésére alkották. A véges differencia és végeselem módszerek is alkalmazhatóak nem-lineáris esetben, de ott nem működnek jól, ellenben lineáris esetben egyszerűek és gyorsak. A végeselem módszerre jelen dolgozatban csak első-derivált tagot nem tartalmazó lineáris differenciálegyenletre használható módszert mutattam be, de valójában ez a legelterjedtebb módszer. Ritkán fordulnak elő olyan feladatok, amiket végeselem módszerrel nem lehet megoldani. Ellenben a belövéses módszer túl sok számolást igényel, és az $F(s) = 0$ egyenlet megoldása is bizonytalan, ui. a Newton-módszer nem mindig konvergens. (Rosszul kondicionált feladatok esetén pedig csak a többszörös belövéses módszer használható.)

A [3] könyv egy (rosszul kondicionált példán²) hasonlítja össze a különböző módszerek hibáit. A bemutatott példában:

módszer	átlagos hiba
Belövéses módszer	∞
Többszörös belövéses módszer	$\approx 10^{-13}$
Véges differencia módszer	10^{-2} — 10^{-10}
Végeselem módszer	10^{-3} — 10^{-6}

Megjegyzés: ahol intervallumot adtam meg hibára, ott értéke arányos valamilyen a módszerben választható tényező nagyságával. A véges differencia módszer esetén a hiba nagysága h lépésköz megválasztásától függ, ami itt $h = 2^{-4}$ — 2^{-10} , a végeselem módszer esetén pedig a dimenziómérettől, ami itt $n = 10$ — 100 közötti.

² $-u'' + 400u = -400 \cos^2 \pi x - 2\pi^2 \cos 2\pi x$

4. fejezet

A függelék

A függelékben szereplő állításokat és tételeket bizonyítás nélkül közlöm. A bizonyítások megtalálhatók [1]-ben.

4.1. M-mátrixok tulajdonságai

1. Definíció. Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix M-mátrix, ha

- az átlóbeli elemek pozitívak, azaz $a_{ii} > 0$ ($i = 1, \dots, n$);
- az átlón kívüli elemek nem-pozitívak, azaz $a_{ij} \leq 0$ ($i \neq j$);
- létezik egy $0 < g \in \mathbb{R}^n$ minden koordinátájában pozitív vektor, amire $0 < Ag$ (szintén elemenként).

1. Megjegyzés.

- A fenti definícióban szereplő g vektort A dominálóvektorának nevezzük.
- A fenti definíció első feltétele akövetkezik a másik kettőből, máskülönben
 a

$$a_{kk} \leq 0 \implies 0 < (Ag)_k = \sum_i \underbrace{a_{ki}}_{\leq 0} \underbrace{g_i}_{> 0} \leq 0$$

ellentmondásra jutunk.

9. Tétel. *Legyen A egy M -mátrix, ekkor*

- A reguláris, azaz létezik A^{-1}
- $A^{-1} \geq 0$ elemenként.

10. Tétel. *Legyen A egy M -mátrix g domináló vektorral, ekkor*

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{\|g\|_{\infty}}{\min_i (Ag)_i}.$$

4.2. Funkcionálanalízis alapok

Normált terek

2. Definíció. *Legyen X egy valós vagy komplex vektortér a $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a következő tulajdonságokkal:*

- (N1) $\|x\| \geq 0$ (pozitivitás)
- (N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (meghatározottság)
- (N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homogenitás)
- (N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (háromszög-egyenlőtlenség)

minden $x, y \in X$ és $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ (vagy \mathbb{R})-ra norma X -en. X Normált tér, ha értelmezve van rajta egy norma.

2. Megjegyzés. *A másik háromszög-egyenlőtlenség is érvényes a normákra:*

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$$

3. Definíció. *Egy normált téren vett (x_n) vektorsorozat konvergens, ha $\exists x \in X$ amire $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. Divergens, ha nem konvergens.*

11. Tétel. *Egy konvergens sorozat határértéke pontosan meghatározott.*

4. Definíció. *Egy lineáris téren vett bármely két norma ekvivalens, ha ugyanazok a sorozatok konvergálnak hozzájuk.*

12. Tétel. $\|\cdot\|_a$ és $\|\cdot\|_b$ normák pontosan akkor ekvivalensek, ha $\exists c, C > 0$: $c\|\cdot\|_a \leq \|\cdot\|_b \leq C\|\cdot\|_a$ minden $x \in X$ -re.

13. Tétel. Véges dimenziós vektortereken minden norma ekvivalens.

5. Definíció. Egy X normált tér U alterét korlátosnak nevezzük, ha létezik olyan C pozitív szám amire $\|x\| \leq C$ minden $x \in U$ -ra. (A konvergens sorozatok korlátosak.)

14. Tétel. X véges-dimenziós normált téren bármely korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Skalárszorzat

6. Definíció. Legyen X egy komplex (vagy valós) lineáris tér. Ekkor a $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ (vagy \mathbb{R}) függvényt az alábbi tulajdonságokkal

- (H1) $(x, x) \geq 0$ (pozitivitás)
 (H2) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (meghatározottság)
 (H3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (szimmetria)
 (H4) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ (linearitás)

minden $x, y, z \in X$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (vagy \mathbb{R})-ra X -en vett skalárszorzatnak vagy belső-szorzatnak nevezzük.

7. Definíció. Egy skalárszorzattal ellátott teret pre-Hilbert térnek nevezünk.

(H3) és (H4) triviális következménye az antilinearitás:

$$(H4') \quad (x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}(x, y) + \bar{\beta}(x, z)$$

15. Tétel (Cauchy-Bunyakovszky-Schwarz egyenlőtlenség).

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

$\forall x, y \in X$ -re és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha x és y lineárisan függetlenek.

16. Tétel. Az X lineáris téren vett (\cdot, \cdot) skalárszorzat meghatároz egy normát, amit az alábbi képlet ad meg:

$$\|x\| := (x, x)^{1/2}$$

minden $x \in X$ -re, azaz a pre-Hilbert tér mindig normált tér is egyben.

Korlátos lineáris operátorok

Az alábbiakban $A : X \rightarrow X$ kifejezésre a *leképezés*, *függvény* és *operátor* azavakat szinonimaként használjuk.

8. Definíció. $U \subseteq X, Y$ normált terek, $A : X \rightarrow X$ *leképezés* folytonos $\forall x \in U$ -ban, ha minden $(x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ U -beli sorozat esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$.

9. Definíció. Egy $A : X \rightarrow X$ *leképezés* lineáris, ha

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \quad \forall x, y \in X, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ vagy } \mathbb{R}.$$

17. Tétel. Egy lineáris operátor folytonos, ha egy elemében folytonos.

10. Definíció. $A : X \rightarrow Y$ lineáris operátor korlátos, ha létezik C pozitív szám, hogy $\|Ax\| \leq C\|x\|$ minden $x \in X$.

18. Tétel. $A : X \rightarrow Y$ lineáris operátor akkor és csak akkor korlátos, ha

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| < \infty.$$

Az $\|A\|$ azám A legalsó korlátja, és A normájának nevezzük.

3. Megjegyzés. X, Y, Z normált terek, $A : X \rightarrow Y$, $B : Y \rightarrow Z$ korlátos *leképezések*. Szorzatuk $BA : X \rightarrow Z$, $(BA)x := B(Ax) \forall x \in X$ szintén korlátos *leképezések* a $\|BA\| \leq \|A\|\|B\|$ korláttal.

Mátrixnormák

19. Tétel. Legyen $(a_{jk}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vagy $\mathbb{C}^{n \times n}$ -beli mátrix. Ekkor az alábbi képlettel megadott $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ lineáris operátor

$$(Ax)_j := \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k, \quad j = 1, \dots, n,$$

megfelel egyes normáknak \mathbb{R}^n -en illetve \mathbb{C}^n -en. Konkrét esetben:

$$\|A\|_1 = \max_{k=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{jk}|,$$

$$\|A\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|,$$

$$\|A\|_2 \leq \left(\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2 \right)^{1/2}.$$

Ekkor a fenti normákat mátrixnormáknak nevezzük.

20. Tétel. Minden A mátrixhoz létezik egy Q unitér mátrix, hogy $Q^* A Q$ egy felső-háromszög mátrix.

21. Tétel. Az $n \times n$ -es Hermite-mátrix¹ sajátértékei valósak, és a sajátvektorok ortogonális bázist alkotnak \mathbb{C}^n -ben.

11. Definíció. $\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ sajátértéke } A\text{-nak}\}$ A spektrálsugara.

22. Tétel. A $n \times n$ -es mátrix.

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)}$$

Ha A Hermite-mátrix, akkor $\|A\|_2 = \rho(A)$

23. Tétel. Minden \mathbb{C}^n -en értelmezett normára és minden $n \times n$ -es A mátrixra $\rho(A) \leq \|A\|$.

¹ A Hermite-mátrix, ha $A^* = A$, vagyis, ha önadjungált

Teljesség

12. Definíció. Az X normált téren egy (x_n) sorozat Cauchy-sorozat, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{Z} : \|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon)$ esetén.

Máshogy: $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$

24. Tétel. Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.

13. Definíció. Az $U \subseteq X$ altér teljes, ha U minden elemének Cauchy-sorozata U egy eleméhez konvergál.

14. Definíció. Ha egy normált tér teljes Banach-térnek nevezzük. Ha egy pre-Hilbert² tér teljes, Hilbert-térnek nevezzük.

4. Példa. Az alábbi módon definiált maximum- vagy sornormával ellátott $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények tere Banach-tér.

$$\|f\|_\infty := \max_{[a, b]} |f(x)|$$

5. Példa. Az L_1 normával ellátott $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények tere, ahol

$$\|f\|_1 := \int_a^b f(x) dx$$

nem teljes.

6. Példa. Az L_2 normával ellátott $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények tere, ahol

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

sem teljes.

25. Tétel. Minden véges dimenziós tér Banach-tér.

4. Megjegyzés. A teljes terek zártak és minden teljes tér zárt altere is teljes.

²Ismétlés: a pre-Hilbert tér a skalárszorzzal ellátott lineáris tér

4.3. Elméleti alapok a végeselem módszerhez

A végeselem módszer bevezetéséhez megemlítek néhány funkcionálanalízisbeli tételt és állítást:

26. Tétel (Riesz-tétel). *Legyen H Hilbert-tér. Ekkor minden korlátos lineáris $F : H \rightarrow \mathbb{C}$ függvényhez $\exists! f \in H$ amire $F(u) = (u, f) \quad \forall u \in H$ esetén. És f illetve F lineáris függvények normái egyenlőek:*

$$\|f\| = \|F\|.$$

15. Definíció. *Egy $A : H \rightarrow H$ lineáris operátor az H pre-Hilbert téren szigorúan koercitív, ha $\exists c > 0$ konstans: $\operatorname{Re}(au, u) \geq c\|u\|^2 \quad \forall u \in H$ -re.*

27. Tétel (Lax-Milgram-tétel). *Legyen H Hilbert-tér, $a(\cdot, \cdot)$ egy korlátos(1), koercitív(2) bilineáris forma, l egy folytonos(3) lineáris funkcionál, azaz*

1. $\|a(u, v)\| \leq M\|u\|\|v\| \quad \forall u, v \in H$
2. $\|a(u, v)\| \geq \alpha\|v\|^2, \quad \text{ahol } \alpha > 0 \quad \forall v \in H$
3. $|l(v)| \leq c\|v\| \quad \forall v \in H$

Ekkor az $a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H$ feladatnak egyértelműen létezik megoldása.

5. fejezet

B függelék

5.1. Belövéses módszer algoritmus

```
%A belövéses módszerrel oldjuk meg az
%u''(x)=(u(x))^3 [a,b]-n
%u(a)=alpha=gyök(2), u(b)=beta=gyök(2)/2
%peremérték-feladatot

alpha = sqrt(2);
beta = 0.5*sqrt(2);
xspan = [1, 2];
aeeps = 1e-6;
h = 0.01;
error = Inf;
counter = 0;
s = 0;
while ((error > aeeps) & (counter < 10))
U = [];
f1 = @(x,u)(u(2));
f2 = @(x,u)(u(1)^3);
[x, U] = ode_Euler(f1, f2, xspan, [alpha, s], U, h, 1);
```

```

g1 = @(x,z)(z(2));
g2 = @(x,z)(3*z(1));
[x, Z] = ode_Euler(g1, g2, xspan, [0, 1], U(:, 1), h, 0);
plot(x,U(:,1),'k:');
hold on;
F = U(end, 1) - beta;
error = abs(F);
s = s - F/Z(end, 1);
counter = counter + 1;
end
counter;
U1=U(:,1);
Y=sqrt(2)*ones(length(x),1)./x;
plot(x,Y,'k');
title('Belövéses módszer');
text(1.85,3.5,'s(0)');
text(1.9,1.85,'s(1)');
text(1.85,1,'s(2)');
text(1.8,0.65,'s(3)-s(5)');

```

A fenti program futás közben az alábbi ode_Euler.m fájlt hívja meg:

```
function [x Y] = ode_Euler(f1, f2, xspan, Y0, U, h, fuggveny)
```

```

n = (xspan(2)-xspan(1))/h;
x = linspace(xspan(1), xspan(2), n+1)';
k = zeros(1, 2);
Y = Y0;

for i=1:n
    if fuggveny == 1
        ertek1 = feval(f1, x(i), Y(i, :));
        ertek2 = feval(f2, x(i), Y(i, :));

```

```

        k(1, :) = [ertek1, ertek2];
        Y(i+1, :) = Y(i, :) + h*k(1, :);
    else
        ertek1 = feval(f1, x(i), Y(i, :));
        ertek2 = feval(f2, x(i), Y(i, :));
        k(1, :) = [ertek1, ertek2*(U(i, 1))^2];
        Y(i+1, :) = Y(i, :) + h*k(1, :);
    end
end
end

```

5.2. Véges differencia algoritmus

Speciális eset

A 3.2. fejezet 2. példájában levezetett példában használt algoritmus forráskódja:

```

%Véges differencia módszer
%-u''(x)=f(x) u(1)=y(1) u(N)=y(N)
%a példa: f(x)=cos(x)/(sin(x)+1)^2

M=4;
N=M+1;    %N az osztópontok száma beleértve a végpontokat is
x=linspace(0,1,N)';
h=(x(N)-x(1))/(N-1);

%elkészül az A=(1/h^2)tridiag(-1,2,-1) mátrix
B1=-ones(N-3,1); B2=2*ones(N-2,1);
A1=diag(B1,-1); A2=diag(B2,0); A3=diag(B1,1); A=(1/h^2)*(A1+A2+A3);

%a lineáris egyenletrendszer jobb oldala

```

```

g=zeros(N,1);
for i=2:N-1,
    g(i)=cos(x(i))/(sin(x(i))+1)^2;
end

g=g(2:N-1)
% mivel a feladatot homogén peremfeltétellel adtuk meg nincs szükség g
% további módosítására

y1=A\g
y=zeros(N,1);
y(2:N-1)=y1;

%a pontos megoldás (u(x)=-2/(1+tan(x)/2))-0.70659*x+2)
xx=linspace(0,1,100);
u=-2./(1+tan(xx/2))-0.70659.*xx+2;
plot(xx,u,'k');
hold on;
%közelítő megoldás
plot(x,y,'k+', 'LineWidth',2);

```

Általános eset

Bemutatok egy másik programot, amely az általánosabb

$$\begin{cases} \mathcal{A}u := -au'' + bu' + cu = f & \Omega = (0, 1) \\ u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \end{cases}$$

alakú peremérték-feladatokon is végrehajtja a véges differencia módszert.

7. Példa. *A feladat a következő:*

$$\begin{aligned} -(1+x^2)u''(x) - xu'(x) + u(x) &= 0 \quad \Omega = (0, 1)\text{-en} \\ x(0) = 1, \quad x(1) &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

```

%Véges differencia módszer
%függvényegyütthatós lineáris másodrendű differenciálegyenletre
% $a(x)u''(x)+b(x)u'(x)+c(x)u(x)=f(x)$ 
% $u(1)=y(1)$   $u(N)=y(N)$ 
%(a példa:  $-(1+x^2)*u''(x)-x*u'(x)+u(x)=0$   $\Omega=(0, 1)$ -en
%       $x(0)=1$ ,  $x(1)=\text{gyok}(2)$  peremfeltétellel

N=10;
x=linspace(0,1,N)';
y=zeros(N,1); Y(1)=1; Y(N)=sqrt(2);
h=(x(N)-x(1))/(N-1);

a=1+x.^2;
b=-x;
c=ones(N,1);
f=zeros(N,1);

%elkészül az A tridiagonális mátrix
aj=a(2:N-1); aj1=a(3:N-1); aj2=a(2:N-2);
bj1=b(3:N-1); bj2=b(2:N-2);
cj=c(2:N-1);
B0=2*aj+h^2*cj; B1=-aj1-0.5*h*bj1; B2=-aj2+0.5*h*bj2;
A0=diag(B0,0); A1=diag(B1,-1); A2=diag(B2,1); A=(A0+A1+A2);

for i=2:N-1,
    f(i)=0;
end

g=f(2:N-1);
g(1)=(aj(1)+0.5*h*bj2(1))*Y(1);
g(N-2)=(aj(N-2)-0.5*h*bj1(N-3))*Y(N);

```



```

y1=A\g;
y=zeros(N,1);
y(2:N-1)=y1; y(1)=Y(1); y(N)=Y(N);

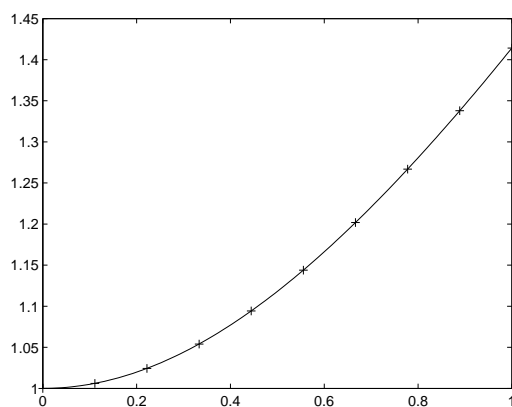
%a pontos megoldás: u(x)=(1+x^2)^(1/2)
xx=linspace(0,1,100)';
uu=sqrt(1+xx.^2);
plot(xx,uu);
hold on;

%közelítő megoldás
plot(x,y,'+');
%a pontos megoldás értékei az osztópontokban:
u=sqrt(1+x.^2);
[y u]

```

Megoldása pedig 10 osztópont esetén a felső sorban a közelítő, az alsóban a pontos megoldásokkal:

uu		1.0000	1.0061	1.0243	1.0540	1.0942	1.1439	1.2018	1.2668	1.3379	1.4142
y		1.0000	1.0062	1.0244	1.0541	1.0943	1.1440	1.2019	1.2669	1.3380	1.4142



Irodalomjegyzék

- [1] R. Kress: *Numerical analysis*, Springer (1998)
- [2] S. Larsson, V. Thomee: *Partial differential equations with numerical methods*, Springer (2003)
- [3] J. Stoer, R. Bullirsch: *Introduction to numerical analysis*, Springer (1992)
- [4] Stoyan Gisbert: *MATLAB 4. és 5. verzió*, TYPOT_EX (1999)
- [5] K. K. Ponomaljev: *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása*, Tankönyvkiadó, Budapest (1969)

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Kurics Tamásnak szakdolgozatom elkészítésében nyújtott segítségéért. Köszönöm segítőkész támogatását, dolgozatom alapos és kritikus átnézését, javaslatait.