Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

Szakdolgozat

Matematikai problémák a közgazdaságtanból

Konzulens: Dr. Sikolya Eszter

Adjunktus

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Készítette: Török Krisztina

Matematika Bsc

Matematikai elemző szakirány

Budapest

2009

1. Bevezetés

"A matematika bizonyos tekintetben mindig is az összekötő kapocs szerepét játszotta a különböző tudományok, valamint a tudomány és a művészet között. Meggyőződésem, hogy e tekintetben a matematikára a jövőben még fokozottabb szerep hárul."

Rényi Alfréd

A közgazdaságtan napjainkban nagyon fontos szerepet tölt be a mindennapi és a tudományos életben is. Ám a közgazdasági fogalmakat, levezetéseket, tételeket nehéz megérteni egy bizonyos matematikai háttér nélkül. Nem véletlen, hogy aki közgazdasági területen készül dolgozni, annak több féléven keresztül kell matematikával foglalkoznia, mert anélkül nem értheti meg teljesen a közgazdaság alapjait, a gazdasági problémák hátterét, a lépések miértjét és következményeit. Régen a kereskedelemhez és az egyszerűbb gazdasági összefüggések megértéséhez elegendő volt a legelemibb matematikai háttértudás is. A tudományág fejlődésével viszont szükségessé vált az egyre összetettebb matematikai háttértudás is. Antoine Cournot és Léon Walras voltak a legelső olyan közgazdászok, akik már magasabb szintű matematikát is használtak elméleteik levezetéséhez. A gazdasági elemzésekhez használt főbb matematikai területek a statisztika, a matematikai analízis, a valószínűségszámítás, a lineáris algebra és a játékelmélet.

Dolgozatomban az analízis és a játékelmélet közgazdasági alkalmazásait vizsgáltam. Az egyes fejezetekben egy-egy közgazdaságtani problémát, és az ott használatos matematikai eszközöket mutatom be.

Az első fejezetben a költségfüggvényekkel foglalkozom, melyek a vállalkozások működésének megértéséhez elengedhetetlenek. Megvizsgálom a függvények viselkedését és a különböző költségfüggvények egymás közötti kapcsolatait.

A következő fejezet első részében a parciális deriváltak közgazdasági szerepével foglalkozom. A vállalatok rá vannak kényszerülve, hogy bizonyos inputkombinációk mellett termelésüket maximalizálják. Ezen maximalizálási folyamatban fontos szerepe van a határtermelékenységnek.

A második alfejezet a határhaszon fogalmát vizsgálja. A határhaszon röviden azt fejezi ki, hogy ha egy vásárló által megvásárolt termék mennyiségét változtatjuk, az mekkora „boldogságot”, elégedettségérzést nyújt a fogyasztónak.

Végül a harmadik fejezetben a játékelmélet közgazdasági alkalmazásai közül mutatok be néhány példát. Egy gazdasági helyzetet, például piaci versenyt vagy piaci együttmüködési feltételek megszabását, mint játékot vizsgálhatunk. Játékelméleti eszközök felhasználásával megállapításokat tehetünk arra nézve, hogy a piaci szereplők milyen lépésekkel, milyen feltételekkel érhetik el a legnagyobb nyereséget.

2. Költségfüggvények

Minden vállalatnak, vállalkozásnak, termelésnek, lényegében bármilyen szolgáltatásnak vannak költségei. A költségekhez három alapfogalom is kapcsolódik, a termelési tényezők, az ár és a kibocsátás fogalma.

Termelési tényező alatt értünk minden olyan, a termelésnél felhasznált eszközt, amely közvetlen vagy közvetett módon hozzájárul a termék előállításához, de maga a tényező nem szűnik meg (azonnal) létezni a termelés folyamán. Ilyenek például a termékhez szükséges alapanyagok, a gépek, a munkaerő, de akár az előállításhoz szükséges tőke is. Három fő termelési tényezőt különböztetünk meg: a munkaerőt, a tőkét és a földet, utóbbi alatt nem csak a termőföldet, hanem a természetben fellelhető és felhasználható energiaforrásokat is értjük.

Az *ár* a gazdaságban egy termék vagy szolgáltatás ellenértékét jelenti, amelyet többnyire pénzben kell megfizetni.

A *kibocsátás* a vállalat által előállított és forgalomba hozott késztermékek mennyisége.

A *költség* ezek felhasználásával pedig a következőt jelenti: Ha pl. egy darab termelési tényezőnk van, amit x-el jelölünk, és az ő ára w, akkor a költséget az $x \cdot w$ szorzat adja meg. Például, ha cipőgyárosok lennénk, akkor a következő költségekkel kellene számolnunk: alapanyagok (mint bőr, gumi, cipőfűző), gépek ára és karbantartása, munkások bére, víz-, gáz-, fűtésszámlák, raktárterület bérlése, szállítási díjak…

Általában a költségek minimalizálása a cél, vagyis hogy egy adott y kibocsátási szintet a legolcsóbban tudjunk megvalósítani, ezáltal a profitunkat növeljük. A profit azt az összeget jelenti, ami a bevételből a költségeink kifizetése után marad, más néven haszonnak vagy nyereségnek is szokták nevezni. Példánkban ez azt jelenti, hogy ugyanazt a mennyiségű cipőt, ugyanolyan minőségben, legkisebb költséggel, vagyis a lehető legolcsóbban szeretnénk előállítani, így többet kereshetünk az üzleten. Vagyis a költségeinket adott y kibocsátás mellett minimalizálni szeretnénk:

$$c(w_1, w_2, .., w_n, y) = \min_{x_1,\dots,x_n} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot w_i \ ,$$

ahol a kibocsátás a termelési tényezők függvényében $f(x_1, x_2, ..., x_n) = y$

Mi most csak az $n = 2$ esettel foglalkozunk, amit az előző alapján így írhatunk le:

$$c(w_1, w_2, y) = \min_{x_1, x_2} (x_1 w_1 + x_2 w_2),$$

ahol a kibocsátás $f(x_1, x_2) = y$.

Az így kapott $c(w_1, w_2, y)$ függvényt *költségfüggvénynek* (angol kifejezéssel *cost function*) nevezzük, amely minden y kibocsátáshoz hozzárendeli adott (w_1, w_2) árak mellett azt a legkisebb költséget, amivel előállítható az adott kibocsátás.

Ezentúl tekintsük az árakat rögzített állandóknak, és így áttérhetünk az egyszerűbb $c(y)$ jelölésre is.

Azokat a költségeket, amik a kibocsátással együtt mozognak, *változó költségeknek* nevezzük, és $c_v(y)$ -al jelöljük. Amik változatlanok maradnak, azokat *állandó költségeknek* hívjuk, és $c_f(y)$ -al jelöljük! Az összköltség (amit $c(y)$ -al jelöltünk) a változó és állandó költségek összege lesz.

$$c(y) = c_v(y) + c_f(y)$$

Nézzünk ehhez egy példát!

Van két termelési tényezőnk, a hozzájuk tartozó árak 3 illetve 4 fizetőegység. A második tényezőnk mennyisége legyen rögzített 10 egység. A kibocsátási függvényünk a következő legyen: $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$. Mivel a második tényező árát és mennyiségét is ismerjük, ezért az állandó költségünk

$$c_f(y) = 4 \cdot 10 = 40$$

Mivel $x_2 = 10$, így a kibocsátási függvény módosul $y = \sqrt{10 \cdot x_1}$ –re. Ebből x_1-et kifejezhetjük: $x_1 = \frac{y^2}{10}$. Így

$$c_v(y) = x_1 \cdot w_1 = 3 \cdot \frac{y^2}{10} .$$

A $c(y) = c_v(y) + c_f(y)$ összefüggést használva a költségfüggvényünk

$$c(y) = 40 + 3 \cdot \frac{y^2}{10}$$

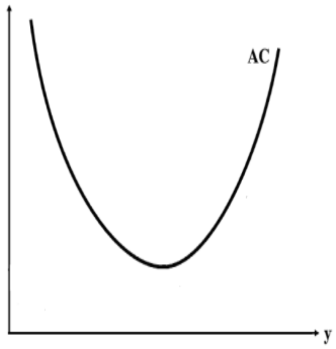
lesz.

Röviden nézzük meg a költségfüggvények fajtáit!

Itt meg kell említenünk, hogy a közgazdaságtan kicsit másképp használja a függvény fogalmát, mint az analízis. A függvény és a görbe fogalma több helyen nem különül el teljesen. Például a költségfüggvény alatt nem a fejezet elején megadott leképezést, hanem legtöbbször a függvény grafikonját, magát a koordinátarendszer-beli görbét értik, és szokták költséggörbének is nevezni. A görbéknek legtöbbször külön nevet adnak, ez általában a hozzájuk tartozó függvény angol kifejezésének rövidítése. A függvény megadásánál viszont legtöbbször a görbe jelét használják. Mivel mi matematikai szempontból közelítjük meg a közgazdasági témákat, problémákat, ezért megpróbáljuk precízen a matematikai fogalmakat és jelöléseket követni. Ezért többször is elő fog fordulni, hogy a közgazdaság területén használatos és jól bevált jelöléseket kicsit másképp használjuk, vagy teljesen le is cseréljük őket.

- *Átlagköltségfüggvény*: (average cost function), az y kibocsátási szint egy egységére jutó költséget adja meg, vagyis:

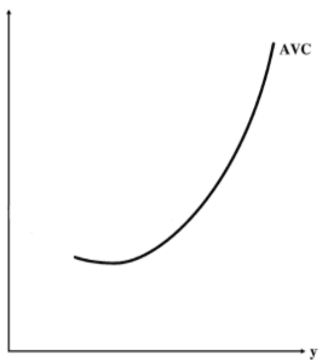
$$ac(y) = \frac{c(y)}{y}.$$



A görbe jelölése: AC.

- *Átlagos változóköltség-függvény* (average variable cost function) az y egy egységére jutó változó költséget adja meg, vagyis

$$avc(y) = \frac{c_v(y)}{y}.$$

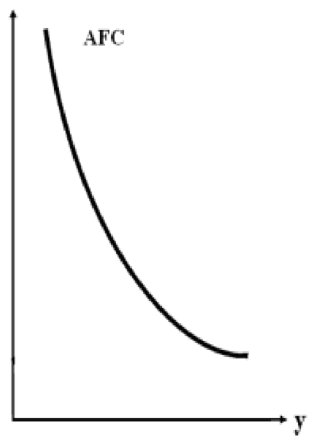


A változó költségek eleinte lassan, majd később egyre meredekebben emelkednek az y növekedésével. Gondoljunk egy vállalat kapacitására. Ha az y kibocsátás a vállalat kapacitásán már túlnő, akkor a vállalatnak hirtelen növelnie kell a teljesítőképességét, például több gépet kell vennie, új technológiát kell telepítenie, vagy több dolgozót kell alkalmaznia, ami rengeteg kiadással jár, tehát költségei ugrásszerűen elkezdenek növekedni.

A görbe elnevezése: AVC

- *Átlagos állandóköltség-függvény*: (average fixed cost function), az y egy egységére jutó állandó költséget mutatja.

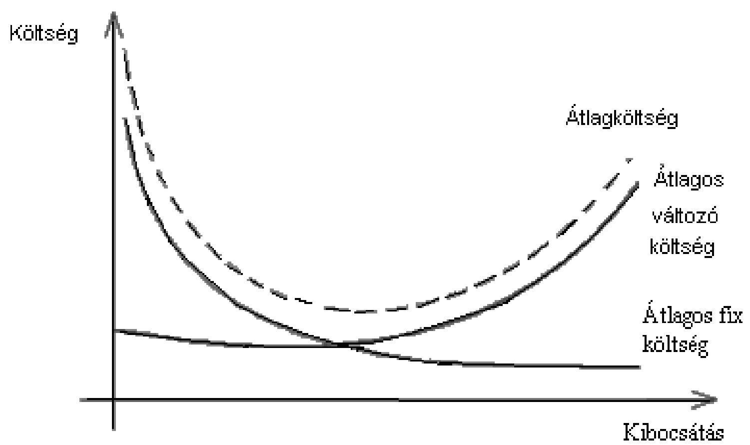
$$afc(y) = \frac{c_f(y)}{y}.$$



Könnyen végiggondolhatjuk, hogy ha $y \to 0$, akkor a függvény végtelenbe tart, ha viszont nagyobb a kibocsátásunk, vagyis ha az y nő, akkor a függvény tart a 0-hoz, mivel mindig ugyanaz a fix költség oszlik el a változó y értékekre. Vagyis egyre nagyobb kibocsátási mennyiség egy egységére egyre kevesebb állandó költség fog jutni.

A görbe jelölése: AFC.

Mivel a $c(y) = c_v(y) + c_f(y)$, ezért, $ac(y) = avc(y) + afc(y)$ ami, a koordinátarendszerben az AFC görbe, AVC és az AC görbékre az alábbit jelenti:



- *Határköltségfüggvény* (marginal cost curve), a kibocsátás változásának költségváltozásra gyakorolt hatását méri:

$$mc(y) = c'(y).$$

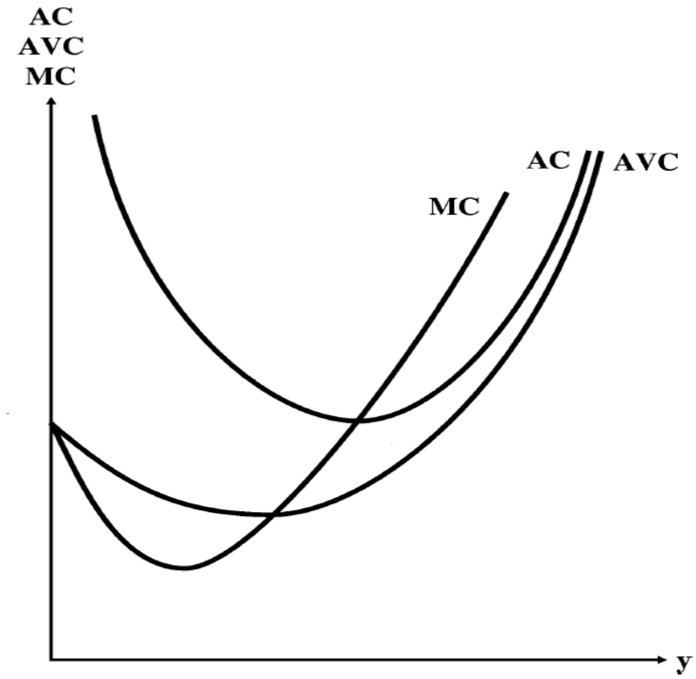
A görbe elnevezése: MC.

Megjegyzés: Itt láthatjuk, hogy a közgazdaságtanban a differenciálhányadost legtöbbször mint a változás mértékét mutató hányadost alkalmazzák. Ha meg van adva valamilyen $f(x)$ függvényünk, aminek az x változója a gazdasági függvényeknél általában valamilyen mennyiséget jelöl. Az x szerinti derivált a közgazdaságtanilag azt adja meg, hogy a változó kis változásával a függvényünk értéke mennyit és hogyan változik. A közgazdászok gyakran használják a határ szót a deriváltak elnevezésére, úgy mint határköltség, határbevétel, határtermelékenység, határhaszon, határtermék. Nézzünk meg ebből két példát:

Határbevétel: Az eladások egy egységgel való növeléséből származó bevételváltozás. Görbéjének jele: MR (Marginal Revenue). Ennek kiszámítását is úgy végezzük, hogy az összes bevétel függvényét deriváljuk a mennyiség szerint.

Határhaszon: A hasznosság fogalmának célja, hogy a gazdaság egy szereplőjének meghatározott javakhoz kapcsolódó preferenciáit matematikai eszközökkel modellezze. A határhaszon azt mutatja meg, hogy mennyivel változik meg a hasznosság, ha az egyik jószág mennyiségét egy egységgel növeljük. Görbéjének jele: MU (Marginal Utility) és az értékét úgy kapjuk meg, hogy a hasznossági függvényt deriváljuk aszerint a tényező szerint, amelyikhez tartozó jószág mennyiségét növelni akarjuk.

2.1. Határköltséggörbe és átlagköltséggörbék kapcsolata



Állítás: A határköltséggörbe az átlagos változó költséggörbe alatt halad annak minimumáig, a minimuma után pedig a határköltséggörbe van az átlagos változó költséggörbe felett. Így tehát MC az AVC-t annak minimumában metszi. Ugyanez a kapcsolat áll fenn az MC és AC görbék között.

Bizonyítás: A definíciók alapján keressük meg az AVC görbe minimumát! Tudjuk, hogy egy függvény szélsőértékhelye ott van, ahol a derivált értéke 0, és a derivált előjelet vált.

$$\left[\frac{c_v(y)}{y}\right]' = \frac{c_v'(y)\cdot y - 1\cdot c_v(y)}{y^2}$$

Ahol, ez a kifejezés kisebb, mint 0, ott a minimumérték alatt vagyunk. Ez akkor teljesül, ha

(1) $$c_v'(y)\cdot y \le c_v(y),$$

vagyis

(2) $$c_v'(y) \le \frac{c_v(y)}{y}$$

Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a minimumhely előtt az MC görbe az AVC görbe alatt halad, tehát az állítás első felét beláttuk.

Ugyanezt a másik irányból vizsgálva: Az (1) lépésben az egyenlőtlenségjelet megfordítva, a minimumérték felett leszünk, ekkor a (2) egyenlőtlenség is fordítva lesz igaz. A koordinátarendszerbeli ábrázolásnál azt kapjuk, hogy az MC görbe az AVC görbe felett halad, annak a minimumhelyétől jobbra. Ezzel az állítás második részét is beláttuk.

A minimumhelyen az (1) és (2) pontban egyenlőség lesz, vagyis ezzel igazoltuk, hogy az AVC görbét minimumpontjában metszi az MC görbe.

Ez az összefüggés az MC és az AC függvény kapcsolatára is igaz lesz, hiszen az átlagköltségfüggvényt $\frac{c(y)}{y}$, a határköltségfüggvényre pedig a következő lesz igaz:

$$c_v'(y) = c'(y) = c_v'(y) + c_f'(y) = c_v'(y) + 0\,.$$

Mivel az állandóköltség-függvény egy konstans, így deriváltja 0 lesz, tehát a költségfüggvény deriváltja a változóköltség-függvény deriváltjával lesz egyenlő. Ezek felhasználásával a bizonyítást egyszerűen átalakíthatjuk, csak a $c_v(y)$-t kell $c(y)$-ra kicserélni.

Nézzünk meg egy egyszerű példát az eddigiek alkalmazására!

Példa: Legyen $c(y) = 5000 + 25y^2 + 10y$. Mennyi lesz az állandó-, a változó-, és a határköltségfüggvény? Melyik pontban fogja metszeni az MC görbe az AC görbét?

Megoldás: Az állandó költséget az *5000* fogja adni, hiszen az az egyetlen tag, ami y változtatásával nem változik, tehát $c_f(y) = 5000$.

Tudjuk, hogy $c(y) = c_v(y) + c_f(y)$.

Behelyettesítve az egyenletbe a változóköltség-függvényt kapjuk:

$$c_v(y) = c(y) - c_f(y) = 25y^2 + 10y$$

A határköltségfüggvény a költségfüggvény deriváltja:

$$c'(y) = 50y + 10$$

A görbék metszéspontját pedig kétféleképpen is kiszámolhatjuk: vagy az AC görbe minimumát keressük meg, vagy azt nézzük, hogy hol egyenlő a két görbe:

Az első módszerrel az átlagköltségfüggvény:

$$ac(y) = \frac{c(y)}{y} = \frac{5000}{y} + 25y + 10$$

Ennek a minimuma ott van, ahol az első deriváltja egyenlő nullával, vagyis

$$-\frac{5000}{y^2} + 25 = 0 .$$

Vagyis $y = 10 \cdot \sqrt{2}$.

A második módszerrel:

$$50y + 10 = \frac{5000}{y} + 25y + 10$$

egyenletből szintén az $y = 10 \cdot \sqrt{2}$ megoldást kaptuk.

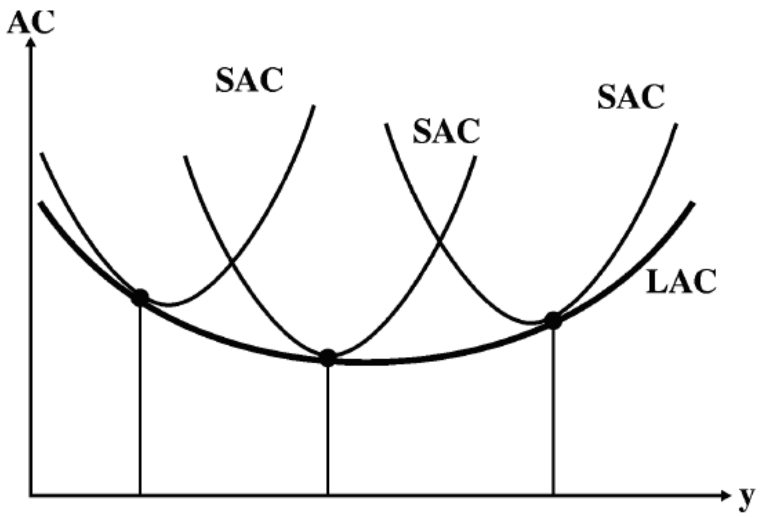
Tehát a két görbe a $(10 \cdot \sqrt{2}, 500 \cdot \sqrt{2} + 10)$ pontban metszi egymást.

2.2. A hosszútávú és rövidtávú költségfüggvények

Hosszú távon nem értelmezzük a fix költséget, a termelési költségek mindegyike változó költségnek tekinthető.

-*Hosszútávú átlagköltség*: az egy termékegységre jutó hosszú távú összköltség.
Hosszútávú görbe jelölése LAC (angol kifejezéssel long-run average cost curve) , a rövidtávú görbét pedig SAC-al (short-run average cost curve) jelölik.. A függvények

megkülönböztetésére a következő jelölést vezetjük be: a hosszútávú átlagköltségre a $c(y)$-t, míg a rövidtávú költségfüggvényre az angol short kifejezés rövidítését használva a $c_s(y)$-t.



Állítás: A hosszútávú átlagköltséggörbe a rövidtávú átlagköltséggörbék burkoló görbéje.

Bizonyítás: Használjuk a fejezet elején felírt képletet a hosszútávú költségfüggvényre:

$$c(y) = \min_{x_1,x_2} \{w_1x_1 + w_2x_2\},$$

ahol az x_1 és x_2 értékhez tartozó kibocsátást y-al jelöljük. Az optimális értéket, vagyis ahol az adott szintű kibocsátás a minimális költségekkel megtermelhető, $x_1^*(y)$ és $x_2^*(y)$-nak nevezzük el.

A következő két összefüggés lesz igaz:

$$c(y) \leq w_1x_1^*(y) + w_2x_2(y)$$

$$c(y) = w_1x_1^*(y) + w_2x_2^*(y)$$

A rövidtávú költségfüggvénynél ugyanezt a képletet használhatjuk, de ott az egyik tényező rögzített. Jelöljük ezt a tényezőt $\tilde{x}_2$-al, magát a költségfüggvényt pedig a $c_s(y,\tilde{x}_2)$-al.

Ezek alapján igaz lesz az is, hogy

$$c(y) \leq w_1x_1^*(y) + w_2\tilde{x}_2,$$

vagyis

$$c(y) \le c_s(y, \widetilde{x}_2).$$

Tehát ezzel beláttuk, hogy a hosszútávú költséggörbe a rövidtávú költséggörbe alatt halad. De hol metszik egymást ezek a görbék? Nyilván ott, ahol valamely y^* esetén az $\widetilde{x}_2 = x_2^*(y^*)$,

és így

$$c(y^*) = w_1 x_1^*(y^*) + w_2 x_2^*(y^*) = w_1 x_1^*(y^*) + w_2 \widetilde{x}_2 = c_s(y^*, \widetilde{x}_2).$$

A költségfüggvények általános tulajdonságairól ugyan nem beszéltünk részletesen, de általánosan tudni lehet, hogy ezek a függvényke injektívek és folytonossak. Ebből adódóan csak egy olyan y^* érték lesz, ahol teljesül, hogy $\widetilde{x}_2 = x_2^*(y^*)$.

Vagyis a hosszú és rövidtávú költségfüggvények csak egy pontban lesznek egyenlők.

Mivel a bizonyítás nem függ $\widetilde{x}_2$ választásától, így a rövidtávú költségfüggvénytől sem függ, ezért minden rövidtávú költségfüggvényre igaz lesz az állítás, csak az érintési pontok más-más y^* értékekhez fognak tartozni. Tehát a hosszútávú költségfüggvény az összes rövidtávú költségfüggvény alatt halad, és pontosan egy-egy pontban érinti őket.

2.3. Speciális technológiák alkalmazása költségfüggvényekre

Még mindig azokkal az esetekkel foglalkozunk, amikor a költségfüggvényeket két termelési tényező esetére írjuk fel. Elevenítsük fel az általános alakot:

$$c(w_1, w_2, y) = \min_{x_1, x_2}(x_1 w_1 + x_2 w_2), \text{ ahol a kibocsátás } f(x_1, x_2) = y$$

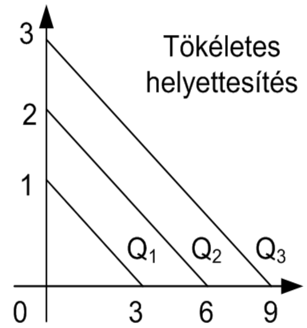
- *Tökéletes helyettesítés:*

$$\min_x \{w \cdot x; \quad y = f(x)\}, \text{ ahol } f(x_1, x_2) = a x_1 + b x_2.$$

Két tényező esetében akkor beszélünk tökéletes helyettesítésről, ha valamennyi első tényező pontosan ugyanannyit ér a fogyasztó számára, mint valamennyi második tényező.

A lenti ábránkon az első termék 1 egysége a fogyasztó számára annyit ér, mint a második termékből 3 egység. Mivel a tényezők egymással tökéletesen helyettesíthetők, a vállalat azt az inputtényezőt fogja választani, amelyik az olcsóbb. Ezért $x_1 = \frac{y}{a}$ és $x_2 = \frac{y}{b}$, így a költségfüggvény a következő lesz:

$$c(w,y) = min\left\{w_1 \frac{y}{a}, w_2 \frac{y}{b}\right\} = y \cdot min\left\{\frac{w_1}{a}, \frac{w_1}{b}\right\}.$$



Az ábrán a Q_1 egyenest például azok az (x_1, x_2) pontpárok alkotják, amik egy adott y_1 értékre kielégítik az $y_1 = f(x_1, x_2)$ egyenletet. Vagyis az egyenesek a termelési tényezők olyan kombinációit ábrázolják, amelyek ugyanahhoz a kibocsátási szinthez tartoznak.

- *Tökéletes kiegészítés (Leontief-technológia):*

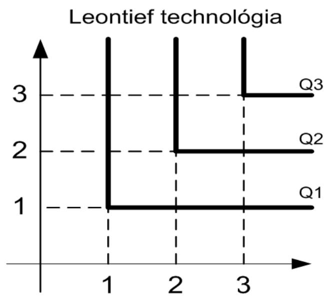
a kibocsátás $f(x_1, x_2) = min\{ax_1, bx_2\}$.

Két jószág egymásnak tökéletes kiegészítője, ha meghatározott arányban és mindig csak együtt kerülnek fogyasztásra. Például ilyen a kávé és a kávétejszín. Természetesen vehetünk több kávétejszínt, mint kávét, vagy fordítva, de akkor az igényeinket nem elégítjük ki megfelelően, ezért lesz a görbe L alakú. A mi példánkban és az ábrán is $a : b = 1 : 1$.

Adott y kibocsátás esetén ez pedig azt jelenti, hogy a vállalat a ráfordításokat csak rögzített arányban használja fel. Tehát $y = ax_1 = bx_2$, ebből $x_1 = \frac{y}{a}$ és $x_2 = \frac{y}{b}$.

A vállalat költségfüggvénye pedig:

$$c(w_1, w_2, y) = w_1x_1 + w_2x_2 = \frac{w_1y}{a} + \frac{w_2y}{b} = y \cdot \left(\frac{w_1}{a} + \frac{w_2}{b}\right).$$



- *CES-függvények*

A technológia neve az angol *constant elasticity of substitution* elnevezés rövidítéséből származik, ami magyarul annyit tesz: konstans helyettesítési rugalmasságú függvények.
A kétváltozós CES kibocsátási függvény általános alakja

$$y = f(x) = \left(x_1^p + x_2^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

A költségfüggvény alakjához tartozó levezetést most nem részletezzük, csak megemlítjük, hogy a Lagrange-féle multiplikátor módszerrel történik:

$$c(w_1, w_2, y) = \frac{1}{1-a} \cdot \left(\frac{a}{1-a}\right)^{-a} \cdot w_1^a \cdot w_2^{1-a} \cdot y.$$

Vegyük észre, hogy ha $p \to 1$, akkor a tökéletes helyettesítésről van szó.

- *Cobb-Douglas:*

Cobb–Douglas-függvények a CES-függvények speciális esete. A kétváltozós Cobb-Douglas-típusú termelési függvény általános alakban így írható fel:

$$f(x_1, x_2) = c \cdot x_1^a \cdot x_2^b$$

Az költségfüggvény alakjához tartozó levezetést most nem részletezzük, csak az eredményt közöljük:

$$c(w_1 w_2, y) = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-a}{a+b}}\right] \cdot w_1^{\frac{a}{a+b}} \cdot w_2^{\frac{b}{a+b}} \cdot y^{\frac{1}{a+b}}.$$

3. Parciális deriváltak szerepe a közgazdaságtanban

3.1. Határtermelékenység

A vállalatok nem tudnak korlátlanul termelni. Adott mennyiségű kibocsátás csak bizonyos inputkombinációk révén valósítható meg. De a vállalatok számára az inputok beszerzése, előállítása költségekkel jár. Ezért rákényszerülnek arra, hogy adott mennyiségű inputok kombinációjából a maximális kibocsátást hozzák létre. Így definiálhatjuk a *termelési függvény*, idegen szóval *production function*. A függvény az egységnyi termelési tényezők mellett elérhető maximális y kibocsátást adja meg.

Tekintsünk egy $Y = F(K, L, T)$ termelési függvényt. Az Y a megtermelt jószág mennyisége, K a befektetett tőke, L a felhasznált munkaerő, T a termőföld méretét jelöli.

Jószág: A javak egyes számú megfelelőjeként általában a jószág szó használatos. Javak alatt értünk a közgazdaságtanban minden olyan dolgot, amely – közvetve vagy közvetlenül – emberi szükségletek kielégítésére alkalmas.

Tőke: A termelési folyamatban használt javak gyűjtőfogalma. A hosszabb időre befektethető pénzt, anyagi és szellemi javakat értjük alatta, ami vállalkozás elindításához és fenntartásához szükséges.

Munkaerő: magába foglal minden olyan emberi képességet, amely a javak előállításában, feldolgozásában felhasználható. A közgazdászok elsősorban fizikai jellegű munkára való képességet értik alatta, a fennmaradó részt pedig *szellemi tőke* néven kezelik.

A termelési függvényünk elsőrendű parciális deriváltjai a következőket adják:

$\frac{\partial Y}{\partial K} = F'_K$ a tőke határtermelékenysége

$\frac{\partial Y}{\partial L} = F'_L$ a munka határtermelékenysége

$\frac{\partial Y}{\partial T} = F'_T$ a termőföld határtermelékenysége

A *határtermelékenység* azt adja meg, hogy egységnyi termelési tényező növekedésével mennyit nő a termelés.

A másodrendű parciális deriváltakat összehasonlításra használják. Pl. A vegyes parciális deriváltak a termelési tényezők változtatásának egymásra való hatását mutatják, míg a többi másodfokú deriváltakból az elsőrendű parciális deriváltak által leírt változás gyorsaságáról, mértékéről kaphatunk információt.

Nézzük meg ezeket az előző példán! Használjuk az előző fejezetben már bevezetetteket, és tegyük fel, hogy F Cobb-Douglas függvény, vagyis

$$F(K,L,T) = A \cdot K^a L^b T^c$$

Ennél a függvénynél általában feltesszük, hogy az *a, b, c* és *A* pozitív állandók, *K, L*, és *T* pedig szintén csak pozitív értékeket vehet fel.

Az elsőrendű deriváltak a következők lesznek:

$$F'_K = AaK^{a-1}L^bT^c \qquad F'_L = AbK^aL^{b-1}T^c \qquad F'_T = AcK^aL^bT^{c-1}$$

Mivel mindegyik határtermelékenység pozitív, így bármelyik termelési tényező egységnyi növelése növelni fogja a kibocsátást.

A másodrendű vegyes parciális deriváltaknál meg kell említenünk a Young-tételt, miszerint „szép" függvényeknél (sokszor differenciálható függvények) igaz az, hogy ha adott két változó szerint deriválunk, akkor mindegy lesz, hogy milyen sorrendben tesszük ezt meg, hiszen a deriváltak egyenlők lesznek. Ezért a három változó mellett elég három másodrendű vegyes parciális deriváltat felírni:

$$F''_{KL} = AabK^{a-1}L^{b-1}T^c \qquad F''_{KT} = AacK^{a-1}L^bT^{c-1} \qquad F''_{LT} = AbcK^aL^{b-1}T^{c-1}$$

Ezek mindegyike pozitív lesz, tehát ebből arra következtethetünk, hogy bármelyik termelési tényezőt növeljük egy egységgel, akkor a másik tényező határtermelékenysége is növekedni fog. Az ilyen termelési tényezőket *kiegészítő termelési tényezőknek* nevezzük. Ha pl. több tőkét tud a vállalat befektetni, akkor több lesz a megtermelt jószág mennyisége is, vagy hétköznapibb példában: ha nagyobb a kávé iránti kereslet, akkor cukorból is többet fognak venni.

A többi másodrendű parciális derivált:

$$F''_{KK} = Aa(a-1)K^{a-2}L^bT^c \qquad F''_{LL} = Ab(b-1)K^aL^{b-2}T^c \qquad F''_{TT} = Ac(c-1)K^aL^bT^{c-2}$$

Ha az a, b vagy c egynél kisebb állandók, akkor a második deriváltak értéke negatív lesz. Ezt úgy értelmezhetjük, hogy például a tőke kicsiny növelésével az első derivált pozitív tulajdonsága miatt a kibocsátás nő, de a növekedés egyre csökkenő mértékben fog nőni. Ha egynél nagyobb valamelyik állandó, akkor a kibocsátás növekedésének mértéke nem lesz csökkenő.*

* Lásd még [2] irodalom 486. oldalán.

3.2. Határhaszon, Gossen-törvények

Már az első szakaszban is említést tettünk a határhaszon fogalmáról. Emlékeztetőül: Legyen a (teljes) hasznossági függvény

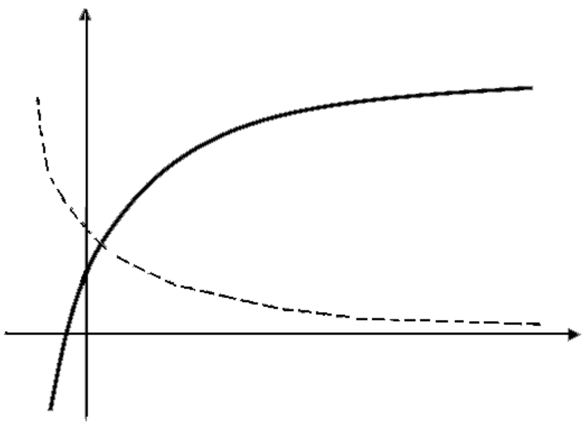
$$tu(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

ahol $x_1, x_2, \ldots, x_n$ -el jelöljük a különböző termékeket. A függvény azt adja meg, hogy az adott termékekből megadott kombináció alapján összeállított úgynevezett *fogyasztói kosár* mekkora „boldogságot”, elégedettségérzést nyújt a fogyasztónak. A határhaszon értékét valamelyik x_i változó szerinti parciális derivált segítségével kapjuk meg, ami megmutatja, hogy ha az adott termék mennyiségét egy egységgel növeljük, akkor a fogyasztó összhaszna mennyivel nő.

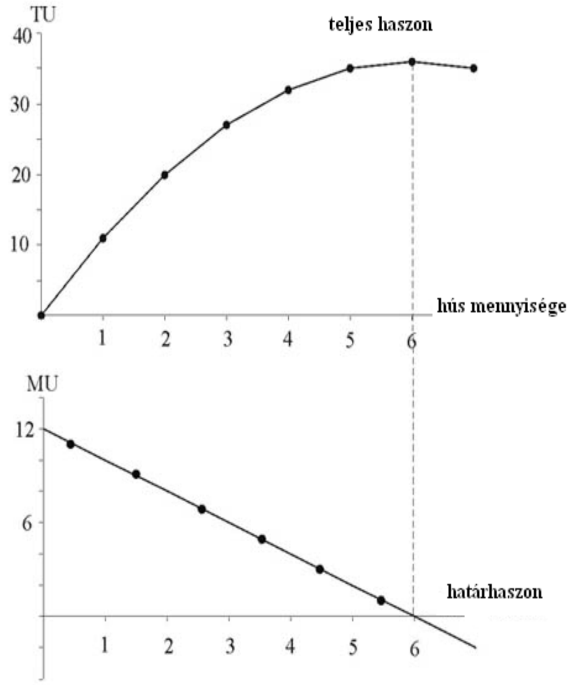
$$mu(x_i) = u'_{X_I}$$

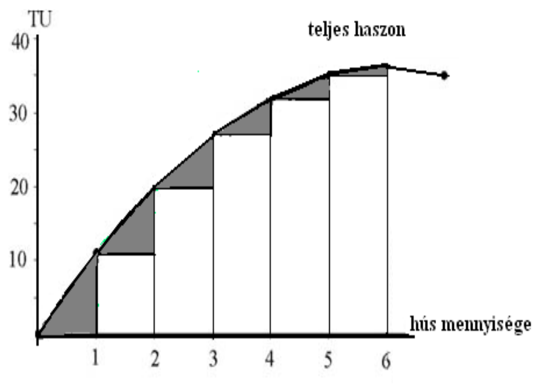
A hasznossági függvényekhez is tartozik két görbe: a hasznossági görbe neve TU (total utility), a határhasznosságé pedig MU (marginal utility).

De gondoljunk egy egyszerű esetre: például ha az ebédünk hasznosságát próbáljuk mérni. Ha éhesek vagyunk, akkor az első szelet húsnak a határhaszna számunkra nagyon nagy, ugyanígy a hozzá kapott egy pohár ásványvíznek is. Ha kapunk még egy szelet húst vagy még egy pohár vizet, akkor még mindig nagy élvezetet nyújt az elfogyasztásuk, de már nem olyan nagyot, mint az első adagnál, hiszen akkor még nagyon éhesek voltunk, a második adag előtt pedig már a szükségérzetünket csökkentettük. A további harmadik, negyedik, ötödik, ... adag étel és víz már korántsem fog olyan jól esni, mint az első adag, sőt! A legtöbb ember ilyenkor már inkább rosszul lesz, tehát számára az ebédnek a hasznossága egy pont után elkezd csökkenni. Tehát a határhaszon függvénye csökkenő függvény lesz. A teljes hasznosság pedig egyre kisebb mértékben lesz növekvő függvény. Nézzük meg ezeket koordinátarendszerben!



A folytonos vonallal rajzolt függvény a teljes hasznossági, a szaggatott vonallal rajzolt függvény pedig a határhasznossági függvény.





A fenti két ábrán láthatjuk a TU és MU görbe kapcsolatát. A teljes hasznossági függvény monoton növekedő egy bizonyos pontig. A második ábrán láthatjuk a besatírozott részeknél, hogy egy-egy újabb egységnyi termék már egyre kevesebb haszonnal jár a fogyasztó számára. Ezeket az értékeket külön görbén ábrázolva megkapjuk az MU görbét, amit az első ábra alsó koordinátarendszerében láthatunk. Még az is megfigyelhető, hogy ahol az MU görbe metszi az x tengelyt, ott a TU görbének maximuma lesz. Ez azért van, mert a határhaszon függvény a teljes hasznossági függvény deriváltja, és mivel a határhaszon nullával egyenlő, így ez azt jelenti, hogy a teljes hasznossági függvény deriváltja lesz nulla, ami azt jelenti, hogy a hasznossági pontnak szélsőértéke lesz. Mivel a teljes hasznossági függvény monoton növekedő, így ez a szélsőérték csak maximum lehet. Ezt a pontot a közgazdaságtanban *telítettségi pontnak* nevezik. Ettől a maximumhelytől jobbra a görbe monoton csökkenő lesz, ami azt jelenti, hogy innentől kezdve egy új egységnyi terméknek már negatív haszna lesz, tehát a fogyasztó „boldogságérzetét" csökkenteni fogja. A példánkban ez az a pont, ahol ha még több húst meg kellene ennünk, vagy még több vizet kellene innunk, akkor már inkább rosszul éreznénk magunkat.

Ezzel a jelenséggel először Hermann Heinrich Gossen német közgazdász foglalkozott, és az előbb megfogalmazott szabályt 1854-ben írta meg az Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs (Az emberi kapcsolatok törvényeinek kialakulása) című művében. Később az összefüggést az ő tiszteletére Gossen I. törvényének nevezték el. Szokták a *Gossen-féle csökkenő élvezetek/határhaszon elvének* is nevezni.

Gossen II. törvénye az előnykiegyenlítődés elvét fogalmazza meg. Minden x_i termékhez tartozik egy p_i ár. Van egy vásárlói kosarunk, és valamilyen korlátunk is, legtöbbször ez idő- vagy pénzbeli korlát szokott lenni. A kérdés az, hogy melyik terméket vegyük meg! A különféle dolgok hasznosságára nincs mértékegységünk, de a rájuk költött pénz ismeretében így is összevethetjük őket egymással. Ha több dolog is van, amit szeretnénk megvenni, de nincs rá elég pénzünk, akkor a vásárlást célszerű úgy végrehajtani, hogy ne egy igényegészben, hanem minden igényünket részben elégítsük ki. Akkor költekezünk jól, ha az utolsó pénzegységünket is úgy tudjuk elkölteni, hogy a bármelyik termékre is költenénk, ugyanannyi hasznosságot jelentene számunkra. Az egyes termékekre szánt egy pénzegységen elért határhasznot úgykapjuk meg, hogy a termék határhasznát elosztjuk a temék árával. Tehát a törvény azt mondja ki, hogy a fogyasztó akkor költi el jól a jövedelmét, ha ezek a hányadosok egyenlőek lesznek. Vagyis

$$\frac{mu(x_1)}{p_1} = \frac{mu(x_2)}{p_2} = \ldots = \frac{mu(x_n)}{p_n}.$$

Persze a Gossen-törvények nem mindig teljesülnek. Például, ha a termék egy szenvedély tárgya, (alkohol, dohányárú, vagy például a bélyeg a bélyeggyűjtő számára) akkor az újabb és újabb egységek a termékből ugyanakkora, vagy még nagyobb határhaszonnal járnak, az MU görbe nem csökkenő lesz, nem lesz telítettségi pont.

A Gossen–törvények ellenzőinek másik kifogása, hogy adott terméket más személyek, vagy ugyanaz a személy más helyzetben, máshogyan értékel, más hasznosságot rendel hozzá. Például ha az utcán találnánk egy gyémántdarabot, vagy egy vízzel teli üveget, akkor valószínűleg a gyémánt jelentene nekünk nagyobb hasznosságot, de ha ugyanezt a sivatagban találnánk, akkor viszont a vizet értékelnénk jobban. De az is különbséget jelenthet, hogy mikor mennyire értékeljük a vizet: valószínűleg ha pár órája a napon sétálunk, akkor nagyobb élvezettel jár a víz elfogyasztása, mint 10 perc séta után.

Ezek ellenére a legtöbb gazdasági számításban nagy hasznát vehetjük a két törvénynek.

Nézzünk meg egy példát!

Hasznossági függvényünk legyen $tu(x,y) = x \cdot y^2$, ahol x az első, y a második termék mennyisége. Ismert továbbá, hogy az első termék ára $p_x = 25$ Ft, a második termék ára $p_x = 10$ Ft. Tudjuk, hogy a határhasznok aránya $\frac{mu(x)}{mu(y)} = \frac{y^2}{2xy}$. Adjuk meg a fogyasztó által a két termékből keresett mennyiségeket, ha a jövedelme 540 Ft!

Megoldás: a jövedelmünk elköltését az alábbi egyenlettel írhatjuk le: $25 \cdot x + 10 \cdot y$. Gossen II. törvénye értelmében $\frac{mu(x)}{p_x} = \frac{mu(y)}{p_y}$. Átrendezve az egyenlőséget kapjuk, hogy:

$$\frac{y^2}{2xy} = \frac{y}{2x} = \frac{mu(x)}{mu(y)} = \frac{p_x}{p_y} = \frac{25}{10},$$

vagyis $x = 0{,}2 \cdot y$.

Ezt felhasználva számoljuk ki x és y értékeket!

$540 = 25 \cdot 0{,}2 \cdot y + 10 \cdot y$, vagyis $y = 36$, így $x = 18$ lesz.

4. Játékelméleti alkalmazások

A gazdasági szereplők mindig valamilyen stratégia alapján tervezik meg előre az elkövetkezendő lépéseiket. Például azt, hogy egy vállalat belép-e egy adott piacra, összedolgozik-e egy másik vállalattal, emeli, vagy éppen csökkenti az árait, fejleszti vagy bezárja-e a vállalatot. Szinte minden lépéshez tartozik valamilyen stratégia. Itt használhatjuk a matematika játékelméleti eszköztárát. A *játékelmélet* a stratégiai cselekvések általános elemzésére szolgál, tanulmányozni tudjuk vele a gazdasági viselkedést. Nézzük meg ezért a játékelmélet néhány módszerét, és ezeket utána gazdasági példákon alkalmazzuk is!

A játékelmélet matematikai modellek olyan gyűjteménye, amelyeket többszereplős konfliktushelyzetek tanulmányozására használunk. A konfliktushelyzeteket ezentúl *játéknak*, a döntéshozókat pedig *játékosoknak* nevezzük. A játékelmélet egy adott helyzetben a játékosok cselekedeteit és az ennek a következményeként létrejövő helyzeteket elemzi a játékosok viselkedésére és a játékra tett különféle feltételezések mellett. Általában azt vizsgáljuk, hogy a játékosok együttes cselekvéseként kialakuló helyzet milyen, elsősorban mennyire stabil. Ez utóbbi megközelítés vezet a játékelméletben szinte mindenhol jelenlévő egyensúlyi szemlélethez.

Minden játékoshoz tartozik egy stratégiahalmaz és egy kifizetőfüggvény. A játékok leírásának legtömörebb formája az úgynevezett normál forma:

$G = \{S_1, S_2, \cdots, S_n; f_1, f_2, \cdots f_n\}$,

ahol S_i a játékosok (nem üres) stratégiahalmazai, $f_i : S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \to R$ kifizető függvény, ahol az $f_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ az *i.* játékos kifizetését adja meg, amikor a játékosok sorra az $s_1, s_2, \ldots, s_n$ stratégia szerint játszanak. A játékosok kifizetőfüggvénye megadható egy n-dimenziós tömbbel (polimátrix-al), ami azt mutatja meg, hogy melyik játékos melyik stratégiája esetén mennyi „fizetséget" kapna. Kétszemélyes játékok esetében ez egy 2×2-es mátrixot jelent (innen származik a bimátrix-játék elnevezés).

Vannak olyan stratégiák, amiket az adott játékban biztosan nem fogunk választani, mert van egy másik olyan stratégia, ami minden esetben jobb fizetséget jelent a játékos számára. Ezt a következőképpen definiáljuk: Legyen az *i.* játékosunk stratégiahalmaza S_i, ebből pedig két stratégiát jelöljön s_i és t_i.

S_{-i} jelentse azon stratégiahalmazok szorzatát, amikbe az S_i stratégiahalmaz nem tartozik bele,vagyis

$S_{-i} = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_n$.

Az s_i stratégia *gyengén dominálja* t_i-t, ha igaz, hogy

$f_i(s_i, s_{-i}) \geq f_i(t_i, s_{-i})$ minden $s_{-i} \in S_{-i}$.

Ez azt jelenti, hogy az *i*. játékos kifizetése az s_i stratégiánál lesz a legnagyobb, miközben a többiek az s_{-i} szerint játszanak. Az s_{-i} egy úgynevezett stratégiaprofil S_{-i}-ből, egy *n-1* stratégiából alkotott vektor. Az (s_i, s_{-i}) egy stratégia-vektor, aminek első koordinátája az i. játékos stratégiáját mutatja meg, míg a második koordináta is egy vektorra utal, ami a többi játékos stratégiáit adja meg. Ekkor az i. játékos az $s_i \in S_i$ stratégia szerint, míg az összes többi játékos a s_{-i} stratégiaprofil szerint játszik. Vagyis a többi játékos stratégiája nem származhat az i. játékos stratégiahalmazából.

Ha csak szigorú egyenlőtlenséget engedünk meg, akkor *szigorú dominanciáról* beszélünk.

Egy játékot akkor nevezzük *stabilnak* vagy *önmegvalósítóna*k, ha egyik játékos sem tudja a kifizetését azzal növelni, hogy az S_i stratégiahalmazából másik stratégiát alkalmaz, miközben a többi játékos még mindig S_{-i} játszik. Azt az stratégiakombinációt, amikor egy játék ilyen stabil állapotba kerül, *Nash-egyensúlypont*-nak (rövidítve NEP) nevezik. Egy $s^* \in S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$, $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ stratégiaprofil Nash-egyensúlypont, ha teljesül rá, hogy

$f_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq f_i(s_i, s_{-i}^*)$ minden $s_i \in S_i$ és minden $i = 1, \ldots, n$ esetén.

Az előző meghatározások legkönnyebben egy példán érthetőek meg:

Két rab ül a börtönben, akik egy bűntényben vettek részt, és egymástól elkülönítve hallgatják ki őket. Itt a két játékos a két bűnöző lesz, nevezzük őket *A*-nak és *B*-nek, és a játék maga a kihallgatás. Mindkét bűnözőnek alapvetően két lehetősége van: bevallja a bűntényt vagy letagadja azt. Ha az egyik bevallja a bűntényt, és ezzel a társát is leleplezi, elengedik a büntetését, de a másikat 6 hónap börtönre ítélik. Ha mindkét játékos vall, akkor 3-3 hónapra zárják be őket. Ha mindkét játékos tagad, akkor mindketten 1 hónapra kerülnek börtönbe. Itt a kifizetések az előbb kapott meghatározott büntetések hónapokban mérve. Lássuk a játék kifizetési mátrixát!

B

		Vall	Tagad
	Vall	(-3,-3)	(0, -6)
A	Tagad	(-6, 0)	(-1,-1)

Képzeljük magunkat *A* játékos helyébe! Ha *B* vall, vagyis az első oszlopban vagyunk, akkor *A* játékosnak mindenféleképpen érdemes vallania, mert így csak 3 hónap büntetést kap 6 helyett. Ha *B* tagadja a bűntényt, akkor *A*-nak vallania kell, mert akkor ő nem kap büntetést, ellenkező esetben 1 hónap büntetést kapna. Tehát *A*-nak mindenféleképpen a „Vall" stratégia lenne a megfelelő, vagyis *A* számára a Vall stratégia a domináns stratégia, teljesül rá, hogy

B oldaláról hasonló a helyzet: ha *A* vallana, akkor *B*-nek is vallania kell, ha *A* viszont tagadja a bűntényt, akkor *B*-nek megint jobban jár a „Vall" stratégiával, vagyis itt is ez lesz a domináns stratégia. Tehát mindkettő játékos ésszerűen a „Vall" stratégia melett fog dönteni.

$f_i(s_i,Vall) \geq f_i(s_i,Tagad)$, ahol $s_i \in S_i = \{Vall,Tagad\}$.

Vagyis a domináns Nash-egyensúlypont az $s^* = (Vall,Vall)$ stratégiaprofil lesz. Másrészt mindkét játékosnak a $s = (Tagad,Tagad)$ stratégiapárosítás lenne a legjobb, hiszen mindketten csak egy-egy hónap büntetést kapnának. Miért van az, hogy mégsem erre az eredményre jutottunk előbb? Mert ahhoz, hogy mindkét játékos ezt válassza, szükség lenne arra, hogy a játékosok előre meg tudják beszélni a döntésiket és cselekedeteiket, és hogy teljesen meg tudjanak bízni a játék alatt egymásban. Mivel ezek az előfeltételek nem adottak, így a játék kimenete legnagyobb valószínűséggel az lesz, hogy mindkét játékos vallani fog, így a játék szerinti kifizetésük, vagyis a büntetésük három-három hónap lesz.

Az előbbiekben felírt példa egy híres játék, és a *fogolydilemma-játék* néven vált ismertté.

Most nézzük meg, hogy alkalmazzák a játékelméleti módszereket a közgazdaság területen!

4.1. A piacra való belépési döntés

Vizsgáljunk egy monopóliumot! A *monopólium* a közgazdaságtanban olyan piacok megnevezése, ahol egyetlen eladó van, aki ezáltal uralja az adott piacot. A játékot itt az jelenti, hogy egy új vállalat belép-e vagy nem, és ezután harcol-e vagy nem, vagyis felveszi-e a versenyt, vagy nem. Ha belép az új játékos, akkor már *duopóliumról* beszélünk, ahol két eladó van, így a monopóliumhoz képest a két cég külön-külön kisebb befolyásoló erővel rendelkezik, de még mindig számottevő lesz egy-egy döntésük hatása. Vegyünk egy példát: van egy piaci vállalat (jelöljük *B*-vel), és van egy másik, aki be szeretne lépni (jelöljük *A*-val). Ha *A* vállalat nem lép be, akkor a kifizető függvény *(3, 10)* lesz, vagyis *A* kifizetése 3, *B* kifizetése 10 lesz. Ha mégis úgy dönt, hogy belép, akkor kérdés az, hogy a két játékos versenyzik-e vagy sem. Ha nem versenyeznek, akkor a kifizető függvény legyen *(5, 3)*, ha viszont harcolnak, akkor *(0,0)*.

		B: Versenyzik	B: Nem versenyzik
	Kívül marad	(3, 10)	(3, 10)
A	Belép	(0, 0)	(5, 3)

A kifizetési mátrixban két Nash-egyensúlyi pont van: az $s_1^* = (\mathit{Kívül\ marad}, \mathit{Versenyzik})$, és az $s_2^* = (\mathit{Belép}, \mathit{Nem\ versenyzik})$ pontok. Ám ebből csak az egyik lesz a valóságban egyensúly. A mátrixban ez azért nem látszik egyértelműen, mert nem vesszük figyelembe, hogy a belépési játékban a döntési sorrend adott. Visszafelé haladva vizsgáljuk meg a játékot. Ha *A* már meghozta döntését, akkor a *B* hogyan dönt? Ha *A* a „Kívül marad” stratégiát választja, akkor *B* bármit választhat, mindkét esetben ugyanaz a játék kifizetése: *(3, 10)*

Ha *A* a „Belép” stratégiát választja, akkor *B* mindenképp a „Nem versenyzik” stratégiát választja, az neki jobban megéri, és ekkor a játék kifizetése *(5, 3)* lenne.

Ha már tudjuk *B* választásait, akkor haladjunk visszafelé és nézzük meg *A* választását! Mivel *A* is előre kiszámolhatja ugyanezeket, amiket most mi, ezért ő is tudja *B* lehetséges választásait. A két kimenetből neki a második lesz a nyereségesebb, tehát *A* ésszerűen a „Belép" stratégiát fogja alkalmazni.

Ezek lennének az ésszerű döntések, de lehet rajta még változtatni, ha az egyik játékos a másikat meg tudja győzni valamivel, mondjuk valamilyen gazdasági fenyegetés alkalmazásával arról, hogy számára jobb a másik stratégia választása.

Erre nézzünk most egy példát!

B számára jobb lenne, ha *A* a „Kívül marad" stratégiát választaná, hiszen ekkor *B* kifizetése mindenféleképpen 10 lenne. Ezt úgy érheti el, ha megfenyegeti *A* játékost azzal, hogy ha ő a Belép stratégiát választja, akkor *B* a „Versenyzik" stratégiát fogja választani, és így *A* kifizetése 0 lenne. Ha a fenyegetés hatásos, akkor *A* megijed, és inkább nem lép be a piacra, és ezzel 3 egységnyi kifizetéshez juthat.

Mi lehet az a fenyegetés, amit *A*-ra tényleg hathat? Tegyük fel, hogy a már bennlévő vállalatnak van felesleges kapacitása. Ez azt jelenti, hogy többet is tudna termelni, de ezt most nem használja ki. Miért nem? Mert monopolista piacon van, tehát ő maga beállította az ár-, és gyártási mennyiségének szintjét, amin a vállalat a megfelelő profitot hozza, és nem termel felesleget, nincs felesleges költsége. Viszont ha a másik vállalat is belép a versenybe és duopólista piacra váltanak át, akkor a bent lévő kihasználja ezt a plusz kapacitását, és többletköltség nélkül többet tud termelni. Vagyis ha például a verseny miatt a termék ára lejjebb megy, *B* akkor is meg tudja termelni azt a mennyiségű árut, ami az eddigi profitot (vagy esetleg annál akár többet is) biztosítja számára. Változtassunk ezen információ alapján a kifizetési mátrixon! Ha az *A* a „Belép" és *B* a „Versenyzik" stratégiát választja, akkor az *A* kifizetése még mindig 0, de *B*-é 4-re változzon. A kifizetési mátrix tehát a következőképpen fog kinézni:

B

	Versenyzik	Nem versenyzik
Kívül marad	(3, 10)	(3, 10)
A Belép	(0, 4)	(5, 3)

Ez már tényleg igazi fenyegetést jelenthet a belépő vállalat számára. Ha az *A* játékos tud *B* játékos ezen tartalékáról, és arról, hogy így változik a kifizetési mátrix, akkor ez befolyásolhatja *A* döntését. Ha *A* a nem lép be a piacra, akkor *B* bármit is választ, *A* kifizetése 3 lesz. Ha azonban *A* belép a piacra, akkor *B* biztosan felveszi a versenyt, ami *A*-nak 0 kifizetést jelent. Ezzel tehát a bent lévő monopolista cég eléri, hogy az új cég ne akarjon a piacra belépni, és hogy a piac monopolista maradjon. Persze azt nem tudhatjuk biztosan, hogy egy ilyen információ az adott helyzetben valós fenyegetés jelent, vagy egy blöff áll a háttérben. Ez a két vállalat vezetési politikájához tartozik, de mi most csak a matematikai leírással foglalkozunk.

4.2. Szemet szemért stratégia és a kartell működése

Ebben az alfejezetben már olyan játékokról beszélünk, amiket többször is lejátszódnak. Ezeket ismételt játékoknak nevezzük, és a $\Gamma = \{G, \delta, T\}$ szimbólum jelöljük, ahol *G* az alapjátékot jelenti, amit *T*-szer játszanak le ($T = \infty$ megengedett), és a δ diszkonttényezőt is felhasználjuk, aminek a segítségével a kifizetőfüggvények jelenértékét tudjuk az első játékra kiszámolni.

A *szemet szemért*, vagy más néven *ugró stratégia* egy igen egyszerű stratégia, ami hasonlót jelent, mint az ókori jogban a „szemet szemért, fogat fogért elv”. Az ókori törvényekben ez a tettarányos megtorlás elve volt, ami még az ősi szokásjogokból maradt rájuk. Igazából annyit jelent, hogy amit ellenfelünk ellenünk tesz, ugyanazt kapja vissza tőlünk. A játékelméletben ennek a következő lesz a menete: Van egy két vagy több játékosból álló játék, és a közös cél érdekében a résztvevők együtt dolgoznak, kooperálnak. Ezt *kooperatív játéknak* nevezzük. Ismételt játékról beszélünk, vagyis többször is lejátszhatjuk a játékot. Ha valamelyik játékos a többi ellen cselekszik az egyik fordulóban, akkor őt a többiek kizárják a közös munkából, és a következő játékban mindegyikük ennek az egy játékosnak a kárára teszi meg következő lépését. Ez elég büntetés ahhoz, hogy senki ne akarjon a többi ellen cselekedni. Ha azonban ez mégis megtörténik, de később az „áruló” játékos belátja, hogy hibát követett el, és szeretne újra kooperálni, van rá lehetősége. Ugyanis a szemet szemért stratégia egy megbocsátó stratégia: csak egyszer bünteti a cserbenhagyót, és később, ha az a bizonyos játékos újra a többieket követi, és ugyanazokat a lépéseket teszi, akkor a többiek visszafogadják őt a játékba, és újra együtt dolgozhatnak. Ezt matematikailag leírva a következő.

N darab játékosunk van. Legyen $\Gamma = \{G,\delta,T\}$ egy ismételt játék, amelynek a G alapjátékában s^* egy NEP, r pedig egy olyan stratégiaprofil, amelyre $f_i(s^*) \le f_i(r)$ minden $i = 1,\ldots,n$ esetén. A játék történetének nevezzük azon stratégiaprofilok halmazát, mely minden időponthoz megadja, hogy melyik játékos milyen stratégia szerint játszott abban az időpontban. Ekkor az az ugró stratégia, amely szerint az r stratégiaprofilt kell játszani mindaddig, amíg a történet csak ezt a stratégiaprofilt tartalmazza, és azonnal át kell térni az s^*-ra, ha a történet tartalmaz r-től legalább egy koordinátában eltérő stratégiaprofilt.
A kooperatív játék az együttműködő tagoknak mindig valamilyen előnnyel jár. Legegyszerűbb ilyen példa, ha egy piacon vásárolunk. A piacon egyszerre több zöldséges is megjelenik árujával. Az ő kooperatív játékuk ott mutatkozik meg, hogy körülbelül egy árban árulják az azonos minőségű termékeiket, vagyis a *NEP* egyensúlyi pontnál nagyobb kifizetési vektort biztosító r pontban vannak. Képzeljük el, ha a piacon megjelenik egy új zöldséges és olcsóbban adja a termékeit, akkor mindenki nála fog vásárolni. Ekkor a többieknek is le kell csökkenteni az áraikat, vissza kell térniük a Nash egyensúlyi pontra, hogy a vásárlóikat visszacsábítsák. Az új zöldséges megint árat fog csökkenteni, hogy ő ezáltal kialakíthassa stabil vásárlói körét. A piac többi tagjának megint az ő áraihoz kellene alkalmazkodnia és így tovább. A verseny elméletben addig is eljuthat, hogy szinte ingyen adják a zöldségeiket. De ez egyik játékosnak sem lenne jó, mert szinte semmi profitot nem kapnának, sőt, több lenne a költségük, mint a hasznuk. Ezért kooperálnak. Ha az új zöldséges belép a piacra és a többi eladó árszintjén adja el ő is a terméket, vagyis ő is az r stratégiaprofil szerint fog játszani, akkor előbb utóbb társulhat a játékba, és mindenki jól fog járni. Persze előtte még lejátszódik a belépési játék, amivel az előző fejezetben foglalkoztunk.

Nézzünk meg egy példát!

Legyen a piacon 3 vállalat, amik ugyanazt az árut termelik. Tegyük fel, hogy termeléshez semmilyen költség sem tartozik, és a termék iránti keresletet a saját és a versenytársak által megadott árak befolyásolják. Itt a stratégiahalmazokat az árak jelentik, és a kifizetőfüggvényt pedig a nyereség. A p_i-k az i. vállalat által megszabott árat jelöli, q_i az *i*. vállalat által termelt árumennyiséget jelenti, ami a saját és a többi játékos által megszabott áraktól is függ. Ezért az eladott mennyiséget a következő függvény adja meg:

$q_i = 100 - 3 \cdot p_i + \sum_{j \neq i} p_j$, ahol $i = 1,2,3$.

Jelöljük $f_i(p)$-vel az *i.* vállalat $p = (p_1, p_2, p_3)$ árvektor szerinti kifizetőfüggvényét. A példában a kifizetőfüggvények a következőek:

$f_i(p) = 100 \cdot p_i - 3 \cdot p_i^2 + p_i \cdot \sum_{j \neq i} p_j$, ahol $i = 1,2,3$.

Az egyetlen NEP meghatározható*:

$p_i = 25$

$q_i = 75$ és

$f_i = 1875$ *i=1,2,3.*

Ha a vállalatok összedolgoznak, és az összprofitot akarják maximalizálni, akkor ennél nagyobb profitot is elérhetnek a következőképpen:

$p_i = 50$ ár mellett $q_i = 50$

termelési mennyiséget kapunk, amely $f_i = 2500$ profitot jelent minden vállalatnak. Ha ezt a stratégiát az egyik vállalat feladná, akkor ő egy periódus alatt a $p_i = \frac{100}{3}$ ár választásával és

$q_i = 100$

termeléssel, (feltéve, hogy a másik kettő továbbra is $p_i = 50$-en tartja az árakat) $f_i = \frac{10000}{3}$ profitot tud elérni. Persze a következő periódusban a másik két vállalat visszaállna a Nash egyensúlyi pontra, akkor a harmadik vállalat már sem érne el több profitot.

Ugyanezen az elven működnek a kartellek is.

A *kartell* egymással versenyző vállalatok megállapodása az egymás közti verseny korlátozására. Célja, hogy a résztvevő cégek magasabb árakat és profitot érhessenek el.

* Lásd [4] irodalom 126. oldalán.

Általában a korlátozások az árak, a termelt mennyiségek meghatározására vagy a piac felosztására terjednek ki. A kartelleket ma a trösztellenes törvények a legtöbb országban tiltják, ezért jellemzően titkosan működnek, de ma is nyíltan működik például a számos olajexportáló országot tömörítő OPEC kőolajkartell.

A kartellben lévő cégeknek elsősorban azért jó a szövetségbe belépni, mert így monopóliumként tudnak működni. A monopólium nagyon nagy piaci erővel rendelkezik, hiszen nincsenek versenytársak. Például a versenyárnál sokkal magasabb áron is el tudja adni a termékét, tehát abszolút ármeghatározó szerepe van, a Nash egyensúlyi pont által kapott kifizetésnél sokkal nagyobb fizettséget érhet el. Ha a kartellben szereplő összes tag elfogadja ezt az árat, és nem kínálnak egymás alá, akkor sokkal nagyobb profitot érhetnek el. Ugyanakkor a kartell csak úgy működhet, ha minden tag betartja a szabályokat. Ennek pedig egyik feltétele az, hogy folyamatosan tudják egymást ellenőrizni. Ennek a bizonytalanság van alapja: a versenyhatóságok, akik pont ezeket a titkos kartell-egyezségeket szeretnék megakadályozni, szintén egy híres játékelméleti stratégia, a fogolydilemma-módszer szerint működnek. Ha egy kartellegyességre fény derül, akkor a versenybíróság bírságot ró ki minden tagra. Azt a vállalatot azonban, aki elsőként színt vall a kartellről, bírságelengedéssel jutalmazzák. Így a kartellben szereplő vállalatok több oldalról is befolyásolva vannak: ha együttműködnek a többiekkel, hatalmas profitra tehetnek szert, ha viszont például árban a többiek alá ajánlanak, akkor megbüntetik őket; ha a versenybíróság előtt színt vallanak, „jutalmat" kaphatnak, de ha nem teszik és inkább a profit mellett döntenek, más társuk teheti ezt meg velük. Tehát itt megint lezajlik az előző fejezetben tárgyalt fogolydilemma játék. A játék kimenetelét az dönti el, hogy a játékosok mennyire jól kooperálnak egymással, mennyire hajlandóak együttműködni.

5. Összefoglalás

Dolgozatomban példákon keresztül mutattam be néhány, a közgazdaságtanban használatos matematikai eszközt. Foglalkoztam költségfüggvényekkel, speciális technológiákkal, határtermelékenységgel, hasznossággal és piaci játékok kooperatív és nem kooperatív formájával

Természetesen a közgazdaságtan számos más területén fontos a matematikai apparátus alkalmazása, mint például a Pareto-hatékonyság, hasznossági görbék elemzése, aggregált gazdasági folyamatok elemzése, regressziószámítás vagy éppen a Walrasi-egyenletek.

A matematika megkönnyítheti és elősegítheti a közgazdaság fejlődését, de ez fordított irányban is igaz lehet. A közgazdaságtudomány nem csak egy speciális alkalmazási területe a matematikának, hanem az itt felmerülő problémák izgalmas kutatási területként szolgálhatnak a matematikusok számára is. Mi sem bizonyítja ezt jobban, mint azok a matematikusok sora, akik közgazdaságtani Nobel-díjban részesültek munkásságukért: Harsányi János, John F. Nash, Reinhard Selten, Leonyid Kantorovics, Leonid Hurwicz.

Irodalomjegyzék

[1] Hal R. Varian: Mikroökonómia középfokon. Akadémia kiadó, 2005.

[2] Sydsæter - Hammond: Matematika közgazdászoknak. Aula Kiadó, 1998

[3] Forgó Ferenc- Pintér Miklós - Simonovits András - Solymosi Tamás: Játékelmélet (nem kooperatív játékok) elektronikus jegyzet, 2005

[4] Forgó Ferenc - Pintér Miklós - Simonovits András - Solymosi Tamás: Játékelmélet (kooperatív játékok) elektronikus jegyzet, 2005

[6] Kertesi Gábor elektronikusan letölthető Mikroökonómia előadásvázlata. http://econ.core.hu/~kertesi/kertesimikro

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani konzulensemnek, Sikolya Eszternek, munkámban nyújtott segítségéért, odafigyeléséért, türelméért, és ötleteiért.

Hálás vagyok családom tagjainak támogatásukért és a belém vetett hitükért.

Köszönettel tartozom Farkas Bálintnak, aki szintén rengeteget segített elméleti és technikai problémáimnál, és főleg türelmét, bizalmát, és támogatását köszönöm.

És végül köszönöm még minden olyan évfolyamtársamnak és ismerősömnek, akik valamilyen módon segítették a munkámat.