A Banach-féle fixponttétel és alkalmazásai

Szakdolgozat

Írta: Zahorecz Beáta

Matematika BSc - matematikai elemző szakirány

Témavezető: Kurics Tamás, egyetemi tanársegéd

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2009

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel témavezetőmnek, Kurics Tamásnak, aki sok hasznos észrevételével és kitartó bátorításával segítette munkám.

Bevezetés

A Banach-féle fixponttétel a matematika egy - már a tudományágon belül is - széleskörűen alkalmazható eredménye, amely ezáltal több más területen is gyakran használt módszereket, eszközöket biztosít a felmerülő problémák megoldására. Az analízis, a numerikus analízis, a differenciálegyenletek és a parciális differenciálegyenletek, valamint a dinamikai rendszerek területén is ismert alkalmazásai vannak, ezáltal a fizika, a kémia, a biológia, a közgazdaságtudomány és a mérnöki tudományok körében is népszerű felhasználásaival találkozhatunk. A szakdolgozatban a hangsúlyt a gyakorlati alkalmazásokra helyezve, az kerül bemutatásra, hogy a tétel segítségével hogyan nyílik mód lineáris és nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek megoldásainak előállítására és közelítésére, illetve integrálegyenletek és közönséges differenciálegyenletek (továbbiakban KDE) megoldásainak vizsgálatára. A dolgozatban nem tárgyalt további alkalmazási területet jelent, hogy a Banach-féle fixponttétel segítségével igazolható az Inverzfüggvény-tétel, amiből levezethető az Implicitfüggvény-tétel, ami például implicit egyenletek megoldására, szélsőérték keresésre használható.

A dolgozat célja a tétel ismertetése után a matematikai felhasználások áttekintő jellegű bemutatása, a teljesség igénye nélkül, a teljes általánosság lehetőség szerinti egyszerűsítéseivel. Ugyanakkor példákkal, összehasonlításokkal illusztrálva az eredményeket a könnyebb érthetőség, átláthatóság érdekében és hogy pontosabb kép rajzolódjon ki arról, mikor lehet és mikor érdemes használni a tételt és a segítségével konstruált eljárásokat.

1. A Banach-féle fixponttétel

A kontraktív tulajdonság lényeges lehet abban az esetben, amikor módszereket keresünk lineáris és nemlineáris egyenletek megoldásainak előállítására, közelítésére, dinamikai rendszerek egyensúlyi pontjainak meghatározására. Egy kontrakció egy olyan Lipschitz-folytonos (így egyenletesen folytonos) leképezés, amelynek Lipschitz konstansa egynél kisebb.

1.1. Definíció. *Legyenek (X, d) és (X', d') metrikus terek. Az $f : X \to X'$ leképezés Lipschitz-folytonos, ha van olyan $0 \leq L$ konstans, hogy minden $x, y \in X$ esetén*

$$d'(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y). \tag{1}$$

1.2. Definíció. *Tekintsük az (X, d) metrikus teret. Az $f : X \to X$ leképezés kontrakció, ha létezik $0 \leq L < 1$, hogy minden $x, y \in X$ esetén teljesül, hogy*

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y). \tag{2}$$

Egy kontrakció tehát egy olyan leképezés, amely összehúzza a pontokat. Azaz, minden x értelmezési tartománybeli elem köré olyan tetszőleges r sugarú, $\overline{B}_r(x)$ gömb írható, hogy annak minden y elemére igaz lesz, hogy az $f(y)$ benne van egy olyan $\overline{B}_s f(x)$ középpontú gömbben, aminek s sugara kisebb, mint r.

1.3. Definíció. *Az (X, d) metrikus térben az $f : X \to X$ függvény fixpontja az az $x^* \in X$ pont, amire*

$$x^* = f(x^*). \tag{3}$$

1.4. Tétel (Banach-féle fixponttétel). *Tegyük fel, hogy (X, d) teljes metrikus tér, legyen $f : X \to X$ kontrakció, L a kontrakciós konstans. Ekkor egyértelműen létezik $x^* \in X$, hogy x^* az f fixpontja. Továbbá tetszőleges $x_0 \in X$ pontból indulva, minden $n \in \mathbb{N}$-re előállítva az*

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{4}$$

iterációs sorozatot, az így kapott (x_n) sorozat konvergens lesz és a fixponthoz tart. A hibára pedig a következő becslés adható

$$d(x^*, x_n) \leq \frac{L^n}{1 - L} \cdot d(x_1, x_0). \tag{5}$$

Bizonyítás. Az egyértelműség igazolásához indirekt módon tegyük fel, hogy x^*, y^* is az f fixpontjai. Tekintve, hogy f kontrakció, igaz a következő

$$d(x^*, y^*) = d(f(x^*), f(y^*)) \leq L \cdot d(x^*, y^*),$$

ez ($L < 1$ miatt) csak akkor lehetséges, ha $x^* = y^*$.
A fixpont létezésének belátásához meg kell mutatni, hogy a (4) pontban definiált iterációs sorozat konvergens és a fixponthoz konvergál.
A konvergencia bizonyításához elegendő belátni, hogy az (x_n) sorozat Cauchy-sorozat.
Mivel f kontrakció a (2) egyenlőtlenség ismételt alkalmazásával a következő egyenlőtlenséget kapjuk

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) &\leq L \cdot d(x_n, x_{n-1}) = \\ &= L \cdot d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leq \\ &\leq L^2 \cdot d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq L^n \cdot d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Ezt felhasználva tetszőleges $m > n$ indexre ($m = n + k$, $k \in \mathbb{N}$) a háromszög-egyenlőtlenség (lásd [5]) segítségével megmutatható, hogy

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) = d(x_{n+k}, x_n) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_n) \leq \\ &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + d(x_{n+k-2}, x_n) \leq \dots \leq \\ &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \sum_{\mathrm{i=n}}^{\mathrm{n+k-1}} L^i \cdot d(x_1, x_0) = \\ &= L^n \cdot (1 + L + \dots + L^{k-1}) \cdot d(x_1, x_0) \leq \frac{L^n}{1-L} \cdot d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{6}$$

Mivel $L^n \to 0$, ha $n \to \infty$ látható, hogy a sorozat Cauchy-sorozat. Tekintve, hogy a metrikus tér teljes, az iterációs sorozat konvergál egy $x^* \in X$-hez. Elvégezve az $n \to \infty$ határátmenetet a (4) egyenletben és felhasználva, hogy f folytonos, adódik, hogy $f(x^*) = x^*$.
A (6) egyenlőtlenségben elvégezve az $x_m \to x^*$ határátmenetet igazolható a konvergenciára adott becslés. □

1.5. Megjegyzés. *A tétel minden feltételére szükség van, ami az alábbi példákkal igazolható.*

Vegyük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ függvényt, segítségével könnyen látható, hogy az $L < 1$ feltétel nem elhagyható. Erre a függvényre igaz az, hogy $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$, ugyanis

$$|f(x) - f(y)| = |x + 1 - (y + 1)| = |x - y|,$$

de az $x = x + 1$ egyenletnek nincsen megoldása.
Amennyiben az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ függvényt tekintjük, amire szintén igaz, hogy $|f(x) - f(y)| = |x - y|$, annak a megoldása nem egyértelmű, mert minden pontja fixpont.

Ha az $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x + 1/(1+x)$ függvényt vesszük, arra teljesül, hogy $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, ugyanis

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| x + \frac{1}{1+x} - y - \frac{1}{1+y} \right| = \\
&= \left| \frac{x\cdot(1+x)\cdot(1+y) + 1 + y - y\cdot(1+x)\cdot(1+y) - (1+x)}{(1+x)\cdot(1+y)} \right| = \\
&= \left| \frac{x^2 + x^2\cdot y - y^2 - x\cdot y^2}{(1+x)\cdot(1+y)} \right| = \left| \frac{(x-y)\cdot(x+y+x\cdot y)}{(1+x)\cdot(1+y)} \right| = \\
&= \frac{x+y+x\cdot y}{1+x+y+x\cdot y}\cdot |x-y| \le |x-y|.
\end{aligned}$$

Az egyenletnek azonban nincs megoldása ($L < 1$ kellene).

Az $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = x/2$ függvénnyel pedig megmutatható, hogy arra is szükség van, hogy a metrikus tér teljes legyen. Ugyanis

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{2} = \frac{1}{2}\cdot|x-y|,$$

azaz f kontrakció, de az $x = x/2$ egyenlet megoldása ($x = 0$) nem eleme $\mathbb{R}\backslash\{0\}$-nak.

1.6. Következmény. *Legyen $f : X \to X$ leképezés az (X,d) teljes metrikus térben, tegyük fel, hogy létezik $n \in \mathbb{N}$ természetes szám, amire f^n kontrakció. Ekkor f-nek egyértelműen létezik fixpontja.*

Bizonyítás. Mivel $f : X \to X$ alakú leképezés és f^n kontrakció, a Banach-féle fixponttétel alapján egyértelműen létezik $x^* \in X$ elem, ami az f^n fixpontja. Ekkor ez az x^* pont egyben f fixpontja is lesz, mivel

$$f(x^*) = f(f^n(x^*)) = f^{n+1}(x^*) = f^n(f(x^*)).$$

Tehát $f(x^*)$ fixpontja f^n-nek, de mivel ez a fixpont egyértelmű $f(x^*) = x^*$, tehát x^* az f fixpontja.
Másrészt indirekt módon belátható, hogy f-nek nem létezhet más fixpontja. Tegyük fel, hogy $y^* \in X$ is az f fixpontja és $x^* \neq y^*$. Ekkor

$$f^n(y^*) = f(f(\dots f(y^*))) = \dots = f(y^*) = y^*,$$

vagyis y^* is az f^n fixpontja, de mivel az egyértelmű ellentmondásra jutottunk. $\square$

1.7. Következmény. *Ha H az X teljes metrikus tér egy zárt altere és $f : H \to H$ kontrakció, akkor az f leképezésnek egyértelműen létezik fixpontja a H halmazon.*

Bizonyítás: Ahhoz, hogy a tétel feltételei teljesüljenek csak annyit kell belátni, hogy egy teljes metrikus tér zárt altere is teljes. Ennek igazolására tekintsünk egy (x_n) Cauchy-sorozatot H-ban, ami így X-ben is Cauchy-sorozat. Tekintve, hogy X teljes metrikus tér, (x_n) konvergál egy $x \in X$ ponthoz. Mivel a feltételünk szerint a H altér zárt, $x \in H$, tehát $x_n \to x$-hez H-ban. Azaz H-ban minden Cauchy-sorozat konvergens, tehát H teljes metrikus tér.□

1.8. Megjegyzés. *A következő példával belátható, hogy H zártsága szükséges.*

Legyen $H = (1,2) \subset \mathbb{R}$, $f : (1,2) \to (1,2)$, $f(x) = \sqrt{x}$. Ekkor f kontrakció az $L = 1/2$ kontrakciós konstanssal, hiszen

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}|x-y| \leq \frac{1}{2} \cdot |x-y|.$$

Viszont a $\sqrt{x} = x$ egyenlet megoldásai közül ($x = 0$ és az $x = 1$), egyik sem eleme $(1,2)$-nak, tehát f-nek nincsen $(1,2)$-ban fixpontja.

1.9. Következmény. *Tegyük fel, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ differenciálható I-n, ahol I nemüres nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek és létezik $L < 1$, hogy $||f'(x)|| \leq L$ minden $x \in H$ esetén, ahol H olyan nemüres, zárt, konvex részhalmaza I-nek, amelyre $f(H) \subseteq H$, ekkor f-nek H-ban pontosan egy fixpontja létezik.*

Bizonyítás. A Lagrange-egyenlőtlenséget (lásd [3]) alkalmazva (megfelelő normaválasztással) igazolható, hogy f kontrakció H-n. Azaz minden $x, y \in H$ esetén: $||f(x) - f(y)|| \leq L \cdot ||x - y||$. Így az állítás már következik az 1.7. Következményből. □

Az 1.9. Következmény általános formája megtalálható [3]-ben, mivel azonban a dolgozat további részeiben csak $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ típusú függvényekre kerül alkalmazásra, elegendő ezekre kimondani. Ezt meg is lehet tenni, mert ha $m \in \mathbb{N}$ és $||.||_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ leképezés, ami a következő módon definiált

$$||x||_p := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_k|^p \right)^{(1/p)}$$

tetszőleges $1 \leq p \leq \infty$ esetén, akkor $(\mathbb{R}^m, ||.||_p)$ teljes normált tér (azaz a norma által indukált metrikával teljes metrikus tér) és ezek a normák ekvivalensek egymással, mert véges dimenziós térben minden norma ekvivalens (a $p = 2$-es norma pedig skaláris szorzatból származtatható) (lásd [5]).

1.10. Megjegyzés. *A következő példa arra mutat rá, hogy az $||f'(x)|| < 1$ feltétel önmagában még nem lenne elegendő.*

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, ahol $f(x) = x + 1/(1 + e^x)$. Ekkor

$$f'(x) = \frac{1 + e^x + e^{2x}}{(1 + e^x)^2},$$

a számláló és a nevező is pozitív, de a számláló kisebb, mint a nevező, így minden $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy $|f'(x)| < 1$. Ugyanakkor könnyen látható, hogy az $f(x) = x$ nem megoldható, hiszen ez ekvivalens $1/(1+e^x) = 0$ egyenlettel, ami pedig ellentmondásra vezet. Tehát f-nek nincsen fixpontja, ebből pedig következik, hogy nem lehet kontrakció sem.

2. Dinamikai rendszerek fixpontjai

A dinamikai rendszerek egy rendszer állapotának időbeli fejlődését írják le. Modellként több különböző tudományágban fontos szerephez jutnak, például a fizikában, kémiában, biológiában, közgazdaságtanban is. Emellett megfelelő eszközt jelentenek különböző matematikai problémák megoldására, illetve kvantitatív és kvalitatív tulajdonságaik vizsgálata is a matematikai érdeklődésre érdemes területnek számítanak.

A fejezetben röviden, áttekintő jelleggel kerülnek ismertetésre, [1] alapján, általános képet nyújtva a Banach-féle fixponttétel és a dolgozat további részeinek kapcsolatáról.

A dinamikai rendszerek egy állapottérrel határozhatóak meg, amelynek elemei a rendszer által felvehető állapotok, amely állapotok rögzített szabályok szerint változnak az időben és megvalósulásuk a rendszer múltjától is függ. A dinamikai rendszerek időfejlődésének szabálya általában olyan formában adott, amely a jövőbeli állapotot csak kis időre előre adja meg. Ahhoz, hogy hosszabb időre megkapjuk a jövőbeli állapotot, az időfejlődés szabályát kell sokszor iterálni. Ez az eljárás a dinamikai rendszer megoldása. Ha a rendszer megoldható, akkor egy adott kezdeti állapotból valamennyi jövőbeli állapot meghatározható.

A dinamikai rendszereket diszkrétnek vagy folytonosnak nevezzük, attól függően, hogy az időfogalmuk diszkrét vagy folytonos-e.

Ha a dinamikai rendszer folytonos, akkor az időt jelentő t változó egy $\mathbb{R}$-beli intervallum eleme. Az ilyen rendszerek tipikusan felírhatóak autonóm differenciálegyenletként, a következő formában

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),$$

ahol a pont az idő szerinti deriváltat jelenti és $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ alakú, folytonos függvény.

Diszkrét esetben az időre $t = n$ egészként tekinthetünk. Ekkor a dinamikai rendszer egy olyan $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ leképezéssel definiálható, ami kapcsolatot teremt az x_{n+1} (ez a rendszer $t = n + 1$ időpontbeli állapotátának feleltethető meg) és az x_n (a rendszer $t = n$ esetén) állapotok között, a következő módon:

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{1}$$

Ha az f nem invertálható, az időben csak előre haladva definiálható a dinamika, ha f invertálható, időben mindkét irányba haladva meghatározható. Az f leképezés egy fixpontja a dinamikai rendszer egyensúlyi pontja. Ha az állapottér egy teljes metrikus tér és f egy kontrakció, akkor a Banach-féle fixponttételből következik, hogy a dinamikai rendszernek egyetlen egyensúlyi pontja van és a rendszer ehhez konvergál, egy tetszőleges kezdőállapotból kiindulva és az idővel a végtelenhez tartva. Ebben az esetben a fixpontot globálisan aszimptotikusan stabilnak nevezzük.

Az egyik legegyszerűbb és legismertebb diszkrét dinamikai rendszer a logisztikus függvénycsalád körébe tartozik, alkalmas lehet például populációdinamika diszkrét modellezésére. (Természetesen erre a célra folytonos modellek is alkalmazhatóak.) A populációdinamika élőlények bizonyos csoportjainak rövid, illetve hosszú távú változásait vizsgálja, például a méretük, korösszetételük tekintetében. Egy

$$x_{n+1} = 4 \cdot \gamma \cdot x_n \cdot (1 - x_n), \tag{2}$$

alakú kifejezés, ahol $0 \leq \gamma \leq 1$ egy paraméter és $x_n \in [0, 1]$, a populáció változásának egy korlátozott növekedési modellje . Ez az egyenlet (1) alakú, ahol $f : [0, 1] \to [0, 1]$ a következő módon definiált

$$f(x) = 4 \cdot \gamma \cdot x \cdot (1 - x).$$

Ahol x_n a populáció n. generációja és arra vagyunk kíváncsiak, hogy mi történik, ha n-et változtatjuk.

A következő lineáris egyenlet az exponenciális növekedés leírására szolgál

$$x_{n+1} = 4 \cdot \gamma \cdot x_n$$

(ha $4\gamma > 1$), vagy a hanyatlás bemutatására például abban az esetben, ha állandó a születési ráta és kisebb, mint 25% (ha $4\gamma < 1$). A nemlineáris (2) forma egy olyan faj egyszerű modellje, amelynél figyelembe vettük, hogy a növekedés nem lehet korlátlan.

A logisztikus egyenlet remek példa arra, amikor egy egyszerű nemlineáris leképezés különösen összetett viselkedést produkál. A teljes viselkedés tanulmányozása túlmutat a Banach-féle fixponttétel elemi alkalmazásán. Ez nem is kerül tárgyalásra a dolgozatban, néhány egyszerű megállapítás azonban könnyen levezethető.
Abban az esetben, amikor $0 \leq \gamma \leq 1/4$, f kontrakció a $[0, 1]$-en és az egyetlen fixpontja ebben az intervallumban a 0. A bizonyítás a Banach-féle fixponttételen alapul, amiből következik, hogy $x_n = f^n(x_0) \to 0$ tetszőleges $x_0 \in [0, 1]$ kezdeti állapotból indulva, ami azt jelenti, hogy a populáció ki fog pusztulni.

Ha $1/4 < \gamma \leq 1$, akkor megjelenik egy második fixpont is az intervallumban, ami az $x = (4\gamma - 1)/(4\gamma)$ pont.
A γ paraméter változásával az új fixpont megjelenése a fixpontok bifurkációjának egy példája. A γ további növelésével a bifurkációk egyre komplikáltabb végtelen sorozatához jutunk, ami egy idő után a káoszhoz vezet.

A diszkrét dinamikai rendszerek szintén fontos alkalmazási területét képezheti a lineáris és nemlineáris egyenletek megoldásának közelítése, ez a következő fejezet tárgyát képezi.

3. Lineáris és nemlineáris egyenletek, egyenletrendszerek

Ebben a szakaszban olyan eljárások tárgyalása következik, amelyek iteratív módon közelítik valós megoldásait valós lineáris és nemlineáris egyenleteknek és egyenletrendszereknek. Az összegyűjtött módszerek mindegyike olyan, hogy a segítségükkel előállított iterációs sorozatok az egyenletrendszerek megoldásaihoz konvergálnak, aminek igazolására minden esetben a Banach-féle fixponttétel felhasználásával kerül sor.
A megoldások közelítésének tárgyalásakor a konvergencia tényén túl fontos szempont lehet a műveletigény és a konvergencia rendje is. Egydimenziós esetben egy (x_n) iterációs sorozat s-edrendben tart x^*-hoz, ha létezik $c > 0$ konstans, amire

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^s} \to c, \qquad n \to \infty$$

esetén, ahol $e_n = x_n - x^*$.

3.1. Egyszerű iteráció

A tétel közvetlen alkalmazását egyszerű iterációnak nevezzük. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor az $g(x) = 0$ egyenlet biztosan $f(x) = x$ alakra hozható (például az $f(x) := g(x) + x$ hozzárendeléssel), a legtöbb esetben azonban ez az átalakítás nem egyértelmű. Egyszerű iterációval akkor tudunk g egy valós gyökéhez közelíteni, ha $f : H \to H$ kontrakció, ahol H nemüres, zárt részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, vagy $H = \mathbb{R}$. Ha találtunk ilyen f-et, akkor egy tetszőleges $x_0 \in H$ pontból indított

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{1}$$

úgynevezett egyszerű iterációval, a Banach-féle fixponttétel alapján az f egyértelműen létező H-beli fixpontjához konvergálunk, ami egyben a $g(x) = 0$ egyenlet egy H-beli megoldása is.
Az 1.9. Következmény segítségével könnyen ellenőrizhető elégséges feltételt adhatunk az egyszerű iteráció konvergenciájára.
Elmondható, hogy abban az esetben, ha f differenciálható egy $\mathbb{R}$-beli I nyílt intervallumon, és $|f'(x)| < 1$, minden $x \in [a, b]$ esetén, ahol $[a, b] \subset I$-nek, akkor f kontrakció. (lásd: 1.9. Következmény)
Azonban ennél még többet is állíthatunk.

3.1.1. Állítás. *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható egy $\mathbb{R}$-beli I nyílt intervallumon és kontrakció I-n, akkor minden $[a, b] \subset I$-re és $x \in [a, b]$-re $|f'(x)| < 1$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan $y \in [a, b]$, ahol $|f'(y)| \geq 1$. Felhasználva, hogy f kontrakció, igaz a következő

$$\frac{|f(y+\epsilon) - f(y)|}{|\epsilon|} \leq L < 1.$$

Ekkor $\epsilon \to 0$ esetén, azt kapnánk, hogy

$$1 \leq |f'(y)| \leq L < 1,$$

ami ellentmondás.$\square$

Nézzük hogyan alkalmazhatóak a fentiek. Tekintsük például a $g(x) = x^2 - 2 = 0$ egyenletet és keressük az $x^* = \sqrt{2}$ megoldást.
Ekkor az egyenlet, akár $x = 2/x$, akár $x = 1 + 1/(1 + x)$ alakra hozható és mindkét esetben f differenciálható $(0, \infty)$-on.
Az első esetben azonban $|f'(\sqrt{2})| = 1$, így f nem lehet kontrakció, semmilyen olyan intervallumon, ami tartalmazza a megoldást.
A második átalakításra azonban igaz, hogy $H = [1, 2]$ választással az

$$|f'(x)| = \frac{1}{(1+x)^2} < 1,$$

minden $x \in H$-ra, és mivel f olyan függvény, amely H-t önmagába képezi (szigorúan monoton csökkenő és a végpontokban $3/2$, illetve $4/3$), így f eleget tesz az 1.9. Következmény feltételeinek, tehát tetszőleges $x_0 \in H$ pontból indítva az iterációt, az konvergál a megoldáshoz.
Az 1. számú mellékletben csatolt egyszeru nevű Maple eljárást használva, gyorsan kiszámíthatjuk az egyszerű iteráció első néhány lépését.
Az $x_0 = 1.5$ pontból indulva az iteráció első 7 lépése

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.400000000, & x_2 &= 1.416666667, & x_3 &= 1.413793103, \\ x_4 &= 1.414285714, & x_5 &= 1.414201184, & x_6 &= 1.414215686, \\ x_7 &= 1.414213198. \end{aligned}$$

Látható, hogy elég jó közelítést kaptunk már a 7. lépésre is, annak ellenére, hogy a módszer csak elsőrendű volt ebben az esetben.

3.1.2. Megjegyzés. *Általában is megállapítható, hogy az egyszerű iteráció legtöbbször elsőrendben konvergál.*

Írjuk fel ugyanis a hibát

$$e_{n+1} = x_{n+1} - x^* = f(x_n) - f(x^*) = f(x^* + e_n) - f(x^*).$$

Ha f differenciálható, és a derivált nem nulla a fixpontban, akkor a módszer elsőrendű lesz, ugyanis

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{f(x^* + e_n) - f(x^*)}{e_n} \to f'(x^*).$$

Ekkor $c = |f'(x^*)|$ választással adódik, hogy elsőrendű a konvergencia.

3.1.3. Megjegyzés. *Feltéve, hogy f megfelelően sokszor differenciálható, a Taylor-polinom (lásd [6]) felírásából megmutatható, hogy abban az esetben, amikor az első néhány derivált értéke nulla a fixpontban, de utána van olyan, amelyik nem nulla, a módszer magasabb rendben konvergál.*

Például, ha a fenti $g(x) = x^2 - 2 = 0$ egyenlet megoldását,

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{2}{x}\right)$$

fixpontjaként keressük, f ebben az esetben is kontrakció lesz a $H = [1, \infty)$-ban, ugyanis ekkor minden $x \in H$-ra

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}, \qquad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

$f : H \to H$ alakú, mivel f szigorúan monoton növekedő és $f(1) = 1$. Ekkor azonban $f'(\sqrt{2}) = 1/2 - 1/2 = 0$, de $f''(\sqrt{2}) = 2/2^{3/2} \neq 0$, tehát másodrendben konvergens módszert kaptunk, felírva az iterációs lépéseket (az egyszeru Maple utasítássorozat segítségével) az $x_0 = 1.5$ pontból indulva, látható, hogy valóban gyorsabb a konvergencia.

$$x_1 = 1.416666667, \qquad x_2 = 1.414215686, \qquad x_3 = 1.414213562,$$
$$x_4 = 1.414213562, \qquad x_5 = 1.414213562, \qquad x_6 = 1.414213562,$$
$$x_7 = 1.414213562.$$

Egyszerű iterációval $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ leképezésekkel adott $g(x) = 0$ nemlineáris egyenletrendszerek megoldásait is közelíthetjük, hiszen a Banach-féle fixponttétel ebben az esetben is alkalmazható, ha megfelelő f leképezést találtunk. Többdimenziós esetben azonban annak vizsgálata, hogy az előállított f leképezésre, $f : H \to H$ (ahol H nemüres, zárt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek, vagy $H = \mathbb{R}^m$) alakú kontrakció nehézkes lehet. Az 1.9. Következmény ezekben az esetekben is segíthetne, azonban f differenciálhatósága esetén f' egy lineáris leképezés, ami (a standard bázist rögzítve) kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető f Jacobi mátrixával, de ennek megfelelő normáját felülről becsülni $\mathbb{R}^m$ egy zárt részhalmazán, sem feltétlenül egyszerű.

Általában többdimenziós esetben a Newton-módszer valamelyik változata könnyebben alkalmazható.

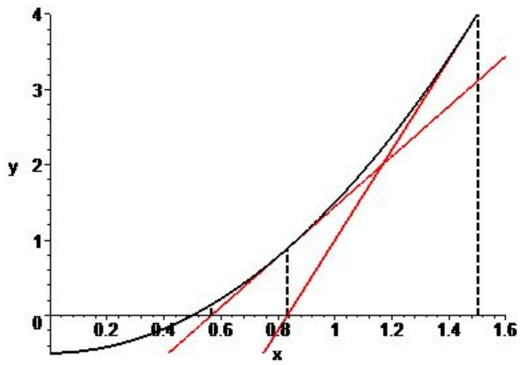
3.2. A Newton-módszerek

A nemlineáris egyenletek, egyenletrendszerek megoldásainak közelítésére alkalmazható másik módszer a Newton módszer, ami szintén iteratív módon közelíti a megoldást. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény és keressük az $g(x) = 0$ megoldást.

A megoldás közelítésére az úgynevezett Newton-módszer alkalmazható, ami minden $n \in \mathbb{N}$-re, valamilyen $x_0 \in \mathbb{R}$ pontból indulva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}. \tag{2}$$

A Newton-módszerre tekinthetünk, mint egy egyszerű iterációra, alapötlete a következő. A g függvény képéhez húzzunk érintőt az $(x_0, g(x_0))$ pontba, ennek meredeksége $g'(x_0)$. Tekintsük az egyenes és az x-tengely metszéspontját és ismételjük az eljárást. Ez látható az 1. ábrán, [3] alapján.



1. ábra. A Newton-módszer

Könnyen meggondolható, hogy ideális esetben tényleg a megoldást közelítjük ezzel a módszerrel. Heurisztikusan ugyanis, ha a g „közel lineáris", de a deriváltja nem nulla és x_0 „elég közel" volt a megoldáshoz (aminek létezése persze szükséges), akkor jó közelítést kaptunk.

A módszer azonban néha kisiklik, tehát kell, hogy legyen valamilyen előzetes információnk a megoldásról, hogy megfelelő pontból tudjunk indulni.

Legyen például $g(x) = x^3 - 2x + 2$ és $x_0 = 1$. Mivel $g'(x) = 3x^2 - 2$, így

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 1, \qquad x_5 = 0, \qquad \ldots$$

az eredmény egy kettő hosszú ciklus.

3.2.1. Tétel. *Ha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, és $x \in \mathbb{R}$ olyan pont, amire $g(x^*) = 0$ és $g'(x^*) \neq 0$, akkor létezik $\delta > 0$, hogy minden $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$ esetén, a (2)-ban definiált sorozat, az x^*-hoz konvergál.*

Bizonyítás. Legyen

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$

Ekkor x^* az f fixpontja akkor és csak akkor, ha $g(x^*) = 0$. Mivel

$$f'(x) = 1 - \frac{(g'(x))^2 - g(x) \cdot g''(x)}{(g'(x))^2} = \frac{g(x) \cdot g''(x)}{(g'(x))^2},$$

így $f'(x^*) = 0$. Tekintve, hogy a feltétel miatt f' folytonos, ezért tetszőleges rögzített $0 < L < 1$-hez létezik olyan $\delta > 0$, hogy $|f'(x)| < L$, ha $x \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$.
Tehát f kontrakció az $[x^* - \delta, x^* + \delta]$-on az L kontrakciós konstanssal, mivel a Lagrange-féle középértéktétel miatt (lásd [6])

$$|f(x) - f(y)| = |f^{'}(\mu)| \cdot |x - y| \leq L \cdot |x - y|$$

teljesül minden $x, y \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$ elemre, ahol $\mu \in [x, y]$.
$f([x^* - \delta, x^* + \delta]) \subseteq [x^* - \delta, x^* + \delta]$, hiszen tetszőleges $x \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$-re

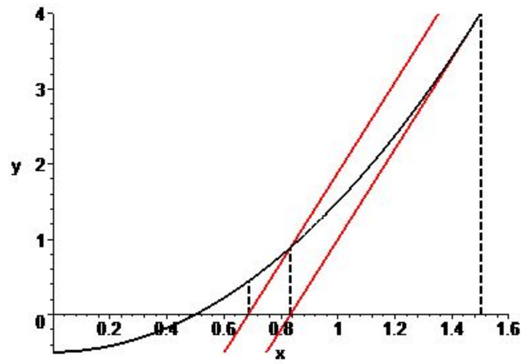
$$|f(x) - x^*| = |f(x) - f(x^*)| \leq L \cdot |x - x^*| < |x - x^*| < \delta.$$

A fentiek alapján, a Banach-féle fixponttétel alkalmazható f-re, amivel igazoltuk az állítást. □

A Newton-módszer többdimenziós esetre is általánosítható (lásd [3]), azonban problémát jelenthet, hogy ha nem egydimenziós a feladat, a deriválttal való osztás helyett a derivált inverzével kell szorozni az x_n helyen a $g(x_n)$ értéket. Így a (2) alakú iterációs sorozat előállítása elég műveletigényes lehet (minden lépéshez egy mátrix inverzét kell előállítani). A továbbiakban a módszer egy egyszerűsítésének bemutatása következik, ami megoldást jelenthet erre a problémára

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_0)}. \tag{3}$$

Ez az egyszerűsített Newton-módszer. A különbség az egyszerűsített Newton-módszer és a Newton-módszer között abban van, hogy az egyszerűsített esetben minden lépésben az x_0 pontban vett érintő meredekségét használjuk. Ezt szemlélteti a 3. ábra, [3] alapján.
Ez a módszer is tekinthető egyszerű iterációnak, aminek konvergenciája a Banach-féle fixponttételből következik.



2. ábra. Az egyszerűsített Newton-módszer

3.2.2. Tétel. *Legyen $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény egy nyílt I halmazon, hogy g' Lipschitz-folytonos I-n, egy L Lipschitz konstanssal. Tegyük fel, hogy $x_0 \in I$, $g'(x_0) \neq 0$ és*

$$h = L \cdot \left| \frac{1}{g'(x_0)} \right| \cdot \left| \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} \right| \leq \frac{1}{4}. \tag{4}$$

Definiáljuk $\delta \geq 0$-t a következő módon:

$$\delta = \left| \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} \right| \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2h}, \tag{5}$$

és feltételezzük továbbá, hogy az $[x_0 -, \delta, x_0 + \delta]$ az I részhalmaza. Ekkor a $g(x) = 0$ egyenletnek egyértelműen létezik a megoldása $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$-ban és az egyszerűsített Newton-módszerrel képzett (x_n) iterációs sorozat, ami a (3)-ban lett definiálva, az $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$-on a $g(x) = 0$ megoldásához tart, ha $n \to \infty$.

Bizonyítás. Az iterációra tekinthetünk úgy, mint egy olyan egyszerű iterációra, ami $x_{n+1} = f(x_n)$ alakú, ahol

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x_0)}.$$

Először meg kell mutatni, hogy $f([x^* - \delta, x^* + \delta]) \subseteq [x^* - \delta, x^* + \delta]$ leképezés. A fenti egyenletből x_0-t kivonva a következőt kapjuk

$$f(x) - x_0 = x - x_0 - \frac{g(x)}{g'(x_0)}. \tag{6}$$

Bevezetve az

$$r(x) = g(x) - g(x_0) - g'(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{7}$$

függvényt, az (6) a következő alakra hozható

$$f(x) - x_0 = \frac{-1}{g'(x_0)} \cdot (r(x) - g(x_0)). \tag{8}$$

A (8)-es egyenlet abszolútértékét véve és alkalmazva rá a háromszög-egyenlőtlenséget (lásd [6]), azt kapjuk, hogy

$$|f(x) - x_0| = \left|\frac{-1}{g'(x_0)} \cdot (r(x) - g(x_0))\right| \leq \left|\frac{1}{g'(x_0)}\right| \cdot |r(x)| + \left|\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}\right|. \tag{9}$$

Az r-et deriválva és felhasználva, hogy g' Lipschitz-folytonos a I-n, látható, hogy

$$|r'(x)| = |g'(x) - g'(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0|. \tag{10}$$

Mivel $r(x_0) = 0$, a Lagrange-féle középérték-tétel (lásd [6]) miatt létezik $\mu \in [x, x_0]$, amire a két végpontban r által felvett érték különbsége, osztva az intervallum hosszával éppen a derivált az y helyen. Felhasználva az előbbi egyenletet következik, hogy

$$|r(x)| = |r(x) - r(x_0)| = |r'(\mu)| \cdot |x - x_0| \leq L \cdot |x - x_0|^2. \tag{11}$$

Behelyettesítve a most kapott eredményt a (9) egyenlőtlenségbe, azt kapjuk, hogy

$$|f(x) - x_0| \leq L \cdot \left|\frac{1}{g'(x_0)}\right| \cdot |x - x_0|^2 + \left|\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}\right| \tag{12}$$

Ezért az f az $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ zárt intervallumot saját magába képezi, feltéve hogy

$$L \cdot \left|\frac{1}{g'(x_0)}\right| \cdot \epsilon^2 + \left|\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}\right| \leq \epsilon. \tag{13}$$

Az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$L \cdot \left|\frac{1}{g'(x_0)}\right| \cdot \epsilon^2 \cdot \left|\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}\right| + \left|\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}\right|^2 - \epsilon \cdot \left|\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}\right| \leq 0 \tag{14}$$

teljesül. Felhasználva a (4) feltételt, adódik, hogy található ilyen ϵ , ugyanis, ekkor a (14) egyenlőtlenség bal oldalára igaz, hogy

$$\frac{1}{4} \cdot \epsilon^2 - \epsilon \cdot \left|\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}\right| + \left|\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}\right|^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \epsilon - \left|\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}\right|\right)^2. \tag{15}$$

A (15) alakból pedig látható, hogy található ϵ, amit behelyettesítve a kifejezés egyenlő nullával. A legkisebb ϵ értéket, ami megfelelő δ-val jelölve

$$\delta = \left|\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}\right| \cdot \tau, \tag{16}$$

ahol τ a legkisebb gyöke a $h\tau^2 - \tau + 1 = 0$-nak, vagyis

$$\tau = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2h} \tag{17}$$

Ezzel a δ választással $f : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ alakú.
Következő lépésként bizonyítandó, hogy f kontrakció $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$-on.
Deriválva a (8) egyenlet mindkét oldalát, azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{-1}{g'(x_0)} \cdot (g'(x) - g'(x_0)).$$

Így véve az abszolútértékeket és felhasználva, hogy g' Lipschitz-folytonos, minden $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$-ra

$$|f'(x)| \leq \left|\frac{1}{g'(x_0)}\right| \cdot |g'(x) - g'(x_0)| \leq \left|\frac{1}{g'(x_0)}\right| \cdot L \cdot |x - x_0| \leq \left|\frac{1}{g'(x_0)}\right| \cdot L \cdot \delta$$

adódik.
(16), (4) és (17) miatt

$$\left|\frac{1}{g'(x_0)}\right| \cdot L \cdot \delta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Így megmutattuk, hogy $|f'(x)| \leq 1/2$ a $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$-on, ezért a Lagrange-féle középérték-tétel miatt

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} \cdot |x - y| \qquad \forall x, y \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

Ebből pedig már következik a tétel a Banach-féle fixponttételből. □

A bizonyítás a fentihez teljesen hasonló módon történik többdimenziós esetben is, lásd [1]. A tétel kimondható $g(x) = b$ alakú egyenletrendszerekre is, ekkor az iteráció

$$x_{n+1} = x_n - f'(x_0)^{-1} \cdot (f(x_n) - b),$$

alakú, a pontos feltételek és a konvergencia bizonyítása megtalálható [3]-ben.

Az $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset H$ feltétel kielégíthető, ha g olyan függvény, aminek a deriváltja nem nulla (illetve invertálható) és x_0 egy olyan pont, ami „elég közel” van a $g(x) = 0$ megoldásához. Azonban gyakori, hogy az iteráció divergens egészen addig, amíg a kezdőpont nincsen „nagyon közel” a megoldáshoz. Ugyanakkor a módszer általában jól használható olyan esetekben, amikor az egyenlet egy paramétere lassan változik és egy új paraméterértékhez tartozó iteráció kezdőpontjának, az előző paraméterhez tartozó megoldás választható, mert a két megoldás nincsen „nagyon távol” egymástól.

Fontos azonban szem előtt tartani, hogy az egyszerűsített Newton-módszer műveletigénye ugyan kevesebb, mint a Newton-módszeré, de konvergenciájának sebessége is lassabb. Hiszen míg a Newton-módszer másodrendű, az egyszerűsített Newton-módszer csak elsőrendben konvergál (ez a megfelelő Taylor-polinomok felírásával igazolható).

Tekintsük például $g(x) = (x^2/2 + 2x - 1)$, ennek a függvényt, ami kétszer folytonosan differenciálható. A $g(x) = 0$ egyenletnek van megoldása és a második derivált nem nulla ebben a pontban. A függvény deriváltja, $g'(x) = x + 2$, Lipschitz-folytonos $L = 1$-gyel és például az $x_0 = 1$ pontból indítva az iterációt teljesülnek rá a 3.2.1. Tétel és a 3.2.2. Tétel feltételei is. Ugyanis ez a kezdőpont olyan, amiből a Newton-módszer is indítható és mivel $g(1) = 3/2$ és $g'(1) = 3$, ekkor $h = |1/3||(3/2)(1/3)| = 1/6$, ami kisebb, mint $1/4$, az egyszerűsített Newton-módszer is konvergálni fog a $x^* = -2 + \sqrt{6} \approx 0.449489743$ megoldáshoz. A második mellékletben csatolt newton nevű Maple eljárás segítségével, egydimenziós esetben mindkét iteráció, első lépései gyorsan számolhatóak.
A Newton-módszer első hét lépése

$$x_1 = 0.5000000000, \quad x_2 = 0.4500000000, \quad x_3 = 0.4494897959,$$
$$x_4 = 0.4494897428, \quad x_5 = 0.4494897428, \quad x_6 = 0.4494897428,$$
$$x_7 = 0.4494897428.$$

Az egyszerűsített Newton-módszer első hét lépése pedig

$$x_1 = 0.5000000000, \quad x_2 = 0.4583333333, \quad x_3 = 0.4510995370,$$
$$x_4 = 0.4497847137, \quad x_5 = 0.4495438564, \quad x_6 = 0.4494996724,$$
$$x_7 = 0.4494915647.$$

Megállapítható, hogy már az első hét iterációban elég jól közelítettük a megoldást, de az egyszerűsített módszer valóban lassabban konvergál.

3.3. Egylépéses iterációk lineáris egyenletrendszerek megoldására

Abban az esetben, ha olyan lineáris egyenletrendszerek megoldásait keressük, amelyek

$$Ax = b$$

alakúak, ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ és $b \in \mathbb{R}^m$ adottak és keressük az $x \in \mathbb{R}^m$ megoldást, akkor a fentieken túl egyéb lehetőségeink is vannak. Egy számos módszert magába foglaló séma adható meg, az egylépéses iterációk (ezek $x_{n+1} = f(x_n)$ formában írhatók fel) általános kanonikus alakjával, a következő módon

$$B_{n+1}\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau_{n+1}} + Ax_n = b, \tag{18}$$

ahol $B_{n+1}, A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ adott mátrixok, τ_{n+1} rögzített $\mathbb{R}$-beli paraméterek, $b \in \mathbb{R}^m$ szintén adott.

A (18) egyenlet átalakítható a következő módon

$$B_{n+1}x_{n+1} = B_{n+1}x_n - \tau_{n+1}Ax_n + \tau_{n+1}b = (B_{n+1} - \tau_{n+1}A)x_n + \tau_{n+1}b.$$

Mindig feltehető, hogy B_n invertálható. Ekkor tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}^m$ pontból indulva meghatározhatók a sorozat elemei. Látható, hogy csak az olyan iterációk tekinthetők hasznosnak, amelyek esetén B_n^{-1} meghatározása kevesebb műveletigénnyel jár, mint A^{-1} kiszámítása.

Néhány ismert iteráció, a következő jelöléseket használva, ha $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, akkor D az A diagonálisa, A_1 legyen az A mátrix alsó háromszög része, D nélkül és A_2 az A felső háromszög része, D nélkül.

Jacobi-módszer: $B_n = D$, $\tau_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$-re.

(Ha az A mátrix diagonálisan domináns, akkor a Jacobi-iteráció konvergens, ami a Banach-féle fixpont-tétel következménye, lásd [4].)

Gauss-Seidel-módszer: $B_n = D + A_1$, $\tau_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$-re.

(A Gauss-Seidel-módszer hatékonyan programozható abból a szempontból, hogy az iterációs sorozat elemei egyetlen vektorban tárolhatóak. Szintén megjegyezhető, hogy abban az esetben, ha az A mátrix diagonálisan domináns, a módszer konvergens lesz, lásd [4].)

Legyen A szimmetrikus pozitív definit mátrix, a Richardson-iteráció: $B_n = I$, $\tau_n = p$, $p > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$-re.

(A Richardson-iteráció konvergens, ha $p < 2/\lambda_1$, az optimális p paraméter pedig $2/(\lambda_1 + \lambda_n)$, ahol λ_1, az A legnagyobb, λ_n pedig a legkisebb sajátértéke, lásd [4].)

A fenti iterációk átírhatók

$$x_{n+1} = Mx_n + v \tag{19}$$

alakra, ahol $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $x_n, v \in \mathbb{R}^m$, minden $n \in \mathbb{N}$-re.

Jacobi esetben $M_J = -D^{-1}(A_1 + A_2)$, $v_J = D^{-1}b$. A Gauss-Seidel-iterációnál $M_{GS} = -(A_1 + D)^{-1}A_2$, $v_{GS} = (A_1 + D)^{-1}$. A Richardson-iteráció esetén pedig

$M_R(p) = I - pA$, $v_R(p) = pb$.

3.3.1. Állítás. *Ha* $||M|| < 1$, *akkor* (19) *alakú iterációk konvergensek.*

Bizonyítás. Mivel tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^m$-re, megfelelő normaválasztással

$$||(Mx + v) - (My + v)|| = ||M(x - y)|| \leq ||M|| ||x - y||$$

$||M|| < 1$ esetén a leképezés kontrakció, amire teljesül a Banach-féle fixponttétel. □

A 3. számú mellékletben közölt iteraciok nevű Maple program segítségével, az egyenletrendszer megadásával könnyen végrehajthatóak a fenti iterációk. Tekintsük például a következő feladatot

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Kiíratva az iterációk során használt M mátrixokat, az eredmény a köbetkező

$$M_J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad M_R(p_{opt}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Mindhárom mátrix normája kisebb egynél, így az iterációk konvergálni fognak a megoldáshoz, ami $x = \begin{pmatrix} 3.25 & 7.5 & 7.75 \end{pmatrix}^T$.
Az iterációk első 6 lépése, az $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ kezdőpontból indulva:
Jacobi-iteráció:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -0.50000000 \\ 2. \\ 4. \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0.500000000 \\ 3.750000000 \\ 5. \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1.375000000 \\ 4.750000000 \\ 5.875000000 \end{pmatrix},$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 1.875000000 \\ 5.625000000 \\ 6.375000000 \end{pmatrix}, x_5 = \begin{pmatrix} 2.312500000 \\ 6.125000000 \\ 6.812500000 \end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix} 2.562500000 \\ 6.562500000 \\ 7.062500000 \end{pmatrix}.$$

A Gauss-Seidel:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -0.50000000 \\ 1.750000000 \\ 4.875000000 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0.375000000 \\ 4.625000000 \\ 6.312500000 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1.812500000 \\ 6.062500000 \\ 7.031250000 \end{pmatrix},$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 2.531250000 \\ 6.781250000 \\ 7.390625000 \end{pmatrix}, x_5 = \begin{pmatrix} 2.890625000 \\ 7.140625000 \\ 7.570312500 \end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix} 3.070312500 \\ 7.320312500 \\ 7.660156250 \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy a konkrét feladatban a Gauss-Seidel gyorsabban konvergált a megoldáshoz, mint a Jacobi, ami az esetek többségére jellemző.

Richardson-iteráció:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -0.50000000 \\ 2. \\ 4. \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0.500000000 \\ 3.750000000 \\ 5. \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1.375000000 \\ 4.750000000 \\ 5.875000000 \end{pmatrix},$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 1.875000000 \\ 5.625000000 \\ 6.375000000 \end{pmatrix}, x_5 = \begin{pmatrix} 2.312500000 \\ 6.125000000 \\ 6.812500000 \end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix} 2.562500000 \\ 6.562500000 \\ 7.062500000 \end{pmatrix}.$$

Ebben a példában az optimális p paraméterrel indított Richardson-iterációval éppen a Jacobi-iteráció lett, mivel $M_J = M_R(p_{opt})$ és $p = 1/2$ miatt $v_J = v_R(p_{opt})$.

4. Integrálegyenlek és differenciálegyenletek

A Banach-féle fixponttétel hasznos eszköz KDE-k, PDE-k megoldásainak egzisztenciájának és unicitásának vizsgálata során. A megoldások konstrukciójához gyakran a differenciálegyenletek helyett a megfelelő, ekvivalens integrálegyenleteken keresztül juthatunk.

4.1. Integrálegyenletek

A differenciálegyenletek megoldásának megtalálásán túl, az integrálegyenletek a biztosítás matematikai problémák kapcsán is gyakran felmerülő témakört jelentenek. Ebben az alfejezetben két nevezetes típusú integrálegyenlet tárgyalása következik, [1] alapján.

A Fredholm integrálegyenlet

$$u(t) - \int_a^b k(t,s)u(s)\mathrm{d}s = g(t) \tag{1}$$

alakú egyenlet, ahol $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ az ismeretlen függvény, $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ és $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ adottak.
Egy ilyen (1) alakú integrálegyenlet felírható fixpont-egyenletként olyan formában, hogy $Tu = u$ a következő módon definiált T leképezéssel

$$(Tu)(t) = g(t) + \int_a^b k(t,s)u(s)\mathrm{d}s. \tag{2}$$

4.1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $g \in C([a,b])$ és $k \in C([a,b]^2)$ függvény, amelyre*

$$\sup_{a\le t\le b}\left\{\int_a^b |k(t,s)|\mathrm{d}s\right\} < 1. \tag{3}$$

Ekkor egyértelműen létezik egy $u \in C([a,b])$ függvény, amely eleget tesz a (1) egyenletnek.

Bizonyítás. A bizonyítás során azt kell igazolni, hogy a (2) pontban definiált T leképezés egy kontrakció a $(C([a,b]), d_\infty)$ teljes metrikus téren (a metrikus tér teljes, lásd [1]), ahol $d_\infty(u_1,u_2) = \sup_{a\le t\le b}|u_1(t)-u_2(t)|$. Mivel tetszőleges $u_1, u_2 \in C([a,b])$

esetén

$$
\begin{aligned}
d_\infty(Tu_1, Tu_2) &= \sup_{a\le t\le b}\left|\int_a^b k(t,s)(u_1(s)-u_2(s))\mathrm{d}s\right| \le \\
&\le \sup_{a\le t\le b}\int_a^b |k(t,s)|\cdot|(u_1(s)-u_2(s))|\mathrm{d}s \le \\
&\le d_\infty(u_1,u_2)\cdot\sup_{a\le t\le b}\left\{\int_a^b |k(t,s)|\mathrm{d}s\right\} \le \\
&\le M\cdot d_\infty(u_1,u_2),
\end{aligned}
$$

ahol

$$M = \sup_{a\le t\le b}\left\{\int_a^b |k(t,s)|\mathrm{d}s\right\} < 1.$$

Így a fentiek alapján a tétel már következik a Banach-féle fixponttételből. □

A Banach-féle fixponttétel bizonyítása alapján látható, hogy az u fixpont előáll a következő módon

$$u = \lim_{n\to\infty} f^n u_0,$$

tetszőleges $u_0 \in C([a;b])$-ból kiindulva.

Tekintsük a Volterra integrálegyenletet, amely egy

$$u(t) - \mu\cdot\int_a^t k(t,s)u(s)\mathrm{d}s = g(t) \tag{4}$$

alakú kifejezés.

4.1.2. Tétel. *Egy (4) típusú integrálegyenletnek, ahol $t \in [a,b]$ és $g \in C([a,b])$, illetve $k \in C([a,b]^2)$ adott függvények és $\mu \in \mathbb{C}$, egyértelműen létezik $u \in C([a,b])$ megoldása.*

Bizonyítás. A Volterra típusú integrálegyenlet is felírható $Tu = u$ fixpont-egyenletként, ahol

$$(Tu)(t) = g(t) + \mu\cdot\int_a^t k(t,s)u(s)\mathrm{d}s.$$

Ekkor az előző bizonyításhoz hasonlóan ebben az esetben is csak azt kell belátni, hogy T kontrakció, mivel $(C([a,b]), d_\infty)$ teljes metrikus tér (lásd [1]). A következő lépésben teljes indukcióval belátjuk, hogy az alábbi felsőbecslés minden $n \in \mathbb{N}$-re igaz, tetszőleges $u_1, u_2 \in C([a,b])$ választással

$$|(T^n u_1)(t) - (T^n u_2)(t)| \le |\mu|^n \cdot M^n \cdot \frac{(t-a)^n}{n!}\cdot d_\infty(u_1,u_2). \tag{5}$$

$n = 1$ esetén az (5) indukciós feltevés igaz, ugyanis

$$
\begin{aligned}
|(Tu_1)(t) - (Tu_2)(t)| &\leq |\mu| \cdot \int_a^t |k(t,s)| \cdot |u_1(s) - u_2(s)| \mathrm{d}s \leq \\
&\leq |\mu| \cdot M \cdot (t-a) \cdot \max_{a \leq s \leq b} |u_1(s) - u_2(s)| = \\
&= |\mu| \cdot M \cdot (t-a) d_\infty(t,s),
\end{aligned}
$$

ahol M egy felső korlátja k-nak.

Tegyük fel, hogy egy rögzített $n \in \mathbb{N}$-re teljesül az (5) indukciós feltevés. Ekkor az integrálegyenletet és a feltevést használva azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
|(T^{n+1}u_1)(t) - (T^{n+1}u_2)(t)| &= |(T(T^n u_1))(t) - (T(T^n u_2))(t)| \leq \\
&\leq |\mu| \cdot M \cdot \int_a^t |(T^n u_1)(s) - (T^n u_2)(s)| \mathrm{d}s \leq \\
&\leq |\mu| \cdot M \cdot \int_a^t |\mu|^n \cdot M^n \cdot \frac{(s-a)^n}{n!} \cdot d_\infty(u_1, u_2) \mathrm{d}s = \\
&= |\mu|^{n+1} \cdot M^{n+1} \cdot d_\infty(u_1, u_2) \cdot \int_a^t \frac{(s-a)^n}{n!} \mathrm{d}s = \\
&= |\mu|^{n+1} \cdot M^{n+1} \cdot d_\infty(u_1, u_2) \cdot \left[\frac{(s-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^t = \\
&= |\mu|^{n+1} \cdot M^{n+1} \cdot \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot d_\infty(u_1, u_2).
\end{aligned}
$$

Mivel az állítás tetszőleges $t \in [a,b]$ pontra teljesül, a szuprémumot véve azt kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$
d_\infty(T^n(u_1), T^n(u_2)) \leq |\mu|^n \cdot M^n \cdot \frac{(b-a)^n}{n!} \cdot d_\infty(u_1, u_2) \equiv D_n \cdot d_\infty(u_1, u_2).
$$

Ha n elég nagy, akkor $D_n < 1$, azaz T^n kontrakció egy teljes metrikus térben, felhasználva a Banach-féle fixponttételt, tudjuk hogy T^n-nek egyértelműen létezik fixpontja. Felhasználva az 1.6. Állítást adódik, hogy T^n fixpontja, T-nek is az egyértelműen létező fixpontja, ezzel pedig igazoltuk az állítást. □

4.2. Közönséges differenciálegyenletek

A Banach-féle fixponttétel segítségével közönséges differenciálegyenletek megoldhatóságát is vizsgálhatjuk. Legyen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény, ekkor az

$$
\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \tag{1}
$$

egyenletet elsőrendű explicit KDE-nek nevezzük.

Tekintsük egy rögzített $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ pontot. Ekkor az

$$
u(t_0) = u_0 \tag{2}
$$

egyenlőséget az (1) egyenlethez tartozó kezdeti feltételnek, az (1) és (2)-t együttesen pedig kezdeti érték feladatnak nevezzük.

Egy $u : I \to \mathbb{R}^m$ függvény a kezdeti érték feladat egy lokális, folytonosan differenciálható megoldása egy I nyílt intervallumon, akkor és csak akkor, ha folytonos megoldása a következő Volterra típusú integrálegyenletnek (lásd [3])

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\mathrm{d}s \tag{3}$$

A (3) pedig átalakítható egy $Tu = u$ alakú fixpont-egyenletté, ahol T az alábbi módon definiált

$$(Tu)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\mathrm{d}s. \tag{4}$$

Olyan feltételekre van szükség, amely garantálja, hogy teljesüljenek a Banach-féle fixponttétel feltételei.

4.2.1. Tétel (Picard-Lindelöf tétel). *Legyen $G \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ nyílt halmaz és $f : G \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amely második változójában Lipschitz-folytonos, azaz teljesüljön, hogy létezik $L > 0$, hogy minden $(t, u_1), (t, u_2) \in G$-re*

$$||f(t, u_1) - f(t, u_2)|| \leq L \cdot ||u_1 - u_2||. \tag{5}$$

Ekkor minden $(t_0, u_0) \in G$ párhoz létezik $a > 0$, hogy a $[t_0 - a, t_0 + a]$-on egyértelműen létezik az (1), (2) kezdeti érték feladat megoldása.

Bizonyítás. Írjuk át a kezdeti érték feladat a (3) pontban adott integrálegyenletté. Az áttranszformált feladat megoldásához a Banach-féle fixponttételt fogjuk használni. Mivel G nyílt, tudunk választani egy D korlátos, nyílt halmazt, hogy $(t_0, u_0) \in D$ és $\overline{D} \subset G$. Jelöljük M-mel az $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvények egy korlátját. Ekkor

$$||f(t, u)|| \leq M, \qquad (t, u) \in \overline{D}.$$

Mivel D nyílt, tudunk olyan $a > 0$-t választani, hogy a

$$B := \{(t, u) \in \mathbb{R}^{m+1} : |t - t_0| \leq a, ||u - u_0|| \leq M \cdot a\},$$

zárt tégla, része D-nek.

Mivel a $C([t_0 - a, t_0 + a])$ folytonos függvények tere, az $u : [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^m$ típusú függvényeket tekintve a $||.||_\infty$ normával teljes normált tér ($||u||_\infty = \max_{|t-t_0| \leq a} ||u(t)||$, egy megfelelő $\mathbb{R}^m$-beli $||.||$ normával.)

Az integrálegyenlet minden u megoldására igaz

$$||u(t) - u_0|| = \left|\left| \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\mathrm{d}s \right|\right| \leq M \cdot a, \qquad |t - t_0| \leq a,$$

azaz

$$||u - u_0||_\infty \leq M \cdot a,$$

amiből következik, hogy a megoldás benne van a B téglában. Legyen U egy zárt részhalamza $C([t_0 - a, t_0 + a])$-nak, a következő módon definiálva

$$U := \{u \in C[t_0 - a, t_0 + a] : ||u - u_0||_\infty \leq M \cdot a\}.$$

U teljes. Legyen $T : U \to U$ leképezés, ami az (4) pontban lett definiálva, feltéve, hogy $|t - t_0| \leq a$. T olyan leképezés, ami az U-t saját magába képezi, mivel Tu folytonos és teljesül rá, hogy $||Tu - u_0||_\infty \leq M \cdot a$. Felhasználva a Lipschitz-folytonosságra vonatkozó (5) feltételt, a következő felsőbecslés adódik

$$\begin{aligned} ||(Tu_1)(t) - (Tu_2)(t)|| &= \left|\left| \int_{t_0}^{t} |f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))| \mathrm{d}s \right|\right| \leq \\ &\leq L \cdot \int_{t_0}^{t} ||u_1(s) - u_2(s)|| \mathrm{d}s \leq L \cdot a \cdot ||u_1 - u_2||_\infty \end{aligned}$$

minden $|t - t_0| \leq a$-ra. Tehát

$$||Tu_1 - Tu_2||_\infty \leq L \cdot a \cdot ||u_1 - u_2||_\infty$$

minden $u_1, u_2 \in U$-ra. Ha úgy választjuk meg a-t, hogy teljesüljön rá, hogy $a < 1/L$, akkor T kontrakció, aminek így a Banach-féle fixponttétel miatt egyértelmű fixpontja létezik, ami egyértelműen létező megoldása az integrálegyenletnek a $[t_0 - a, t_0 + a]$ intervallumon. □

[2] alapján a következő észrevételek figyelhetők meg. Tekintve, hogy az intervallum hosszát, a Lipschitz konstans határozza meg, ami független a (t_0, u_0) -tól, így a globális megoldás létezését is biztosítani tudjuk.

A Banach-féle fixponttételt használva a megfelelő integrálegyenletre egy módszert is kaptunk a megoldás előállítására, hiszen a tétel miatt tudjuk, hogy

$$u_{n+1} = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, (u_n(s))) \mathrm{d}s, \qquad |t - t_0| \leq a \tag{6}$$

egyenletesen konvergál az $[t_0 - a, t_0 + a]$-on a kezdeti érték feladat egyértelműen létező u megoldásához, ha $n \to \infty$. A konvergencia sebességére a Banach-féle fixponttétel egy lehetséges hibabecslését használva azt kapjuk, hogy

$$||u - u_n||_\infty \leq \frac{L \cdot a}{1 - L \cdot a} \cdot ||u_n - u_{n-1}||_\infty$$

Tekintsük a következő példát, [2] alapján. Legyen $\dot{u}(t) = t^2 + u^2(t)$, $u(0) = 0$, $G = (-0.5, 0.5) \times (-0.5, 0.5)$. Ekkor $f(t, u) := t^2 + u^2$-ről tudjuk, hogy $|f(t, u)| \leq 0.5$ a G-n. Tetszőleges $a < 0.5$ esetén (felhasználva, hogy M választható 0.5-nek) a bizonyításban használt B zárt téglára igaz, hogy $B \subset G$. Továbbá minden $(t, u_1), (t, u_2) \in G$-re igaz a következő felsőbecslés

$$|f(t, u_1 - f(t, u_2))| = |u_1^2 - u_2^2| = |(u_1 + u_2)(u_1 - u_2)| \leq |u_1 - u_2|.$$

Így f kielégíti a Lipschitz feltételt az $L = 1$ Lipschitz konstanssal, tehát $L \cdot a \leq 0.5$. Felírva a (6) iterációs sorozatot a feladatra

$$u_{n+1}(t) = \int_0^t |s^2 + u_n^2(s)| \mathrm{d}s.$$

Az $u_0(t) = 0$ pontból indítva az iterációt

$$u_1(t) = \int_0^t s^2 \mathrm{d}s = \frac{t^3}{3},$$

a hiba pedig

$$||u - u_1||_\infty \leq ||u_1 - u_0||_\infty = \sup_{-0.5 \leq t \leq 0.5} \frac{t^3}{3} = \frac{1}{2^3 \cdot 3} = 0.04166666667$$

A második iterációs lépés

$$u_2(t) = \int_0^t s^2 + \frac{s^6}{9} \mathrm{d}s = \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63},$$

ennek pedig a hibája

$$||u - u_2||_\infty \leq ||u_2 - u_1||_\infty = \sup_{-0.5 \leq t \leq 0.5} \frac{t^7}{63} = \frac{1}{63 \cdot 2^7} = 0.0001240079365,$$

a harmadik lépés

$$u_3(t) = \int_0^t s^2 + \frac{s^6}{9} + \frac{2 \cdot s^{10}}{189} + \frac{s^{14}}{3969} \mathrm{d}s = \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} + \frac{2 \cdot t^{11}}{2079} + \frac{t^{15}}{59535},$$

ennek hibája pedig már csupán

$$||u - u_3||_\infty \leq ||u_3 - u_2||_\infty = \sup_{-0.5 \leq t \leq 0.5} \frac{2 \cdot t^{11}}{2079} + \frac{t^{15}}{59535} = \frac{1}{2079 \cdot 2^{10}} + \frac{1}{59535 \cdot 2^{15}} =$$

$$= 0.0000004702396312$$

Tehát megállapítható, hogy az iterációval elég gyorsan közelítettük a megoldást, de meg kell jegyezni, hogy a példa elég speciális.

A KDE-k tárgyalása kapcsán fontos megemlíteni, hogy a Banach-féle fixponttételen kívül is léteznek még további fixponttételek, amelyek szintén alkalmasak lehetnek kezdeti érték feladatok megoldásainak vizsgálatára. Ilyen például a Schauder-féle fixponttétel, aminek segítségével belátható, hogy ahhoz, hogy a megoldás létezzen, nincsen szükség arra, hogy f második változójában Lipschitz-folytonos legyen. Ha feltesszük, hogy f folytonos, ez már elegendő ahhoz, hogy be tudjuk látni, hogy létezik megoldás. A Lipschitz-tulajdonság ahhoz kellett, hogy a Banach-féle fixponttétel segítségével a megoldás egyértelműsége is belátható legyen.

4.2.2. Tétel (Schauder-féle fixponttétel). *Legyen H zárt, konvex, nemüres részhalmaza az X teljes normált térnek, $F : H \to H$ leképezés, amire $F(H)$ lezártja kompakt részhalmaza X-nek. Ekkor F-nek legalább egy fixpontja létezik H-ban.*

A fenti tétel segítségével igazolható lenne a következő kezdeti érték feladatok megoldására vonatkozó tétel is.

4.2.3. Tétel (Peano tétel). *Legyen $f : [t_0-a, t_0+a]\times[u_0-b, u_0+b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelynek maximuma M. Legyen $h = \min\{a, b/M\}$. Ekkor a kezdeti érték feladatnak létezik legalább egy megoldása $[t_0 - h, t_0 + h]$ intervallumon.*

A bizonyítás alapötlete ebben az esetben is az, hogy írjuk át a kezdeti érték feladatot egy (4) típusú fixpont-egyenletté és lássuk be, hogy az így definiált T leképezésre teljesülnek a Schauder-féle fixponttétel feltételei. Fontos azonban szem előtt tartani, hogy mivel a Schauder-féle fixponttétel csupán létezést állít és nem egyértelmű létezést, így nem feltétlenül teljesül, hogy a kezdeti érték feladat megoldása egyértelmű is.

Összefoglalás

A dolgozatban áttekintő, összefoglaló jelleggel kerültek ismertetésre a Banach-féle fixponttétel azon alkalmazási területei, amelyek alkalmasak lineáris és nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek, illetve KDE-k és integrálegyenletek megoldásainak előállítására, közelítésére. A tárgyalt problémák mindegyike olyan volt, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén olyan iterációs sorozatokat lehetett előállítani a kívánt probléma megoldására, amelyről a Banach-féle fixponttétel alapján igazolni lehetett a fixponthoz való konvergálás tényét (és ez a fixpont egyben a problémák adott feltételek mellett egyértelműen létező megoldása is volt).

Bemutatásra került az egyszerű iteráció, a Newton-módszer és egy egyszerűsítése, a Jacobi-, a Gauss-Seidel- és a Richardson-iterációk, amelyek lineáris egyenletrendszerek megoldásaira használhatóak, illetve szó volt két nevezetes típusú integrálegyenlet megoldásának létezéséről és KDE-k megoldásainak vizsgálatáról is. A tárgyalt módszerek mindegyike széleskörűen használható, egyszerű lehetőségeket kínál a felmerülő problémák megoldására.

Hivatkozások

[1] John K. Hunter, Bruno Nachtergaele: Applied Analysis, Department of Mathematics University of California at Davis, 2000. (Chapter 1, 2, 3)

[2] Rainer Kress: Numerical Analysis, Springer, 1998.

[3] Tallos Péter: Dinamikai rendszerek alapjai, Aula Kiadó, Budapest, 1999. (1.,2.,3.,4. fejezetek)

[4] Stoyan Gisbert, Takó Galina: Numerikus módszerek I., Typotex Kiadó, Budapest, 2002. (1. fejezet)

[5] Komornik Vilmos: Valós analízis előadások I., Typotex, Budapest, 2003. (1., 3., 6. fejezetek és 11.6. alfejezet)

[6] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: Analízis II., Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt., Budapest, 2007. (20. fejezet)

Mellékletek

1. Melléklet

Az egyszerű iteráció lépéseit számoló Maple eljárás.

$> egyszeru := proc(f, n, x_0)$

$> local \quad x_u, x_k, i;$

$> x_k := x_0;$

$> for \quad i \quad from \quad 1 \quad to \quad n \quad do$

$> \qquad x_u := evalf(f(x_k));$

$> \qquad print(x_u);$

$> \qquad x_k := x_u;$

$> \qquad end \quad do;$

$> end \quad proc;$

2. Melléklet

Az egyszerűsített Newton-iteráció és a Newton-módszer lépéseit számoló Maple eljárás.

$> newton := proc(f, n, x_0)$

$> local \quad x_u, x_k, i, nev; x_k := x_0; nev := eval(diff(f(x), x), x = x_0);$

$> for \quad i \quad from \quad 1 \quad to \quad n \quad do$

$> \qquad x_u := evalf(x_k - evalf(f(x_k))/eval(diff(f(x), x), x = x_k));$

$> \qquad x_k := x_u;$

$> \qquad print(evalf(x_u));$

$> \qquad end \quad do;$

$> for \quad i \quad from \quad 1 \quad to \quad n \quad do$

$> \qquad x_u := evalf(x_k - evalf(f(x_k))/nev);$

$> \qquad x_k := x_u;$

$> \qquad print(evalf(x_u));$

$> \qquad end \quad do;$

$> x_k := x_0;$

$> end \quad proc;$

3. Melléklet

A Jacobi, a Gauss-Seidel és a Richardson iterációk.

$> with(LinearAlgebra):$

$> iteraciok := proc(A, h, n, x, b)$

$> local \quad A_1, A_2, Diag, M_J, M_{GS}, M_R, x_J, x_{GS}, x_R, p, i, j, mi, ma;$

$> A_1 := Matrix(h, h); A_2 := Matrix(h, h); Diag := Matrix(h, h);$

$> x_J := x; x_{GS} := x; x_R := x;$

$> mi := Eigenvalues(A)[1]; ma := mi;$

$> for \quad i \quad from \quad 1 \quad to \quad h \quad do$

$> \qquad for \quad j \quad from \quad 1 \quad to \quad i \quad do$

$> \qquad\qquad A_1[i, j] := A[i, j]; Diag[i, i] := A[i, i];$

$> \qquad\qquad mi := min(mi, Eigenvalues(A)[i]); ma := max(ma, Eigenvalues(A)[i]);$

$> \qquad\qquad end \quad do;$

$> \qquad end \quad do;$

$> A_2 := A - A_1; A_1 := A_1 - Diag;$

$> p := 2/(ma + mi);$

$> M_J := MatrixMatrixMultiply(MatrixInverse(Diag), (Diag - A));$

$> M_{GS} := MatrixMatrixMultiply((-1) * MatrixInverse(A_1 + Diag), A_2);$

$> M_R := IdentityMatrix(h) - p * A;$

$> if \quad ((evalf(MatrixNorm(M_J, 1)) < 1)or(evalf(MatrixNorm(M_J, 2)) < 1)or$
$(evalf(MatrixNorm(M_J, infinity)) < 1)) \quad then$

$> \qquad for \quad i \quad from \quad 1 \quad to \quad n \quad do$

$> \qquad\qquad x_J := MatrixVectorMultiply(M_J, x_J)+$
$+ MatrixVectorMultiply(MatrixInverse(Diag), b);$

$> \qquad\qquad print(evalf(x_J));$

$> \qquad\qquad end \quad do;$

$> \qquad end \quad if;$

$> if \quad ((evalf(MatrixNorm(M_{GS}, 1)) < 1)or(evalf(MatrixNorm(M_{GS}, 2)) < 1)or$
$(evalf(MatrixNorm(M_{GS}, infinity)) < 1)) \quad then$

$> \qquad for \quad i \quad from \quad 1 \quad to \quad n \quad do$

$> \qquad\qquad x_{GS} := MatrixVectorMultiply(M_{GS}, x_{GS})+$
$+ MatrixVectorMultiply(MatrixInverse(A_1 + Diag), b);$

$> \qquad\qquad print(evalf(x_{GS}));$

$> \quad\quad end \quad do;$

$> \quad end \quad if;$

$> if \quad ((evalf(MatrixNorm(M_R,1)) < 1) or (evalf(MatrixNorm(M_R,2)) < 1) or$
$(evalf(MatrixNorm(M_R,infinity)) < 1)) \quad then$

$> \quad for \quad i \quad from \quad 1 \quad to \quad n \quad do$

$> \quad\quad x_R := MatrixVectorMultiply(M_R, x_R) + p * b;$

$> \quad\quad print(evalf(x_R));$

$> \quad\quad end \quad do;$

$> \quad end \quad if;$

$> end \quad proc;$