Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Differenciálegyenletek megoldása a Maple programcsomag alkalmazásával

Szakdolgozat

Csete Katalin

Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Gémes Margit, Műszaki gazdasági tanár

Analízis

Budapest, 2010

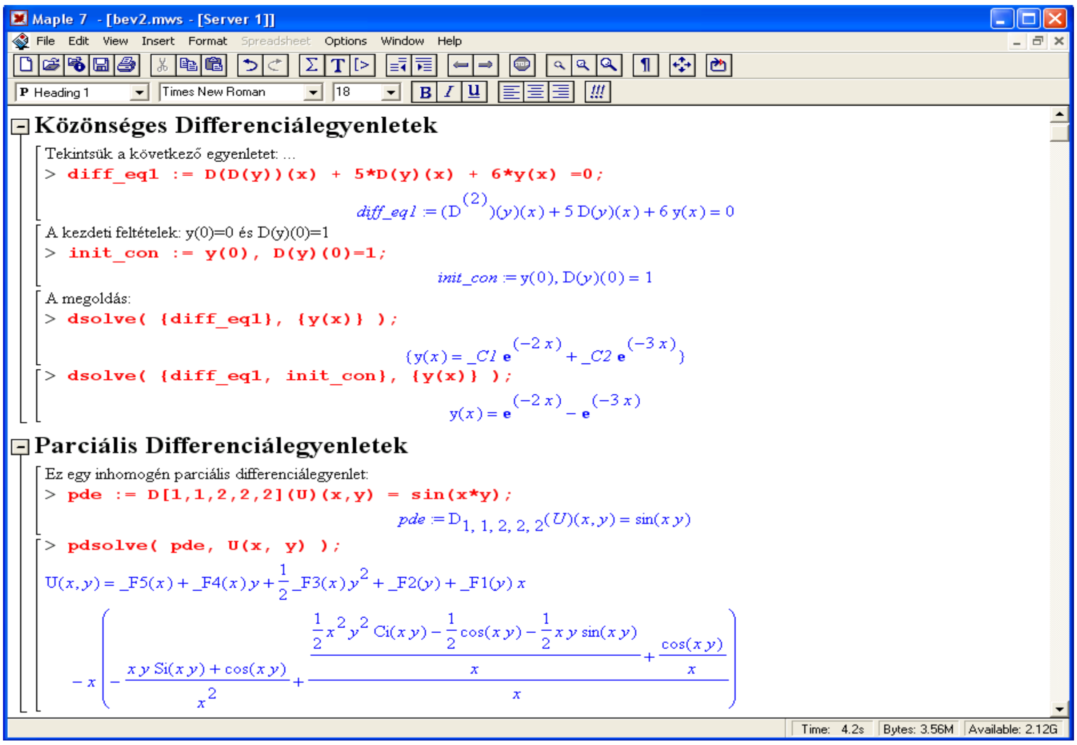
Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1. Rövid összefoglalás a dolgozat témájáról

Differenciálegyenletek

A bonyolultabb matematikai problémák megoldása esetén szinte elkerülhetetlen a differenciál- vagy integrálszámítás, differenciálegyenletek megoldása. A Maple beépített funkciói révén ezen "akadályok" egy részével megbirkózik, ezzel is megszabadítva a felhasználót a hosszú és időigényes számításoktól. Dolgozatom célja a differenciálegyenletek megoldása során a problémák kiküszöbölése, a megoldás menetének áttekintése és megértése a Maple programcsomag alkalmazása által, valamint a differenciálegyenletekkel kapcsolatos, lényegesebb fogalmak definiálása, a fontosabb tételek kimondása. A Maple-ben lehetőség van egy- vagy többváltozós függvények deriválására, integrálására (mind numerikus, mind pedig szimbolikus formában), sorfejtésre, határérték számításra is.
A differenciálegyenletek (egyenletrendszerek) megoldásához szükséges parancsok megtalálhatóak a program kelléktárában. Egyes esetekben a megoldás nem fejezhető ki zárt alakban, ekkor a rendelkezésre álló numerikus megoldási módszerek valamelyikével még mindig van esély a probléma megfejtésére, és a megoldás grafikus ábrázolására.



2. Maple programcsomag bemutatása

2.1. A Maple leírása

A Maple egy szimbolikus számításokra, magas szintű komputer algebrai és vizuális megjelenítésre széles körben alkalmazható rendszer. Lehetőséget ad numerikus, algebrai számításokra, diszkrét matematikai problémák megoldására, grafikai alkalmazásokra, a legkülönbözőbb két és háromdimenziós ábrák elkészítésére. Számos grafikai rutint tartalmaz, ami nagyon jól szolgál bonyolult matematikai adatok megjelenítésére. Sőt a Maple-ben olyan problémákra találhatunk numerikus algoritmusokat, amelyekre egzakt megoldás nem létezik. A speciális programok megoldásáról külön csomagok gondoskodnak, mint például a combinat (kombinatorika), geometry (geometria), plots és plottools (grafika), DEtools (differenciálegyenletek), stb. Ezek közül a DEtools programcsomag az, amit bővebben szeretnék ismertetni.

A Maple-lel egy munkalapon keresztül lehet kommunikálni, az utasításokat a munkalap aktuális helyén elhelyezkedő parancssorból tudjuk kiadni. Az aktuális parancssor alatt jelenik meg a programnak az általunk beírt parancsra a válasza, a lekérdezett számítás eredménye vagy éppen a hibaüzenet. Az ábrák és animációk egy külön ablakban jelennek meg. Ha ezekkel szerkesztéseket szeretnénk elvégezni, bemásolhatjuk őket egy munkalapra, ahol az átalakítások elvégezhetőek és tetszőleges formában különböző célokra fel lehet használni, vagy éppen kinyomtatni.

2.2. A Maple alapvető funkciói

- **Approximáció.** A Maple-ben a következő közelítő eljárások találhatóak meg: polinom illesztés, spline interpoláció, Csebisev-Pade approximáció, Padé-approximáció, stb. Az eljárások folyamán minden esetben megadja a közelítések pontosságát, relatív hibáját és szórását. Egy függvényt Taylor-, Laurent-, aszimptotikus- és ortogonális polinomok szerint haladó sorba tud fejteni.

- **Kalkulus.** A legkülönbözőbb integrál és differenciálszámítási feladatokat könnyedén megoldhatjuk a Maple-lel. A határozott integrálok közelítő kiszámítása gyakorlatilag tetszőleges pontosságig lehetséges, a határozatlan integrálok kiszámításánál felhasználja az elliptikus függvények, hipergeometrikus függvények, stb. beépített függvényeit. Megoldást ad olyan esetekben is, amikor „elemi” függvényekkel a határozatlan integrál esetleg nem írható fel.

- **Grafika.** A Maple által a legegyszerűbb függvényábrázolások és geometriai alakzatok kirajzoltatása is elvégezhető. A plot-struktúra tárolja az ábrákat, amelyeket a generálás után lehet szerkeszteni 2 vagy akár 3 dimenzióban. Két dimenzióban a függvényeket megadhatjuk Descartes-koordináta-rendszerben, paraméteres alakban, polár-koordinátában. Kétváltozós függvények szintvonalainak kirajzolására vagy sűrűségi ábrák készítésére is lehetőséget ad a programcsomag. Be lehet állítani a vonalak vastagságát, nyilak, tengelyek pontos kinézetét, a használt színeket és azok árnyalatait, feliratokat lehet készíteni az ábrákhoz. A kész grafikákat le lehet menteni postscript vagy gif formátumban. Három dimenzióban a Maple ismeri a felületek, térgörbék polár-koordinátás, Descartes-koordinátás, hengerkoordinátás és paraméteres megoldását, és lehet vektormezőket, implicit függvényeket ábrázolni is.

- **Lineáris algebra.** A Maple a lineáris algebra minden területén alkalmazható, hiszen ismeri alapfogalmait, problémáit és műveleteit, így például a vektorokat, mátrixokat és azok Jordan felbontását is. Néhány speciális mátrix a gyorsabb kezelhetőség kedvéért egy utasítással előhívható, pl: Jacobi, Sylvester, Fibonacci, stb.

- **Algebrai- és differenciálegyenlet megoldása.** A Maple képes pontosan megtalálni a maximum 4-ed fokú polinom zérushelyeit. Speciális esetekben magasabb rendű polinomok esetén is meg tudja határozni a zérushelyeket. Azokban az esetekben, amikor a megoldást nem tudja meghatározni (pl.: magasabb fokú polinomok), akkor a megoldást formálisan kezeli, mint az adott egyenlet gyökét, és a későbbi számolásokban ez felhasználható. Mindig van lehetőség numerikus megoldásra.

A legújabb verzióban már parciális differenciálegyenleteket is meg lehet oldani nem csak egzaktul, kezdeti feltétel nélkül is. Megfelelő határfeltétel nélkül jelzi a tetszőleges függvényeket. Ha egzakt megoldást nem talál, akkor a megoldás grafikusan is megjeleníthető különféle numerikus algoritmusok segítségével.

2.3. A Maple csomagok és parancsok

Az összes használható programcsomag lekérhető az: **>?index,package;** paranccsal. A differenciálegyenletek megoldásakor a Maple következő csomagjait, parancsait fogjuk használni: DEtools, plots, DEplot, dfieldplot, dsolve.

Ha valamelyik csomag még nincs betöltve a Maple-be és használni szeretnénk az általa nyújtott lehetőségeket, akkor azt egyszerűen betölthetjük a **>with(package);** paranccsal, például: >**with(DEtools);**

Az aktuális betöltött parancsok listája lekérhető a >**package();** paranccsal, például: >**DEtools();**

A Maple DEtools könyvtára több parancsot tartalmaz, amelyek hasznosak a differenciálegyenletek megoldásaihoz. Ezek közül egyet arra fogunk használni, hogy iránymezőket készítsünk elsőrendű differenciálhányados megoldásgörbéiből, mindezt a DEplot paranccsal érhetjük el. Ahhoz, hogy használni tudjuk, először be kell tölteni a következő utasítással:

```
> with(DEtools,DEplot);
```

A DEplot előhívó szintaxisa a következő képen néz ki:

>DEplot(diffeq, vars, trange, inits, <options>)

Ez a szintaxis elég bonyolult. Ennek az oka az, hogy sok információ van, amivel a differenciálegyenletről el kell látnunk a programot, megadni a feltételeket, ha a megoldásgörbéket látni szeretnénk.

Tekintsük a következő példát:

Tegyük fel, hogy meg akarjuk mutatni a következő egyenlet, az $\dot{y} + x * y = 1$, iránymezőjét és a megoldásgörbéjét. Bizonyos oknál fogva a megoldásokat *x=0* és *y=0* közelében keressük. Úgy döntünk, hogy a grafikai ábránk *x* = *-2..2*-ig és *y* = *-2..2*-ig terjedjen. Ábrázolni szeretnénk az iránymezőt és néhány megoldásgörbét. A megoldásokat jól részletezik a kezdeti feltételek és nekünk a következőek adottak: *y(0)=-1, y(0)=-0.5, y(0)=0, y(0)=0.5 és y(0)=1.*

DEplot(...); — A parancs neve

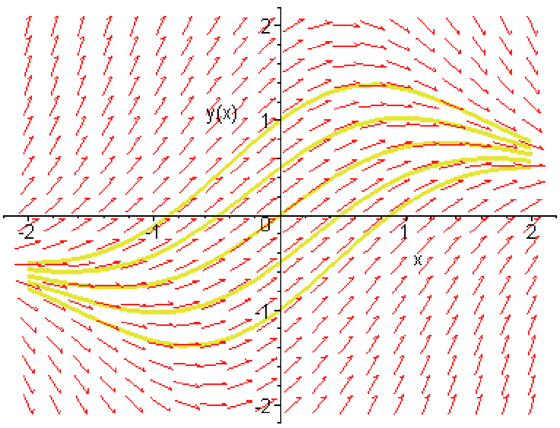
- **diffeq:** ez a differenciálegyenlet. Itt kell feltüntetni, hogy egy elsőrendű diffirenciálegyenletről, vagy egy magasabb rendű defferenciálegyenletről van szó.

Hasonló a dsolve-hoz, bár van egy különbség, mégpedig az, hogy a differenciálegyenlet `diff(y(x),x)` részének meg kell jelennie az =-jel bal oldalán és minden más egyéb a jobb oldalra kerül (másképp a program nem rajzolja ki az iránymezőt helyesen). Esetünkben ezért kerül az *x*y(x)* a jobb oldalra ellenkező előjellel.

- **vars:** egy tömb, amely a változók nevét tartalmazza, a fenti példa esetén *y(x)*
- **trange:** határozza meg a tartományt, az X tengely azon értékeit, amelyen a megoldást ki kell számolni.
- **inits:** adja a kezdeti feltételeket, mivel túl sok ilyen feltétel lehet, ezért hosszú időt vehet igénybe az ábra elkészítése. Esetünkben az *y(0)=-1* et lefordítva a [0,-1] pontba megy át, az *y(0)=-0.5* pedig a [0,-0,5] pontba, stb.
- **<options>:** egy listát tartalmaz, hogy az ellenőrzési lehetőségek integráló algoritmus vagy grafikus teljesítmény. Integráló algoritmus esetén a legfontosabb, hogy tudjuk a `stepsize` értékét, ami vezérli az integráló algoritmus lépésméretét. Valamint itt található még az a tartomány, amely által az y értékeket felvesszük a függőleges tengelyen.

Ezen feltételek mellet a megoldásgörbe a következő ábrán látható és a DEplot parancs így néz ki:

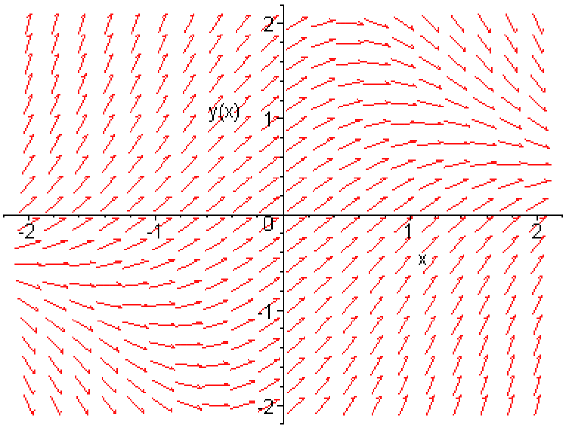
```
> DEplot(diff(y(x), x)=1-x*y(x),y(x), x=-2..2, {[0,-1],[0,-0.5],[0,0],[0,0.5],[0,1]}, y=-2..2);
```



Nézzük két kisebb variációját a fent említett példának:

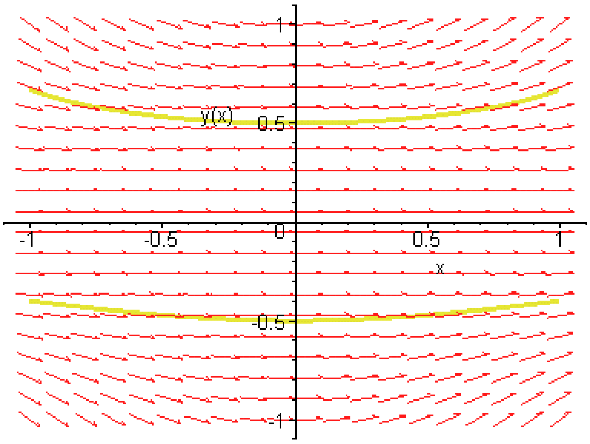
1. Ha csak az iránymező érdekel minket, bármilyen megoldásgörbe nélkül, akkor a kezdeti feltételeket kihagyhatjuk.

> DEplot(diff(y(x), x)=1-x*y(x),y(x), x=-2..2, y=-2..2);



2. A Maple egy numerikus eljárást (integral algoritmust) használ a megoldásgörbe megtalálására. Javítani tudunk az eljáráson, ha csökkentjük a "stepsize" paramétert, azaz a lépés méretét (Ez növeli a pontosságot és ennek következtében a Maple több pontot számol ki, épp, mint a trapéz szabály esetén). Például:

> DEplot(diff(y(x), x)=x*y(x)^2,y(x), x=-1..1, {[0,0.5],[0,-0.5]}, y=-1..1, stepsize=0.05);



A DEplot paranccsal kapcsolatos további információhoz a Help menü által juthatunk.

Nézzünk még egy példát a dfieldplot parancsra. Az $\dot{y} = x * y^2$ megoldásgörbéjét keressük az $x = -2..2, y = -2..2$ tartományon.

A dfieldplot szintaxisa a következő:

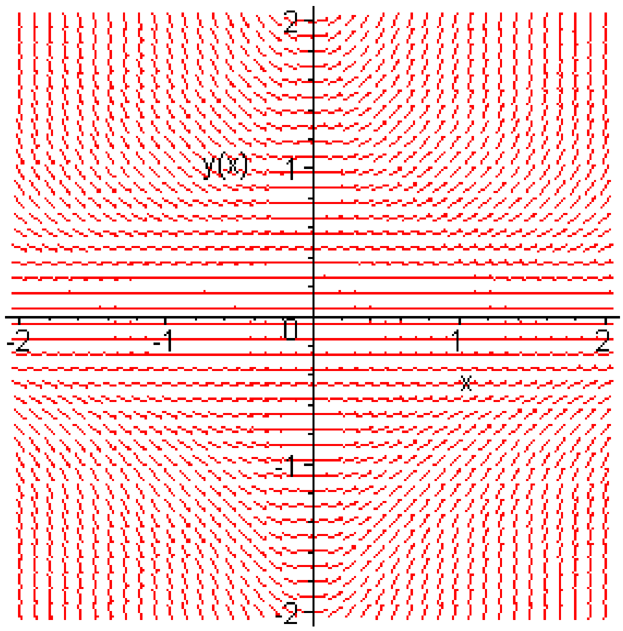
dfieldplot(deqns, vars, trange, yrange, xrange, options)

- **deqns:** a parancs első paramétere maga a differenciálegyenlet

- **vars:** a második paraméter megadja a változót (jelen esetben az *y(x)*-ről van szó, azaz y x-től függ)
- **trange, yrange, xrange:** a harmadik, negyedik és ötödik bemeneti adat megadja azt a tartományt, ahol a megoldás görbéit ábrázoljuk, esetünkben $x = -2..2$, $y = -2..2$
- **options:** A többi paraméter opcionális, akár ki is hagyható. Általában, ha iránymezőt rajzolunk, akkor a “scaling=constrained” opciót használjuk, különben az irányvonalak torzulhatnak.

A `dfieldplot` paranccsal az általános megoldásgörbéjét ábrázolhatjuk, például:

```
> with(DEtools, DEplot,dfieldplot);
> dfieldplot(diff(y(x), x)=x*y(x)^2,y(x),x=-2..2, y=-2..2, color=blue,scaling=constrained,dirgrid=[40,40]);
```



2.4. Megjelenítés

A grafikai eszköztár lehetőséget biztosít a felhasználó számára az ábrázolás szempontjából:

1. Különböző koordináta-rendszerek használatára: derékszögű, polár, henger, gömbi.
2. Különféle ábrázolási módokra: szintvonalas, változtatható nézőpont, programozható színezés, hőtérképek.

3. Paraméteres, implicit módon megadott komplex függvények ábrázolása.

Gyakran e lehetőségek elérése csak az eljárás egy-egy úgynevezett opciójának beállítását igényli. A beépített lehetőségeken túl a plots csomag hasznos eljárásokat nyújt.

A grafikai eszközök, az ábrák kirajzolása is fontos szerepet játszik a differenciálegyenletek megoldásgörbéinek ábrázolása szempontjából. A `plot` parancs nagyon hasonlít a `DEplot`, valamint a `dfieldplot` parancsra, ebből kifolyólag egy példa keretein belül szemléltetném a PLOT-struktúrát.

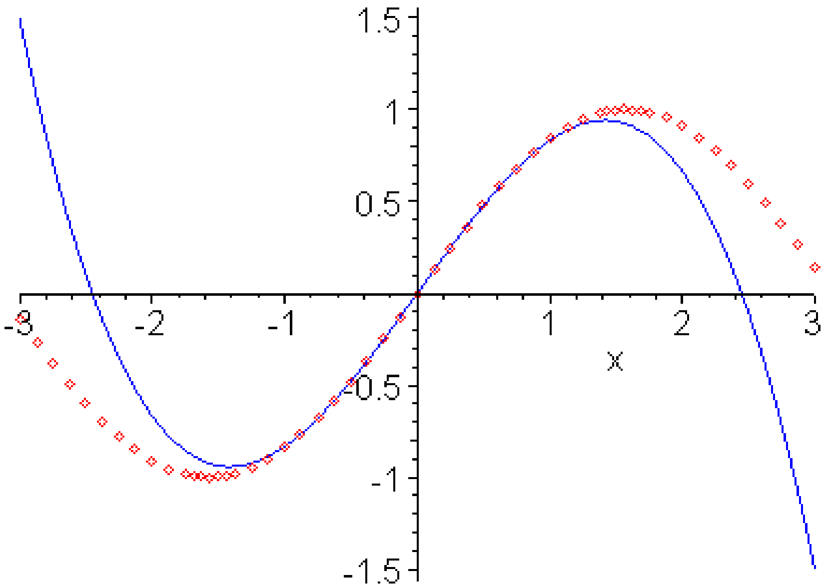
PLOT-struktúra

Valójában maga a kirajzolás két fázisban történik: először készül egy PLOT-struktúra, majd az átfordítódik rajzzá:

```
> a:=plot(sin);a;#utóbbi parancsra megjelenik a rajz
>with(plots);display(a,axes=FRAME,labels=["x","sin(x)"]);
#utólag átírhatjuk a plot struktúra paramétereit
> display(a,linestyle=DOT);#összekötő egyenes fajtája
> display(a,style=POINT, symbol=BOX);#(xi,yi)csak mint
pontok jelenjenek meg és minden pont=négyzet
```

Több függvényt is ábrázolhatunk egyszerre. Ilyenkor listával, vagy halmazzal dolgozunk. Például:

```
> plot([sin(x), x-x^3/6], x=-3..3, color=[red,blue],
style=[point, line]);
```



3. Differenciálegyenletekkel kapcsolatos alapfogalmak, és tételek

3.1. Bevezető, definíció

Azok az egyenletek, melyekben az ismeretlen egy függvény és az egyenletben az ismeretlen függvény deriváltja is előfordul nem mások, mint a differenciálegyenletek. Newton szavaival élve: „a természet törvényeit differenciálegyenletek írják le.” Ahhoz, hogy ezt megértsük fontos a differenciálegyenletek tanulmányozása. Az $\dot{y} = y$ differenciálegyenletet megoldani annyi, mint megtalálni az összes olyan függvényt, amelynek a deriváltja egyenlő magával a függvénnyel. Könnyen látható, hogy minden $c \in \mathbb{R}$-re az $y = ce^x$ alakú függvényekre igaz, hogy az ő deriváltjaik saját magukkal megegyeznek, vagyis az összes $y = ce^x$ alakú függvény az $\dot{y} = y$ differenciálegyenlet megoldása.

A fizikához visszatérve még egy mondat erejéig a sebesség fogalmának szemléltetése az

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

képlet alapján tehető meg, ahol t jelöli az időt, x pedig az elmozdulást. Ebből kiindulva lehet felírni a legegyszerűbb differenciálegyenleteket.

3.2. Elsőrendű differenciálegyenletek

DEFINÍCIÓ. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$összefüggő nyílt halmaz (tartomány), $f: D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

Ez az elsőrendű közönséges differenciálegyenlet általános alakja.

Az egyenlet megoldásai általánosan nem adhatók meg. (A differenciál algebra foglalkozik azzal, hogy mely egyenletek megoldása adható meg képlettel.) Megoldható típusok több helyen össze vannak gyűjtve, pl. Maple, ill. Mathematica programcsomagokban.

TÉTEL: Ha az f függvény a második deriváltjában lokálisan Lipschitz tulajdonságú (azaz létezik olyan $L \in \mathbb{R}^+$, hogy $|f(t, p_1) - f(t, p_2)| \leq L|p_1 - p_2|$), akkor minden

$(t_0, p_0) \in D$ esetén létezik olyan lokális (azaz t_0 egy környezetében értelmezett) megoldása az elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek, amelyre $x(t_0) = p$

3.2.1. Szeparábilis egyenletek és megoldásuk

A továbbiakban néhány egyszerűen megoldható típussal fogunk foglalkozni, elsőként a

$$\dot{x}(t) = g(t)h(x(t))$$

alakú, úgynevezett szeparábilis (szétválasztható) egyenletekkel.

Megoldási módszer:

Külön oldalra rendezve a csak t-től, illetve x-től függő tényezőket

$$\dot{x}(t) = g(t)h\big(x(t)\big) \Leftrightarrow \frac{\dot{x}(t)}{h\big(x(t)\big)} = g(t) \Leftrightarrow H\big(x(t)\big) = G(t) + C,$$

ahol $\dot{G} = g$ és $\dot{H} = {}^{1}\!/_{h}$

A fenti feltételek mellett a lokális megoldás létezésén kívül annak egyértelműsége is következik (ez a Picard-Lindelöf tétel).

3.2.2. Elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenletek

Elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet a következő képlettel adható meg:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

ahol $a, b: I \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények az I intervallumon.

Kétféle megoldási módszer van:

Első módszer: Szorozzuk be az egyenletet $e^{-A(t)}$-vel, ahol $\dot{A} = a$, és így vezetjük le a megoldást!

Második módszer: Ha ismerünk egy x_0-lal jelölt megoldást, akkor egy tetszőleges x megoldást $x = x_0 + y$ alakba írva, az y-ra az $\dot{y} = a \cdot y$ szétválasztható változójú egyenletet kapjuk, melynek megoldása $y(t) = Ce^{A(t)}$. Ez az x_0 megoldás megadható $x_0(t) = C(t)e^{A(t)}$ alakban, és a C függvényre minden esetben egy integrálással megoldható differenciálegyenletet kapunk.

3.2.3. Homogén-, Bernoulli-, egzakt differenciálegyenletek

Homogén differenciálegyenlet

DEFINÍCIÓ: Az f függvényt homogénnek (pontosabban 0-adfokú homogénnek) nevezzük, ha $f(\alpha t, \alpha p) = f(t, p)$ minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén (az r-ed fokú homogénre $f(\alpha t, \alpha p) = \alpha^r f(t, p)$).

Az $\dot{x}(t) = g\left(\frac{x(t)}{t}\right)$ egyenletet homogén fokszámú egyenletnek, homogén közönséges differenciálegyenletnek nevezzük.

Megoldási módszer**:** Az $y(t) = \frac{x(t)}{t}$ új ismeretlen függvény bevezetésével szétválaszthatóra vezethető vissza.

Az $\dot{x}(t) = g(at + bx(t) + c)$ egyenlet megoldásához az $y(t) = g(at + bx(t) + c)$ helyettesítést érdemes elvégezni.

Bernoulli-féle differenciálegyenlet.

Az alábbi típust Bernoulli-féle egyenletnek nevezzük:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)x^{\alpha}(t)$$

$a, b: I \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények az I intervallumon,$\alpha \in \mathbb{R}$ adott szám.

Megoldási módszer**:** Az $y(t) = x^{1-\alpha(t)}$ helyettesítéssel y-ra lineáris egyenletet kapunk.

Egzakt differenciálegyenlet.

Végül az úgynevezett egzakt egyenletekkel foglalkozunk:

$$M(t, x(t)) + N(t, x(t))\dot{x}(t) = 0, \text{ (ahol } \partial_1 N = \partial_2 M\text{)}$$

$M, N: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adott differenciálható függvények.

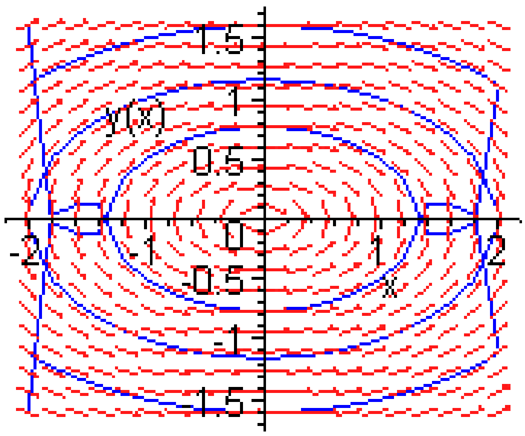
Megoldási módszer: Határozzuk meg azt az $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre $\partial_1 F = M$ és $\partial_2 F = N$. Ekkor a megoldás implicit alakja $F(t, x(t)) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Konkrét feladatoknál az x megoldást nem minden esetben lehet explicit alakban megadni. Ha az egyenlet nem egzakt, akkor egy ügyesen választott $\mu(t,x)$ függvénnyel beszorozva esetleg egzakttá tehető. Egy ilyen μ függvényt integráló tényezőnek nevezünk.

3.2.4. Iránymező

Tekintsük az $\dot{y} = F(t,y)$ $y(t_0) = y_0$ kezdetiérték feladatot. Ha $F(t,y) = f(y) \cdot g(t)$ akkor egy szétválasztható változójú egyenlet. Ha $F(t,y) = \alpha(t)y(t) + \beta(t)$ valamilyen $\alpha(t), \beta(t)$ folytonos függvényekre, akkor az egyenlet elsőrendű lineáris egyenlet és ez megoldható. Ezeken kívül még nagyon sok olyan eset van, amikor a $\dot{y} = F(t,y),\ y(t_0) = y_0$ kezdeti érték feladatot meg tudjuk oldani. Azonban olyan esetek is vannak, amikor az egyenlet megoldására semmilyen módszert nem ismerünk, vagyis ugyan meg tudjuk oldani az egyenletet, de a megoldást olyan bonyolult képlet adja, ami nem mond semmit. Az egyik dolog, amit ilyen esetben tehetünk, ha megnézzük az iránymezőt (komputerrel). Az iránymezőt úgy kapjuk, ha a ty sík nagyon sok *(t,y)* pontján keresztül megrajzoljuk annak az egyenesnek egy picike darabját, amelynek meredeksége *F(t,y)*. Mivel az egyenes a keresett megoldás érintője a t-ben, ezen vonal elemek a keresett megoldások közelítését adják. Annál pontosabb közelítés, minél több ponton keresztül rajzoljuk meg a fenti vonalelemeket.

Ezt az alábbiakban egy példán szemléltetjük: Tekintsük az $x^2 - 3xy^2 = c$ egyenletetű ellipszist! A Maple programot használva a következőket írjuk:

```
> restart;
> diffegyenlet:=diff(y(x),x)=-x/(3*y(x));
> with(DEtools):
> DEplot(diffegyenlet,y(x),x=-2..2,{[y(1)=1/2],[y(1)=1],
[y(1)=3/2],[y(1)=(-1)/2],[y(1)=-1],[y(1)=(-3)/2]},
scaling=constrained,arrows=SMALL,thickness=1,linecolor=bl
ue)
```



3.3. Másodrendű lineáris egyenletek, magasabbrendű egyenletek

3.3.1. Inhomogén egyenletek, homogén egyenletek

Az $\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t)$ alakú differenciálegyenleteket, ahol $p, q, f: I \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények az I intervallumon, homogénnek nevezzük, ha $f \equiv 0$ különben inhomogénnek hívjuk.

TÉTEL. A fenti differenciálegyenlet minden megoldása előáll

$$x(t) = x_0(t) + c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

alakban, ahol x_0 az inhomogén egyenlet megoldása, x_1 és x_2 pedig a homogén egyenlet lineárisan független megoldásai, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok.

Az egyenlet megoldásainak előállítása két lépésből áll: egyrészt a homogén egyenlet két lineárisan független megoldásának (alaprendszerének) meghatározása, másrészt az inhomogén egyenlet egy úgynevezett partikuláris megoldásának (ez az $x_0(t)$) megkeresése.

Homogén egyenlet:

A megoldások előállítására nincs általános módszer, két speciális esetet tárgyalunk.

(a) Ha az egyenlet állandó együtthatós, azaz

$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t)$, ahol $p, q \in \mathbb{R}$,

akkor a megoldást kereshetjük $x(t) = e^{\lambda t}$ alakban. Ekkor λ-ra a $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ egyenletet kapjuk. Ha ennek gyökei valósak és különbözők *(λ_1, λ_2),* akkor a két lineárisan független megoldás: $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$. Ha az egyenletnek kétszeres valós gyöke van (λ), akkor a két lineárisan független megoldás:

$x_1(t) = e^{\lambda t}, x_2(t) = te^{\lambda t}$.

Ha a gyökök nem valósak, azaz $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ és $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, akkor a két lineárisan független megoldás: $x_1(t) = e^{\alpha t} cos\beta t$, $x_2(t) = e^{\alpha t} sin\beta t$. Hasonlóan lehet eljárni magasabb rendű egyenlet esetében is, akkor természetesen $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ is magasabb fokú lesz.

(b) Ha ismerünk egy $x_1(t)$ megoldást, akkor egy másikat lehet

$x_2(t) = x_1(t)z(t)$ alakban keresni, és ekkor $\dot{z}(t)$-re egy elsőrendű egyenletet kapunk. Az $x(t)$ megtalálására nincs általános módszer, gyakran érdemes speciális alakban (pl. polinom, vagy hatványsor) keresni.

Inhomogén egyenlet:

(a) Ha az $\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t)$ egyenlet állandó együtthatós és az inhomogén tag speciális alakú, akkor viszonylag egyszerűen meglehet határozni egy $x_0(t)$ partikuláris megoldást:

TÉTEL. Legyen a $\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t)$ ben p és q konstans függvény, valamint $f(t) = e^{\alpha t}(P_1(t)cos\beta t + P_2(t)sin\beta t)$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és f és P_1, P_2 polinomok.

Jelölje k az $\alpha+\beta i$ multiplicitását $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$-ban ($k$ lehet 0 is). Ekkor az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása előáll

$$x_0(t) = t^k e^{\alpha t}(Q_1(t)cos\beta t + Q_2(t)sin\beta t)$$

alakban, ahol Q_1 és Q_2 polinomok, melyeknek foka legfeljebb P_1 és P_2 fokának maximuma.

(b) A partikuláris megoldás előállítható a homogén egyenlet alaprendszeréből az állandók variálásának módszerével is. Ez a módszer -az előzőtől eltérően -minden esetben működik, de nagyon sok számolást igényel(het).

A $\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t)$ inhomogén egyenlet partikuláris megoldását keressük $x_0(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$
alakban, ahol x_1, x_2 a homogén egyenlet két lineárisan független megoldása. Legyen

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}$$

az ún. Wronski-determináns, ami az alapmegoldások lineáris függetlensége miatt sehol sem nulla. Ekkor a keresett c_1, c_2 függvények a következő képlettel számolhatók:

$$c_1 = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ f(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}}{W(t)}, \qquad c_2 = \int \frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ \dot{x}_1(t) & f(t) \end{vmatrix}}{W(t)}$$

3.3.2. Peremérték-problémák, sajátérték-feladatok

Legyenek $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, $a<b$, továbbá legyenek $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ adott számok és $f \in C[a, b]$.

A $\begin{cases} \ddot{x}(t) + p\dot{x}(t) + qx(t) = f(t) \\ H_1 x = \eta_1, H_2 x = \eta_2 \end{cases}$ $\qquad (PP) = Peremérték - problma$

feladatot perempérték problémának nevezik, ahol a peremfeltételben a $H_1, H_2: C_1[a,b] \to \mathbb{R}$ lineáris leképezések az alábbi három típusba eshetnek:

(a) $H_1x \coloneqq x(a) = \eta_1, H_2 \coloneqq x(b) = \eta_2$ (Dirichlet-peremfeltétel)

(b) $H_1x \coloneqq \dot{x}(a) = \eta_1, H_2 \coloneqq \dot{x}(b) = \eta_2$ (Neumann-peremfeltétel)

(c) $H_1x \coloneqq \alpha_1 x(a) + \beta_1 \dot{x}(a) = \eta_1, H_2 \coloneqq \alpha_2 x(b) + \beta_2 \dot{x}(b) = \eta_2,$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ és $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ (i =1,2) (vegyes peremfeltétel)

(A vegyes peremfeltétel esete speciálisan magában foglalja a másik két típust is.)

a peremfeltételekbe helyettesítve kapjuk az alábbi tételt:

TÉTEL: A másodrendű egyenletekről tanultak szerint a (PP) differenciálegyenlet minden megoldása előáll $x(t) = x_0(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ alakban, ahol x_0 az inhomogén, x_1 és x_2 pedig a homogén egyenlet megoldásai, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok. Ha már megtaláltuk az x_0, x_1, x_2 függvényeket, akkor a (PP) megoldása azt jelenti, hogy megadjuk a c_1, c_2 számokat úgy, hogy x teljesítse a peremfeltételeket is.

A (PP)-nak pontosan akkor létezik minden $f \in C[a,b]$ és minden $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ esetén egyetlen megoldása, ha léteznek a homogén egyenletnek olyan lineárisan független x_1, x_2 megoldásai, melyekre

$$detA = \begin{vmatrix} H_1x_1 & H_1x_2 \\ H_2\,x_1 & H_2x_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ha ez a determináns nulla, akkor a (PP)-nak vagy végtelen sok megoldása van, vagy nincs megoldása.

Mivel det A =0 azt jelenti, hogy az A mátrix egy nemnulla vektort nullába képez, azért a tételből következik az alábbi:

KÖVETKEZMÉNY. A (PP)-nak pontosan akkor létezik minden $f \in C[a,b]$ és minden $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ esetén egyetlen megoldása, ha a homogén (PP)-nak (melynél $f \equiv 0$,és $\eta_1 = \eta_2$=0) csak az azonosan nulla függvény megoldása.

Ennek eldöntésében segít a sajátérték feladat vizsgálata.

DEFINÍCIÓ. A λ szám sajátértéke a (PP)-hoz tartozó sajátérték feladatnak, ha

$$\begin{cases} \ddot{x} + p\dot{x} = \alpha x \\ H_1x = H_2x = 0 \end{cases}$$

(PP)-nak van nem azonosan nulla megoldása.

Mivel -q pontosan akkor sajátérték, ha det A =0,azért fennáll az alábbi:

TÉTEL. A (PP)-nak pontosan akkor létezik minden f Є C[a,b] és minden η_1,η_2 Є R esetén egyetlen megoldása, ha -q nem sajátértéke a (PP)-hoz tartozó

$$\begin{cases} \ddot{x} + p\dot{x} = \alpha x \\ H_1 x = H_2 x = 0 \end{cases}$$

sajátérték feladatnak.

3.4. Differenciálegyenlet rendszerek

3.4.1. Autonóm egyenlet/rendszer.

Tekintsünk először egy n-dimenziós autonóm rendszert:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Ez általában képlettel nem oldható meg, így a legtöbb információt a megoldásokról a fáziskép szolgáltatja. Az $x(t) \equiv p$ konstans megoldásokat az *f(p)=0* algebrai egyenletrendszer megoldásával nyerhetjük. Ezen p pontokat nevezzük egyensúlyi, vagy stacionárius pontoknak. A trajektóriák viselkedése az egyensúlyi pontok kis környezetében linearizálással határozható meg. Ez heurisztikusan a következőt jelenti. Az $y(t) = x(t) - p$ új függvényre a differenciálegyenlet

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = f\big(x(t)\big) = f\big(p + y(t)\big) = f(p) + f'(p)y(t) + r\big(y(t)\big)$$
$$= f'(p)y(t) + r(y(t))$$

ahol r a maradéktagot jelöli. Mivel kis y esetén ez kisebb nagyságrendű, mint a lineáris tag (ha az nem túl kicsi, pl. nem zérus), azért várható, hogy a p egyensúlyi pont egy környezetében a fázisképet az

$$\dot{y}(t) = f'(p)y(t)$$

ún. linearizált egyenlet meghatározza.

3.4.2. Ljapunov-függvény, (Lie-derivált), Lotka-Volter rendszer

DEFINÍCIÓ. Legyen $M \in \mathbb{R}^n$ tartomány, $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény és tekintsük az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ autonóm egyenletet (rendszert). Legyen $U \subset M$ nyílt halmaz és $V\colon U \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Ekkor a V függvény $\dot{x}(t) = f(x(t))$ rendszer szerinti deriváltja (vagy a V deriváltja az f vektormező mentén, vagy a V Lie-deriváltja) az alábbi függvény:

$$L_f V := < gradV, f >, azaz \ \big(L_f V\big)(p) = \delta_1 V(p) f_1(p) + \dots + \delta_n V(p) f_n(p), p \in \mathbb{R}^n$$

Ha *x(t)* a $\dot{x}(t) = f(x(t))$ egyenlet megoldása, akkor a $V^*(t) = V(x(t))$ függvényre $\dot{V}^*(t) = \left(L_f V\right)(x(t))$.

Ha $\dot{V}^* \equiv 0$, akkor a *V* függvényt első integrálnak nevezzük. Ez azt jelenti, hogy a *V* függvény értéke a megoldások mentén állandó.

Lotka-Volterra rendszer:

$\dot{x} = x - x \cdot y$ és $\dot{y} = x \cdot y - y$,feltesszük,hogy *x,y* $\geq$ 0. Az első integrált elvileg az elsőrendű parciális differenciálegyenleteknél használt módszerrel lehet megtalálni, ami jelen esetben lényegében a következő: elosztva egymással a két egyenletet: $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y(x-1}{x(1-y)}$, ezt a változók szétválasztása után integrálva kapjuk az első integrált:

$$V(x, y) = x - ln \cdot x + y - ln \cdot y$$

4. Differenciálegyenletek megoldása Maple segítségével

4.1. Közönséges differenciálegyenletek

Az első néhány lépésben azokkal a parancsokkal ismerkedünk meg, amelyeket a Maple a differenciálegyenletek megoldása folyamán használ. Ezek a parancsok a Maple "DEtools" csomagjában találhatóak. Ezek a csomagok a következő utasításokkal tölthetőek be:

```
> with(plots);
> with(DEtools);
```

Differenciálegyenletek megoldására a Maple számos lehetőséget kínál, ezek közül elsősorban a `dsolve` parancsot használhatjuk. Ennek a parancsnak a következő opciói: numeric és method=... tucatnyi numerikus algorimus kiválasztására adnak lehetőséget. A dsolve használata hasonló a solve-éhoz:

dsolve (mit, ismeretlen)

Fontos, hogy az ismeretlen függvényt "y(x)-es alakban" írjuk be, hogy a Maple felismerje a változót, mivel az y függvény az x változótól függ.

Egy példa: Tekintsük a következő elsőrendű differenciálegyenletet:

$$\dot{y}(x) - \sin(x) * y(x) = \sin\,(x)$$

Definiáljuk először az egyenletet. Az egyenletben szereplő függvény változóját mindig kiírjuk, a deriváltját megadhatjuk a **diff** paranccsal vagy a **D** operátorral:

```
> degy1:=diff(y(x),x)-sin(x)*y(x)=sin(x);
```

$$degy1 := \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x)\right) - \sin(x)\,\mathrm{y}(x) = \sin(x)$$

Ezzel ekvivalens megoldás:

```
> degy2:=D(y)(x)-sin(x)*y(x)=sin(x);
```

$$degy2 := \mathrm{D}(y)(x) - \sin(x)\,\mathrm{y}(x) = \sin(x)$$

```
> dsolve(degy1,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = -1 + \mathrm{e}^{(-\cos(x))}\,\_C1$$

Második példánk:

```
> degy3 := diff(y(x), x)=cos(x)+y(x);
```

$$degy3 := \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x) = \cos(x) + \mathrm{y}(x)$$

```
> dsolve(degy3, y(x));
```

$$y(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) + e^x\_C1$$

Látható, hogy az integrálási állandót "_C1"-el jelöli (több integrálási változó esetén "_C2", "_C3", stb.).

Az eredmény formálisan nem más, mint egy logikai egyenlőség, ennek jobb oldala szolgáltatja a differenciálegyenlet megoldásának képletét!

Így a megoldás képlete:

```
> rhs(%);
```

$$-\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) + e^x\_C1$$

Kezdetiérték feltétellel megadott elsőrendű differenciálegyenletet is meg tudunk oldani. Most tekintsük ezt az esetet:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2xy, \quad y(0) = 2$$

```
>degy4:=diff(y(x),x)=2*x*y(x);
```

$$degy4 := \frac{\partial}{\partial x}y(x) = 2\,x\,y(x)$$

```
>dsolve(degy4,y(x));
```

$$y(x) = \_C1\, e^{(x^2)}$$

Kezdeti feltételt megadása esetén:

```
>kezdfelt1 := y(Pi/2)=-1;
```

$$kezdfelt1 := y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -1$$

A dsolve parancs paramétereit halmazban is megadhatjuk (de kezdeti feltétel esetén a differenciálegyenletet és a kezdeti feltételt mindig halmazként kell átadni):

```
>dsolve(degy3,y(x));
```

$$y(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) + e^x\_C1$$

```
>dsolve({degy3},{y(x)});
```

$$\{y(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) + e^x\_C1\}$$

```
>dsolve({degy3, kezdfelt1}, y(x));
```

$$y(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{3}{2}\,\frac{e^x}{\cosh\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \sinh\left(\frac{1}{2}\pi\right)}$$

A megoldás képlete most már egy konkrét függvény lesz, a kezdeti feltétel meghatározza a paraméter értékét. Ekkor a megoldás:

```
>megold3:=dsolve({degy3, kezdfelt1}, y(x));
```

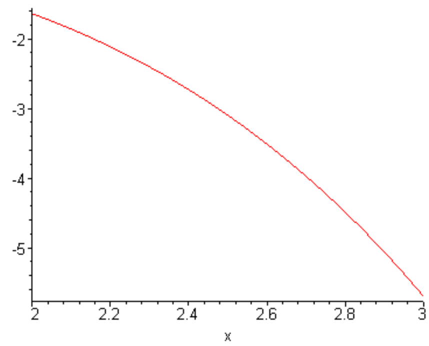
$$megold3 := y(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{3}{2}\,\frac{e^x}{\cosh\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \sinh\left(\frac{1}{2}\pi\right)}$$

```
>y3:=rhs(megold3);
```

$$y3 := -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{3}{2}\,\frac{e^x}{\cosh\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \sinh\left(\frac{1}{2}\pi\right)}$$

A megoldás kirajzolása pl. a [2,3] intervallumon és helyettesítési értéke x=4-ben 3 jegyre kerekítve:

```
>plot(y3, x=2..3);
```




```
>evalf(subs(x=4, y3), 3);
```

$$-17.2$$

Visszatérve a

```
>degy4:=diff(y(x),x)=2*x*y(x);
```

példára, ha y(0)=2 kezdetiértékfeltételt adunk meg:

```
> dsolve({degy4,y(0)=2}, y(x));
```

$$y(x) = 2\,e^{(x^2)}$$

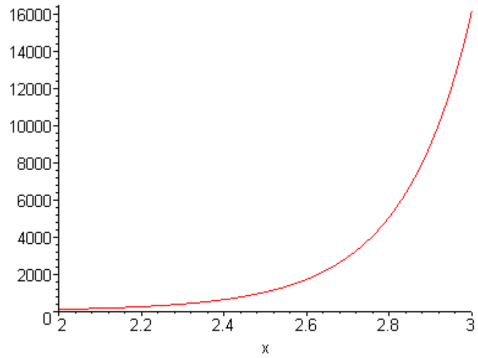
```
> megold4:=dsolve({degy4, y(0)=2}, y(x));
```

$$megold4 := y(x) = 2\,e^{(x^2)}$$

```
> y4:=rhs(megold4);
```

$$y4 := 2\,e^{(x^2)}$$

```
> plot(y4, x=2..3);
```




```
> evalf(subs(x=4, y4), 3);
```

$$.178\ 10^{8}$$

A tejeskávé hűlésének megfigyelése:

A tejeskávé hűlésének sebessége egyenesen arányos a kávé és a levegő hőmérsékletének különbségével. A meleg, 95 °C -os kávét pohárba öntjük, ami 5 perc múlva már iható, 45 °C -ra hűl. A levegő hőmérséklete 20 °C.

Felírjuk a kávé hűlését leíró differenciálegyenletet és megadjuk az általános megoldást!

```
> hlev:=20;
```

$$hlev := 20$$

```
> kave1:=diff(h(t),t)=k*(h(t)-hlev);
```

$$kave1 := \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{h}(t) = k\,(\mathrm{h}(t) - 20)$$

```
> dsolve(kave1);
```

$$\mathrm{h}(t) = 20 + \mathbf{e}^{(k\,t)}\,\_C1$$

A kezdeti értékek segítségével határozzuk meg a k arányossági tényező és a C1 konstans értéket!

```
> kezd1:=hlev+_C1=95;
```

$$kezd1 := 20 + \_C1 = 95$$

```
> kezd2:=hlev+exp(k*5)*_C1=45;
```

$$kezd2 := 20 + \mathbf{e}^{(5\,k)}\,\_C1 = 45$$

```
> solve({kezd1,kezd2},{k,_C1});
```

$$\{\_C1 = 75, k = -\frac{1}{5}\ln(3)\}$$

Rajzoljuk ki a megoldást! Nézzük meg a kávé hőmérsékletét az első 50 percben! Rajzoljuk ki a 45 °C-ot is! Megnézzük, hogy melyik szakaszban a leggyorsabb a hűlés?

```
> c1:=75;
```

$$c1 := 75$$

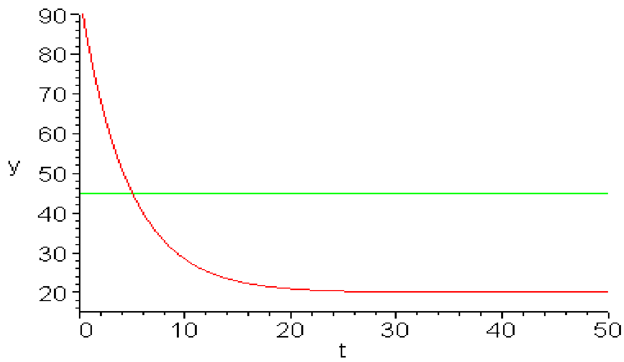
```
> k:= -1/5*ln(3);
```

$$k := -\frac{1}{5}\ln(3)$$

```
> homers:=c1*exp(k*t)+hlev;
```

$$homers := 75\,e^{(-1/5\ln(3)\,t)} + 20$$

```
> plot([homers,45],t=0..50,y=15..90);
```



4.2. Differenciálegyenletek numerikus (közelítő) megoldása.

Közelítő megoldásra is szükség van azokban az esetekben, amikor a megoldás nem írható fel zárt alakban.

Például:

```
> degy5 := diff(y(x),x)=cos(x^2+y(x)^2);
```

$$degy5 := \frac{\partial}{\partial x}\,y(x) = \cos(x^2 + y(x)^2)$$

```
> dsolve({degy5,y(0)=0}, y(x));
```

Nem kaptunk semmit. Ebből kifolyólag közelítő, más néven numerikus megoldást alkalmazunk. Ezt úgy valósítjuk meg, hogy a `dsolve` harmadik argumentumának azt adjuk meg, hogy `numeric`. Ennek köszönhetően egy eljárást kapunk, amellyel minden x-re ki tudjuk számolni a közelítő megoldást x-ben.

```
> dsolve({degy5,y(0)=0}, y(x), numeric);
```

$$\text{proc}\,(rkf45\_x)\ \ldots\ \text{end proc}$$

A könnyebb használhatóság kedvéért ezt elnevezzük valaminek, jelen esetben nummegold5-nek:

```
> nummegold5:=dsolve({degy5,y(0)=0}, y(x), numeric);
```

$$nummego5 := \textbf{proc}\,(rkf45\_x)\ \ldots\ \textbf{end proc}$$

A közelítő megoldás pl. x=1.75-ben az alábbi sorból kiolvasható:

```
> nummegold5(1.75);
```

$$[x = 1.75, \mathrm{y}(x) = .291961131920254857]$$

Tehát y(1.75) közelítőleg 0.291961131920254857.

A közelítő függvényt készítünk ebből, és így könnyebben alkalmazható az eljárás:

```
> ynum5 := x->rhs(nummegold5(x)[2]);
```

$$ynum5 := x \rightarrow \mathrm{rhs}(\mathrm{nummego5}(x)_2)$$

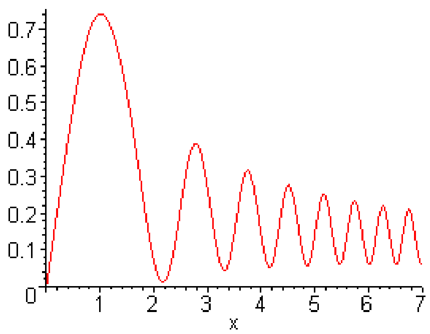
Tegyünk egy próbát:

```
> ynum5(1.75);
```

$$.291961131920254857$$

Ugyanazt kaptuk, mint az előbb, de ez várható volt. Az ynum5-tel nem végezhető el minden, mert csak egyes helyeken értelmes, de például ki tudjuk rajzoltatni:

```
> plot('ynum5(x)', x=0..7);
```



Nézzünk egy másik példát:

Adott az alábbi kezdetiérték feladat: $\dot{y} = (5 - x)(x + y^2), \quad y(1) = 3.$ Ennek a megoldásának a grafikonját fogjuk kirajzolni az [1,30] intervallumon!

```
> degy6:=diff(y(x), x)=(5-x)/(x+y(x)^2);
```

$$degy6 := \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x) = \frac{5 - x}{x + \mathrm{y}(x)^2}$$

```
> kezdfelt6:=y(1)=3;
```

$$kezdfelt6 := \mathrm{y}(1) = 3$$

```
> dsolve( {degy6,kezdfelt6}, y(x));
```

Ismét közelítő megoldásra van szükségünk, mivel nem kaptunk semmilyen függvényt megoldásként:

```
> nummegold6:=dsolve( {degy6,kezdfelt6}, y(x), numeric);
```

$$nummegold6 := \textbf{proc}\ (rkf45\_x)\ \ldots\ \textbf{end proc}$$

```
> nummegold6(1.7);
```

$$[x = 1.7, y(x) = 3.23143746068032290]$$

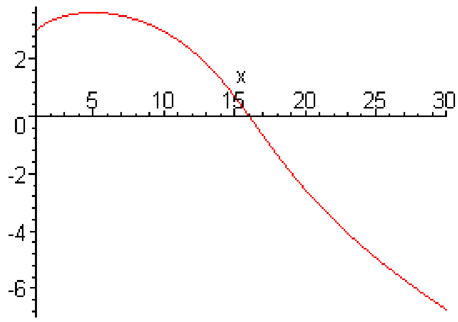
```
> ynum6:=x->rhs(nummegold6(x)[2]);
```

$$ynum6 := x \to \mathrm{rhs}(\mathrm{nummegold6}(x)_2)$$

```
> ynum(1.7);
```

$$\mathrm{ynum}(1.7)$$

```
> plot('ynum6(x)', x=1..30);
```



4.3. Másodrendű differenciálegyenletek megoldása

Először egy másodrendű állandó együtthatós homogén differenciálegyenletet oldunk meg.

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 10y = 0$$

Ez az egyenlet homogén differenciálegyenlet, mivel az ismeretlen függvény (y), és a deriváltja is az egyenlet bal oldalán helyezkednek el és a jobb oldal pedig 0.

Első lépésben beírjuk az egyenletet, ahol diff(y(t),t,t) az y(t) második deriváltját adja. Majd, akárcsak az elsőrendű differenciálegyenlet megoldása esetén, segítségül hívjuk a differenciálegyenlet megoldásához a „DEtools” és „plots” csomagokat,.

```
> degy7:=diff(y(t),t,t)+2*diff(y(t),t) + 10*y(t) =0;
```

$$degy7 := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathrm{y}(t)\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{y}(t)\right) + 10\, \mathrm{y}(t) = 0$$

Az első argumentum a differenciálegyenlet, amit meg akarunk oldani (a mi esetünkben degy7) és a második argumentum a függvény, amit keresünk (y(t)). Ha azonban csak a megoldást szeretnénk látni, akkor az rhs parancsot használjuk, ami csak a jobb oldalt jeleníti meg. Jelöljük a megoldást "megold7"-tel, ahol _C1 és _C2 a Maple tetszőleges konstansai.

```
> megold7:=rhs(dsolve(degy7,y(t)));
```

$$megold7 := \_C1\, e^{(-t)} \sin(3\, t) + \_C2\, e^{(-t)} \cos(3\, t)$$

Egyes esetekben kezdetiérték feltétel is előfordulhat. Minden másodrendű differenciálegyenletnek két kezdeti érték feltétele kell, hogy legyen. Például a következő differenciálegyenlet esetén:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 10y = 0, \qquad y(0) = 7, \dot{y}(0) = -3$$

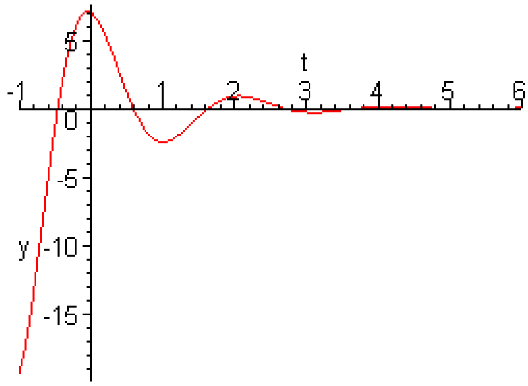
Akárcsak az előzőekben a `dsolve` parancsot használjuk a differenciálegyenlet megoldására. Jelöljük a megoldást "megold7b"-vel.

```
> megold7b:=rhs(dsolve({degy7,y(0)=7,D(y)(0)=-3},y(t)));
```

$$megold7b := \frac{4}{3} e^{(-t)} \sin(3\, t) + 7\, e^{(-t)} \cos(3\, t)$$

Ezzel megkaptuk, ha meg akarjuk rajzolni a differenciálegyenlet partikuláris megoldását, akkor ez a `plot` paranccsal megtehető:

```
> plot(megold7b,t=-1..6,labels=["t","y"]);
```



Most tekintsünk meg egy másik példát egy másik megoldó módszerrel:

```
> degy8:=diff(y(x),x,x)-5*diff(y(x),x)+4*y(x)=x^2;
```

$$degy8 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) - 5\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) + 4\, y(x) = x^2$$

```
> kezdfelt8:=y(0)=2,D(y)(0)=-3;
```

$$kezdfelt8 := y(0) = 2, D(y)(0) = -3$$

```
> megold8:=dsolve({degy8,kezdfelt8},{y(x)});
```

$$megold8 := y(x) = 3\,e^{x} - \frac{53}{32}\,e^{(4\,x)} + \frac{21}{32} + \frac{5}{8}\,x + \frac{1}{4}\,x^2$$

A megoldás helyességét az egyenletbe visszahelyettesítve ellenőrizzük.

```
> subs(megold8,degy8);
```

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(3\,e^{x} - \frac{53}{32}\,e^{(4\,x)} + \frac{21}{32} + \frac{5}{8}\,x + \frac{1}{4}\,x^2\right)\right) - 5\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(3\,e^{x} - \frac{53}{32}\,e^{(4\,x)} + \frac{21}{32} + \frac{5}{8}\,x + \frac{1}{4}\,x^2\right)\right)$$
$$+ 12\,e^{x} - \frac{53}{8}\,e^{(4\,x)} + \frac{21}{8} + \frac{5}{2}\,x + x^2 = x^2$$

```
> simplify(%);
```

$$x^2 = x^2$$

Ellenőrizzük a kezdeti feltételt is. Ehhez létrehozzuk a megoldás képletével definiált függvényt:

```
> f:=unapply(rhs(megold8),x);
```

$$f := x \to 3\,e^{x} - \frac{53}{32}\,e^{(4\,x)} + \frac{21}{32} + \frac{5}{8}\,x + \frac{1}{4}\,x^2$$

```
> f(0);
```

$$2$$

```
> D(f)(0);
```

$$-3$$

Egy másik ellenőrzési módszer a kezdeti feltételekre.

```
> simplify(subs(x=0,megold8));
```

$$y(0) = 2$$

```
> B:=diff(megold8,x);
simplify(subs(x=0,rhs(B)));
```

$$B := \frac{\partial}{\partial x}\,y(x) = 3\,e^{x} - \frac{53}{8}\,e^{(4\,x)} + \frac{5}{8} + \frac{1}{2}\,x$$

$$-3$$

Numerikus megoldást is számolhatunk. Előbb megadjuk az egyenletet:

```
> degy9 := (t+1)^2*diff(y(t),t,t) +
(t+1)*diff(y(t),t)+((t+1)^2-0.25)*y(t) = 0;
```

$$degy9 := (t+1)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,y(t)\right) + (t+1)\left(\frac{\partial}{\partial t}\,y(t)\right) + ((t+1)^2 - .25)\,y(t) = 0$$

A kezdeti feltételeknek teljesnek kell lenniük. A numerikus algoritmusok nem tudnak mit kezdeni a ki nem fejezhető konstansokkal.

```
>ic9:= y(0) = 0.6713967071418030, D(y)(0) =
0.09540051444747446;
```

$$ic9 := y(0) = .6713967071418030, D(y)(0) = .09540051444747446$$

Meg kell adni, hogy milyen tartományban számolja ki a megoldást.

```
> megold9:= dsolve({degy9,ic9}, numeric, range=0..1);
```

$$megold9 := \textbf{proc}\ (rkf45\_x)\ \ldots\ \textbf{end proc}$$

Az eredményt hiába keressük a képernyőn, az egy numerikus függvény, azonban bármilyen pontban kiértékelhetjük a megoldást.

```
>megold9(0);
```

$$\left[t = 0., y(t) = .67139670714180, \frac{\partial}{\partial t} y(t) = .095400514447474\right]$$

```
>megold9(0.5);
```

$$\left[t = .5, y(t) = .649837899602409896, \frac{\partial}{\partial t} y(t) = -.170529605477767743\right]$$

A programot arra is utasíthatjuk, hogy milyen típusú egyenletként oldja meg a megadott egyenletet. A végeredmény szempontjából, ha érezni akarjuk a különbséget, akkor kérhetjük az integrálalakos megoldást.

```
> degy10 := sin(x)*diff(y(x),x)-cos(x)*y(x)=0;
```

$$degy10 := \sin(x)\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) - \cos(x)\, y(x) = 0$$

Most lineárisként oldatjuk meg vele a fenti egyenletet.

```
> dsolve(degy10, [linear], useInt);
```

$$y(x) = \_C1\, e^{\left(\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, dx\right)}$$

Az értéke nem más, mint a megoldás.

```
> value(%);
```

$$y(x) = \_C1 \sin(x)$$

Szétválaszthatóként más formulát kapunk:

```
> dsolve(degy10, [separable], useInt);
```

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, dx - \int^{y(x)} \frac{1}{\_a}\, d\_a + \_C1 = 0$$

Maga a megoldásfüggvény ugyanaz.

```
> value(%);
```

$$\ln(\sin(x)) - \ln(y(x)) + \_C1 = 0$$

Most az integráló tényező kiszámítása nézünk egy példát:

```
> inttényező:= intfactor(degy10);
```

$$\mathit{inttényezõ} := \mathrm{intfactor}\left(\sin(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)\right) - \cos(x)\,y(x) = 0\right)$$

Ebben az esetben az integráló tényezővel szorozva egzakt egyenletet kapunk.

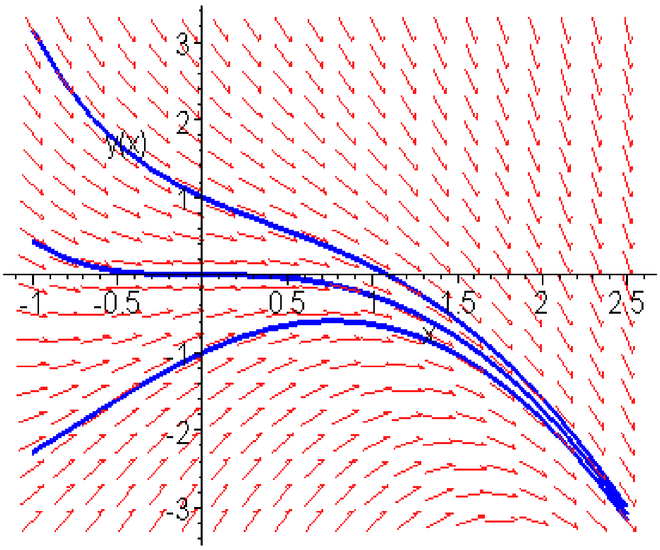
```
> dsolve( inttényező*degy10, [exact], useInt);
```

$$y(x) = -\frac{\_C1}{\frac{1}{2}\tan\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{\frac{1}{2}}{\tan\left(\frac{1}{2}x\right)}}$$

Természetesen a megoldás ugyanaz.

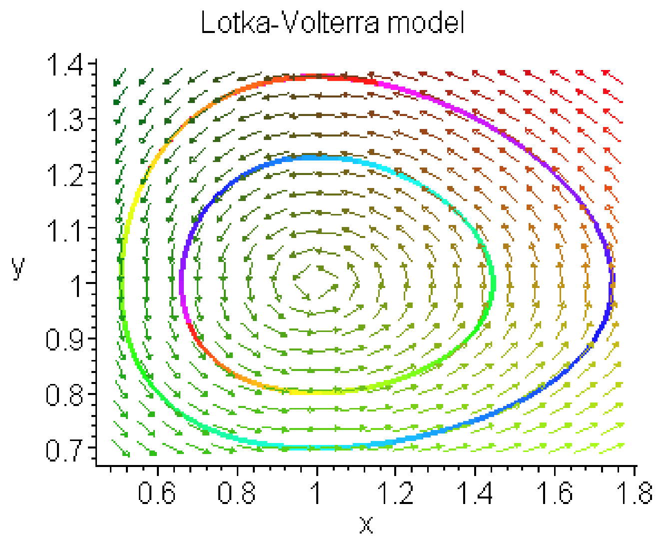
Rajzoltathatunk is az imént betöltött csomag segítségével. Egy elsőrendű egyenlet iránymezője és három különböző kezdeti feltételhez tartozó megoldásgörbéjét a következő ábrán láthatjuk:

```
> with(DEtools):
> DEplot(D(y)(x)=-y(x)-x^2,y(x),x=-
1..2.5,[[y(0)=0],[y(0)=1],[y(0)=-1]],linecolor=blue);
```



Két függvényből és két egyenletből álló elsőrendű rendszer esetén az ábrán nincs külön tengely szentelve a függvényváltozónak. A görbe színezése szemlélteti a függvényváltozó változását.

```
> DEplot([diff(x(t),t)=x(t)*(1-
y(t)),diff(y(t),t)=.3*y(t)*(x(t)-1)],[x(t),y(t)],t=-7..7,
[[x(0)=1.2,y(0)=1.2],[x(0)=1,y(0)=.7]], stepsize=.2,
title=`Lotka-Volterra model`,color=[.3*y(t)*(x(t)-
1),x(t)*(1-
y(t)),.1],linecolor=t/2,arrows=MEDIUM,method=rkf45);
```



Végezetül egy másodrendű inhomogén differenciálegyenletet oldunk meg kezdeti feltétellel. Legyen ez a következő differenciálegyenletet:

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = t^2 \cos(2t), \qquad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 2$$

Először most is megadjuk a differenciálegyenletet az „degy11" jelöléssel, majd megoldjuk a dsolve parancs által:

```
> degy11:= diff(y(t),t,t) + diff(y(t),t) + y(t) =
t^2*csos(2*t);
```

$$degy11 := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{y}(t)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{y}(t)\right) + \mathrm{y}(t) = t^2 \,\mathrm{csos}(2\,t)$$

```
>megold11:=rhs(dsolve(degy11,y(t)));
```

$$megold11 := \mathrm{e}^{(-1/2\,t)} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right)\_C2 + \mathrm{e}^{(-1/2\,t)} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right)\_C1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\left(\int \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right) t^2 \,\mathrm{csos}(2\,t)\,\mathrm{e}^{(1/2\,t)}\,dt\,\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right) - \int \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right) t^2 \,\mathrm{csos}(2\,t)\,\mathrm{e}^{(1/2\,t)}\,dt\,\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right)\right)\mathrm{e}^{(-1/2\,t)}$$

4.4. Differenciálegyenletek fizikai alkalmazása:

Ebben a szakaszban példát mutatunk olyan fizikai, mérnöki feladatra, amelyek matematikai modellezésénél a differenciálegyenletek hasznos szerepet tölthetnek be.

A harmonikus rezgőmozgást okozó kvázistacionárius erőn kívül a valóságban mindig fellép a sebességgel ellentétes irányú súrlódási erő is. A következőkben a csillapított rezgőmozgás kitérés-idő függvényét keressük.

A mozgást a dinamika alaptörvényének megfelelően felírva:

$$\sum \overline{F} = m\overline{a}$$

```
> restart;
> with(DEtools):
> with(plots):
> egyenlet:=m*diff(x(t),t$2)=-k*diff(x(t),t)-D*x(t);
```

$$egyenlet := m\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right) = -k\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right) - \mathrm{D}\,\mathrm{x}(t)$$

ahol: m-a test tömege

k-a súrlódási tényező

D-a rugó állandó

Legyen $\frac{k}{m} = 2\beta$, $\frac{D}{m} = \omega^2$ekkor

```
>egyenlet:=diff(x(t),t$2)+2*beta*diff(x(t),t)+omega^2*x(t)=0;
```

$$egyenlet := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right) + 2\,\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right) + \omega^2\,\mathrm{x}(t) = 0$$

Ez az egyenlet *x(t)*-re nézve másodrendű, állandó együtthatós, lineáris, homogén differenciálegyenlet. A differenciálegyenlet általános megoldása:

```
> altmegold:=dsolve(egyenlet,x(t));
```

$$altmegold := \mathrm{x}(t) = \_C1\,\mathrm{e}^{((-\beta + \sqrt{-\omega^2+\beta^2})\,t)} + \_C2\,\mathrm{e}^{((-\beta - \sqrt{-\omega^2+\beta^2})\,t)}$$

Vizsgáljuk meg mitől függ a kapott kitérés idő függvény alakja. Azt a partikuláris megoldást keressük, amikor $x(0) = 0$, illetve $\dot{x}(0) = \ v\,max$

```
>partmegold:=dsolve({egyenlet,x(0)=0,D(x)(0)=vmax},x(t));
```

$$partmegold := \mathrm{x}(t) = \frac{1}{2}\,\frac{vmax\,\mathrm{e}^{((-\beta + \sqrt{-\omega^2+\beta^2})\,t)}}{\sqrt{-\omega^2+\beta^2}} - \frac{1}{2}\,\frac{vmax\,\mathrm{e}^{((-\beta - \sqrt{-\omega^2+\beta^2})\,t)}}{\sqrt{-\omega^2+\beta^2}}$$

A kapott megoldás alakja nyilván attól függ, hogy milyen a β csillapítási tényező és ω sajátfrekvencia viszonya egymáshoz.

Legyen $\beta > \omega$. Ekkor a négyzetgyök alatti kifejezés pozitív, a súrlódás szerepe meghatározó a mozgás leírásakor. Matematikailag: a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének két valós gyöke van, két, független partikuláris megoldás lineáris kombinációjaként áll elő az általános megoldás.

```
> egyenlet1:=subs({beta=8,omega=4},egyenlet);
```

$$egyenlet1 := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right) + 16\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right) + 16\,\mathrm{x}(t) = 0$$

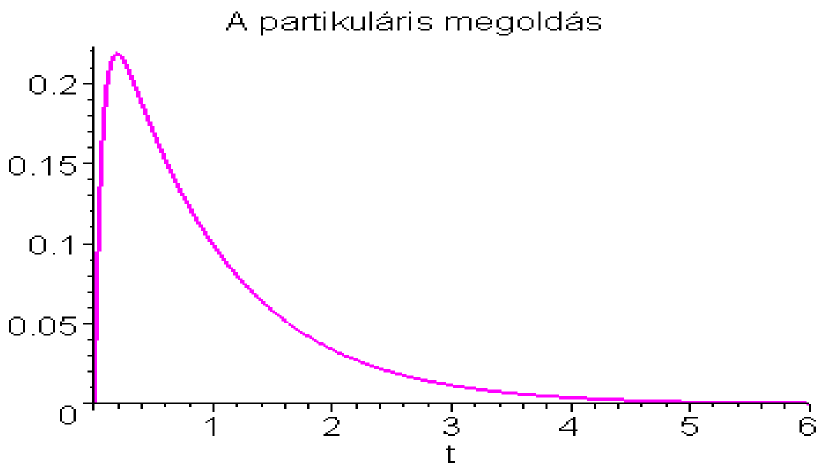
```
> altmegold:=dsolve(egyenlet1,x(t));
```

$$altmegold := \mathrm{x}(t) = \_C1\,\mathrm{e}^{(4(-2+\sqrt{3})t)} + \_C2\,\mathrm{e}^{(-4(2+\sqrt{3})t)}$$

```
> partmegold1:=dsolve({egyenlet1,x(0)=0,D(x)(0)=4},x(t));
```

$$partmegold1 := \mathrm{x}(t) = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{(4(-2+\sqrt{3})t)} - \frac{1}{6}\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{(-4(2+\sqrt{3})t)}$$

```
>A:=plot(rhs(partmegold1),t=0..6,thickness=2,color=magenta,title=`A partikuláris megoldás`):A;
```

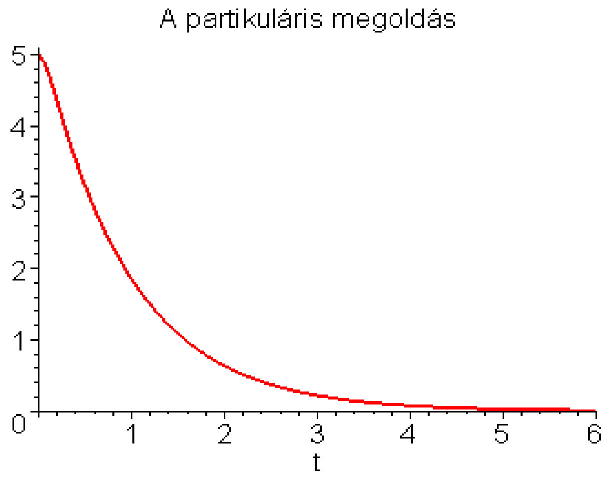


A mozgás nem periodikus, hanem két exponenciális függvény összege. Ha a kezdeti feltételek közül a x(0) és v(0) értékét megváltoztatjuk:

```
> partmegold2:=dsolve({egyenlet1,x(0)=5,D(x)(0)=0},x(t));
```

$$partmegold2 := \mathrm{x}(t) = \left(\frac{5}{2}+\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{(4(-2+\sqrt{3})t)} + \left(-\frac{5}{3}\sqrt{3}+\frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{(-4(2+\sqrt{3})t)}$$

```
>B:=plot(rhs(partmegold2),t=0..6,thickness=2,color=red,title=`A partikuláris megoldás`):B;
```



A kitérés-idő függvény egy szigorúan monoton csökkenő függvény.

1. Milyen mozgást kapunk, ha $\beta=\omega$? Ezt a fizikában aperiodikus határesetnek hívják. Ekkor a négyzetgyök alatti kifejezés 0, a karakterisztikus egyenletnek egy valós gyöke van, az ettől lineárisan független másik partikuláris megoldás ennek t-szereseként áll elő.

```
> egyenlet2:=subs({beta=8,omega=8},egyenlet);
```

$$egyenlet2 := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right) + 16\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right) + 64\,\mathrm{x}(t) = 0$$

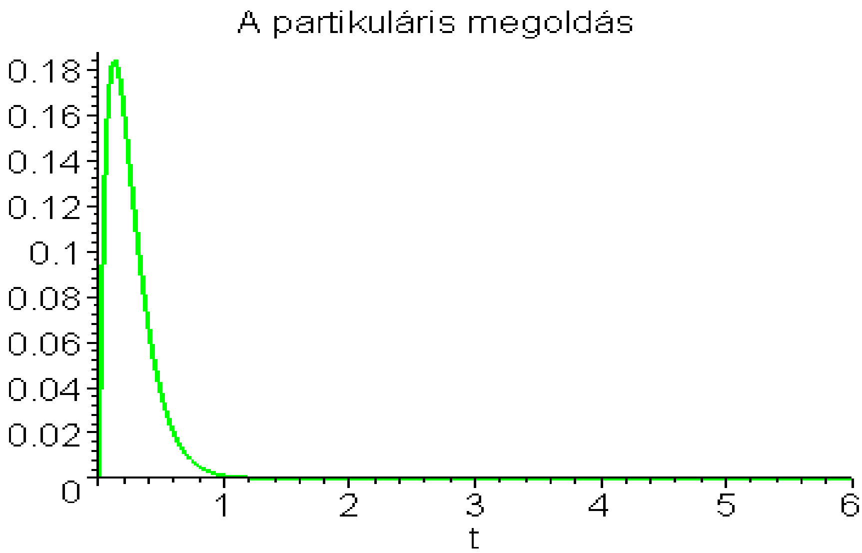
```
> altmegold:=dsolve(egyenlet2,x(t));
```

$$altmegold := \mathrm{x}(t) = \_C1\,\mathrm{e}^{(-8\,t)} + \_C2\,\mathrm{e}^{(-8\,t)}\,t$$

```
> partmegold3:=dsolve({egyenlet2,x(0)=0,D(x)(0)=4},x(t));
```

$$partmegold3 := \mathrm{x}(t) = 4\,\mathrm{e}^{(-8\,t)}\,t$$

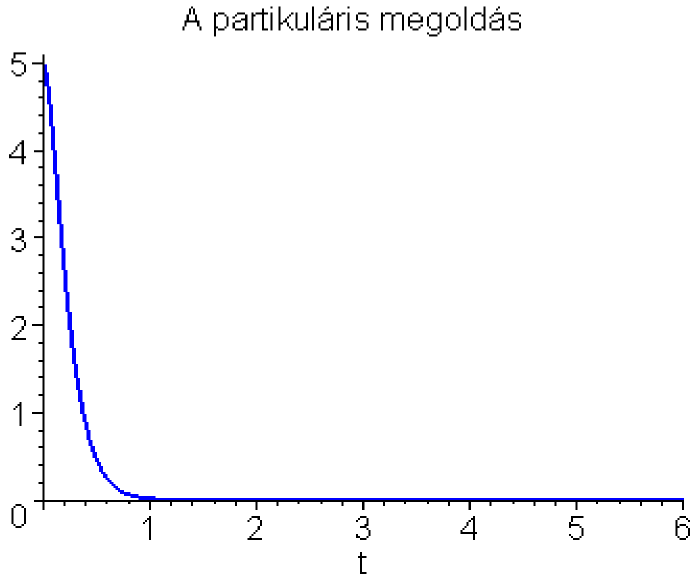
```
>C:=plot(rhs(partmegold3),t=0..6,thickness=2,color=green,
title=`A partikuláris megoldás`):C;
```



```
> partmegold4:=dsolve({egyenlet2,x(0)=5,D(x)(0)=0},x(t));
```

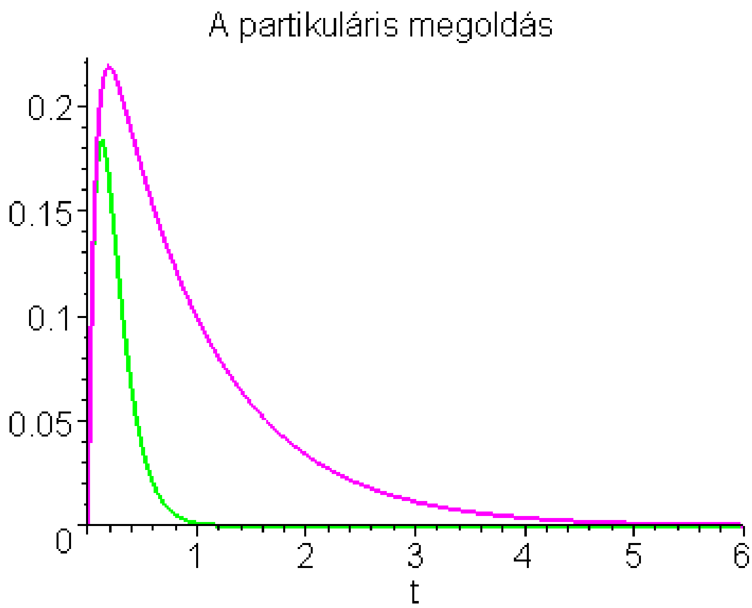
$$partmegold4 := x(t) = 5\,e^{(-8\,t)} + 40\,e^{(-8\,t)}\,t$$

```
>E:=plot(rhs(partmegold4),t=0..6,thickness=2,color=blue,title=`A partikuláris megoldás`):E;
```

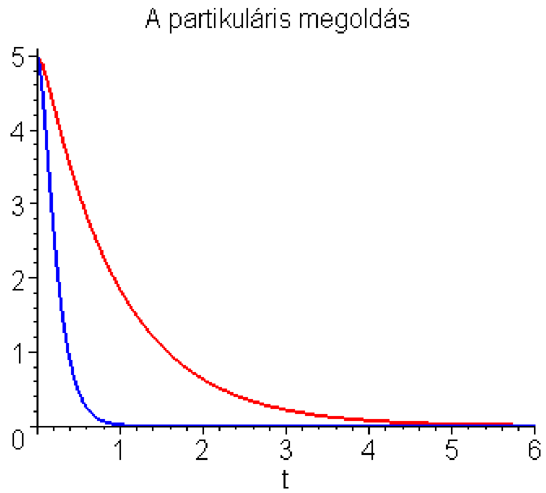


Nézzük meg egy t esetén az azonos kezdeti feltételnek megfelelő partikuláris megoldásokat.

```
> display({A,C});
```



```
> display({B,E});
```



Látható, hogy az aperiodikus határesetnél a csillapodás gyorsabb.

- Mi van, ha $\beta<\omega$. Vagyis a csillapítás kicsi. Ekkor a megoldásban szereplő négyzetgyökös kifejezés negatív, vagyis a karakterisztikus egyenletnek nincs valós gyöke.

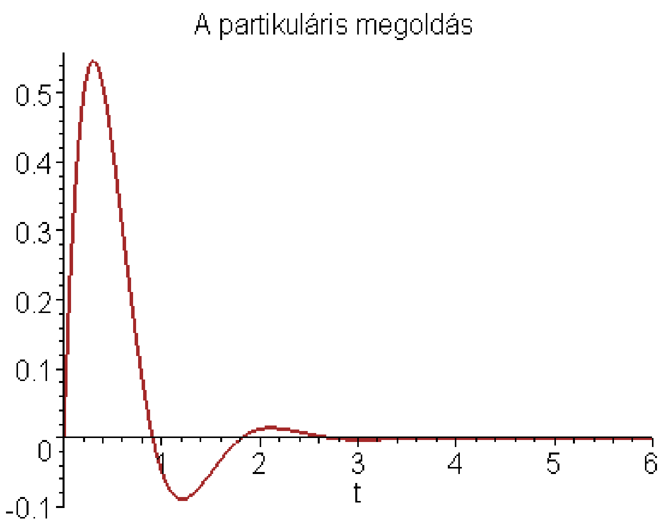
```
> egyenlet3:=subs({beta=2,omega=4},egyenlet);
```

$$egyenlet3 := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right) + 4\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right) + 16\,\mathrm{x}(t) = 0$$

```
> partmegold5:=dsolve({egyenlet3,x(0)=0,D(x)(0)=4},x(t));
```

$$partmegold5 := \mathrm{x}(t) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{(-2\,t)}\sin(2\sqrt{3}\,t)$$

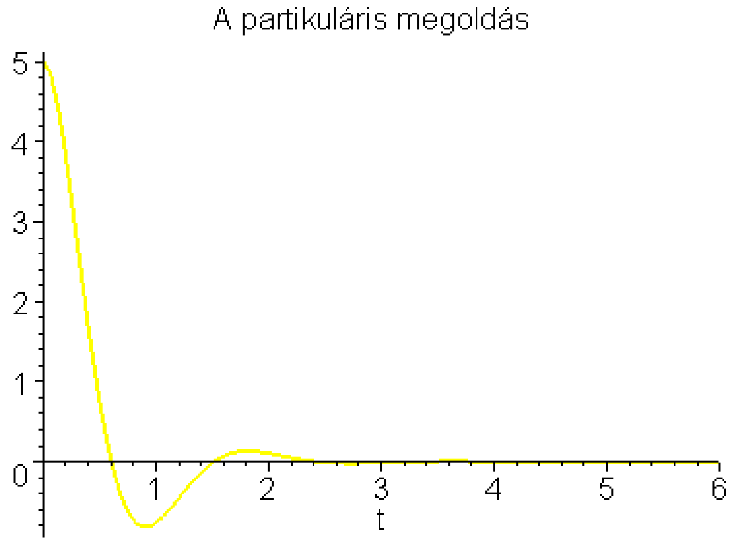
```
>F:=plot(rhs(partmegold5),t=0..6,thickness=2,color=brown,
title=`A partikuláris megoldás`):F;
```



```
> partmegold6:=dsolve({egyenlet3,x(0)=5,D(x)(0)=0},x(t));
```

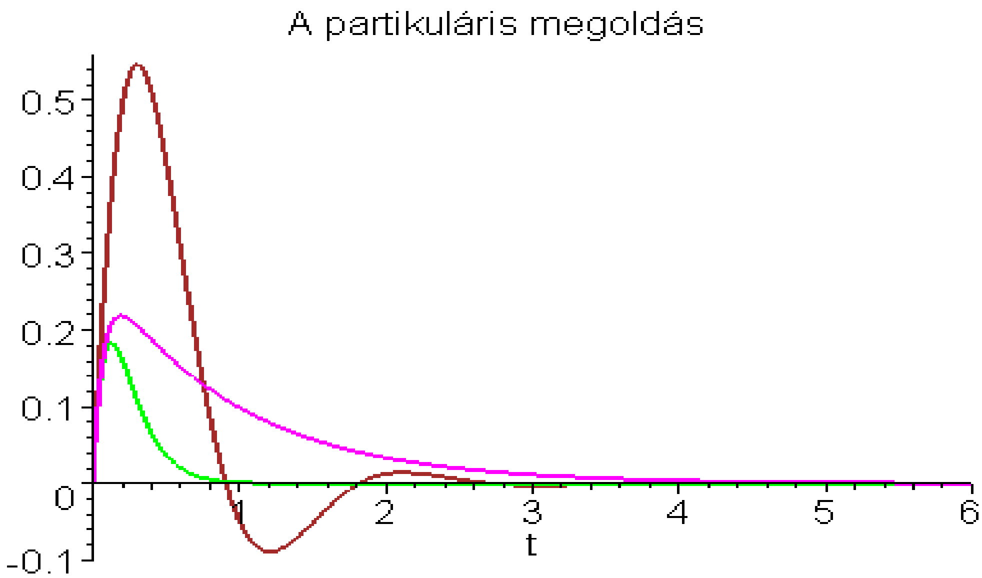
$$partmegold6 := \mathrm{x}(t) = \frac{5}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{(-2\,t)}\sin(2\sqrt{3}\,t) + 5\,\mathrm{e}^{(-2\,t)}\cos(2\sqrt{3}\,t)$$

```
>G:=plot(rhs(partmegold6),t=0..6,thickness=2,color=yellow
,title=`A partikuláris megoldás`):G;
```

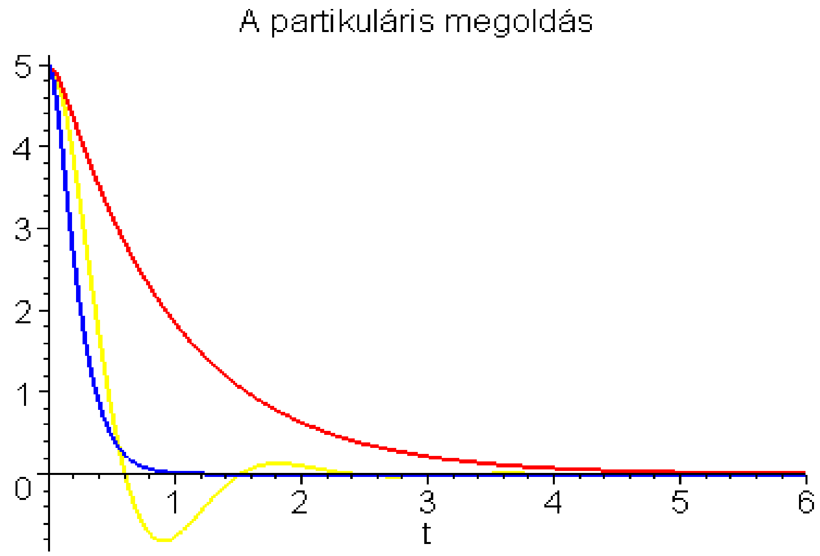


Az azonos kezdeti feltételeknek eleget tevő partikuláris megoldások együtt:

```
> display({A,C,F});
```




```
> display({B,E,G});
```



- Igaz-e, hogy β=0 esete a harmonikus rezgőmozgásnál megismert tiszta szinusz függvényt adja?

```
> egyenlet4:=subs({beta=0,omega=4},egyenlet);
```

$$egyenlet4 := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right) + 16\,\mathrm{x}(t) = 0$$

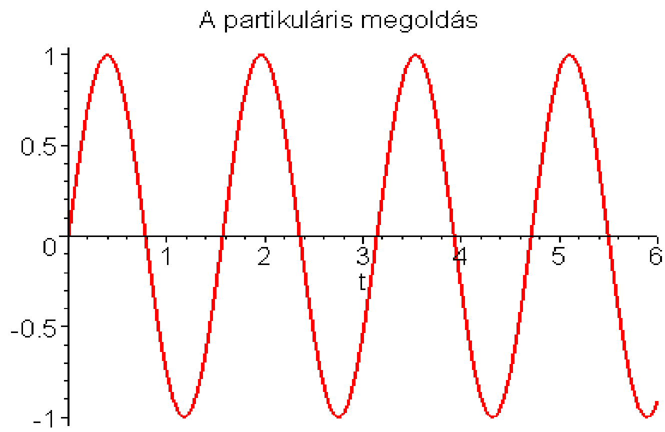
```
> altmegold:=dsolve(egyenlet4,x(t));
```

$$altmegold := \mathrm{x}(t) = \_C1\,\sin(4\,t) + \_C2\,\cos(4\,t)$$

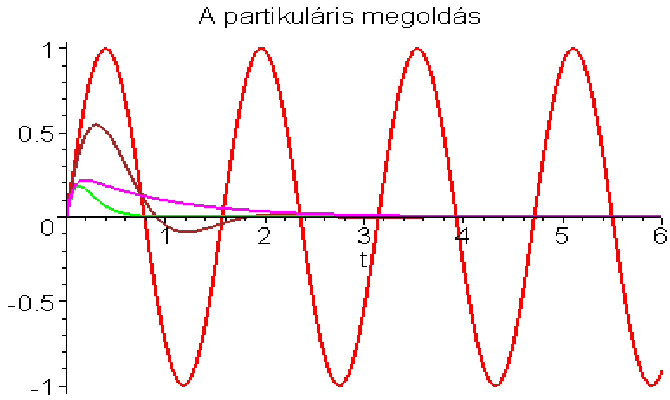
```
> partmegold6:=dsolve({egyenlet4,x(0)=0,D(x)(0)=4},x(t));
```

$$partmegold6 := \mathrm{x}(t) = \sin(4\,t)$$

```
>H:=plot(rhs(partmegold6),t=0..6,thickness=2,color=red,ti
tle=`A partikuláris megoldás`):H;
```

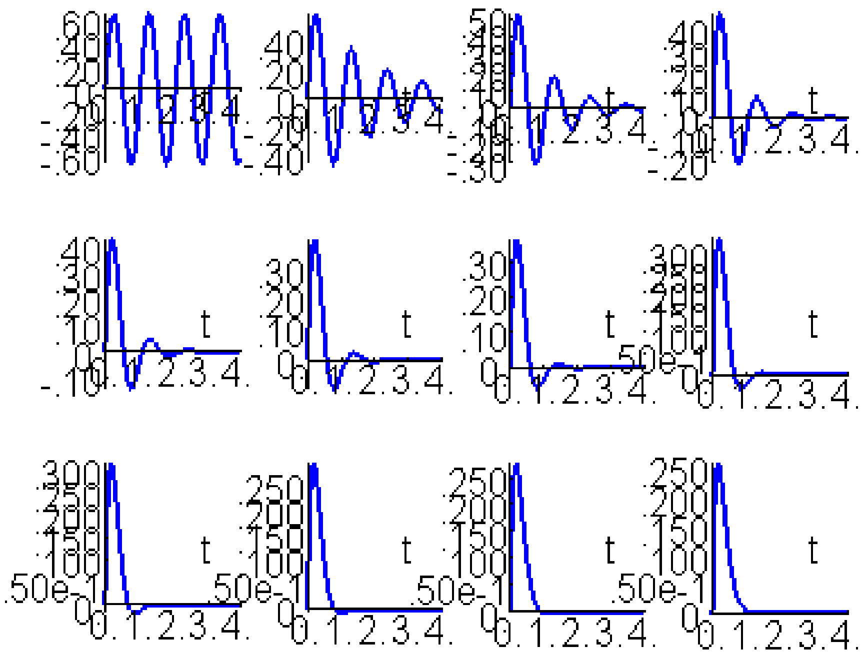



```
> display({A,C,F,H});
```



Próbáljuk meg a kapott eredményeket egymás mellé illeszteni, és így vizsgálni, mi történik, ha a β csillapodási tényező értékét folyamatosan növeljük, hogyan változik a kapott görbe lefutása.

```
> k:=12:
for i to k doegyenlet||i:=subs({beta=(i-1)/2,omega=6},
egyenlet);
partmegold||i:=dsolve({egyenlet||i,
x(0)=0,D(x)(0)=4},x(t));
abra||i:=plot(rhs(partmegold||i),t=0..4,thickness=2,color
=blue):
od:
a:=plots[display3d]([abra||(1..k)],insequence=true):
plots[display3d](a);
```



5. Összefoglalás

Amint a dolgozatból is kiderült, a bonyolultabb matematikai problémák megoldása esetén szinte elkerülhetetlen a differenciál- vagy integrálszámítás, differenciálegyenletek megoldása. A Maple program funkciói segítségével a differenciálegyenletek megoldási nehézségeinek egy részével könnyen megbirkóztunk, így valóban megszabadultunk az időigényes számításoktól. Dolgozatom magába foglalja a lényegesebb differenciálegyenletekkel kapcsolatos fogalmak definícióit, a fontosabb tételeket.

A Maple által lehetőség nyílt különféle differenciálegyenletek megoldására különösebb erőfeszítések nélkül, valamint a megoldások ábrázolására. Első néhány lépésben azokkal a parancsokkal ismerkedünk meg, amelyeket a Maple a differenciálegyenletek megoldása folyamán leggyakrabban használ. Ezek a parancsok a Maple "DEtools" csomagjában találhatóak. A differenciálegyenlet megoldás görbéinek az ábrázolásához a parancsokat a "plots" csomag tartalmazza.

A differenciálegyenletek fizikai alkalmazása fejezetben a matematikai és fizikai fogalom kialakítása párhuzamosan zajlik, a következtetéseket a matematikai és fizikai tartalomra egyszerre alakítottam ki.

6. Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom egyetemem, az Eötvös Loránd Tudományegyetem volt és jelenlegi tanárainak, akik minden segítséget megadtak tanulmányaim és ezen dolgozat elkészítéséhez.

Köszönöm a szobatársaimnak, akik megértéssel, türelemmel, olykor a programok tesztelésével segítették munkámat.

Külön köszönetet mondok családomnak, aki tanulmányaimat mindvégig figyelemmel kísérték, észrevételeikkel, hasznos tanácsaikkal segítettek és ösztönöztek.

7. Irodalomjegyzék

1. André Heck Bevezetés a Maple használatába (JGYF kiadó Szeged 1999)

2. Klincsik M., Maróti Gy. Maple 8 tételben (Novadat 1995)

3. Laczkovich Miklós-T.Sós Vera: Analízis I. (Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest, 2005)

4. Szilágyi Pál, Közönséges differenciálegyenletek (Erdélyi Tankönyvtanács, Kolozsvár, 2001)

5. Közönséges Differenciálegyenletek órai jegyzet

6. http://teamlabor.inf.elte.hu/_teamfiles/orak/2000/csapodi/maple6.html

7. http://physics.orst.edu/~rubin/COURSES/ph621/mapleHelp/node2.html