Az analízis néhány alkalmazása

SZAKDOLGOZAT

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

Szerző: Fodor Péter

Szak: Matematika Bsc

Szakirány: Matematikai elemző

Témavezető: Sikolya Eszter, adjunktus

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi kar

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

Szakdolgozatom célja bemutatni az egyik leggyakrabban alkalmazott matematikai szakterület, a matematikai analízis néhány alkalmazását. Mivel a téma teljes bemutatására nem lenne elegendő egyetlen szakdolgozat, így csak néhány kiválasztott területet és alkalmazást érintek, legfőképpen a két legalapvetőbb analízisbeli művelet, a deriválás és az integrálás előfordulásait különböző területeken. Egyéb matematikai ágak közül geometriában, természettudományokon belül fizikában, valamint más tudományok közül közgazdaságtanban mutatok be példákat. Ez a három látszólag sokban különböző tudományágban gyakran előfordulnak a matematikai analízis tételei, érzékeltetve annak széleskörű felhasználhatóságát. Először röviden ismertetem a függvényekkel való kapcsolatukat, majd rátérek a differenciálszámítás és az integrálszámítás néhány alkalmazására.

Az analízisbeli tételeket és definíciókat saját jegyzeteim, valamint Obádovics J. Gyula: Matematika, és Sydsæter-Hammond: Matematika közgazdászoknak című könyvek alapján írtam. A geometriai részeknél saját jegyzeteim mellett Obádovics J. Gyula fentebb említett könyve és Rados Gusztáv: Analízis és geometria című könyve volt segítségemre. Előbbi szintén hasznosnak bizonyult fizikai példák terén néhány más jegyzet mellett. A közgazdaságtani részeknél a Sydsæter-Hammond könyvet, valamint a MIT nyitott kurzusait vettem figyelembe. Az ábrákat saját magam készítettem.

2. Egyváltozós függvények

2.1. Hozzárendelés megadása

Állandónak azt a mennyiséget nevezzük, amelynek számértéke a vizsgálat során nem változik, változónak pedig azt, amely a vizsgálat közben különböző értékeket vehet fel. A matematikai analízis a változó mennyiségekkel és a közöttük fennálló összefüggésekkel (függvénykapcsolatokkal) foglalkozik.

A változók közötti hozzárendelést különböző módokon is megadhatjuk: Táblázattal, grafikonnal, vagy analitikusan (képlettel). Az analitikus módon megadott függvények közül az $y = f(x)$ alakúakat explicit, a $g(x, y) = 0$ alakúakat implicit, az $y = y(t)$, $x = x(t)$ egyenletrendszerrel megadottakat paraméteres előállítású függvényeknek nevezzük.

Egy hozzárendelés táblázattal való megadására példa az 1. táblázat, amely a háztartásoknak nyújtott forint fogyasztási hitelek szezonálisan igazított új szerződéseinek összegét ábrázolja hiteltípus szerinti bontásban 2009 októbere és 2010 februárja között. [1] [3]

1. táblázat.

Hónap	2009. okt	2009. nov	2009. dec	2010. jan	2010. feb
Személyi hitel (milliárd Ft)	11,24	9,60	9,21	9,60	11,97

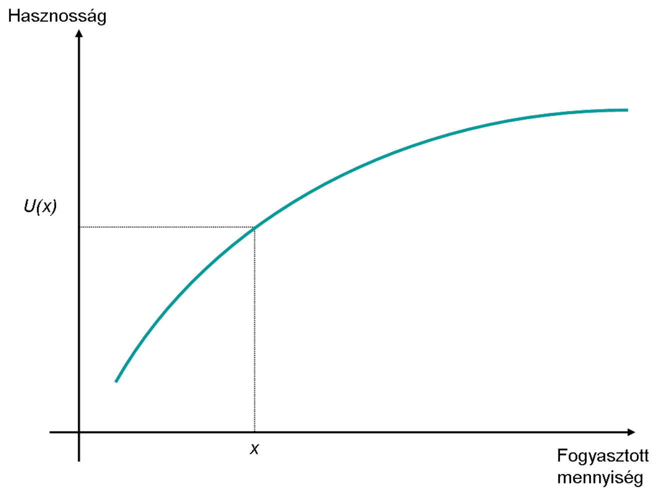
Grafikonnal való ábrázolásra tekintsük példának a hasznossági függvényt, melyet a közgazdaságtan számos területén, leggyakrabban a mikroökonómiai fogyasztáselméletben használnak. A hasznossági függvény matematikai eszközökkel igyekszik modellezni a gazdaság egy szereplőjének – bizonyos esetekben a társadalom egészének – meghatározott javakhoz kapcsolódó preferenciáit.

Egy n változós hasznossági függvény általános alakban így írható fel:

$$U(x) = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

Grafikonnal ábrázolva $n = 1$ esetén:

[1] Forrás: Magyar Nemzeti Bank honlapja - `http://www.mnb.hu/Resource.aspx?ResourceID=mnbfile&resourcename=hu0906_fogyasztasi_HUF`



1. ábra

Képlettel való megadásra fizikában rengeteg példát találunk, elég csak az egyenletes mozgás $v = \frac{s}{t}$ összefüggésére gondolni, ahol v jelöli a sebességet, s az utat, t az időt.

2.2. Egyváltozós valós függvények

Azt mondjuk, hogy y az x egyértékű *függvénye*, ha x minden lehetséges értékéhez y-nak egy egyértelmű módon meghatározott értéke tartozik. Az x lehetséges értékei alkotják a függvény értelmezési tartományát, az y értékek pedig az értékkészletét. Az x a függvény argumentuma, vagyis a független változó, az y a függvényérték, vagy függő változó.

A közgazdaságtanban az x-et gyakran nevezik *exogén*, y-t *endogén*változónak.

Az y függő változó és az x független változó közötti függvénykapcsolatot az $y = f(x)$, $y = F(x)$, $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$ stb. vagy $y = y(x)$ egyenlettel adjuk meg. Az $x = a$ adott számértékhez tartozó $f(a)$ függvényérték a függvény helyettesítési értéke az a helyen.

A függvény jelölésére az $f(x)$, $F(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ stb. szimbólumokat használjuk, ahol x a független változó.

Fizikában gyakran előfordul, hogy az időt tekintjük változónak, amit legtöbbször t-vel jelölünk, így a függvény alakja például: $f(t)$, $F(t)$, stb. A periodikus mozgás például szinusz görbével írható le.

Geometriai alakzatok megadásánál, transzformációknál előforduló függvényeknél a változó általában mint koordináta van értelmezve.

Közgazdaságtani példa függvényre:

Tegyük fel, hogy egy termékfajta x darabjának forintban számított előállítási költsége

$$C(x) = 50x\sqrt{x} + x^2.$$

Számítsuk ki a költséget, ha az adott termékből rendre 9, 16, 25, valamint a darabot állítunk elő.
Ha abból indulunk ki, hogy a cégünk a darabot termel, akkor számítsuk ki a termelés 1 darabbal való növelésének költségét.

Megoldás: 9 darab termék esetén az előállítási költséget úgy kapjuk meg, ha a $C(x)$-et megadó formulában az x helyére 9-et helyettesítünk:

$$C(9) = 50 \cdot 9\sqrt{9} + \cdot 9^2 = 50 \cdot 9 \cdot 3 + 81 = 1431.$$

Hasonlóképpen:

$$C(16) = 50 \cdot 16\sqrt{16} + 16^2 = 50 \cdot 16 \cdot 4 + 256 = 3456.$$

$$C(25) = 50 \cdot 25\sqrt{25} + 25^2 = 50 \cdot 25 \cdot 5 + 625 = 6875.$$

$$C(a) = 50a\sqrt{a} + a^2.$$

$a + 1$ darab termék esetén az előállítási költség $C(a + 1)$, tehát a költségnövekmény:

$$C(a + 1) - C(a) = 50(a + 1)\sqrt{a + 1} + a^2 - (50a\sqrt{a} + a^2)$$

$$= 50(a + 1)\sqrt{a + 1} + a^2 - 50a\sqrt{a} - a^2$$

$$= 50[(a + 1)\sqrt{a + 1} - a\sqrt{a}].$$

2.3. Értelmezési tartomány, értékkészlet

A függvény definiálásakor az *értelmezési tartományt* is meg kell adni. Például a természetes alapú logaritmusfüggvény ($g(x) = \ln x$) értelmezési tartománya a $(0, \infty)$ intervallum. A fenti közgazdaságtani példában a $C(x) = 50x\sqrt{x} + x^2$ függvényt a $0, 1, 2, ..., x_{max}$ számokon értelmeztük, mivel darabszámról volt szó, és ahol x_{max} a termékek előállítható maximális száma, avagy x-et folytonos változónak tekintve a természetes értelmezési tartomány a $[0, x_{max}]$ intervallum.

Az adott értelmezési tartományon belül az f függvény által felvett $f(x)$ értékek összességét a függvény *értékkészletének* nevezzük. Például a természetes alapú logaritmusfüggvény értékkészlete a valós számok, a példában szereplő $C(x) = 50x\sqrt{x} + x^2$ függvényé pedig a $0, 51, ..., C(x_{max})$ számok halmaza.

A geometriai transzformációs függvények pontokhoz pontokat rendelnek, így ebben az esetben a függvény értékkészlete és értelmezési tartománya felfogható ponthalmazként is.

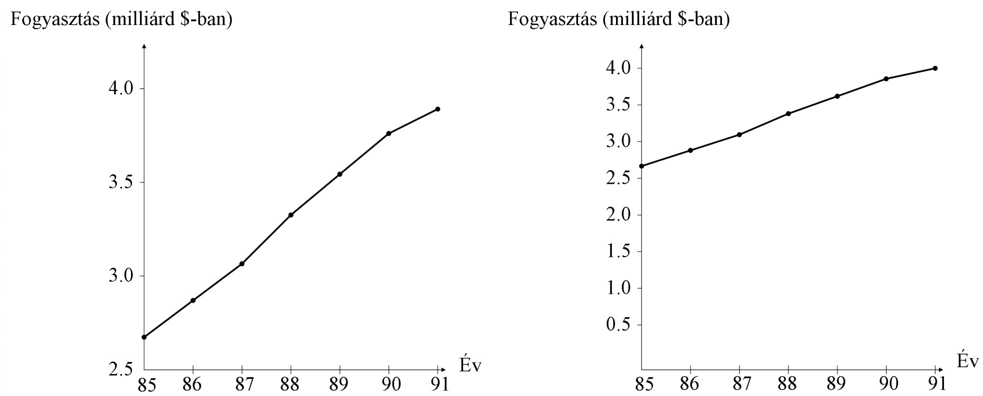
2.4. Grafikonok

Az $y = f(x)$ függvényt a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben is ábrázolhatjuk, melynek vízszintes tengelyét x-tengelynek, függőleges tengelyét y-tengelynek nevezzük. A független változó megfelelő értékéhez meghatározzuk a függő változó megfelelő értékét és így egy pontot kapunk. Az összes ilyen pont által meghatározott megoldáshalmaz a koordinátarendszerben egy görbét ad, aminek a neve az egyenlet grafikonja.

Az f függvény grafikonja azon $(x, f(x))$ pontok összessége, ahol x a függvény argumentuma és $f(x)$ a hozzá tartozó függvényérték, x pedig végigfut f teljes értelmezési tartományán. Az egyváltozós függvény egy olyan szabály, amely az értelmezési tartományból rendel számokat az értékkészletbeli számokhoz.

Egy függvény az értelmezési tartomány bármely x pontjához nem rendelhet egynél több értéket. Ebből következik, hogy az x-tegely bármely pontján átmenő függőleges egyenes a függvény grafikonját legfeljebb egy pontban metszheti.

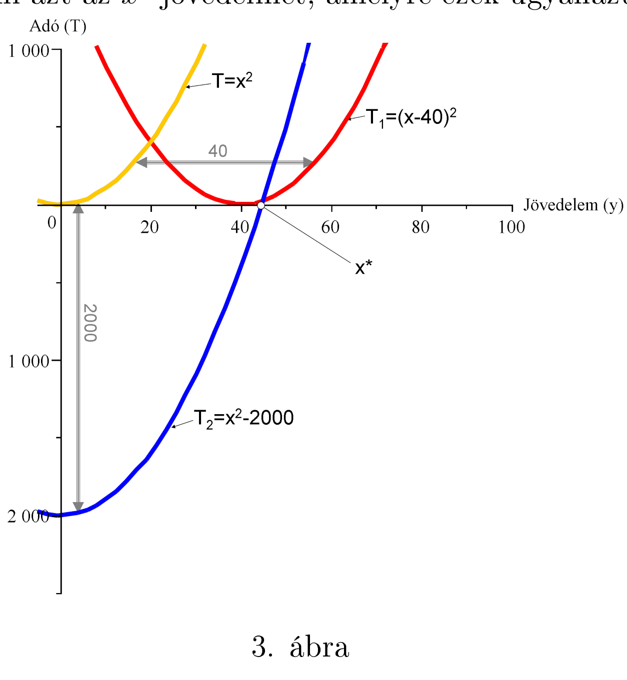
Amikor egy empirikus hozzárendelést függvénnyel próbálunk szemléltetni, mérési egységeket kell választanunk az egyes mennyiségekből. Nem mindegy, hogy az időt órában, vagy percben, a pénzt forintban vagy euróban mérjük. Az emberek különböző mennyiségek közti kapcsolatról alkotott benyomása könnyen befolyásolható más-más mérési egységekkel. A 2. ábra grafikonjai ugyanazt a függvényt ábrázolják, mindkét esetben az idő évben, a fogyasztás milliárd $-ban van megadva.



2. ábra

Példa grafikon transzformálására:

Egy adott évben egy x forintot kereső polgárnak $f(x) = x^2$ jövedelemadót kell fizetnie. A kormány az adók leszállítására kétféle terv közül választhat: Az első szerint a polgárok még az adó kiszámítása előtt 40 forintot levonhatnak az adóalapjukból. A másik változatban a teljes adózandó jövedelem után kell kiszámítani az adót, majd minden adózó személy 2000 forinttal csökkentheti az adó értékét. A két változatot szeretnénk grafikusan ábrázolni, és meghatározni azt az x^* jövedelmet, amelyre ezek ugyanazt az adót eredményezik.



3. ábra

A $T = f(x) = x^2$ adófüggvényből indulunk ki. Az első változat szerint x az adóalap és 40 a levonás, tehát a csökkentett adóalap $x-40$, vagyis a befizetendő adó $(x-40)^2$. A T adófüggvény grafikonját 40 egységgel jobbra tolva kapjuk meg a $T_1 = (x-40)^2$ grafikonját. A másik esetben az eredeti T függvényt 2000 egységgel kell lefelé tolnunk, így jutunk a $T_2 = x^2 - 800$ függvény grafikonjához. A keresett x^* jövedelmet az

$$(x-40)^2 = x^2 - 2000$$

egyenlet megoldásával kaphatjuk meg, melyből kijön, hogy $x^* = 45$.

2.5. Elemi függvények

Elemi függvényeknek nevezzük azokat a függvényeket, amelyek az elemi alapfüggvényekből számtani műveletekkel és összetett függvények képzése útján előállíthatók. Az elemi alapfüggvények a következők:

1. Hatványfüggvények: $y = x^n$ alakú függvények, ahol n valós szám.
2. Exponenciális függvények: $y = a^x$ alakú függvények, ahol a pozitív szám.
3. Logaritmusfüggvények: $y = log_a x$ alakú függvények, ahol $a > 0$, de $a \neq 1$.
4. Trigonometrikus függvények: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ alakú függvények.
5. Ciklometrikus vagy arkuszfüggvények: $y = \operatorname{arc}\sin x$, $y = \operatorname{arc}\cos x$, $y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$ alakú függvények.

3. Differenciálszámítás

3.1. Határérték

Az a környezetében (a-ban nem feltétlenül) értelmezett $y = f(x)$ függvény határértéke $x \to a$ esetén (azaz ha x a-hoz tart) $A \in \mathbb{R}$, ha az x-szel a-hoz közelítve, $f(x)$ A-tól vett különbsége 0-hoz tart. Vagyis:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

ha bármilyen kicsi pozitív ε számhoz létezik olyan pozitív δ szám, amelyre $|f(x) - A| < \varepsilon$, amennyiben $|x - a| < \delta$.

Egyoldali határértékek:

Bal oldali határérték: Az a bal oldali környezetében értelmezett $y = f(x)$ függvény bal oldali határértéke $x \to a^-$ esetén (azaz ha x balról a-hoz tart) A, ha az x-szel balról a-hoz közelítve, $f(x)$ a-tól vett különbsége 0-hoz tart. Vagyis:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = A,$$

ha bármilyen kicsi pozitív ε számhoz létezik olyan pozitív δ szám, amelyre $|f(x) - A| < \varepsilon$, amennyiben $-\delta < x - a < 0$.

Jobb oldali határérték: Az a jobb oldali környezetében értelmezett $y = f(x)$ függvény jobb oldali határértéke $x \to a^+$ esetén (azaz ha x jobbról a-hoz tart) A, ha az x-szel jobbról a-hoz közelítve, $f(x)$ a-tól vett különbsége 0-hoz tart. Vagyis:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A,$$

ha bármilyen kicsi pozitív ε számhoz létezik olyan pozitív δ szám, amelyre $|f(x) - A| < \varepsilon$, amennyiben $0 < x - a < \delta$.

Egy függvénynek pontosan akkor létezik a-ban határértéke, ha az ugyanitt vett jobb és bal oldali határértékek léteznek és megegyeznek.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = A \text{ és } \lim_{x\to a+} f(x) = A$$

Kiterjesztett határértékfogalom:

Az a környezetében (a-ban nem feltétlenül) értelmezett $y = f(x)$ függvény határértéke $x \to a$ esetén (azaz ha x a-hoz tart) $+\infty$, ha az x-szel a-hoz közelítve, $f(x)$ nagyobb lesz bármely $K > 0$ számnál. Vagyis:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$

ha bármely pozitív K számhoz létezik olyan pozitív δ szám, amelyre $f(x) > K$, amennyiben $|x - a| < \delta$.

Az a környezetében (a-ban nem feltétlenül) értelmezett $y = f(x)$ függvény határértéke $x \to a$ esetén (azaz ha x a-hoz tart) $-\infty$, ha az x-szel a-hoz közelítve, $f(x)$ kisebb lesz bármely $K < 0$ számnál. Vagyis:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty,$$

ha bármely negatív K számhoz létezik olyan pozitív δ szám, amelyre $f(x) < K$, amennyiben $|x - a| < \delta$.

Végtelenben vett határérték:

Az $y = f(x)$ függvény pozitív végtelenben vett határértéke A, ha minél nagyobb x-et véve, $f(x)$ A-tól vett különbsége 0-hoz tart. Vagyis:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A,$$

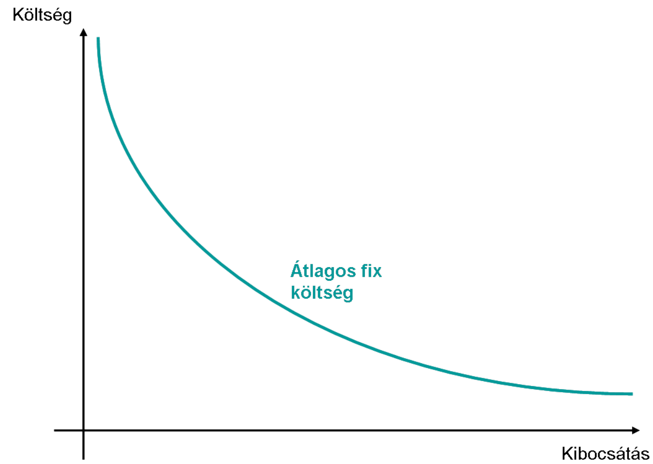
ha bármilyen kicsi pozitív ε számhoz létezik olyan pozitív K szám, amelyre $|f(x) - A| < \varepsilon$, amennyiben $x > K$.

Az $y = f(x)$ függvény negatív végtelenben vett határértéke A, ha minél kisebb x-et véve, $f(x)$ A-tól vett különbsége 0-hoz tart. Vagyis:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A,$$

ha bármilyen kicsi pozitív ε számhoz létezik olyan negatív K szám, amelyre $|f(x) - A| < \varepsilon$, amennyiben $x < K$.

Közgazdaságtani példa: Az átlagos fix költség a kibocsátás hiperbolikus függvénye, határértéke az $x = 0$ helyen $+\infty$, $+\infty$-ben pedig 0.



4. ábra

3.2. Derivált

Egy $y = ax + b$ egyenletű egyenes meredekségét az a szám méri, amit az egyenes iránytangensének nevezünk. Minél nagyobb az abszolút értéke, annál meredekebb. Ha negatív, akkor az egyenes balról jobbra haladva lefelé esik, ha pozitív szám, akkor nő. Egy tetszőleges függvény meredekségét úgy definiáljuk, hogy adott pontjában az érintő meredekségét tekintjük. A függvény egy $(x_0, f(x_0))$ pontbeli meredekségét, $f'(x_0)$-t a függvény x_0-beli deriváltjának nevezzük. Ha veszünk egy másik pontot a függvény görbéjén $(x + h, f(x + h))$ koordinátákkal, ahol h egy tetszőlegesen kicsi pozitív szám, akkor a két pontot összekötő szelő meredeksége:

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

amit az f függvény x_0 ponthoz tartozó *különbségi hányadosának* nevezünk, és aminek határértéke a függvény $(x_0, f(x_0))$ pontban vett meredeksége, ha $h \to 0$. Ez megadható a következő képlettel is:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

A deriváltat nem csak érintő meredekségeként értelmezhetjük. Egy $y = f(x)$ függvény adott $x = x_0$ pontban az $f(x_0)$ értéket veszi fel. Ha x_0 h-val változik (vagyis $x_0 + h$-ra), értéke $f(x_0+h)$ lesz, a függvényérték megváltozása így $f(x_0+h)-f(x_0)$. Ha leosztunk h-val, megkapjuk az y átlagos megváltozását:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Ez f különbségi hányadosa vagy *differenciahányadosa*, melynek határértékét véve $h \to 0$ esetén ismét f deriváltját avagy differenciálhányadosát kapjuk. Eszerint $f'(x_0)$-t értelmezhetjük az f x_0 pontban vett pillanatnyi megváltozásaként is. Az

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

hányadost pedig f x_0-beli arányos megváltozásának nevezzük.

Egyéb jelölések:

Ha y x függvénye, akkor a deriváltjára használható a differenciál jelölés is:

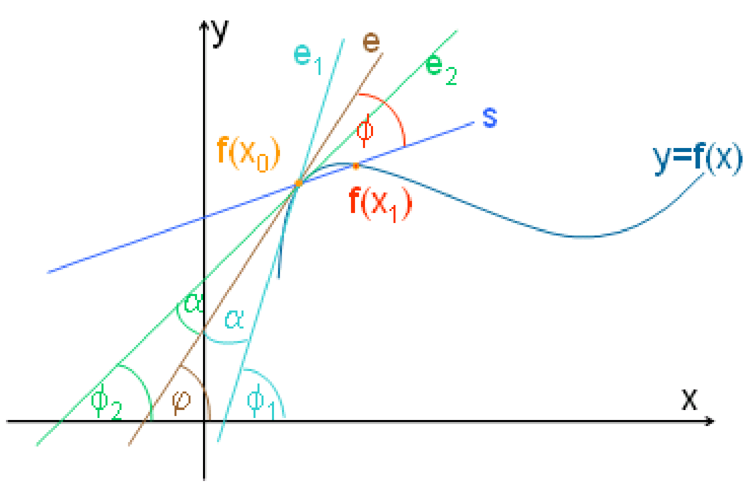
$$\frac{dy}{dx} = dy/dx$$

Például:

$$y = 3x^2 + 4x \text{ esetén } \frac{dy}{dx} = 6x + 4.$$

A t (=idő) függvényében vett derivált jelölésére legtöbbször az $\dot{s}(t)$ jelölést használják, leginkább fizikában. Ugyanitt a mennyiség változását általában Δt jelöli.

3.3. Geometriai értelmezés



5. ábra

Tekintsünk egy $y = f(x)$, x_0 helyen deriválható függvényt. Húzzuk meg az $f(x_0)$ és az $f(x_1)$ pontokon átmenő s szelőt. A szelő iránytangense:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Az $f(x_0)$ ponton keresztül lefektetünk egy olyan φ hajlásszögű e egyenest, hogy $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$. Ekkor a ϕ szög (e és s közbezárt szöge) tetszőlegesen kicsi ω szögnél kisebb, ha az x_1 elég közel van x_0-hoz, vagyis

$$\lim_{x_1 \to x_0} \phi = 0,$$

ugyanis:

Forgassuk el az e egyenest az $f(x_0)$ pont körül $\alpha < \omega$ szöggel pozitív és negatív irányba, e_1, e_2 egyenesekbe. ϕ_1 jelölje az (e_1, x), ϕ_2 az (e_2, x) szögeket(azaz e_1 és e_2 x-tengellyel bezárt szögét).

$$\operatorname{tg}\phi_2 < f'(x_0) < \operatorname{tg}\phi_1.$$

Ha x_0 és x_1 elég közel vannak, a differenciahányadosra is fennáll az egyenlőtlenség:

$$\operatorname{tg}\phi_2 < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < \operatorname{tg}\phi_1.$$

Tehát az s szelő az $f(x_0)$ ponttól x tengely menti pozitív irányban (jobbra) az e_1 egyenes alatt, negatív irányban (balra) az e_2 egyenes felett van, így:

$$\phi < \alpha < \omega.$$

Vagyis $\lim_{x_1 \to x_0} \phi = 0$ azt jelenti, hogy az e egyenes az s szelő határhelyzete, ha $x_1 \to x_2$. Ezt a határhelyzetet a függvény grafikonjának $f(x_0)$-beli érintőjének nevezzük. Az x_0 helyen deriválható $y = f(x)$ függvény grafikonjának x_0 helyen vett érintőjének iránytangense $f'(x)$, azaz

$$\operatorname{tg}\varphi = f'(x).$$

3.4. Mechanikai értelmezés

Tekintsünk egy egyenesvonalú mozgást végző pontot. A pont által megtett utat jelölje $s(t)$. A $t+\Delta t$ idő alatt $s(t+\Delta t)$ és a Δt idő alatt $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$ utat tesz meg. Ekkor felírhatjuk a különbségi hányadost:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

A pont v sebessége a t időpillanatban:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \dot{s}(t).$$

A Δt időközre eső átlagos sebességváltozás határértéke a pillanatnyi sebességváltozás, azaz a gyorsulás. Görbe vonalú mozgás esetén a gyorsulásra vektorként tekintünk, a sebességvektor idő szerinti deriváltjaként:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

ahol a a gyorsulásvektor $(\frac{m}{s^2})$, v a sebesség $(\frac{m}{s})$, t az idő (s). A t pillanatban a gyorsulást tehát így kaphatjuk meg:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v8t)}{\Delta t}.$$

Példa:

A Föld gravitációja közelében, ha a közegellenállás elhanyagolható, a szabadon eső testek egyenletesen gyorsulnak. Ezt az állandót nevezzük gravitációs gyorsulásnak, és g-vel jelöljük. Magyarországon az értéke körülbelül $9,81\frac{m}{s^2}$.

Az $s = \frac{g}{2}t^2$ útképletű szabadon eső test sebességét a következőképpen határozhatjuk meg:

$$s(t+\Delta t) = \frac{g}{2}(t+\Delta t)^2 = \frac{g}{2}(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2),$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{g}{2}(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - \frac{g}{2}t^2}{\Delta t} =$$

$$= \frac{g}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \delta t^2}{\Delta t} = \frac{g}{2} \lim_{\Delta t \to 0}(2t + \Delta t) = gt.$$

Vagyis a szabadon eső test sebessége a t pillanatban $v = g \cdot t$.

3.5. Közgazdaságtani értelmezés

Mikrogazdaságtanban TC-vel jelöljük a teljes költséget, TR-rel a teljes bevételt, valamint $T\pi$-vel a teljes profitot, ami előáll a teljes bevétel és a teljes költség különbségeként ($T\pi = TR - TC$). Ezek deriváltjait határköltségnek (MC), határbevételnek (MR) és határprofitnak ($M\pi$) nevezzük:

$$MC = \frac{\text{teljes költség változása}}{\text{termelés változása}}$$

$$MR = \frac{\text{teljes bevétel változása}}{\text{mennyiség változása}}$$

$$M\pi = \frac{\text{teljes profit változása}}{\text{mennyiség változása}}$$

Ha $C(x) = x$ egység előállításának költsége, akkor a $C'(x)$ határköltséget így kaphatjuk meg:

$$C'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}.$$

Nagy mennyiségű termék esetén $h = 1$ "elhanyagolhatóan kicsi", 0-ra kerekíthető. Ebből a

$$C'(x) \approx \frac{C(x+1) - C(x)}{1} = C(x+1) - C(x)$$

közelítő egyenlőtlenséget kapjuk.

Példa: Egy vállalat egy termékére vonatkozó költségfüggvénye $C(x) = x^2 + 5x + 10$. Miközben x 10-ről $10 + h$-ra változik, a változás átlagos mértéke:

$$\frac{C(10+h) - C(10)}{h} = \frac{(10+h)2 + 5(10+h) + 10 - (100 + 50 + 10)}{h} =$$

$$= \frac{160 + 25h + h^2 - 160}{h} = \frac{25h + h^2}{h} = 25 + h$$

Amennyiben h 0-hoz tart, ez az érték 25-höz közelít. Másképpen számolva pedig, $C'(x) = 2x + 5$, melybe 10-et helyettesítve $C'(10) = 25$.

További közgazdasági példa a deriváltra a fogyasztási határhajlandóság, amely megmutatja, hogy mennyivel nő a fogyasztás, ha a jövedelem egységnyivel növekszik: a fogyasztási függvény jövedelem szerinti első deriváltja.

Illetve a munka határtermelékenysége (vagy határterméke), ami azt mutatja meg, hogy mennyivel változik a termelés a munka mennyiségének egy egységgel való növekedésekor, vagyis nem más, mint a termelési függvénynek a munka mennyisége szerinti deriváltja.

A közgazdászok derivált helyett gyakran használnak elaszticitást. Ha $f(x) \neq 0$ x-ben deriválható függvény, akkor f x pontbeli elaszticitása:

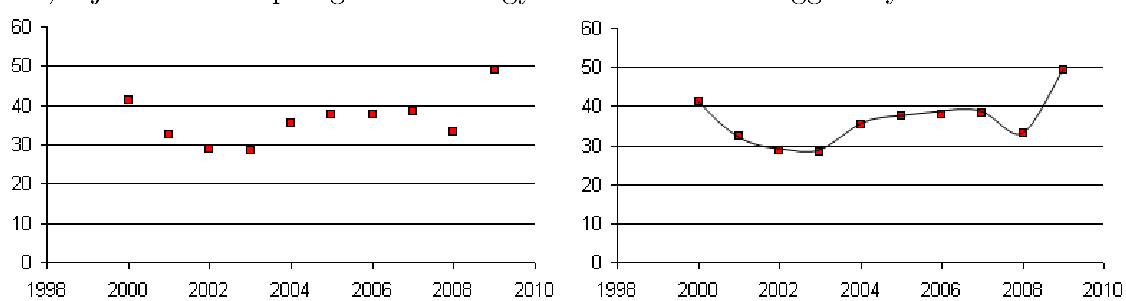
$$El_x = \frac{x}{f(x)} f'(x).$$

Az elaszticitást jelölése lehet még $El_x y$ vagy ε_{yx}, ha a függvény $y = f(x)$ formában van megadva.

3.6. Differenciálhatóság

A folytonosság a differenciálhatóság szükséges (de nem elégséges) feltétele, azonban a valóságban gyakran nem tudjuk megmérni vagy megvalósítani a független változó tetszőlegesen kicsi megváltozásait. Bizonyos mennyiségeket csak adott időközönként határoznak meg, napi, havi, vagy éves adatokról is beszélhetünk, valamint gyakran egy függvényt csak egész értékeiben definiálnak. Ezekben az esetekben a függvényt egy másik, közelítő függvénnyel helyettesíthetjük, amely már differenciálható.

Például a 6. ábrán a munkanélküliek száma látható Budapesten 2000-től 2009-ig (ezer főben), minden egyes évre[2] [4]. A bal oldali grafikonon csak az éves értékek vannak bejelölve, a jobb oldalon pedig ezek már egy differenciálható függvénnyel vannak közelítve.



6. ábra - A munkanélküliek száma Budapesten 2000-2009 (ezer fő)

3.7. Differenciálási szabályok

1. Konstans függvény deriváltja egyenlő 0-val:

$$f(x) = A \Rightarrow f'(x) = 0, \text{ ahol } A \in \mathbb{R} \text{ konstans.}$$

[2]Forrás: Központi Statisztikai Hivatal honlapja - `http://portal.ksh.hu/pls/ksh/docs/hun/xstadat/xstadat_eves/tabl6_02_01_02i.html`

2. Ha $y(x) = f(x) + g(x)$ és $z(x) = f(x) - g(x)$ akkor:

$$y'(x) = [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x),$$

$$z'(x) = [f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x).$$

3. Ha f és g differenciálható függvények x-ben, akkor $y = f \cdot g$ is differenciálható x-ben, és

$$y(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

4. Az 1.-ből és a 2.-ből következik:

$$y(x) = A + f(x) \Rightarrow y'(x) = f'(x), \text{ ahol } A \in \mathbb{R} \text{ konstans.}$$

5. Az 1.-ből és a 3.-ból következik:

$$y(x) = A \cdot f(x) \Rightarrow y'(x) = A \cdot f'(x), \text{ ahol } A \in \mathbb{R} \text{ konstans.}$$

6. Ha f és g differenciálható függvények x-ben, $g(x) \neq 0$, akkor $y = f/g$ is differenciálható x-ben, és

$$y(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}, \text{ ha } g(x) \neq 0.$$

7. Összetett függvény deriváltja:

$$y(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

8. Hatvány deriválási szabálya:

$$f(x) = x^a \Rightarrow f'(x) = a \cdot x^{a-1}, \text{ ahol } a \in \mathbb{R} \text{ konstans.}$$

3.8. Példa szorzat és hányados deriválási szabályára közgazdaságtanban

Példa szorzat deriválási szabályára: Tegyük fel, hogy egy adott áru egységnyi idő alatt termelt mennyisége és ára is az idő (t) függvénye. Legyen $x(t)$ a t időpillanatban vett termelt mennyiség/nap ráta, $p(t)$ pedig az áru t időpillanatbeli ára.

Ekkor:

$$R(t) = p(t) \cdot x(t) \text{ a napi bevétel.}$$

Ezt lederiválva a következőt kapjuk:

$$\dot{R} = \dot{p}(t) \cdot x(t) + p(t) \cdot \dot{x}(t).$$

Ez a következőképpen értelmezhető: Ha $p(t)$ és $x(t)$ is változik, akkor a bevétel változása két dologból tevődik össze: Az egyik az ár változása, amely arányos a termelt mennyiséggel: $\dot{p}(t) \cdot x(t)$, a másik pedig a termelt mennyiség változása, ami az árral arányos: $p(t) \cdot \dot{x}(t)$.

Ha ezt elosztjuk a napi bevétellel, akkor megkapjuk a jövedelem arányos mértékét:

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{p}(t) \cdot x(t) + p(t) \cdot \dot{x}(t)}{p(t) \cdot x(t)} = \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} + \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}.$$

Vagyis a bevétel arányos növekedési mértéke az ár arányos növekedési mértékének és a termelés mennyiségének arányos növekedési mértékének az összege.

Példa hányados deriválási szabályára: Tekintsük a q darab termék előállításához szükséges $TR(q)$ teljes bevételt. Az átlagbevételt úgy kapjuk, ha ezt elosztjuk q-val: $AR(q) = \frac{TR(q)}{q}$. A marginális, vagy határbevétel pedig a teljes bevétel deriváltja ($MR(q) = TR'(q)$). Ha vesszük az átlagbevétel megváltozását (deriváltját), a következő képletet kapjuk:

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{TR(q)}{q}\right) = \frac{q \cdot TR'(q) - TR(q)}{q^2} = \frac{1}{q}\left(TR'(q) - \frac{TR(q)}{q}\right) = \frac{1}{q}\left(MR(q) - AR(q)\right).$$

Ebből következik, hogy ha a termelt mennyiség pozitív ($q > 0$), akkor:

$$MR(q) > AR(q) \to AR(q) \text{ nő,}$$

$$MR(q) < AR(q) \to AR(q) \text{ csökken,}$$

$$MR(q) > AR(q) \to AR(q) \text{ maximális.}$$

Hasonlóképpen bevétel helyett költségfüggvénnyel számolva - ahol $TC(q)$ a teljes költség, $TC'(q) = MC(q)$ a határköltség, $AC(q) = \frac{TC(q)}{q}$ az átlagköltség - a következő összefüggéseket kapjuk meg:

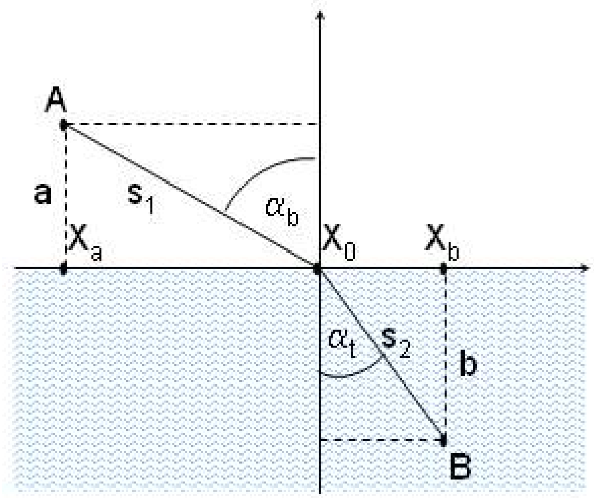
$$MC(q) > AC(q) \to AC(q) \text{ nő,}$$

$$MC(q) < AC(q) \to AC(q) \text{ csökken,}$$

$$MC(q) > AC(q) \to AC(q) \text{ minimális.}$$

3.9. Példa differenciálási szabályokra fizikában

Tekintsük a különböző közegben található A és B pontokat, valamint a közöttük haladó fénysugarat az alábbi ábrán:



7. ábra - Hullámtörés közeghatáron történő áthaladásnál

A töréspontot (X_0-t), valamint a beesési szöget (α_b-t) és a törési szöget (α_t-t) szeretnénk meghatározni.

A hullám haladási ideje:

$$\tau_{AB} = \tau_{AX_0} + \tau_{X_0B} = \frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{c_2} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + (X_0 - X_A)^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (X_B - X_0)^2}}{c_2},$$

ahol c_1 a fény terjedési sebessége az első közegben és c_2 a terjedési sebessége a második közegben.

A Fermat-elv[3] kimondja, hogy a fénysugár A pontból B pontba mindig olyan úton jut el, amelyen a terjedési idő minimális. Tehát ahol

$$\frac{d\tau_{AB}}{dX_0} = 0.$$

Deriválnunk kell tehát a $\frac{\sqrt{a^2+(X_0-X_A)^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2+(X_B-X_0)^2}}{c_2}$ összeget. (Megjegyzés: Szélsőértékekről ebben a szakdolgozatban nincs külön fejezet, [2] 643-649. oldalán található bővebb

[3]Arthur Schuster, An Introduction to the Theory of Optics, London: Edward Arnold, 1909; 43. oldal - Letölthető verzió: `http://www.archive.org/details/theoryoptics00schurich`

információ a függvény minimuma és maximuma, illetve a deriválás kapcsolatáról.) Itt kerülnek elő a differenciálási szabályok. Először a 2. szabályt alkalmazzuk: az összeg két tagját külön-külön kell deriválnunk, majd összeadnunk. Elsőként tekintsük $\frac{\sqrt{a^2+(X_0-X_A)^2}}{c_1}$ -t. A c_1 itt konstansnak számít, mivel X_0 szerint deriválunk, így $\frac{1}{c_1}$ -et kiemelhetjük az 5. szabály miatt. $\sqrt{a^2+(X_0-X_A)^2}$ összetett függvény, így a 7. szabály kerül elő. A külső függvény a négyzetgyök, amit $\frac{1}{2}$ -ik hatványnak is vehetünk, a 8. szabályt figyelembe véve hajtjuk véve a deriválást. A külső függvény deriváltja tehát $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+(X_0-X_A)^2}}$. A belső függvényben a^2 konstans, az 1. szabály miatt eltűnik, így $(X_0-X_A)^2$-t kell deriválnunk. A négyzetre emelést elvégezve kapjuk, hogy ${X_0}^2 - 2X_0X_A + {X_A}^2$. Itt ${X_A}^2$ konstans, a 4. szabály szerint eltűnik, a 8. szabály szerint ${X_0}^2$ deriváltja $2X_0$, az 5. szabály értelmében $-2X_0X_A$ -ból pedig $-2X_A$ lesz. Mindent összevetve azt kapjuk, hogy az összeg első tagjának deriváltja $\frac{1}{c_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2X_0-2X_A}{\sqrt{a^2+(X_0-X_A)^2}}$. A szabályokat hasonlóképpen alkalmazva a második tagra $\frac{1}{c_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2X_B+2X_0}{\sqrt{b^2+(X_B-X_0)^2}}$ jön ki. τ_{AB} deriváltja tehát:

$$\frac{d\tau_{AB}}{dX_0} = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{X_0 - X_A}{\sqrt{a^2 + (X_0 - X_A)^2}} - \frac{1}{c_2} \cdot \frac{X_B - X_0}{\sqrt{b^2 + (X_B - X_0)^2}} = 0.$$

Ebből ha ismerjük v_1-et és v_2-t, akkor meghatározhatjuk X_0-t is. Valamint a két szög szinusza:

$$\sin \alpha_b = \frac{X_0 - X_A}{\sqrt{a^2 + (X_0 - X_A)^2}}, \text{ valamint } \sin \alpha_t = \frac{X_B - X_0}{\sqrt{b^2 + (X_B - X_0)^2}}.$$

Megjegyzés: Ezekből a következő összefüggést is megkapjuk (Snellius-Descartes fénytörési törvénye):

$$\frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_t} = \frac{c_1}{c_2} = n_{1,2}, \text{ ahol } n_{1,2} \text{ a két közeg relatív törésmutatója.}$$

3.10. Magasabb rendű deriváltak

Az $y = f(x)$ függvény deriváltjának deriváltját második deriváltnak vagy második differenciálhányadosnak nevezik és $f''(x)$-szel, $\frac{d^2y}{dx^2}$-tel vagy $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$-tel jelölik. Ezt ismét (vagyis harmadszorra) deriválva a harmadik deriváltat kapjuk, melynek jelölése $f'''(x)$, illetve $\frac{d^3y}{dx^3}$ vagy $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$. A negyedik deriváltnál a jelölés: $f^{(4)}(x)$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ vagy $\frac{d^4f(x)}{dx^4}$.

Az n-edik derivált jelölése tehát: $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ vagy $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$. Az n-et a derivált rendjének nevezik.

A t szerinti második deriváltat legtöbbször $\ddot{s}$-sel szokás jelölni, a t szerinti harmadik deriváltat pedig $\dddot{s}$-sel.

3.11. Magasabb rendű deriváltak térgörbéknél

Tekintsünk egy $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ görbét. (i, j, k az x, y z irányú egységvektorok.) Feltesszük, hogy r kétszer deriválható.

A görbe sebességvektora a pálya érintőjének irányába mutat, az érintővektor tehát a görbe deriváltja: $\dot{r}$. Az érintő irányú egységvektor jelölése:

$$t = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|}$$

Az elmozdulás idő szerinti második deriváltja a gyorsulás: $\ddot{r}$. A gyorsulásvektor felbomlik egy érintő irányú komponensre, amelynek tangenciális gyorsulás a neve, valamint egy merőleges komponensre, amit centripetális gyorsulásnak nevezünk.

A sebesség ($\dot{r}$) és a gyorsulás ($\ddot{r}$) meghatároz egy síkot, amelyet simulósíknak nevezünk. Ennek egységnyi hosszú normálisa (érintési pontban állított merőlegese) a binormális, amely a következőképpen számítható ki:

$$b = \frac{\dot{r} \times \ddot{r}}{|\dot{r} \times \ddot{r}|}$$

(Itt $\times$ a vektriális szorzatot jelöli: $|a \times b| = |a||b| \sin \varphi$, ahol φ az a és b vektorok közbezárt szöge.)

Az érintő és binormális által meghatározott sík a rektifikáló sík.

A centripetális gyorsulás irányú vektort főnormális vektornak nevezzük, a következőképpen számítható ki:

$$n = \frac{\ddot{r}}{|\ddot{r}|} = b \times t$$

A t, b, n egymásra merőleges egységektorok, amelyeket kísérő triédernek, vagy kísérő háromélnek szoktak nevezni.

Definiálhatjuk a görbe görbületét (érintő irányváltozásának sebességét) is a következőképpen:

$$g = \frac{|\dot{r} \times \ddot{r}|}{|\dot{r}|^3}$$

Valamint torzióját (simulósík elfordulásának sebességét):

$$T = \frac{\dot{r} \cdot \ddot{r} \cdot \dddot{r}}{|\dot{r} \times \ddot{r}|^2}$$

(Itt $\cdot$ a skaláris szorzatot jelöli: $a \cdot b = |a||b| \cos\varphi$, ahol φ az a és b vektorok közbezárt szöge.)

4. Integrálszámítás

4.1. Határozatlan integrál

Legyen f egy I véges vagy végtelen intervallumból $\mathbb{R}$-be képező függvény: $f : I \to \mathbb{R}$. Ekkor az $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt az f *primitív függvényének* nevezzük I-n, ha F differenciálható I-n és $F'(x) = f(x)$ $x \in I$-re.

Egy f függvény összes primitív függvényeinek halmazát f *határozatlan integráljának* nevezzük. Jelölése:

$$\int f(x)dx.$$

Mivel $F' = f$ esetén $(F+C)'$ is igaz, ahol $C \in \mathbb{R}$ konstans, így minden integrálható függvénynek végtelen sok primitív függvénye van, amelyek csak az additív konstansban térnek el egymástól.

4.2. Példa határozatlan integrálra

Szeretnénk meghatározni azokat a görbéket, amelyek bármely pontjának vett érintőjének iránytangense megegyezik a pont x-tengelyen felvett értékével.

Ha a görbe egyenlete $y = f(x)$, akkor az érintő iránytangense $f(x)$ deriváltja:

$$m = y' = f'(x).$$

Amit mi keresünk:

$$y' = x.$$

Meg kell tehát adnunk y-t, itt jön képbe az integrálás művelete:

$$y = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C,$$

ahol C konstans. Mivel $\frac{x^2}{2}$ parabola, így a különböző értéket felvevő C-k miatt (y-tengely mentén) felfelé és lefelé eltolt parabolasereget kapunk.

4.3. Mechanikai példa

Egy pont az idővel arányosan növekvő sebességgel egyenesvonalú mozgást végez. Szeretnénk meghatározni egy bizonyos időközben a pont által megtett út hosszát.

Mint korábban megállapítottuk, az útfüggvény (s) idő (t) szerinti deriváltja a mozgás sebessége (v):

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

A feladat szerint a sebesség arányosan nő az idővel: $v = k \cdot t$. Tehát s-nek t szerinti deriváltja adott, mint t függvénye. Ebből következően:

$$s = \int kt\ dt = \frac{kt^2}{2} + C.$$

Egy $t = t_1$ időpillanatban megtett út $s_1 = \frac{k{t_1}^2}{2} + C$, egy $t = t_2$ időpillanatban megtett út $s_1 = \frac{k{t_2}^2}{2} + C$.

Vagyis a $t_2 - t_1$ idő alatt megtett út

$$s_2 - s_1 = \frac{k}{2}({t_2}^2 - {t_1}^2).$$

4.4. Általános integrálási szabályok

1. Homogenitás:

$$\int af(x)\ dx = a \int f(x)\ dx, \text{ ahol } a \in \mathbb{R} \text{ konstans.}$$

2. Additivitás:

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx - \int h(x)\ dx.$$

3. Parciális integrálás:

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx, \text{ ahol } f(x) \text{ és } g(x) \text{ differenciálható függvények.}$$

4. Helyettesítéses integrálás:

$$\int f(x)\ dx = \int f[g(t)]g'(t)\ dt.$$

5. Hatvány integrálása:

$$\int x^a\ dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, \text{ ha } a \neq -1 \text{ és } a \in \mathbb{R}.$$

4.5. Határozott integrál

Legyen $[a, b]$ egy $\mathbb{R}$-n értelmezett zárt intervallum. Ezen intervallum *felosztásának nevezzük* P-t, ha:

$$P = x_i : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b, \ (n \in \mathbb{N}),$$

ahol x_i jelöli az i-edik osztópontot, $[x_{i-1}, x_i]$ az i-edik intervallumot, valamint $x_i - x_{i-1}$ az i-edik intevallum hossza, $||P|| = \max_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$ pedig a P felosztás finomsága. Továbbá legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kolátos függvény, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1...n)$ közbenső értékek. Ekkor az f függvény P felosztáshoz és $t = (t_1, ..., t_n)$ közbenső érték rendszerhez tartozó *integrálközelítő összeg* :

$$s(f, P, t) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény *Riemann integrálható* az $[a, b]$ intervallumon, ha létezik olyan $N \in \mathbb{R}$ szám, amelyre bármilyen kicsi $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta(\varepsilon)$, hogy

$$|s(f, P, t) - N| < \varepsilon, \text{ ha } ||P|| < \delta(\epsilon)$$

minden $t = (t_1, ..., t_n)$ közbenső érték rendszer mellett teljesül. Ezt az N számot az f függvény $[a, b]$-n vett *Riemann integráljának* nevezzük. Jelölése:

$$\int_a^b f(x) \ dx$$

Itt a az integrálás alsó, b pedig a felső határa. Ennél a képletnél már meghatározott az additív konstans, ugyanis:

$$\int_{x=a}^{a} f(x) \ dx = 0.$$

Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos az $[a, b]$ intervallumon és $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ az f egy primitív függvénye $[a, b]$-n. Ekkor a Newton-Leibniz formula:

$$\int_a^b f(x) \ dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

$F(x) = \int f(x)\, dx$ esetén $\frac{d[F(x)+C]}{dx} = f(x)$, tehát a határozatlan integrál az x változó függvénye, de a határozott integrál nem függ az x változótól, csupán a b felső és a alsó határ függvénye.

Geometriai jelentése: a határozott integrál az x tengely, a függvénygörbe, valamint az $x = a$ és $x = b$ egyenesek által határolt előjeles terület.

4.6. Határozott integrál tulajdonságai

1. Homogenitás:

$$\int_{x=a}^{b} Af(x)\, dx = A \int_{x=a}^{b} f(x)\, dx, \text{ ahol } A \in \mathbb{R} \text{ konstans.}$$

2. Additivitás:

$$\int_{x=a}^{b} [f(x) + \phi(x) - \varphi(x)]\, dx = \int_{x=a}^{b} f(x)\, dx + \int_{x=a}^{b} \phi(x)\, dx - \int_{x=a}^{b} \varphi(x)\, dx$$

3. A határok felcserélésével az integrál előjelet vált:

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\, dx = -\int_{x=b}^{a} f(x)\, dx.$$

4. Ha $a < c < b$, akkor:

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\, dx = \int_{x=a}^{c} f(x)\, dx + \int_{x=c}^{b} f(x)\, dx.$$

4.7. Példa területszámításra

Szeretnénk meghatározni az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis T területét.

Írjuk át a görbe egyenletét $x = x(t)$, $y = y(t)$ paraméteres alakra. Vegyük a következő helyettesítést: $y = [f(x)] = y(t)$, $dx = \dot{x}(t)dt$:

$$T = \int_{x=a}^{b} f(x)dx = \int_{t=t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Az elipszis paraméteres egyenletrendszere $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Elegendő az ellipszis negyed területét kiszámítani:

$$dx = -a\sin t\; dt, \text{ valamint } t_1 = \frac{\pi}{2} \text{ és } t_2 = 0.$$

$$\frac{T}{4} = \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin(-a\sin t)\ dt = -ab\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\ dt =$$

$$= -ab\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1-\cos 2t}{2}\ dt = -\frac{ab}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{ab\pi}{4}.$$

Ebből pedig:

$$T = ab\pi.$$

4.8. Ívhossz

Egy görbe kerületét is meghatározhatjuk a következő módon:

Ha az $y = f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon differenciálható, és $f'(x)$ $[a, b]$-n folytonos, akkor a függvénygörbe L ívhossza az intervallumon:

$$L = \int_{x=a}^{b} \sqrt{1 + (y')^2(x)}\ dx.$$

Illetve az $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t \in [a, b]$) paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbe esetén az ívhossz:

$$L = \int_{t=t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ dt.$$

Például ki szeretnénk számolni az $x^2 + y^2 = r^2$ alakban megadott r sugarú kör kerületét. Először fejezzük ki y-t:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Majd deriváljuk az egyenletet:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Ebből megkapjuk ds-t:

$$ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\ dx = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\ dx = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\ dx.$$

Itt is elég egy negyed körívre elvégezni. Legegyszerűbb azt az ívet választani, ahol $y > 0$ és $x > 0$. Itt a határok: $x = 0$ és $x7r$. Így:

$$\frac{L}{4} = \int_{x=0}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\ dx.$$

Vezessük be az $x = rt$, $dx = r\ dt$ új változót. Ekkor az új határok $t = 0$ és $t = \frac{r}{r} = 1$ lesznek. A negyed körív hossza tehát:

$$\frac{L}{4} = \int_{t=0}^{1} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - r^2t^2}}\ dt = \int_{t=0}^{1} \frac{r}{\sqrt{1-t^2}}\ dt = r \int_{t=0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt = r[\arcsin t]_0^1 = \frac{r\pi}{2}.$$

A kör teljes ívhossza ennek négyszerese:

$$L = 4\frac{r\pi}{2} = 2r\pi.$$

4.9. Forgástestek köbtartalma

Legyen t_n egy r sugarú, m magasságú egyenes körhenger alpkörébe írt n-szög területe, a megfelelő köré írt sokszög területe T_n. A t_n területű sokszögre szerkesztett m magasságú egyenes hasáb a henger beírt, a T_n területű sokszögre szerkesztett, szintén m magasságú egyenes hasáb a henger köré írt hasáb. A beírt hasáb köbtartalma $V_b = mt_n$, a köré írt hasáb köbtartalma $V_k = mT_n$.

A henger köbtartalma legyen V. Ebben az esetben $mt_n < V < mT_n$, de $\lim_{n\to+\infty} t_n = r^2\pi$, $\lim_{n\to+\infty} T_n = r^2\pi$, így $V = mr^2\pi$, tehát azt a jól ismert képletet kaptuk, amely szerint a henger köbtartalma az alapkör területének és a magasságnak szorzata.

Ebből következik, hogy az $y = f(x)$ görbét x-tengely körüli (360 fokos) forgatással előállított forgástest köbtartalma $x = a$ és $x = b$ határok között:

$$V = \pi \int_{x=a}^{b} y^2(x)\ dx.$$

Ha a görbe $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t \in [a, b])$ paraméteres egyenletrendszerrel van megadva, akkor $dx = \dot{x}(t)\ dt$, ezért:

$$V = \pi \int_{t=t_1}^{t_2} y^2(t)\dot{x}(t)\ dt.$$

Tetszőleges zárt felülettel határolt test köbtartalma is meghatározható egy adott S síkkal párhuzamos és attól x távolságra lévő metszetének $T(x)$ területének segítségével. Ha a két metszősík távolsága S-től a és b.

A testet osszuk fel S-től $a = x_0 < x_1 < ... < x_i < ... < x_n = b$ távoságra lévő metszősíkokkal. $T(\xi_i)$ alapterületű és $(x_{i+1} - x_i)$ magasságú hengerrel adható meg az i-edik réteg köbtartalma: $T(\xi_i)$ az $x_i < \xi_i < x_{i+1}$ alkalmas megválasztásával. Az egész réteges test köbtartalma:

$$\sum_{i=0}^{n-1} T(\xi_i)(x_{i1} - x_i).$$

Ennek határértéke a test köbtartalma: $V = \int_{x=a}^{b} T(x)\, dx$.

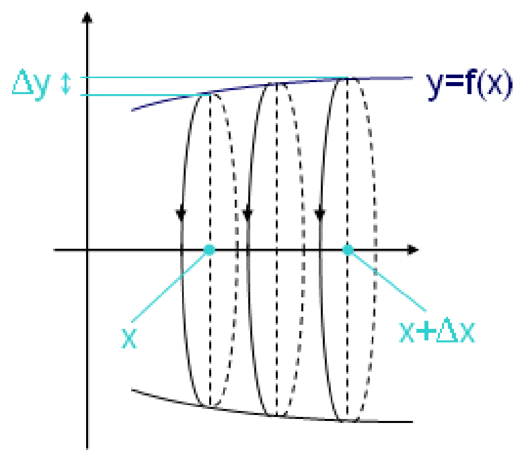
Például számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x > 0$, $a, b \neq 0$ ellipszisív elforgatásával keletkezett fél ellipszoid köbtartalmát:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \text{ ebből:}$$

$$V = \pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\, dx = \pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = \frac{2ab^2\pi}{3}.$$

4.10. Forgástestek palástjának felszíne

Egy $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ egyenlettel megadott görbe x-tengely körüli elforgatásával keletkezett forgástest felszíne az ábrán látható csonkakúpok palástjainak felszínének összege:



7. ábra

Egy csonkakúp palástfelszíne:

$$\Delta F = \frac{2\pi y(x) + 2\pi y(x + \Delta x}{2}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} =$$

$$= \pi[y(x) + y(x + \delta x)]\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}^2\right)}\delta x.$$

Mivel $\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = 2\pi y\sqrt{1+(y')^2(x)}\ dx$, így a teljes test felszínét a következőképpen kaphatjuk meg:

$$F = 2\pi \int_{x=a}^{b} y(x)\sqrt{1+(y')^2(x)}\ dx.$$

Ha az $x = x(t)$, $y = y(t)$ paraméteres egyenlettel adtuk meg a görbét, akkor $ds = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\ dt$. Ekkor tehát:

$$F = 2\pi \int_{t=t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\ dt.$$

Például az r sugarú gömb felszíne:
Forgassuk el az $x^2 + y^2 = r^2$ kört az x-tengely körül, így megkapjuk a gömböt.
Ebből $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2-x^2}}\ dx = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$. A határok $x_1 = -r$, $x_2 = r$.
Vagyis a felszín:

$$F = 2\pi \int_{x=-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\frac{r\ dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = 2\pi r \int_{x=-r}^{r} dx = 2\pi r[x]_{-r}^{r} = 2\pi r(2r) = 4r^2\pi.$$

4.11. Mechanikai és egyéb fizikai alkalmazások

Fizikában, azon belül mechanikában nagyon sok helyen találkohatunk integrállal. Ezek közül néhány példa:

1. Homogén síkrész elsőrendű vagy sztatikai nyomatéka x-tengelyre:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{x=a}^{b} y^2(x)\ dx,$$

illetve y-tengelyre:

$$M_y = \int_{x=a}^{b} xy(x)\ dx.$$

Homogén lemez súlypontjának koordinátái:

$$x_s = \frac{\int_{x=a}^{b} xy(x)\ dx}{\int_{x=a}^{b} y(x)\ dx},\ y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_{x=a}^{b} y^2(x)\ dx}{\int_{x=a}^{b} y(x)\ dx}.$$

Például határozzuk meg az $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ ellipszis x-tengely feletti fél lapjának a súlypontját. A homogén síkrészre vonatkozó képletek átírhatóak paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbék esetére:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{x=a}^{b} y^2(x)\ dx = \frac{1}{2}\int_{t=t_1}^{t_2} y^2(t)\dot{x}(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_{t=\pi}^{0} b^2 sin^2 t(-a\sin t)\ dt =$$

$$-\frac{1}{2}ab^2\int_{t=\pi}^{0}(1-\cos^2 t)\sin t\ dt = -\frac{1}{2}ab^2\left[-\cos\ t + \frac{cos^3 t}{3}\right]_{\pi}^{0} = \frac{2}{3}ab^2.$$

Az ellipszis félterülete **4.7 Példa területszámításra** című részben kijött eredmény alapján $\frac{ab\pi}{2}$, így:

$$y_s = \frac{\frac{2ab^2}{3}}{\frac{ab\pi}{2}} = \frac{4b}{3\pi} \text{ és } x_s = 0 \text{ az } y\text{-tengelyre való szimmetria miatt.}$$

2. Homogén görbeív elsőrendű vagy sztatikai nyomatéka x-tengelyre:

$$M_x = \int_{x=a}^{b} y(x)\sqrt{1+(y')^2(x)}\ dx,$$

valamint y-tengelyre:

$$M_y = \int_{x=a}^{b} x\sqrt{1+(y')^2(x)}\ dx.$$

Az ívsúlypont koordinátái:

$$x_s = \frac{\int_{x=a}^{b} x\sqrt{1+(y')^2(x)\ dx}}{\int_{x=a}^{b}\sqrt{1+(y')^2(x)}dx},\ y_s = \frac{\int_{x=a}^{b} y(x)\sqrt{1+y'\ 2(x)\ dx}}{\int_{x=a}^{b}\sqrt{1+(y')^2(x)\ dx}}.$$

Például határozzuk meg az $y = \operatorname{ch} x$ láncgörbe $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$ közötti ívének súlypontját.

$$M_x = \int_{x=a}^{b} y(x)\sqrt{1+(y')^2(x)}\ dx = \int_{x=0}^{1}\operatorname{ch} x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\ dx = \int_{x=0}^{1}\operatorname{ch}^2 x\ dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1}\frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sh} 2x}{2} + x\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sh} 2}{2} + 1 - 0\right] = \frac{\operatorname{sh} 2}{4} + \frac{1}{2} \approx \frac{3,62686}{4} + \frac{1}{2} \approx 1,4067.$$

$$M_y = \int_{x=a}^{b} x\sqrt{1+(y')^2(x)}\ dx = \int_{x=0}^{1} x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\ dx = \int_{x=0}^{1} x\operatorname{ch} x\ dx =$$

$$= [x \operatorname{sh} x]_0^1 - \int_{x=0}^{1} shx\ dx = [x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x]_0^1 = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + \operatorname{ch} 0 = -e^{-1} + 1 \approx 0,6321.$$

$$L = \int_{x=a}^{b} \sqrt{1 + (y')^2(x)}\ dx = \int_{x=0}^{1} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\ dx = \int_{0}^{1} \operatorname{ch} x\ dx = [\operatorname{sh} x]_0^1 = \operatorname{sh} 1 \approx 1,1752.$$

$$x_s = \frac{M_y}{L} \approx \frac{0,6321}{1,1752} \approx 0,5379 \text{ és } y_s = \frac{M_x}{L} \approx \frac{1,4067}{1,1752} \approx 1,197.$$

3. A homogén forgástest elsőrendű vagy sztatikai nyomatéka az (y, z) síkra, ha az x-tengely a forgástengely:

$$M_{yz} = \pi \int_{x=a}^{b} xy^2(x)\ dx.$$

A forgástengelyen lévő súlypont y-tengelytől vett távolsága:

$$x_s = \frac{\int_{x=a}^{b} xy^2(x)\ dx}{\int_{x=a}^{b} y^2(x)\ dx}.$$

Például forgassuk el az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x > 0$ ellipszisívet az x-tengely körül, majd határozzuk meg a keletkezett fél ellipszoid súlypontját.

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

A határok: $x = 0$ és $x = a$, ebből:

$$M_{yz} = \pi \int_{x=a}^{b} xy^2(x)\ dx = \pi b^2 \int_{x=0}^{a} x \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\ dx = \pi b^2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2}\right]_0^a = \frac{\pi b^2 a^2}{4}.$$

A a **4.9 Forgástestek köbtartalma** című részben kijött képlet alapján a fél ellipszoid köbtartalma: $V = \frac{2ab^2\pi}{3}$.

$$x_s = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{\frac{\pi b^2 a^2}{4}}{\frac{2ab^2\pi}{3}} = \frac{3}{8}a.$$

4. Homogén forgásfelület elsőrendű vagy sztatikai nyomatéka az (y, z) síkra, ha az x-tengely a forgástengely:

$$M_{yz} = 2\pi \int_{x=a}^{b} xy(x)\sqrt{1+(y')^2(x)\ dx}.$$

A forgástengelyen lévő súlypont y-tengelytől vett távolsága:

$$x_s = \frac{\int_{x=a}^{b} xy(x)\sqrt{1+(y')^2(x)}\ dx}{\int_{x=a}^{b} y(x)\sqrt{1+(y')^2(x)\ dx}}.$$

Például forgassuk el az $y = \sqrt{x}$ parabola $(0 \leq x \leq 2)$ ívét az x-tengely körül, majd határozzuk meg a keletkezett forgási paraboloidfelület súlypontját.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ ds = \sqrt{1+(y')^2}\ dx = \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\ dx.$$

$$M_{yz} = 2\pi \int_{x=a}^{b} xy(x)\sqrt{1+(y')^2(x)\ dx} = 2\pi \int_{x=0}^{2} x\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\ dx = 2\pi \int_{x=0}^{2} x\sqrt{x+\frac{1}{4}}\ dx.$$

Helyettesítéssel: $x + \frac{1}{4} = t^2$, $dx = 2t\ dt$.

A határok: $x = 0$ esetén $t = \frac{1}{2}$, $x = 2$ esetén $t = \sqrt{2+\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$. Vagyis:

$$M_{yz} = 2\pi \int_{t=\frac{1}{2}}^{\frac{3}{3}} 2\left(t^2 - \frac{1}{4}\right) t^2\ dt = 4\pi \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{12}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \approx 4\pi \cdot 1,2417,$$

valamint a **4.10 Forgástestek palástjának felszíne** című részben kijött képlet alapján:

$$F = 2\pi \int_{x=0}^{2} \sqrt{x} 1 + \frac{1}{4x}\ dx = 2\pi \int_{x=0}^{2} \left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\ dx = 2\pi \left[\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{2} \approx 2\pi \cdot 2,1667,$$

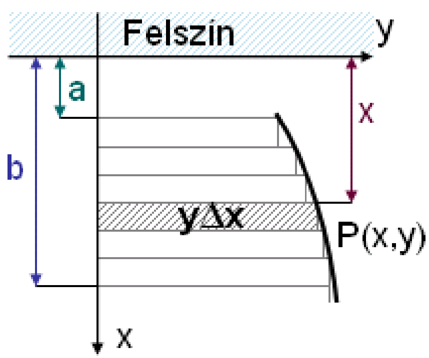
így:

$$x_s = \frac{M_{yz}}{F} \approx \frac{4\pi \cdot 1,2417}{2\pi \cdot 2,1667} = \frac{2,4834}{2,1667} \approx 1,4617.$$

5. Folyadékba merített függőleges lemez egyik oldalára ható nyomóerő kiszámítása:

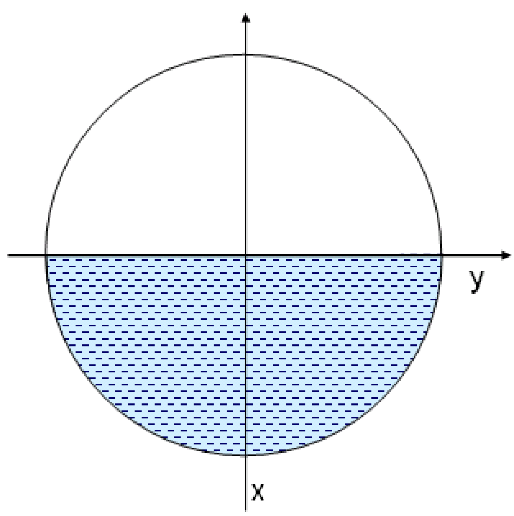
A γ fajsúlyú folyadékba merített függőleges lemez felszíntől x távolságra levő $y\Delta x$ felületelemére $\gamma\ xy\ \Delta x$ elemi nyomóerő hat. A lemez egyik oldalára ható összes P nyomóerő a következő képlettel számítható ki:

$$P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma x_i y_i \Delta x_i = \gamma \int_a^b xy\ dx.$$



8. ábra

Például tekintsünk egy 3 méter hosszú, 9 méter átmérőjű, vízszintesen elhelyezett, a feléig vízzel töltött csövet. Szeretnénk meghatározni a víz nyomását a cső tengelyére merőleges zárólapokra (a cső végeit zárják le). Válasszuk a koordinátarendszert a következő módon:



9. ábra

Eszerint a zárólapok egyenlete $x^2 + y^2 = 9$, vagyis $y = \sqrt{9 - x^2}$, valamint $\gamma = 1000$, a határok pedig $a = 0$ és $b = 3$. Egy zárólapra ható nyomóerő:

$$P_1 = 1000 \int_{x=0}^{3} x\sqrt{9 - x^2}\, dx = -\frac{1000}{3} \left[(9 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{1000}{3} \cdot 27 = 9000,$$

a két zárólapra együttesen $P = 2 \cdot 9000 = 18000$ kilopascal.

4.12. Közgazdaságtani alkalmazások

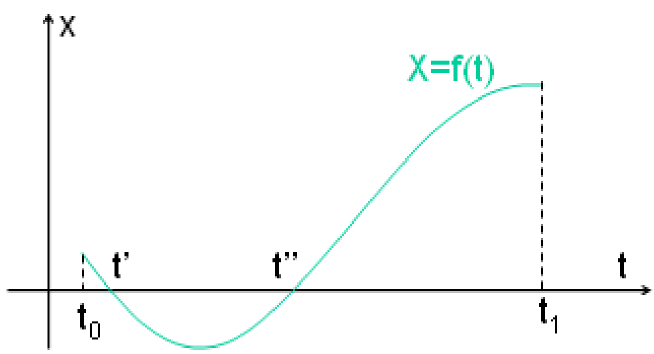
1. Valutatartalék

Ha $F(t)$ jelöli egy ország devizakészletét a t időpontban és F differenciálható, az időegység alatti deviza-változás $f(t) = \dot{F}(t)$.

Ha $f(t) > 0$, akkor a t időpontban nettó devizaáramlás történik az országba, ha $f(t) < 0$, akkor pedig devizakiáramlás. A devizakészletekben $[t_0, t_1]$ időintervallumban történt változás a következőképpen is megadható:

$$F(t_1) - F(t_0) = \int_{t=t_0}^{t_1} f(t)\, dt.$$

Tekintsük az alábbi példát:



10. ábra

Az ábrán a t_0 és t' pontok között nettó devizabeáramlás, t' és t'' között, nettó devizakiáramlás történik.

2. Jövedelemeloszlás

Jelölje $F(r)$ azoknak a személyeknek az arányát, akik legfeljebb r dollárnyi jövedelemmel rendelkeznek. Vagyis n fős népesség esetén $n \cdot F(r)$ az r dollárnyi jövedelműek száma.

Legyen r_0 a legalacsonyabb és r_1 a legmagasabb jövedelem. Ekkor az F függvényt szeretnénk meghatározni az $[r_0, r_1]$ intervallumban. F itt a meghatározás alapján nem feltétlenül differenciálható, illetve folytonos. Viszont megfelelően nagy közösség esetén található egy olyan folytonosan deriválható F, ami jó becslést ad a jövedelemeloszlásra. Legyen tehát F deriváltja f, vagyis:

$$f(r) = F'(r) \text{ minden } r \in (r_0, r_1) \text{ esetén.}$$

A derivált definíciója szerint $f(r)\Delta r \approx F(r + \Delta r) - F(r)$ bármely kicsi Δr esetén, tehát $f(r)\Delta r$ körülbelül azon egyének aránya, akiknek r és $r + \Delta r$ közötti a jövedelmük.

f-et jövedelemsűrűségfüggvénynek, F-et pedig a hozzá tartozó eloszlásfüggvénynek nevezzük.

Feltesszük, hogy f egy adott népesség folytonos jövedelemeloszlási függvénye, amelynek értékkészlete az $[r_0, r_1]$ intervallum. $r_0 \leq a \leq b \leq r_1$ esetén $\int_{r=a}^{b} f(r)\ dr$ azon személyek aránya, akiknek a jövedelme az $[a, b]$ intervallumba esik. Következésképpen $n \int_{r=a}^{b} f(r)\ dr$ pedig azon személyek száma, akiknek a jövedelme az $[a, b]$ intervallumba esik.

Szeretnénk azoknak a személyeknek az összjövedelmét meghatározni, akik a és b közötti keresettel rendelkeznek. Jelölje $M(r)$ azoknak az összjövedelmét, akik legfeljebb r dollárt keresnek. Tekintsük az $[r, r + \Delta r]$ intervallumot, amelybe körülbelül $nf(r)\Delta r$ egyén jövedelme esik bele és ez a jövedelem $\approx r$, így az összjövedelmük $M(r+\Delta r) - M(r) \approx nrf(r)\Delta r$. Vagyis:

$$\frac{M(r + \Delta r) - M(r)}{\Delta r} \approx nrf(r).$$

Ha $\Delta r \to 0$, akkor $M'(r) = nrf(r)$. Így $n \int_{r=a}^{b} rf(r)\ dr = M(b) - M(a)$, vagyis $n \int_{r=a}^{b} rf(r)\ dr$ azoknak a személyeknek az összjövedelme, akiknek az egyéni jövedelmük $[a, b]$ intervallumba esik.

Az összjövedelem és az $[a, b]$ jövedelemintervallumba tartozó személyek közötti arány ezen személyek átlagjövedelme (m). Vagyis:

$$m = \frac{\int_{r=a}^{b} rf(r)\ dr}{\int_{r=a}^{b} f(r)\ dr}.$$

A valódi jövedelemeloszlást jól közelíti például a Pareto-eloszlás. A legfeljebb r dollár jövedelmű személyek aránya itt:

$$f(r) = Br^{-\beta},$$

ahol B és β konstans és β empirikus becslése $2,4 < \beta < 2,6$. Ha r 0-hoz közeli, akkor ez nem értelmes $\beta \geq 1$-re, mert $\int_{r=a}^{b} f(r)\ dr \to \infty$ ha $r \to 0$.

3. Jövedelemelosztás befolyásolása

Feltesszük, hogy egy társadalom tagjainak egy olyan árut árulnak, aminek a kereslete csak a p ártól és az egyén r jövedelmétől függ. p ár esetén $D(p, r)$ az r jövedelmű egyén folytonos keresleti függvénye, valamint $a \leq r \leq b$, a jövedelemelosztás $f(r)$. Ebben az esetben szeretnénk meghatározni a p áron kínált áru összkeresletét.

Legyen $T(r)$ azoknak az összes kereslete, akik legfeljebb r jövedelemmel rendelkeznek. Az $[r, r + \Delta r]$ intervallumba körülbelül $nf(r)\Delta r$ egyén jövedelme esik, akiknek jövedelme nagyjából $D(p, r)$, ezért összkeresletük $\approx nD(p, r)f(r)\Delta r$. Ez viszont $T(r + \Delta r) - t(r)$. Vagyis mivel $T(r + \Delta r) - T(r) \approx nD(p, r)f(r)\Delta r$, így

$$\frac{T(r + \Delta r) - T(r)}{\Delta r} \approx nD(p, r)f(r).$$

Ha $\Delta r \to 0$, akkor $T'(r) = nD(p, r)f(r)$. A határozott integrál definíciójából:

$$T(b) - T(a) = n \int_{r=a}^{b} D(p, r)f(r)\ dr.$$

$T(b) - T(a)$ a népesség ezen áru iránti (p-től függő) összkereslete. $x(p)$-vel jelölve tehát a teljes kereslet:

$$x(p) = \int_{r=a}^{b} nD(p, r)f(r)dr.$$

4. Folyamatos jövedelemáramlás diszkontált jelenértéke

Tekintsük a bevételt folyamatosnak a $t = 0$ időpont és a $t = T$ időpont között. t-ben $f(t)$ dollár/év sebességgel. A kamatot r kamatláb mellett folyamatosan tőkésítjük. Legyen $P(t)$ a $[0, t]$ időintervallumban történő kifizetések össz-jelenértéke, vagyis $P(T)$ pénzmennyiséget kell befektetnünk $t = 0$-ban, hogy az $f(t)$ jövedelemáram folyamatos befektetését fedezze a $[0, T]$ intervallumban. Tetszőleges dt szám esetén a $[t, t + dt]$ intervallumban befolyt pénz jelenértéke $P(t + dt) - P(t)$. Elég kicsi dt-nél ennek a pénznek a jelenértéke nagyjából $f(t)\ dt$, diszkontált jelenértéke (PDV - angolul Present Discounted Value) pedig körülbelül $f(t)e^{-rt}\ dt$. Tehát $P(t+dt)-P(t) \approx f(t)e^{-rt}\ dt$, illetve

$$\frac{P(t+dt)-P(t)}{dt} \approx f(t)^{-rt}.$$

Ha $dt \to 0$, akkor $P'(t) = f(t)e^{-rt}$.

A határozott integrál definíciójából:

$$P(T) - P(0) = \int_{t=0}^{T} f(t)e^{-rt}\ dt.$$

Viszont $P(0) = 0$, így a $[0,T]$ intervallumbeli, $f(t)$ dollár/év sebességű, folyamatos jövedelemáramlás diszkontált jelenértéke $t = 0$ időpontban rögzített r kamatlábú folyamatos kamattőkésítés mellett:

$$PDV = \int_{t=0}^{T} f(t)e^{-rt}\ dt.$$

Ez az egyenlet a $[0,T]$ időintervallumbeli $f(t)$ jövedelemáram értékét adja meg $t = 0$-ban. $t = T$-ben a kamat r kamatláb folyamatos tőkésítése mellett $e^{rT} \int_{t=0}^{T} f(t)e^{-rt}\ dt$. Az e^{rT} konstans, így bevihetjük az integrálba: $\int_{t=0}^{T} f(t)e^{r(T-t)}\ dt$. Ezt nevezzük a jövedelemáramlás diszkontált jövőértékének (FDV - angolul Future Discounted Value). Vagyis:

$$FDV = \int_{t=0}^{T} f(t)e^{r(T-t)}\ dt.$$

Az $[s,T]$ időintervallumban eszközölt folyamatos jövedelemáramlás diszkontált értéke (DV - angolul Discounted Value) $t = s$ időpontban, rögzített r kamatláb esetén, folyamatos kamattőkésítés mellett:

$$DV = \int_{t=s}^{T} f(t)e^{-r(t-s)}\ dt.$$

Például határozuk meg az 5 éven keresztül évi 2000 dollár jövedelem PDV-jét és FDV-jét évente tőkésített $r = 5\% = 0.05$ kamat mellett:

$$PDV = \int_{t=0}^{5} 2000e^{-0.05t}\ dt = \left[2000\left(-\frac{e^{-0.05t}}{0.05}\right)\right]_0^5 = \frac{2000}{0.05}(1-e^{-0.25}) \approx 8847.97$$

$$FDV = e^{0.05\cdot 5} PDV \approx e^{0.25} \cdot 8847.97 \approx 11361.02$$

5. Összefoglalás

Szakdolgozatom néhány példát mutatott az analízis más tudományágakban való felhasználására, ugyanakkor érdemes megjegyezni, hogy ez csak egy kis szelete volt az ismert alkalmazásoknak. Analízissel kapcsolatban fontos még szót ejteni a függvények maximum- és minimumhelyeinek vizsgálatáról, a deriválás és integrálás legtöbb természettudományi és mérnöki eljárásban való előfordulásáról, valamint a parciális differenciálegyenletekről. Egy kis ízelítőt láthattunk vektoranalízisből is, ami a geometria és az analízis kapcsolatáról tanúskodik, valamint fizikából, ahol mechanikán, hőtanon és a szakdolgozatban említett más témákon kívül még rengeteg helyen előfordulnak analízisbeli tételek alkalmazásai a természeti jelenségek leírásában. A gazdasági felhasználások pedig rámutatnak, hogy gyakorlati haszna is lehet ezen tudásnak, akár mindennapjainkban is segíthet döntések meghozatalában.

6. Irodalomjegyzék

[1] Arthur Schuster, An Introduction to the Theory of Optics, London: Edward Arnold, 1909 - Letölthető verzió: http://www.archive.org/details/theoryoptics00schurich

[2] Központi Statisztikai Hivatal honlapja http://portal.ksh.hu/pls/ksh/docs/hun/xstadat/xstadat_eves/tabl6_02_01_02i.html

[3] Magyar Nemzeti Bank honlapja http://www.mnb.hu/Resource.aspx?ResourceID=mnbfile&resourcenam hu0906_fogyasztasi_HUF

[4] MIT Open Courses - Course 14.01 - Principles of Microeconomics Fall 2007 - Lecture 3 http://ocw.mit.edu/courses/

[5] Obádovics J. Gyula: Matematika, Kilencedik kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974

[6] Dr. Rados Gusztáv: Analizis és geometria, Franklin-társulat, Budapest, 1919

[7] Sydsæter-Hammond: Matematika közgazdászoknak, Aula Kiadó Kft., 1998

[8] Tóth András Kísérleti Fizika jegyzete 2007, Budapesti Műszaki Egyetem - "Hullámok visszaverődése és törése" http://mono.eik.bme.hu/~vanko/labor/kisfiz/tananyag.htm

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Sikolya Eszternek, hogy még az utolsó pillanatokban is időt szánt rám és hasznos tanácsokkal látott el dolgozatomat illetően. Továbbá köszönöm mindenkinek, hogy türelemmel és megértéssel voltak, amíg én a szakdolgozatomat írtam.