Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

A Banach-fixponttétel és alkalmazásai

Szakdolgozat

Juhász Gergely
Matematika B.Sc., matematikai elemző szakirány

Témavezető: **Karátson János**, egyetemi docens
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest
2010

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Karátson János egyetemi docensnek, aki végig segítette a munkámat, hasznos tanácsaival, precíz magyarázataival és a megfelelő irodalmak ajánlásával nagyban hozzájárult a dolgozatom elkészüléséhez.

1. Bevezetés

A matematika területén jelentős eredménynek számít a Banach-fixponttétel, amely fontos megállapítást tesz a metrikus terek elméletében. A tétel bebizonyítja, hogy metrikus terekben minden kontrakciónak létezik fixpontja, és ez a fixpont egyértelmű.

A tétel alkalmazásaival és következményeivel az alkalmazott analízis területén akkor találkozhatunk, amikor egy adott problémára matematikai modellt állítunk fel. Ilyen problémák elsősorban a fizika területén fordulnak elő. A modell megoldására készíthetünk egy iterációs eljárást, amelyre a megfelelő feltételek mellett alkalmazható a fixponttétel eredménye.

A dolgozatom célja, hogy bemutassam a metrikus terek tulajdonságait, valamint betekintést nyújtsak a fixponttételen alapuló egyes alkalmazásokba. A dolgozat terjedelmére való tekintettel csak néhány fontosabb témakörről lesz szó, amelyek a következők: lineáris és nemlineáris egyenletrendszerek, integrálegyenletek, közönséges és parciális differenciálegyenletek. További cél az előbb említett területekről iterációs eljárás készítése egy általánosított modellre. A témaköröket érintő speciális esetekről csak abban az esetben lesz szó, amennyiben azok külön bizonyításra szorulnak. A témák tárgyalásánál egy-egy konkrét probléma felvetése segít majd megérteni, mire is jó az adott modell. Ezenkívül némelyik fejezethez kapcsolódik majd feladatmegoldás, illetve speciális alkalmazás.

2. A Banach-fixponttétel

A fejezet első része az alapvető fogalmak bevezetésére szolgál, amelyek szükségesek ahhoz, hogy megértsük a metrikus terek felépítését, valamint a rajtuk értelmezett sorozatok és leképezések tulajdonságait. A második részben pedig kimondjuk és bebizonyítjuk a dolgozat alapját képző Banach-fixponttételt.

2.1. Metrikus terek és tulajdonságaik

A metrikus terek bevezetéséhez szükségünk lesz egy tetszőleges halmazra, amin értelmezni tudunk egy távolságfüggvényt:

2.1.1. Definíció. *Legyen X tetszőleges halmaz és $d : X \to R_0^+$ nemnegatív értékű valós függvény. A d-t az X feletti metrikának (távolságfüggvénynek) nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén igazak az alábbi tulajdonságok.*

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$ *(szimmetria);*
- $d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y)$ *(háromszög-egyenlőtlenség).*

2.1.2. Definíció. *Legyen X tetszőleges halmaz és d metrika X felett. Ekkor az (X, d) párt metrikus térnek nevezzük.*

Szükségünk lesz továbbá a metrikus tereken értelmezett sorozatok tulajdonságaira is, hiszen ebben az esetben nem mindig viselkednek úgy, ahogy a valós számoknál megszoktuk.

2.1.3. Definíció. *Legyen $x_0 \in X$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges rögzített valós szám. Az x_0 pont ε sugarú környezete:*

$$K_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : d(x_0, x) < \varepsilon\}.$$

2.1.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(x_n) \subset X$ sorozat konvergens, ha $\exists a \in X$ amelyre $d(x_n, a) \to 0$, azaz*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad x_n \in K_\varepsilon(a).$$

2.1.5. Definíció. *Egy $(x_n) \subset X$ sorozatot Cauchy-sorozatnak nevezünk, ha*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n > N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

2.1.6. Definíció. *Azokat a metrikus tereket, amelyekben minden Cauchy-sorozat konvergens, teljes metrikus térnek nevezzük.*

A leképezések tulajdonságainak definiálásához legyenek adottak az (X, d_X) és az (Y, d_Y) metrikus terek, valamint az $f : X \to Y$ leképezés.

2.1.7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy f folytonos az $x_0 \in X$ pontban, ha $\forall (x_n) \subset X$ sorozatra igaz, hogy*

$$x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x_0).$$

2.1.8. Definíció. *Az f leképezés kielégíti az L-állandós Lipschitz-feltételt $L > 0$ mellett, ha igaz a következő:*

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2)$$

minden $x_1, x_2 \in X$ esetén.

2.1.9. Definíció. *Azt mondjuk, hogy f kontrakció, ha $\exists q \in [0, 1)$, amelyre igaz a következő:*

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq q d_X(x_1, x_2)$$

minden $x_1, x_2 \in X$ esetén.

2.1.10. Következmény. *Minden kontrakció folytonos.*

2.1.11. Definíció. *Legyen $f : X \to X$, azt mondjuk, hogy az $x^* \in X$ az f leképezés fixpontja, ha $f(x^*) = x^*$.*

2.2. Banach-fixponttétel

2.2.1. Tétel. *(Banach-fixponttétel) Legyenek X teljes metrikus tér és $f : X \to X$ kontrakció. Ekkor*

1. *f-nek létezik egyetlen fixpontja.*
2. *Tetszőleges $x_0 \in X$ kezdőpont esetén az $x_n := f(x_{n-1})$ iteráció konvergens, és $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Sőt, érvényes a $d(x^*, x_m) \leq A \cdot d(x_1, x_0) \cdot q^m$ becslés, ahol $A \geq 0$ konstans.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $n > m$. Ekkor

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \leq \\ \leq q^{n-1}d(x_1, x_0) + q^{n-2}d(x_1, x_0) + \cdots + q^m d(x_1, x_0) = \\ = (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^m)d(x_1, x_0) = \\ = (q^{n-m-1} + q^{n-m-2} + \cdots + q + 1)d(x_1, x_0)q^m \leq \\ \leq \frac{1}{1-q}d(x_1, x_0)q^m. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ekkor $m \to \infty$ esetén a jobboldal 0-hoz tart, így

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n > N d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

tehát x_n Cauchy-sorozat. Mivel X teljes metrikus tér, így x_n konvergens is:

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = x^* \in X. \tag{2.2}$$

Tekintsük az n-edik iteráltat:

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

Térjünk át határértékre:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1})$$

Innen (2.2)-ből következik, hogy

$$x^* = f(x^*).$$

Az egyértelműséghez indirekt tegyük fel, hogy x^* és y^* is fixpontja f-nek és $x^* \neq y^*$. Ekkor $d(x^*, y^*) > 0$, így

$$d(x^*, y^*) = d(f(x^*), f(y^*)) \leq qd(x^*, y^*)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{(q-1)}_{<0}\underbrace{(d(x^*, y^*))}_{>0}.$$

Ellentmondásra jutottunk, tehát a fixpont egyértelmű.

A becslésünket is könnyen igazolhatjuk, hiszen (2.1) igaz $d(x_n, x_m)$-re $\forall n, m$ esetén, így $d(x^*, x_m)$-re is:

$$d(x^*, x_m) \leq \underbrace{\frac{1}{1-q}}_{A} d(x_1, x_0) q^m. \qquad \square$$

2.2.2. Következmény. *Ha X Banach-tér, $B : X \to X$ folytonos lineáris leképezés és $\|B\| < 1$, akkor $x = Bx + c$-nek létezik egyértelmű megoldása.*

Bizonyítás. Legyen $f(x) := Bx + c$, ekkor

$$x = Bx + c \quad \Leftrightarrow \quad x = f(x).$$

Megmutatjuk, hogy f kontrakció:

$$\|f(x) - f(y)\| = \|B(x - y)\| \leq \|B\| \cdot \|x - y\|$$

A $\|B\| < 1$ feltétel következtében f kontrakció, így a 2.2.1 tétel értelmében létezik egyetlen megoldás. $\square$

3. Egyenletrendszerek

A gyártási folyamatok modellezését gyakran oldják meg egyenletrendszerekkel. Jelöljük x-szel az alapanyagot, és a mennyiségű x-ből gyártunk egy b terméket:

$$a \cdot x = b.$$

Bonyolítsuk egy kicsit a feladatot. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az alapanyagok és ezek kombinációjából állítjuk elő b-t:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b.$$

Most tegyük fel, hogy a teljes üzemben nem csak b-t, hanem $b_1, b_2, \ldots, b_m$ termékeket gyártanak az alapanyagokból:

$$\begin{aligned} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{1,n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{2,n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1} \cdot x_1 + a_{m,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{m,n} \cdot x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Cél: adott $b_1, \ldots, b_m$-hez $x_1, \ldots, x_n$-et keresünk.
Jelölések:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ az $a_{i,j}$ együtthatókból álló mátrix;
- $x \in \mathbb{R}^n$ a x_i koordinátákból álló vektor;
- $b \in \mathbb{R}^m$ a b_i koordinátákból álló vektor.

A fenti egyenletrendszert lineárisnak nevezzük, mivel minden változójában lineáris.

3.1. Lineáris egyenletrendszerek

Az olyan $Ax = b$ alakú lineáris egyenletrendszerek fixponttételre alapuló iterációs megoldását vizsgáljuk, ahol adott $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ és $b \in \mathbb{R}^m$. Feltesszük, hogy létezik A^{-1}, tehát A reguláris, és $detA \neq 0$.

3.1.1. Definíció. *Az X lineáris teret lineáris normált térnek nevezzük, ha bármely $x, y \in X$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén igazak a következők:*

1. $\|x\| \geq 0$, *és* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ez a $\|x\|$ az x vektor normája.

3.1.2. Definíció. *Legyen $1 \leq p \leq \infty$. Ekkor $x \in \mathbb{R}^n$ esetén*

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \text{ ha } p < \infty \text{ és } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \text{ ha } p = \infty.$$

A leggyakrabban használt normák elnevezése:

- *ha $p = 1$: oktaéder-norma;*
- *ha $p = 2$: euklideszi-norma;*
- *ha $p = \infty$: maximum-norma.*

A maximum-norma mint határérték értendő, mivel $\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

3.1.3. Definíció. *A vektornorma segítségével megkapható a mátrixnorma:*

$$\|A\| := \sup_{x \neq \underline{0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

- $p = 1$: $\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$ *(oszlopösszeg norma);*
- $p = \infty$: $\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$ *(sorösszeg norma);*
- $p = 2$: $\|A\|_2 = \left(\lambda_{\max} \left(A^T A \right) \right)^{1/2}$ *(euklideszi norma).*

Az egyszerű iteráció, ahogy a neve is mutatja, a legegyszerűbb iterációs módszer lineáris egyenletek megoldására. Itt az $Ax = b$ egyenletrendszer $x = Bx + c$ alakra hozható. Ekkor a megfelelő feltételek mellett az egyenletrendszer megoldása az alábbi sorozat határértéke:

$$x_{n+1} = Bx_n + c.$$

3.1.4. Tétel. *Ha $\|B\| < 1$, akkor az $x = Bx + c$ egyenletrendszernek létezik egyetlen megoldása.*

Bizonyítás. A 2.2.2 egyszerű következménye. □

Nyilvánvaló, hogy minden $x = x - D(Ax - b)$ egyenletrendszer is $x = Bx + c$ alakú, továbbá ha $\det D \neq 0$, akkor az $Ax = b$ rendszerrel ekvivalens. Megfordítva, $x = Bx + c$ is felírható ilyen alakban, ahol $D = (I - B)A^{-1}$.

3.1.5. Lemma. *[3] A B mátrix összes λ_i sajátértéke legyen a $|\lambda| \leq q$ körben. Ekkor létezik olyan D invertálható mátrix, hogy a $\Lambda = D^{-1}BD$ mátrix normája $\|\Lambda\|_1 \leq q$.*

3.1.6. Tétel. *Az $x = Bx+c$ rendszernek pontosan akkor létezik egyetlen megoldása, ha a B mátrix összes sajátértékének abszolút értéke kisebb, mint 1.*

Bizonyítás. Elégségesség: legyen q olyan, amelyre $\max_i |\lambda_i| < q < 1$. A 3.1.5 lemma feltételei teljesülnek, ezért létezik olyan D mátrix, hogy $\|\Lambda\|_1 < q$. Ekkor

$$\Lambda = D^{-1}BD \Rightarrow \quad B = D\Lambda D^{-1} \Rightarrow \quad B^n = D\Lambda D^{-1}D \cdots D^{-1}D\Lambda D^{-1} = D\Lambda^n D^{-1}.$$

Ezért $n \to \infty$ esetén

$$\|B^n\|_1 \leq \|D\|_1 \cdot \left\|D^{-1}\right\|_1 q^n \to 0,$$

így

$$\|x_n - x^*\|_1 \leq \|D\|_1 \cdot \left\|D^{-1}\right\|_1 q^n \|x_0 - x^*\|_1 \to 0.$$

Szükségesség: Legyen $|\lambda_l| \geq 1$ és e_l a megfelelő sajátvektor. Ekkor a kezdeti közelítés $x_0 = x^* + ce_l$, amellyel az $r_0 = ce_l$ adódik, ahol $c \neq 0$, így

$$r_1 = x_1 - x^* = Bx_0 - x^* + c = \underbrace{Bx^*}_{x^*-c} + cBe_l - x^* + c = cBe_l = c\lambda_l e_l.$$

Tegyük fel, hogy $r_n = x_n - x^* = \lambda_l^n ce_l$. Ekkor

$$r_{n+1} = x_{n+1} - x^* = B^{n+1}x_0 - x^* + c = \underbrace{B^{n+1}x^*}_{x^*-c} + cB^{n+1}e_l - x^* + c = cB^{n+1}e_l = c\lambda_l^{n+1}e_l.$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \lambda_l^n ce_l \neq 0$, ezért a feltevés szükséges. □

Tekintsük az egyszerű iterációt az alábbi formában:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\omega} + Ax_n = b, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

továbbá tegyük fel, hogy az A mátrix szimmetrikus és szigorúan pozitív definit:

$$A = A^T > 0, \qquad 0 < m \leq \lambda(A) \leq M.$$

Ekkor az $Ax = b$ egyenletrendszernek létezik egyértelmű megoldása. Az iteráció eredeti formája:

$$x_{n+1} = Bx_n + c, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

ahol $B := I - \omega A$, $c := \omega b$. Ekkor az $(n+1)$-edik hiba normája:

$$\|r_{n+1}\| \leq q(\omega)\|r_n\| \leq \cdots \leq q^{n+1}(\omega)\|r_0\|$$

ahol

$$q(\omega) := \|B\| = \|I - \omega A\|.$$

3.1.7. Definíció. *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, a sajátértékei $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$. Spektrálsugárnak nevezzük az abszolútértékben legnagyobb sajátértéket.*

$$\varrho(A) := \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|.$$

3.1.8. Tétel. *Tegyük fel hogy A szimmetrikus, szigorúan pozitív definit mátrix. Ekkor az egyszerű iterációnak létezik egyértelműen meghatározott optimális iterációs paramétere:*

$$\omega_0 = \frac{2}{M+m}$$

és teljesül

$$q(\omega_0) \leq \frac{M-m}{M+m}.$$

Bizonyítás. A konvergenciához elegendő belátni, hogy $q < 1$, az állítás bizonyításához pedig ki kell számolnunk azt az ω_0 értéket, amelyre:

$$q(\omega_0) = \min_{\omega} q(\omega).$$

Tudjuk, hogy A és $I - \omega A$ szimmetrikusak, így

$$q(\omega) = \varrho(I - \omega A) = \max_{\lambda} |1 - \omega\lambda|.$$

A pozitív definitség következtében minden sajátérték pozitív. Így minden $\omega \leq 0$ esetén $g_\omega(\lambda) := 1 - \omega\lambda \geq 1$. A továbbiakban legyen $\omega > 0$. Ekkor $m \leq \lambda \leq M$ következtében:

$$1 > g_\omega(m) \geq g_\omega(\lambda) \geq g_\omega(M) = 1 - \omega M > -1,$$

ha $\omega < 2/M$. Ekkor

$$\max_\lambda |1 - \omega\lambda| \leq \max(|g_\omega(m)|, |g_\omega(M)|) = \max(|1 - \omega m|, |1 - \omega M|).$$

Ez akkor minimális, ha ω-t úgy választjuk, hogy $1 - \omega m = -(1 - \omega M)$. Átrendezve

$$\omega = \frac{2}{M + m}$$

adódik. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

3.2. Nemlineáris egyenletrendszerek

Amennyiben a folyamatra pontosabb modellt szeretnénk felállítani, akkor már nem lesz lineáris az egyenletrendszer. Legyen továbbra is $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, valamint $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, és megoldandó az $F(x) = b$ egyenletrendszer.

Mivel $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x))^T$, a nemlineáris egyenletrendszer a következő alakban írható:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) &= b_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) &= b_2 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) &= b_n. \end{aligned}$$

3.2.1. Tétel. *Legyen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, amely eleget tesz a következő feltételeknek:*

(i) $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $\forall u \in \mathbb{R}^n$ *esetén* $F'(u)$ *szimmetrikus;*

(iii) léteznek olyan $M \geq m > 0$ konstansok, amelyekre $\forall u, h \in \mathbb{R}^n$ esetén igaz a következő:

$$m \|h\|^2 \leq \langle F'(u)h, h \rangle \leq M \|h\|^2 .$$

Ekkor

1. *minden $g \in \mathbb{R}^n$ esetén az*

$$F(u) = g$$

egyenletnek létezik egyértelmű megoldása, $u^* \in \mathbb{R}^n$;

2. *minden $u_0 \in \mathbb{R}^n$ esetén az*

$$u_{k+1} := u_k - \frac{2}{M+m}(F(u_k) - g)$$

iteráció konvergál az u^*-hoz, éspedig

$$\|u_k - u^*\| \leq \frac{1}{m} \|F(u_0) - g\| \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^k .$$

Bizonyítás.

1. Feltéve, hogy (iii) fennáll

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle \geq m \|u - v\|^2 \qquad (u, v \in \mathbb{R}^n),$$

azaz F egyenletesen monoton függvény $\mathbb{R}^n$-n. Ezért $(i)-(ii)$ fennállása alapján az egyértelmű megoldhatóság igaz az egyenletre.

2. Legyen $r_k := F(u_k) - g$. Így

$$r_{k+1} - r_k = F(u_{k+1}) - F(u_k) = \int_0^1 F'(u_k + t(u_{k+1} - u_k))(u_{k+1} - u_k)dt.$$

A tételben szereplő sorozatra átírva

$$r_{k+1} = Ar_k := r_k - \frac{2}{M+m} \int_0^1 F'(u_k + t(u_{k+1} - u_k))r_k dt.$$

Megmutatjuk, hogy A kontrakció, és a konstans $\leq \frac{M-m}{M+m}$. Ugyanis az F'-ra vonatkozó feltevés alapján az $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés szimmetrikus, továbbá minden $r \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$-\frac{M-m}{M+m} \|r\|^2 \leq \langle Ar, r \rangle \leq \frac{M-m}{M+m} \|r\|^2 .$$

Innen $\|A\| \le \frac{M-m}{M+m}$, tehát A kontrakció. Ebből

$$\|r_k\| \le \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^k \|r_0\| .$$

Végül,

$$\|r_k\| \cdot \|u_k - u^*\| \ge \langle r_k, u_k - u^* \rangle \ge m \|u_k - u^*\|^2 ,$$

ezért

$$\|u_k - u^*\| \le \frac{1}{m} \|r_k\| \le \frac{1}{m} \|r_0\| \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^k . \qquad \square$$

4. Integrálegyenletek

Tekintsük a következő modellt, az úgynevezett Love-integrálegyenletet:

$$((I-K)u)(t) \equiv u(t) - \frac{d}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{u(s)}{d^2+(t-s)^2}ds = 1 \equiv g(t), \quad -1 \le t \le 1,$$

amely leírja az elektromos mezőt két párhuzamos koaxiális pozitív töltésű lemez között, melyek egymástól vett távolsága $d > 0$. Az első szakaszban meghatározzuk az általános alakban felírt integrálegyenletre vonatkozó iterációt, és annak feltételét, hogy mikor lesz kontrakció. A második szakaszban pedig megoldjuk a fenti modellt.

4.1. Fredholm-integrálegyenlet

Tekintsük a lineáris Fredholm-integrálegyenletet:

$$x(t) = \mu \int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad \forall t \in [a,b],$$

ahol $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{K}$ ún. magfüggvény, és $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ folytonosak. Az iterációs eljárás pedig legyen:

$$x_{n+1}(t) = \mu \int_a^b K(t,s)x_n(s)ds + f(t), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Legyen $X = C([a,b], \mathbb{K})$, ahol $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$, vagyis az $x : [a,b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvények tere az $\|x\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|$ maximum-normával.

4.1.1. Tétel. *Legyenek adottak az $a < b$ pontok, valamint K és f a fentiek szerint, továbbá legyen $c = \max_{a \le t,s \le b} |K(t,s)|$. Ekkor a fenti integrálegyenletnek létezik egyértelmű megoldása minden olyan $\mu \in \mathbb{K}$ esetén, amelyre:*

$$(b-a)\,|\mu|\,c < 1,$$

és x_n ehhez konvergál minden $x_0 \in X$ kezdőérték mellett. A norma definíciójából következik, hogy ez a konvergencia egyenletes $[a,b]$-n.

Bizonyítás. Tekintsük az egyenletet $x = Ax + f$ formában, ahol

$$(Ax)(t) = \mu \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \quad \forall t \in [a,b].$$

Mivel K folytonos, ezért Ax is folytonos, így A lineáris leképezés X-ről önmagára. Továbbá

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|$$

és

$$\|Ax\| = \max_{a \le t \le b} \left| \mu \int_a^b K(t,s)x(s)ds \right| \le |\mu|\,(b-a)c\,\|x\|.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < |\mu|\,(b-a)c \quad \forall x \in X$$

$$\|A\| = \sup\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \ne 0 \right\} \le |\mu|\,(b-a)c < 1.$$

Mivel az $\|A\| < 1$ feltétel teljesül, ezért 2.2.2 következmény értelmében létezik egyértelmű megoldás. Mivel $F(x) := Ax + f$ kontrakció, így $x_n \to x^*$ maximum-normában. □

4.2. Feladat: Love-integrálegyenlet

Határozzuk meg a d paraméter azon lehetséges értékeit, amelyek elégséges feltételt adnak a Love-integrálegyenlet megoldhatóságához.

$$((I-K)u)(t) \equiv u(t) - \frac{d}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{u(s)}{d^2 + (t-s)^2} ds = 1 \equiv g(t), \quad -1 \le t \le 1$$

Rendezzük át az egyenletet úgy, hogy leolvashassuk az általános képlet szerinti K és f függvényeket:

$$u(t) = \frac{d}{\pi}\int_{-1}^{+1} \underbrace{\frac{1}{d^2 + (t-s)^2}}_{K(t,s)} \cdot u(s)ds + \underbrace{g(t)}_{\equiv 1}$$

A 4.1.1 tétel értelmében akkor létezik egyértelmű megoldás, ha

$$(b-a)\,|\mu|\,c < 1, \text{ ahol} \qquad c = \max_{a \le t,s \le b} |K(t,s)|.$$

A feladat értékeinek a beírásával azt kapjuk, hogy

$$2\frac{d}{\pi}\max_{-1\le t,s\le 1}\frac{1}{d^2+(t-s)^2}<1.$$

Számoljuk ki ezt a maximumot. Úgy tudunk maximalizálni, ha a nevezőt minimalizáljuk:

$$\max_{-1\le t,s\le 1}\frac{1}{d^2+(t-s)^2}\quad\Leftrightarrow\quad\min_{-1\le t,s\le 1}\big(d^2+(t-s)^2\big).$$

Ez akkor lesz minimális, ha $(t-s)^2=0$. Innen

$$c=\frac{1}{d^2},\Rightarrow\quad\frac{2d}{\pi d^2}<1\quad\Rightarrow\quad d>\frac{2}{\pi}.$$

Azt kaptuk, hogy a fenti d értékek esetén létezik egyértelmű megoldása a feladatnak.

5. Közönséges differenciálegyenletek

A differenciálegyenletek elmélete igen érdekes és fontos terület a matematikában. Segítségével modellezhetjük például a természet-, a műszaki és a társadalomtudományok azon területeit, ahol folytonos idejű, folytonos állapotterű, determinisztikus folyamatok vizsgálata a cél. Ezek közül a térben homogén folyamatok vizsgálatára szolgálnak a közönséges differenciálegyenletek.

Ilyen modellre példa a radioaktív bomlás egyik modellje. Legyen a radioaktív anyag mennyisége a $t \in \mathbb{R}^+$ időpontban $x(t) \in \mathbb{R}$. Azt vizsgáljuk, hogy hogyan változik ez a mennyiség a $[t, t+\delta]$ intervallumban, ahol δ rövid időtartam. Az anyag mennyisége δ idő elteltével olyan mértékben csökken, amely mindentől lineárisan függ, vagyis egyenesen arányos az anyag aktuális mennyiségével és az eltelt idővel:

$$x(t+\delta) = x(t) - kx(t)\delta + \varepsilon(\delta)\delta,$$

ahol $k \in \mathbb{R}^+$ az arányossági tényező, valamint a lineáris csökkenésen túlmenően az intervallum hosszához képes csak kicsi a változás: $\lim_0 \varepsilon = 0$. Az egyenletet átrendezve

$$\frac{x(t+\delta) - x(t)}{\delta} = -kx(t) + \varepsilon(\delta).$$

Ha $\delta \to 0$, akkor a jobboldalnak létezik határértéke, vagyis az értelmezési tartomány minden pontjában differenciálható. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\dot{x}(t) = -kx(t) \qquad (t \in \mathbb{R}^+).$$

5.1. A kezdetiérték-feladat

5.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a sík valamely tartományán iránymező van megadva, ha minden pontjában ki van választva egy, a ponton átmenő egyenes.*

5.1.2. Definíció. *Azt a vonalat, amely minden pontjában érinti az iránymezőt, az iránymező integrálgörbéjének nevezzük.*

Az integrálgörbék megkeresésének analitikus oldalról a differenciálegyenletek megoldásainak megkeresése felel meg. Amennyiben feltesszük, hogy a (t, x) síkon értelmezett mező nem tartalmaz függőleges irányokat, akkor a (t, x) pontban húzott egyenes $v(t, x)$ iránytangense véges, és az integrálgörbék az $x = \varphi(t)$ függvény grafikonjai.

A továbbiakban tegyük fel, hogy a φ értelmezési tartománya a t tengely I intervalluma. Ekkor triviális a következő:

5.1.3. Tétel. *A φ differenciálható függvény grafikonja akkor és csak akkor integrálgörbe, ha minden $t \in I$-re teljesül az alábbi összefüggés:*

$$\dot{\varphi}(t) = v(t, \varphi(t)).$$

5.1.4. Definíció. *Legyen $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ahol $v \in C^1(U)$, ekkor a*

$$\dot{x} = v(t, x)$$

egyenletet a v iránymező által meghatározott differenciálegyenletnek nevezzük.

5.1.5. Definíció. *A φ függvényt az*

$$\dot{x}(t) = v(t, x(t))$$

differenciálegyenlet megoldásának nevezzük, ha létezik olyan $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, amelyen $\varphi \in C^1(I)$, és kielégíti a 5.1.3 tételben meghatározott összefüggést.
A φ megoldás kielégíti a $(t_0, x_0) \in U$ kezdeti feltételt, ha $\varphi(t_0) = x_0$.

Tekintsük a $\dot{x} = v(t, x)$ differenciálegyenletet, amelyet a bővített fázistér $(\mathbb{R}^{n+1})$ valamely I tartományán értelmezett v iránymező ad meg. Fogalmazzuk át integrálegyenletté.

5.1.6. Állítás. *Legyen $x : I \to \mathbb{R}, \quad t_0 \in I$. Ekkor*

$$x \in C^1(I), \quad \begin{matrix} \dot{x}(t) = v(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad x \in C(I), \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Bizonyítás.

$\Rightarrow$ Ha a differenciálegyenletre alkalmazzuk a Newton-Leibniz-tételt t_0 és t között, akkor az integrálegyenlet adódik.

$\Leftarrow$ Ha az integrálegyenlet mindkét oldalát deriváljuk, akkor a differenciálegyenletet kapjuk vissza. $\square$

5.1.7. Definíció. *Azt a P leképezést, amely a $\varphi : t \to x$ függvényt az $P\varphi : t \to x$ függvénybe viszi át, ahol*

$$(P\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau, \varphi(\tau))d\tau,$$

Picard-leképezésnek nevezzük.

Célunk szerkeszteni egy olyan M teljes metrikus teret, amin P kontrakció, és fixpontja az adott integrálegyenlet megoldását határozza meg. A szerkesztést egy pont kis környezetében végzünk. Ezt a környezetet a következő négy mennyiség segítségével írhatjuk le: C, L, a', b'. Ezeket menet közben definiáljuk.

Tekintsünk egy tetszőleges $(t_0, x_0) \in U$ pontot. A

$$H = \{t, x : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

henger az U tartományhoz tartozik, ha a és b megfelelően kicsi. Jelölje $\partial_x v$ a v x szerinti deriváltját rögzített t mellett. Mivel H kompakt, $|v|$ és $|\partial_x v|$ is eléri felső határát a hengeren. Jelölje ezeket C és L, ekkor

$$|v| \leq C, \qquad |\partial_x v| \leq L.$$

Legyen K_0 az a kúp, amelynek csúcsa a (t_0, x_0) pont, a félnyílásszög tangense C, és a magassága a':

$$K_0 = \{t, x : |t - t_0| \leq a', |x - x_0| \leq C\,|t - t_0|\}\,.$$

Ha a' elég kicsi, akkor $K_0 \subset H$. Jelölje K_x azt a kúpot, amely a K_0-ból a csúcs (t_0, x) pontba történő párhuzamos eltolásával keletkezik. Ha a' és b' elég kicsi, akkor $\forall K_x \subset H$ minden olyan x-re, ahol $|x - x_0| \leq b'$.

Feltesszük, hogy a' és b' megfelelően kicsi, így $K_x \subset H$. Az $\dot{x} = v(t, x)$ egyenletnek $\varphi(t_0) = x_0$ kezdeti feltétel melletti $\varphi : (t_0 - a', t_0 + a') \to \mathbb{R}$ megoldását keressük.

5.1.8. Megjegyzés. *A keresett integrálgörbe a K_x kúp belsejében fekszik.*

Jelölje M az a' által meghatározott intervallum azon φ folytonos leképezéseit, amelyek kielégítik a következő feltételt is:

$$|\varphi(t)| \leq C\,|t - t_0|$$

Vezessük be M-en a következő metrikát:

$$\varrho(\varphi_1, \varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\| = \max_{|t-t_0| \leq a'} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\,.$$

5.1.9. Tétel. *A ϱ metrikájú M halmaz teljes metrikus tér.*

Bizonyítás. Folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának határértéke is folytonos függvény. Amennyiben a függvénysorozat elemei kielégítik a fenti feltételt, akkor a határértékfüggvény is kielégíti ugyanazzal a C állandóval. $\square$

Legyen $f : U \to \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^m$ euklideszi tér U tartományának folytonosan differenciálható leképezése az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térbe. Ekkor f-nek az $x \in U$ pontban vett deriváltja az egyik euklideszi térből egy másikba ható lineáris operátor.

5.1.10. Tétel. *Az U tartomány bármely konvex és kompakt V részhalmazán folytonosan differenciálható f függvény kielégíti az L-állandós Lipschitz-feltételt, ahol L egyenlő az f derivált normájának V-n vett felső határával:*

$$L = \sup_{x \in V} \|f'\|.$$

Bizonyítás. Legyen $x, y \in V$. Kössük össze az x és y pontokat a

$$z(t) = x + t(x - y), \quad 0 \leq t \leq 1$$

szakasszal. A Newton-Leibniz-képlet szerint:

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(z(\tau)))d\tau = \int_0^1 f'(z(\tau))\dot{z}(\tau)d\tau.$$

Figyelembe véve, hogy $\dot{z} = y - x$:

$$\left| \int_0^1 f'(z(\tau))\dot{z}(\tau)d\tau \right| \leq \int_0^1 L\left|y - x\right| d\tau = L\left|y - x\right|.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

5.1.11. Tétel. *Ha a' megfelelően kicsi, akkor a P leképezés kontrakció M-en.*

Bizonyítás.

1. Megmutatjuk, hogy a P leképezés M-et önmagára képzi. Felhasználva, hogy $|v| \leq C$, a következőt kapjuk:

   $$|(P\varphi)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t v(\tau, \varphi(\tau))d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t C \quad dt \right| \leq C\left|t - t_0\right|.$$

   Tehát $PM \subset M$.

2. Megmutatjuk, hogy a P leképezés kontrakció:

   $$\|P\varphi_1 - P\varphi_2\| \leq \lambda \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \quad 0 < \lambda < 1.$$

   Becsüljük meg az $P\varphi_1 - P\varphi_2$ értékét az t pontban. Tudjuk, hogy

   $$(P\varphi_1 - P\varphi_2)(t) = \int_{t_0}^t (v_1(\tau) - v_2(\tau))d\tau,$$

   ahol $v_i(\tau) = v(\tau, \varphi_i(\tau))$, $i = 1, 2$.

   A 5.1.10 tétel értelmében, rögzített τ-ra a $v(\tau, x)$ függvény második változója szerint kielégíti az L-állandós Lipschitz-feltételt. Ezért

   $$|v_1(\tau) - v_2(\tau)| \leq L\left|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)\right| \leq L\|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

   Ezt az eredményt felhasználva:

   $$|(P\varphi_1 - P\varphi_2)(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t L\|\varphi_1 - \varphi_2\| d\tau \right| \leq La'\|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

   Azt kaptuk, hogy ha $La' < 1$, akkor a leképezés kontrakció. $\square$

5.1.12. Tétel. *A P leképezésnek létezik egyetlen fixpontja, és ez a fixpont az*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladat egyértelmű megoldása.

Bizonyítás. Beláttuk, hogy P kontrakció, így 2.2.1 tétel szerint létezik fixpontja, vagyis olyan $\varphi(t)$ függvény, hogy

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau, \varphi(\tau)) d\tau.$$

Innen a 5.1.6 állításból már következik a tétel állítása. □

5.2. Alkalmazás: visszavezetés nemlineáris rendszerre

Tekintsük a $\dot{x}(t) = f(x(t))$ differenciálegyenlet esetén az

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\tau} + f(x_i) = 0$$

ún. implicit Euler-módszert.

Legyen $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ és

$$f(x) = v'(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ekkor $f'(x)$ szimmetrikus minden x esetén. Ekkor az iteráció a következő alakban írható fel:

$$F(x_i) := x_i + \tau f(x_i) = x_{i-1}. \tag{5.1}$$

Célunk az i-edik lépésben (5.1) megoldása.

5.2.1. Állítás. *Legyen f' korlátos és τ kellően kicsi. Ekkor $F \in C^1$, F' szimmetrikus, és igaz a*

$$m \|h\|^2 \le \langle F'(x)h, h \rangle \le M \|h\|^2 \tag{5.2}$$

becslés, ahol $m = 1 - \tau \|f'(x)\|$ és $M = 1 + \tau \|f'(x)\|$.

Bizonyítás. Tekintsük a deriváltat:

$$F'(x)h = h + \tau f'(x)h.$$

Ekkor

$$\langle F'(x)h, h\rangle = \|h\|^2 + \tau \langle f'(x)h, h\rangle \geq (1 - \tau \|f'(x)\|) \|h\|^2 .$$

Legyen $0 < m := 1 - \tau \|f'(x)\|$, ha $\tau < \frac{1}{\|f'(x)\|}$.

A felső korlát megtalálásához is hasonlóan járhatunk el:

$$\langle F'(x)h, h\rangle = \|h\|^2 + \tau \langle f'(x)h, h\rangle \leq (1 + \tau \|f'(x)\|) \|h\|^2 .$$

Legyen $0 < M := 1 + \tau \|f'(x)\|$. $\square$

5.2.2. Következmény. *Ha $F \in C^1$. F' szimmetrikus, és eleget tesz (5.2)-nek, akkor (5.1)-nek létezik egyértelmű megoldása, és minden x esetén a 3.2 szakaszbeli iteráció konvergál a megoldáshoz.*

Bizonyítás. Az állítás következik a 3.2.1 tételből. $\square$

6. Parciális differenciálegyenletek

A dolgozat terjedelmére való tekintettel csak az eliptikus tipusú parciális differenciálegyenletekkel foglalkozunk. Ilyen egyenletek leggyakrabban fizikai jelenségek matematikai modelljeiben fordulnak elő, ha eltekintünk az időtől. Például a hővezetési egyenlet:

$$c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = div(k \cdot gradu) + f(x),$$

ahol c a fajhő, ϱ a hővezető közeg sűrűsége, k a hővezetési tényező, f pedig a hőforrás sűrűsége. Ha u nem függ az időtől, akkor az egyenlet a következő alakra egyszerűsödik:

$$0 = div(k \cdot gradu) + f(x).$$

Az iteráció kidolgozásához szükségünk lesz az úgynevezett Green-féle függvényre.

6.1. Poisson-egyenlet és Green-féle függvény

A hővezetési egyenleteknek azt a speciális esetét, amikor a közeg homogenitása miatt k konstans, Poisson-egyenletnek nevezzük. Ebben az esetben a képletünk is tovább egyszerűsödik:

$$\Delta u + f(x) = 0.$$

6.1.1. Definíció. *Tekintsük az $\Omega \in \mathbb{R}^n$ tartományt. Legyen $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, és $u \in C^1(\Omega)$, ekkor az u függvény gradiense:*

$$grad(u) = \nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u).$$

Legyen $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, ekkor az u függvény divergenciája:

$$div(u) = \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{n} \partial_i u_i.$$

Legyen $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega)$, ekkor az u függvény Laplace-operátora:

$$\Delta u = div(grad(u)) = \nabla \cdot \nabla u.$$

Tekintsük az alábbi feladatot:

$$\Delta E(x) = 0, \qquad \forall x \neq 0$$

ahol E radiálisan szimmetrikus. A feladat alapmegoldása:

$$E(x) := \begin{cases} \frac{1}{4\pi|x|}, & x \in \mathbb{R}^3 \\ \frac{1}{2\pi \ln|x|}, & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

6.1.2. Definíció. *Jelölje $R(x,y)$ a fenti feladat megoldását az $x - y$ helyen:*

$$R(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{4\pi|x-y|}, & x,y \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq y \\ \frac{1}{2\pi \ln|x-y|}, & x,y \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y. \end{cases}$$

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány $\partial\Omega$ peremfelülettel, és tekintsük tetszőleges $x \in \Omega$ esetén az alábbi Dirichlet-féle feladatot a $v = v(y) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényre.

$$\begin{aligned} &\Delta v = 0 \\ &v|_{\partial\Omega} = R(x,y). \end{aligned}$$

Feltesszük, hogy $\forall x \in \Omega$ pont esetén létezik megoldása a feladatnak. Jelölje ezt

$$v(y) = r(x,y).$$

Eszerint az $r(x,y)$ függvény eleget tesz a következőknek: minden rögzített $x \in \Omega$ pontra, mint y függvénye $r(x,y) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, továbbá

$$\begin{aligned} &\Delta_y r(x,y) = 0 \\ &r(x,y)|_{y \in \partial\Omega} = R(x,y). \end{aligned} \tag{6.1}$$

6.1.3. Definíció. *Az Ω tartományhoz tartozó Green-féle függvénynek nevezzük a*

$$G(x,y) = R(x,y) - r(x,y)$$

egyértelműen meghatározott függvényt.

6.1.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy Ω-nak létezik Green-féle függvénye. Ekkor minden rögzített $x \in \Omega$ esetén igazak az alábbiak:*

$$\Delta G(x,y) = 0, \qquad y \in \Omega \setminus \{x\}\,; \tag{6.2}$$

$$G(x,y) = 0, \qquad y \in \partial\Omega; \tag{6.3}$$

$$G(x,y) > 0, \qquad x,y \in \Omega. \tag{6.4}$$

Bizonyítás. (6.2) és (6.3) közvetlenül adódik (6.1)-ből. A (6.4) egyenlőtlenséget pedig könnyen igazolhatjuk a minimum-elv felhasználásával. Rögzített $x \in C(\overline{\Omega})$ esetén $r(x,y)$ korlátos:

$$|r(x,y)| < k, \quad y \in \Omega.$$

Legyen $a > 0$ olyan szám, amelyre

$$R(x,y) > k, \quad y \in \partial B(x;a) \subset \Omega,$$

ahol $B(x;a)$ az x középpontú a sugarú gömböt jelöli. Alkalmazzuk a minimum-elvet az $\Omega \setminus \overline{B(x;a)}$ tartományon a $G(x,y)$ függvényre. A tartomány határán, azaz $\partial\Omega \cup \partial B(x;a)$-n

$$\begin{aligned} &G(x,y)|_{y\in\partial\Omega} = 0 \\ &G(x,y)|_{y\in\partial B(x;a)} = R(x,y) - r(x,y) > 0. \end{aligned}$$

Ekkor $G(x,y)$ a tartomány belsejében pozitív és nem veheti fel a minimumát, mivel nem állandó. □

6.1.5. Állítás. *[7] Legyen $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $\int_\Omega |\Delta u| < \infty$, továbbá $\omega \in C^2(\Omega)$, $\Delta\omega \in L_1(\Omega)$, ahol ω mint y függvénye értendő minden rögzített $x \in \Omega$ esetén. Ekkor az $F(x,y) = R(x,y) - \omega(x,y)$ jelölést használva minden $x \in \Omega$ pontra*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left[F\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial F}{\partial \nu_y} \right] dy - \int_\Omega [F\Delta u - u\Delta_y F]\, dy.$$

6.1.6. Tétel. *Legyen $\partial\Omega$ szakaszonként folytonosan differenciálható. Tegyük fel, hogy Ω-nak létezik Green-féle függvénye, amelyre $r(x,y) \in C^1(\overline{\Omega})$ minden rögzített $x \in \Omega$ esetén, továbbá legyen $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ a*

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \\ u|_{\partial\Omega} &= g \end{aligned}$$

Dirichlet-feladat megoldása, ahol $\int_\Omega |f| < \infty$. Ekkor minden $x \in \Omega$ pont esetén

$$u(x) = -\int_\Omega G(x,y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} g(y) dy.$$

Bizonyítás. Az 6.1.5 állításban szereplő összefüggést u-ra és $\omega(x,y) = r(x,y)$-ra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left[G\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial G}{\partial \nu_y} \right] dy - \int_{\Omega} [G\Delta u - u\Delta_y G]\, dy.$$

A feltételek és a 6.1.4 tétel szerint

$$\Delta u = f, \quad \Delta G = 0, \quad G = 0 \quad (y \in \partial\Omega), \quad u = g \quad (\partial\Omega),$$

tehát azt kaptuk, hogy

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial G}{\partial \nu_y} dy - \int_{\Omega} Gf(y)dy.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

Tekintsük a Poisson-egyenletre vonatkozó peremérték-feladatot, ahol u a peremen homogén:

$$-\Delta u = f$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

A 6.1.6 tétel állítása szerint a megoldást a következő integrál határozza meg:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)f(y)dy.$$

Példa. Vékony rudak csavarodása is jellemezhető Poisson-egyenlettel:

$$-\Delta\Phi = 1$$
$$\Phi|_{\partial\Omega} = 0,$$

ahol Ω a rúd keresztmetszete. A Φ segédfüggvényből az (u_1, u_2, u_3) eltolódások vektorát kapjuk meg, feltéve, hogy τ, az egységhosszra vonatkozó csavarási szög, a rúd hosszának irányában konstans.

6.2. Nemlineáris elliptikus feladat

Tekintsük a Poisson-egyenlet egy általánosítását, ahol f helyett $f(u)$ szerepel:

$$-\Delta u = f(u)$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Ekkor a megoldás az

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(u(y)) dy$$

integrálegyenletet teljesíti, amiből már felírhatjuk az iterációs eljárásunkat:

$$u_{n+1}(x) = \int_\Omega G(x,y) f(u_n(y)) dy := (Au_n)(x)$$

6.2.1. Állítás. *Tekintsük a $C(\overline{\Omega})$ normált teret az $\|f\| := \max_{\overline{\Omega}} |f|$ normával. Ha f Lipschitzes és $L < \frac{1}{\|z\|}$, ahol $z(x)$ a*

$$\begin{aligned} -\Delta z &= 1 \\ z|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

feladat megoldása, akkor A kontrakcó a $0 < q < 1$ kontrakciós konstanssal.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy létezik ilyen q.

$$|(Au)(x) - (Av)(x)| = \left| \int_\Omega G(x,y) f(u(y)) dy - \int_\Omega G(x,y) f(v(y)) dy \right| =$$

$$= \left| \int_\Omega G(x,y) \left(f(u(y)) - f(v(y)) \right) dy \right| \leq$$

$$\leq \int_\Omega |G(x,y)| \cdot |f(u(y)) - f(v(y))| \, dy \leq$$

$$\leq \int_\Omega \underbrace{G(x,y)}_{>0} \cdot L \cdot |u(y) - v(y)| \, dy \leq$$

$$\leq \int_\Omega G(x,y) \cdot L \cdot \max_y |u(y) - v(y)| \, dy \leq$$

$$\leq \int_\Omega G(x,y) dy \cdot L \cdot \|u - v\| .$$

Az állításban szereplő segédfeladat megoldása éppen a

$$z(x) = \int_\Omega G(x,y) \cdot 1 dy.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\|(Au)(x) - (Av)(x)\| \leq \|z\| \cdot L \cdot \|u - v\| .$$

Innen már látható, hogy ha

$$q := L \cdot \|z\| < 1.$$

akkor az $(Au)(x)$ leképezés kontrakció. □

6.2.2. Következmény. *Az* $u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(u(y))dy$ *egyenletnek létezik egyértelmű megoldása, ha* $L < \frac{1}{\|z\|}$.

Bizonyítás. A fenti egyenlet $u = Au$ alakú, tehát a 2.2.1 tételből következik az állítás. □

6.2.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

feladatnak létezik klasszikus megoldása, ha van olyan $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *függvény, ami kielégíti a peremértékfeldatot.*

6.2.4. Tétel. *Legyen* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *Lipschitz-folytonos tartomány és* f Ω*-n definiált. Ha* f *Lipschitzes és* $L < \frac{1}{\|z\|}$*, ahol* z *a 6.2.1 állításbeli függvény, akkor a*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Poisson-egyenletnek létezik klasszikus megoldása.

Bizonyítás. Alkalmazzuk $-\Delta$-t a $u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(u(y))dy$-ra. Ebből azt kapjuk, hogy

$$-\Delta u(x) = -\Delta \int_\Omega G(x,y)f(u(y))dy = f(u(x)).$$

Ezzel a tételt beláttuk. □

6.3. Egy további alkalmazás: visszavezetés lineáris egyenletrendszerre

Tekintsük a következő feladatot:

$$
\begin{aligned}
&Lu := -div(A\nabla u) = g \\
&u|_{\partial\Omega} = 0,
\end{aligned}
$$

ahol $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ szimmetrikus és szigorúan pozitív definit mátrix.

6.3.1. Definíció. *Legyen S lineáris szimmetrikus operátor H-n. Egy $L \in H$ lineáris operátort S-korlátosnak és S-koercívnek nevezünk, és $L \in BC_S(H)$-val jelölünk, ha igazak a következő tulajdonságok:*

(i) $D(L) \subset H_S$ és $D(L)$ sűrű H_S-ben az S-normával;

(ii) létezik $M > 0$, amelyre $u, v \in D(L)$ esetén

$$|\langle Lu, v\rangle| \leq M \|u\|_S \|v\|_S ;$$

(iii) létezik $m < 0$, amelyre $u \in D(L)$ esetén

$$\langle Lu, u\rangle \geq m \|u\|_S^2 .$$

6.3.2. Definíció. *Bármely $L \in BC_S(H)$-re legyen $L_S \in B(H_S)$ a következő módon definiálva:*

$$\langle L_S u, v\rangle_S = \langle Lu, v\rangle \qquad (u, v \in D(L)).$$

A feladatban L S-korlátos és S-koercív a 6.3.1 definícióban foglaltaknak megfelelően, ha $S = -\Delta$ és $g \in H$. Ekkor az $Lu = g$ egyenlet numerikusan megoldható a Galerkin-diszkretizáció segítségével: legyen

$$V_h = span\{\varphi_1, \ldots \varphi_n\} \subset H_S$$

véges dimenziós altér, ahol a φ_i-k lineárisan függetlenek és

$$L_h := \left\{\langle L_S \varphi_i, \varphi_j\rangle_S\right\}_{i,j=1}^n .$$

Az $u_h \in V_h$ diszkrét megoldás $u = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$ formában való megtalálásához az

$$L_h c = b_h \tag{6.5}$$

$n \times n$-es rendszer megoldása szükséges, ahol $b_h = \{\langle g, \varphi_j\rangle\}_{j=1}^{n}$. Mivel $L \in BC_S(H)$, az L_h szimmetrikus része pozitív definit, így a rendszernek létezik egyértelmű megoldása.

Legyen L szimmetrikus operátor. Ebben az esetben az S-korlátos és S-koercív tulajdonság egyszerűen átalakul a következő spektrális ekvivalenciarelációvá:

$$m\,\|u\|_S^2 \le \langle L_S u, u\rangle_S \le M\,\|u\|_S^2 \qquad (u \in H_S). \tag{6.6}$$

Ekkor L_h is szimmetrikus.

Legyen S a $-\Delta$ operátor, és vezessük be az S merevségi mátrixát:

$$S_h := \left\{\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle_S\right\}_{i,j=1}^{n},$$

mint a (6.5) rendszer prekondicionálóját. Innen a prekondicionált rendszer:

$$S_h^{-1} L_h c = S_h^{-1} b_h.$$

Tetszőleges $c \in \mathbb{R}^n$ esetén helyettesítsük az $u = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i \in V_h$ függvényt (6.6)-ba:

$$m(S_h c \cdot c) \le L_h c \cdot c \le M(S_h c \cdot c). \tag{6.7}$$

6.3.3. Állítás. *Ha (6.7) fennáll, akkor* $\forall \lambda_i(S_h^{-1}L_h) \in [m, M]$.

Bizonyítás. λ_i akkor sajátértéke a $S_h^{-1}L_h$ mátrixnak, ha

$$\exists c_i \neq 0 : \quad S_h^{-1} L_h c_i = \lambda_i c_i.$$

Szorozzuk be az egyenletet balról S_h-val:

$$L_h c_i = \lambda_i S_h c_i.$$

Végül szorozzuk az egyenletet jobbról c_i-vel:

$$L_h c_i \cdot c_i = \lambda_i S_h c_i \cdot c_i. \tag{6.8}$$

Tudjuk, hogy (6.7) igaz tetszőleges $c \in \mathbb{R}^n$ esetén, így c_i-re is, ezért (6.8)-at behelyettesítve (6.7)-be

$$m(S_h c_i \cdot c_i) \le \lambda_i (S_h c_i \cdot c_i) \le M(S_h c_i \cdot c_i)$$

adódik. Innen már jól látszik, hogy

$$m \le \lambda_i \le M \qquad \forall i.$$

Ezzel beláttuk, hogy $\forall \lambda_i(S_h^{-1} L_h) \in [m, M]$. □

6.3.4. Következmény. *A 3.1.8 tétel alkalmazható.*

7. Összefoglalás

Dolgozatomban bemutattam a Banach-fixponttételt, és különféle feladattípusokra való alkalmazhatóságát igazoltam a szakirodalom alapján. Először a metrikus terek felépítését és tulajdonságait vizsgáltam. Beláttam, hogy minden kontrakciónak létezik fixpontja, ami egyértelmű az ilyen típusú terekben.

A lineáris algebrai egyenletrendszereknél azt az esetet vizsgáltam, amikor A négyzetes mátrix. Ekkor az $Ax = b$ egyenletrendszer átírható $x = Bx + c$ alakra. Beláttam, hogy pontosan akkor létezik egyértelmű megoldás, ha B minden sajátértéke abszolút értékben kisebb, mint egy. Ezenkívül vizsgáltam egy speciális esetet is, amikor A szimmetrikus.

Nemlineáris egyenletrendszereknél bebizonyítottam, hogy ha $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, F folytonosan differenciálható, F' szimmetrikus és egyenletesen pozitív definit, akkor létezik egyértelmű megoldása az egyenletrendszernek, és iterációval meghatározható.

Sikerült belátni annak feltételét, hogy az iterációban használt leképezés kontrakció legyen a Fredholm-integrálegyenlet esetében. Ezután az eredményt felhasználva megoldottam a Love-integrálegyenletet.

A közönséges differenciálegyenletek témaköréből kezdetiérték-feladatok megoldhatóságának Picard-féle alaptételével foglalkoztam. A kezdetiérték-feladat visszavezethető integrálegyenlet megoldására. Ehhez szerkesztünk az x_0 pont egy környezetében egy M metrikus teret, valamint egy M-en értelmezett kontrakciót, és ezek segítségével visszavezetjük a feladatot a fixponttételre. Emellett bemutattam egy numerikus megoldási módszert az Euler-módszer és a fixponttétel ötvözésével.

A Poisson-egyenletetet választottam ki a parciális differenciálegyenletek közül, melynek megoldására használható a Green-függvény módszere. A fixponttétel segítségével készítettem iterációs eljárást, amely az integrálegyenletek témakörére vezethető vissza. Itt is sikerült egy érdekes alkalmazást szemléltetnem, melynek lényege, hogy lineáris rendszerre vezeti vissza a nemlineáris problémát.

Hivatkozások

[1] Arnold, V.I., Közönséges differenciálegyenletek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[2] Axelsson, O., Karátson J., Equivalent operator preconditioning for elliptic problems, Numer Algor, 2009, 50:297-380.

[3] Bahvalov, N.Sz., A gépi matematika numerikus módszerei, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977.

[4] Cryer, C. W., Numerical functional analysis, Oxford University Press, New York, 1982.

[5] Karátson J., Direct gradient method for nonlinear integral equations, Periodica Mathematica Hungarica Vol. 33 (3), 1996, pp. 163-173.

[6] Komornik V., Valós analízis előadások I., Typotex Kiadó, Budapest, 2003.

[7] Simon L., Parciális differenciálegyenletek 2. félév, Tankönykönyvkiadó, Budapest, 1980.

[8] Stoyan G., Takó G., Numerikus módszerek 1., Typotex Kiadó, Budapest, 2002.

[9] Stoyan G., Takó G., Numerikus módszerek 3., Typotex Kiadó, Budapest, 2005.

[10] Tóth J., Simon L. P., Differenciálegyenletek : Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba, Typotex Kiadó, Budapest, 2005.

[11] Zeidler, E., Nonlinear functional analysis and its applications I., Springer, New York, 1985.