Fejezetek az algebra történetéből

Az algebra alaptétele

Szakdolgozat

Készítette:

Kecskés Regina

Matematika BSc

Elemző szakirány

Témavezető:

Ágoston István

egyetemi docens

Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest

2010

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

"A természet nagy könyvében csak az tud olvasni,
aki ismeri azt a nyelvet, amelyen e könyv írva van,
és az a nyelv: a matematika."
Galileo Galilei

A tanulmányaim során az algebra tárgya volt számomra a legérdekesebb, így hát ezt a témakört választottam alapul a szakdolgozatomhoz. Utánanéztem történelmi múltjának és annak, hogyan fejlődött tovább az évek során, illetve különböző földrajzi területeken. A téma feldolgozása közben nagyon sok új információra, tudásra tettem szert. Az algebra témakörén belül az algebra alaptételének bizonyítására fektetek nagyobb hangsúlyt.

A dolgozat elején áttekintem az Európán kívüli területeket, hogy hogyan jelenik meg az algebra iránti érdeklődés, hogyan fejlődik tovább az évszádok során. Figyelemmel kísérhetjük egyes fogalmak, szimbólumok és jelölések kialakulását.

A második szakaszban az Európán belüli fejlődést mutatom be, de már időre lebontva, hiszen egyre jobban felgyorsul a matematika iránti érdeklődés és annak továbbfejlesztésére való igény. Az első két szakaszban kiemelek néhány híres matematikust, akiknek röviden össze is foglalom az életét.

A harmadik szakaszban különböző megközelítésű bizonyításokat mutatok az algebra legfontosabb tételére, az alaptételre.

A munkámhoz kapcsolódó irodalom elsősorban Fine-Rosenberger, Sain Márton és Kiss Emil könyveinek feldolgozásán, illetve egyéb internetes forráson alapul, helyenként kiegészítve azokat.

2. fejezet

Az algebra fejlődése Európán kívül

Azt mondhatjuk, hogy a számelmélet és az algebra a matematika legrégibb ágai. A matematika e két területe kezdetben nem különült el. A XVII. századig mondanivalóinkban szinte sehol sem tudjuk elválasztani egymástól őket. Ezért most csak röviden foglalom össze az algebra fejlődésének fontosabb mozzanatait Gaussig (1777-1855.).

2.1. A babiloni algebra

A babiloni algebra főként az első- és másodfokú egyenletek megoldásával és vizsgálatával foglalkozott. A ma szokásos algebrai jelöléseket akkor még nem ismerték, de a babiloni ékírás bizonyos esetekben jól pótolta ezeket az algebrai jeleket. Például ha egy feladatban a téglalap hosszúsága és szélessége ismeretlen, akkor ma ezeket pl. x és y betűkkel jelöljük, míg az ékírásban egyetlen ékjel írta le a hosszúságot és egy másik ékjel a szélességet, vagyis az ismeretlenek jelölésére nem használtak külön jelölést. Az ókori Mezopotámiában hiányzott az egyenletmegoldás mai formalizmusa, de az egyenletekre vezető feladatok megoldásai teljesen megegyeznek a mai megoldóképletekkel. Igaz, az nem derül ki, hogy milyen úton jutottak el a megoldáshoz, de a legtöbb esetben a követendő utasításokból következtethetünk a gondolatmenetre is.
Nézzünk példát egy egyenletrendszer levezetésére:

$$x \cdot y = a$$

$$x + y = b$$

Ennek megoldására olyan módszert alkalmaztak, amely akkor használható igazán jól ha $x + y$ eredménye adott. Először is bevezettek egy harmadik változót - u -, amellyel kifejezték x-et és y-t:

$$x = \frac{b}{2} + u \qquad y = \frac{b}{2} - u$$

Majd ezek után behelyettesítették az első egyenletbe:

$$\left(\frac{b}{2}+u\right)\left(\frac{b}{2}-u\right)=a$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{b^2}{4}-u^2=a$$

$$\Downarrow$$

$$u=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a}$$

A negatív értéket nem vették figyelembe, így u-t felhasználva a következő egyenletet kapjuk x-re és y-ra:

$$x=\left(\frac{b}{2}+u\right)=\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a}$$

$$y=\left(\frac{b}{2}-u\right)=\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a}$$

Feltételezhetjük, hogy a babiloni matematikusok ismerték az egyszerű algebrai azonosságokat, persze nem képletszerűen, inkább szavakban, szabályokban. Például: 2 tag összegének és ugyanazon két tag különbségének a szorzata egyenlő a két tag négyzetének a különbségével, stb.

Tehát a babiloni algebra eljutott bizonyos másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldásáig, és jelentkezett valamelyest az algebrai jelrendszer és gondolkodásmód. Vagyis elmondhatjuk, hogy Mezopotámia matematikája határozottan algebrai jellegű volt.

2.2. Az óegyiptomi algebra

Az egyiptomi algebra nem volt olyan fejlett, mint mezopotámiában. A feladatok egyenletformában voltak megfogalmazva. Ezekben az elsőfokú és tiszta másodfokú egyenletekben megtalálható már a saját szórakozásra végzett számolás, mivel a matematikát az emberi szükségletek hozták létre, de ezek nem feltétlenül voltak gyakorlati hasznosságú szükségletek.

Nagy előszeretettel használták a "regula fals" módszert, a hamis szabály módszerét, amely azt mondta ki, hogy az ismeretlen helyére egy hamis értéket választunk, majd ezzel végigszámoljuk a feladatot. Az eredményül kapott számot összehasonlítjuk a feladat adataival, majd a kiinduló hamis értéket megfelelően módosítjuk.

A számítások kielégítőek voltak az akkori viszonylatban, de ezek a mai szemmel körülményes, rossz megközelítésű módszerek voltak, amelyek akadályozták a továbbfejlődést.

2.3. A görög algebra

Az elméleti beállítottságú görög matematikusokat az eleai filozófiára[1] épített számfogalmuk és a pontosságra való törekvésük mellett nem elégítette ki az, ha négyzet oldalhosszából az átló hosszát nem tudták sem egész számmal, sem aránnyal kifejezni, pedig a feladat geometriai megoldására a szerkesztés pontos eredményt adott. Az irracionális számok felfedezése után, minden algebrai jellegű feladatot átfogalmaztak geometriaivá, így a számok közötti műveletektől a négyzetgyökvonásig, a számoknak megfeleltetett szakaszok segítségével végezték el. Ennek a geometriai algebrának a nyelve határt szabott a görög matematika fejlődésének. Bizonyos geometria feladatok kiszámításánál előkerültek a $\sqrt{a}$ alakú számok, melyek meghatározása szükségessé tette a pontosabb megközelítést, ekkor kezdték el használni, többek között Arkhimédész is, a lánctörtek módszerét. Arkhimédész a megpróbálta a $\sqrt{3}$-at közelíteni. Lássuk mennyire jó az ő becslése:

Legyen

$$\sqrt{a^2+b} = a + x$$

Átrendezés után:

$$x(2a+x) = b$$

ebből jön az

$$x = \frac{b}{2a+x}$$

Ha a jobb oldalon lévő x helyett folytatólagosan behelyettesítjük a kapott kifejezést, akkor az

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \dots}}}$$

végtelen lánctörtet kapjuk. Ebből adódóan

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \dots}}}$$

Nézzük a $\sqrt{3}$ lánctörtjének közelítő törtjeinek sorozatát:

[1] A filozófusok szerint az 1 egységes és oszthatatlan.

$$1,\ 2 = 1+\frac{2}{2},\ \frac{5}{3} = 1+\frac{2}{2+\frac{2}{2}},\ \frac{7}{4} = 1+\frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{2}}},\ \frac{19}{11},\ \frac{26}{15},\ \frac{71}{41},\ \frac{97}{56},\ \frac{265}{153},\ \frac{368}{209},\ \frac{989}{571},\ \frac{1351}{780},\ \ldots$$

A sorozatban megtalálható az a két tört, amellyel Arkhimédész közrefogta a $\sqrt{3}$-at:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

Arkhimédész számítása a kor matematikájának megfelelő volt.

Diophantosz *Aritmetika* című 13 kötetes könyve teljes egészében egyenletek megoldását tartalmazta. A könyv hanyagolja a geometriai algebrát, valódi algebrai módszereket és jelöléseket használt. Ismerte a $ax^2 = 2bx + c$ alakú egyenlet megoldásához szükséges képletet:

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 + ac}}{a}$$

Bevezette a harmadfokúnál magasabb fokú ismeretleneket, mint két négyzet szorzatát vagy négyzetszer köböt vagy a köbször köböt.
Ebben az időben fellépő politikai viszonyok és háborúk miatt a görög matematika hanyatlásnak indul, mivel az anyagi és eszmei támogatás megszűnt.

Diophantosz (III. század) matematikus, az ókori görög matematika utolsó nagy képviselője volt. Fő műve az Arithmetica 13 könyvéből hat maradt fenn. Őt tekintjük az algebrai jelrendszer megalapozójának. Első- és másodfokú egyenletekkel foglalkozott. Azokat a feladványokat kedvelte, melyek megoldása egész szám, ezért az ilyeneket mai napig diofantikus problémáknak nevezik.

2.4. A kínai algebra

Matematika kilenc fejezetben a legrégebbi kínai mű, amelyből megismerhető Kína egész matematikája. Kína matematikája határozottan algebrai irányzatú volt. A VII. században a feladatok megoldásához szükség volt a négyzetgyök- és a köbgyökvonásra is, melyet a fang-fa módszerrel oldottak meg. A módszer már magasabb fokú egyenletek közelítő megoldását is lehetővé tette. A műveleteket számolótáblán végezték el. A gyökvonásnak a számolótáblán való elvégzését a kínai Horner elrendezésnek is nevezhetnénk.

Alkalmazták a fang-cseng szabályt is, amely a lineáris egyenletrendszerek mátrixokkal való megoldására szolgált. A fang-cseng módszer a mátrixokkal és determinánsokkal való számolás előfutára. A módszer valójában megegyezik a ma használatos Gauss-eliminációval. Az algebrában további fejlődést azonban nem sikerült elérniük, annak ellenére sem, hogy továbbfejlesztették az algebrai módszereket és jelrendszert.

2.5. Az indiai algebra

Sok külső hatás befolyásolta India matematikáját. Sokat merítettek a babiloni, a kínai és a görög matematikából. A hinduk sokat fejlesztettek, módosítottak a szerzett ismereteken. Előszeretettel foglalkoztak határozott és határozatlan egyenletekkel és egyenletrendszerekkel. Jól bántak a negatív és irracionális számokkal, illetve a négyzetgyökös kifejezésekkel.

Brahmagupta volt India legkiválóbb matematikusa. Elsőként ismertette részletesen az előjeles számok műveleti szabályait és a nullát is számnak tekintette. Általános megoldást adott az $ax + by = c$ alakú lineáris diophantoszi egyenletre, de foglalkozott még az $y^2 = ax^2 + 1$ alakú, másodfokú diophantoszi egyenlettel is. Ezzel azonban csak későbbiekben Ácsarja Bhászkara (1114-1185) boldogult. Bizonyítékai az általuk írt könyvekből maradtak ránk. Elmondhatjuk, hogy az algebrai módszereket jelentős mértékben fejlesztették, főleg az egyenletmegoldási eljárásokkal. Kár, hogy a bizonyítási igény, amely a görögöknél már természetes, a hinduknál nem volt az. A legismertebb érdemük, hogy összeolvasztották a 10-es számrendszer és a helyi érték fogalmát a nulla használatával, és így Indiából indulhatott útjára a számoknak a helyi értékes 10-es számrendszerben való írásmódja, és ezáltal könnyebbé vált az alapműveletek írásban való elvégzése.

Brahmagupta (598 - 670) indiai matematikus. A VII. században bevezette a Brahmagupta-tételt, -azonosságot és -képletet. A Brahmasphuta-siddhanta művében leírta a nullát mint számot és a tízes számrendszer használatát, és megmagyarázza a hindu-arab számrendszer használatát is. A muzulmán tudósok által a 12. században ez a számrendszer Európába is eljutott, amit ma arab számként ismereünk.

2.6. Az arab algebra

Az iszlám matematika fejlődésében nagyjából 4 korszak különíthető el. Először is a görög, egyiptomi, mezopotámiai és indiai matematikai műveket gyűjtötték össze, majd azokat arabra fordították; ez körülbelül a VIII. században le is zajlott. Majd a IX. században arab matematika fejlődésnek indul, mint például az aritmetika, a geometria, a trigonometria, az algebra és a közelítő számítások módszere . A X-XII. században a figyelem főként a trigonometriára és a kželítő számításokra összpontosul, és tovább fejlődik az algebra is. A XIII-XV. században kínai hatás miatt a numerikus módszerek előtérbe kerülnek. Az arabok visszatérnek ugyan a görög retorikus tárgyalási módhoz, sőt algebrájuk geometriai jellege megmarad, de jelentős haladást érnek el, mivel a levezetetlen megoldások helyett bizonyítanak, magyaráznak.

Abú Abdalláh Muhammad bin Múszá al-Hvárizmí 9. században élt perzsa matematikus számos könyvet írt a hindu-arab számokról és az egyenletmegoldás módszereiről. *A hindu számokkal való műveletekről* című könyve (852), illetve Al-Kindi arab matematikus művei kulcsszerepet játszottak az indiai matematika és az indiai (arab) számok nyugati világban való elterjedésében. Az algebra szó egyik művének címéből ered: *Hisab al-dzsabr walmukabala (A rövidítés és törlés tudománya).* Al-Hvárizmít nevezik az algebra atyjának.

Abu Kámil (850-930) szintén jelentős haladást ért el az algebra területén. Munkássága a másodfokú egyenletek megoldásáig terjed, melyben külön szabályokat ad a különböző normálalakú egyenletek kapcsán x^2 megadására:

$$x^2 + px = q \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{p^2}{2} + q - \sqrt{p^2 q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2}$$

$$x^2 + q = px \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{p^2}{2} - q \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 - p^2 q}$$

$$px + q = x^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{p^2}{2} + q + \sqrt{p^2 q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2}$$

E szabályok bizonyítása geometriai úton történik.

Egyre több feladat vezetett harmadfokú megoldáshoz és szükség volt egy általánosabb elmélet, illetve egy numerikus megoldási módszer bevezetésére. Omar Hajjám (1048-1131) algebrai műve a harmadfokúakig tartalmazza az egyenletek osztályozását. Hajjám megállapította a két gyök létezésének lehetőségét, illetve megemlíti azt is, hogy a negyedfokú egyenletek megoldási módszere nem ismeretes.

3. fejezet

Az algebra fejlődése Európában

3.1. V-XIV. század

A matematikaterületén az európai középkor V-IX. százada elég sötét volt. Európának nem volt igénye a görög elődök vagy a kortárs arabok matematikai ismereteinek átvételére. A kezdetleges földműveléssel járó jelentéktelen iparnak és kereskedelemnek nem volt szüksége a négy alapműveletre sem. A X. században egy Gerbert D'Aurillac nevű szerzetest azzal vádoltak, hogy képes bármekkora szám elosztására, ez pedig csak az ördög segítségével lehetséges. Gerbert szerzetes - később pápa - lehet az időben az a határ, amikor is az európai matematika középkora világosodni kezd.

Gerbert D'Aurillac (950?-1003) a középkor tudományos életének hajnalát a tudós szerzetestől számítják. Nem volt igazán matematikus, de kultúrtörekvéseivel elősegítette a matematika kibontakozását. Szegény család gyermeke. Benedek-rendi kolostor közelében kezdte meg tanulmányait. 967-ben Spanyolországban ismerte meg Vich püspökét, akiben atyai jó barátra talált és aki irányította további tanulmányait. Majd megismerkedett Barcelonában az arab matematikával és a hindu számírással. 970-től Rómában folytatta tanulmányait. Az általa szervezett iskolában maga is tanított, ezen belül is az abakuszon való számolást az általa kitalált módszerrel. Pápaként ő küldte I. István királyunknak a koronát, és ő alapította az esztergomi érsekséget. A politikai nézetei miatt vette fel a II. Sylvester nevet.

A XI-XIII. században latinra fordítottak számos kulcsfontosságú görög és arab művet, ezzel megteremtve Európa számára a tanulás lehetőségét. A XII-XIII. század határán élt Fibonacci már elérte az arabok színvonalát, sőt felül is múlta azt. Például az $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ egyenlet gyökeiről még az egyenlet megoldása előtt kimutatta, hogy azok nem racionális és nem $a + \sqrt{b}$ alakú irracionális számok. Algebrájának két jellemzője volt:

1.) nem használta a korában már szokásos arab jelöléseket

2.) nem tudott elszakadni a geometriától

Liber abaci című könyvében a geometria és az algebra egymást támogatása figyelhető meg.

Leonardo Pisano (1170-1240), ismertebb nevén Fibonacci. Apja Pisa kereskedelmi ügyvivője volt. Algírban tanult és nemcsak az arab nyelvet sajátította el, hanem különösen vonzotta a matematika. 1202-ben írta meg nagy összefoglaló munkáját, a Liber abacit, melyben összegyűjtötte az aritmetikai és algebrai ismereteit. 1228-ban írta meg a Practicát, azaz Gyakorlati geometriát, amely Eukleidész elveszett műve nyomán született. Összeállított még két matematikakönyvet, amelyek az egyenletmegoldásokkal foglalkoznak. Van azonban egy világhírű feladata is, melynek megoldását róla neveztek el, ez a Fibonacci-sorozat: 1,1,2,3,5,8,13,...

Fibonacci kortársa Jordanus Nemorarius (?-1236) az első német matematikus, aki helyet érdemel a matematika történelmében. Elmondhatjuk róla, hogy először ő jelölte a számokat betűvel, ezáltal már nem kapcsolódnak a számok geometriai alakzatokhoz. Tehát a "betűszám" nála nem szakasz vagy két szám szorzata, amely téglalapként jelenik meg, hanem a szorzat is már egy szám, amelyet egyetlen betű jelöl. A négykötetes *Az adott számokról* című feladatgyűjteményében néhány feladat első-, illetve másodfokú egyenletre vagy egyenletrendszerre vezet. Ezek között sok, másoktól átvett feladat is van, de a megoldásuk általában egyéni. Nézzünk egy kis példát a feladatgyűjteményből:

$$x + 6 = \frac{5}{3}y$$

$$y + 4 = 2z$$

$$x + 2 = \frac{5}{7}x$$

egyenletrendszer megoldása Nemorarius szerint:

Az első egyenlet két oldalához hozzáadunk $6\frac{2}{3}$-ot:

$$x + 12\frac{2}{3} = \frac{5}{3}(y + 4)$$

így a második egyenlet szerint $(y+4)$ helyett $2z$-t írhatunk:

$$x + 12\frac{2}{3} = \frac{10}{3}z$$

Az így kapott egyenlethez most $\frac{20}{3}$-ot adunk hozzá:

$$x + 19\frac{1}{3} = \frac{10}{3}(z+2)$$

A harmadik egyenlet alapján $\frac{5}{7}x$-et írhatunk a $(z+2)$ helyett:

$$x + 19\frac{1}{3} = \frac{50}{21}x$$

Ebből már látszik, hogy $x = 14$, amiből pedig megkapjuk, hogy $y = 12$ és $z = 8$.

Nicole Oresme fizikusként szerzett matematikai érdemeket. A törtkitevős hatvány értelmezésével és jelölésének bevezetésével segítette korának algebráját a jelrendszerrel dolgozó szimbolikus algebrához. A jelöléseire példa:

$$\frac{2}{3}\frac{p}{8} = 8^{\frac{2}{3}} \qquad \text{vagy} \qquad \frac{1}{4}\frac{p}{2}\frac{1}{2} = \sqrt[4]{2^{\frac{1}{2}}}$$

Oresme ismerte az irracionális törtkitevőjű hatványt, mégpedig kétfélét: az egyiknél az alap irracionális, mint például a $(\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$, a másiknál pedig a kitevő, mint például a $3^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$ esetén.

Nicole Oresme (1320-1382) angol fizikus. Caen mellett született. A párizsi egyetemen tanult. Oresme szerint a világ olyan, mint egy óra, amelyet állandóan fel kell húzni, hogy járjon. V. Károly kívánságára latinról franciára fordította Arisztotelész munkáit és a fordítást jegyzetekkel is ellátta, ezzel elnyerte a püspöki rangot.

3.2. XV. század

A XV. század a matematika reneszánsza, illetve innentől kezdve beszélhetünk igazán szimbolikus algebráról. A matematika iránti új érdeklődés azokon a területeken jelent meg, ahol a város, az ipar, a kereskedelem vagy a csillagászat felvirágoztak. A XV.

és XVI. század matematikai központjai Itáliában, valamint Közép-Európa nagy városaiban (Bécs, Nürnberg, Prága) alakultak ki. A korszak első nagy német matematikusa Regiomontanus volt. Ő vezette be az európai matematikába a gyökmennyiségek fogalmát, illetve ő dolgozta ki a gyökmennyiségek műveleti szabályait. Igaz, nem látszik nagy jelentősége a dolognak, hiszen a gyökvonás-műveletnek akkor már több ezer éves múltja volt, de az algebra területén jelentősnek bizonyult, mert lehetővé vált az egyenletek gyökkifejezésekkel való megoldása. Ezáltal a megoldhatóságok keresése kiterjedhetett új egyenlettípusokra is.

Regiomontanus (1436-1476) eredeti neve Johannes Müller, szülővárosának, Königsbergnek latin nevét vette fel. Nagy műveltségű volt, hiszen a matematikán és a csillagászaton kívül foglalkozott műszerkészítéssel, könyvnyomtatással és fordítással is. Lipcsében és Bécsben tanult. Itáliai városokban ismerkedett meg a görög matematika és csillagászat klasszikus műveivel. Tanított a pozsonyi egyetemen. Elkészítette az első olyan csillagászati táblázatot, amely bármely időpontra meghatározta a Nap és a Hold egymáshoz viszonyított helyzetét. 1475-ben IV. Sixtus pápa hívására Rómába utazott, azonban hirtelen meghalt pestisben.

A XV-XVI. században jelent a meg Európában a szimbolikus algebra, amely a matematikai rövidítéseket, jelöléseket előre megfontolva használta és fejlesztette. Egyik jelentős képviselője volt a francia Nicolas Chuquet (1445-1500). 1880-ban megjelent *A számok tudománya három részben* című művében a következőkről olvashatunk: bevezetés a racionális számok aritmetikai műveleteibe a hindu-arab számírást használva, negatív számok közti műveletek. A négy alapműveletre a francia plus (több, jele: p̃), moins (kevésbé, jele: m̃), multiplier (szorozni) és partir (osztani) neveket használta. Az m̃ a negatív számot is jelentett. Az ismeretlen részére nem vezetett be betűjelet, hanem annak fokát az együtthatójának a kitevőjébe írta. Például 4^1 jelentette a $4x$-et, általában 4^n a $4x^n$-t. A konstans tagot az egyenletben a 0 kitevővel jelezte, például az 5-öt úgy írta, hogy 5^0. Vagyis egy egyenlet az ő jelölésével:

$$6^3 \ \tilde{\mathrm{p}} \ 4^2 \ \tilde{\mathrm{m}} \ 2^1 \ \tilde{\mathrm{p}} \ 3^0 \quad \textbf{egaulx} \quad \tilde{\mathrm{m}} \ 5^0$$

mai jelöléssel:

$$6x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = -5$$

Chuquet algebrai szimbólumrendszere igen fejlett, melyből arra következtethetünk, hogy valahonnan ihletet merített. Ez nem volt más, mint a német Johannes Widmann (1462-1498), aki elsőként adott elő önálló egyetemi stúdiumként algebrát. Az 1489-ben kiadott könyvében először látjuk nyomtatásban a $+$ és $-$ jeleket.

A jelölések teljesen azonos formában jelennek meg például a kortárs olasz Luca Pacioli (1145-1517) matematikai munkáiban is. Pacioli azonban több szórövidítést használt. Igaz, hogy a negatív mennyiségekre volt jele, mégsem vette észre, hogy a másodfokú egyenleteknek közös alakot lehet adni, mivel csak pozitív együtthatójú egyenletekkel foglalkozott. Pacioli a negatív gyököt nem vette figyelembe, valamely egyenlet 0 megoldását sem fogadta el.

3.3. XVI. század

Az algebra a XVI. század elejére a matematikának főként az egyenletekkel foglalkozó része lett, mely fő feladatául tűzte ki az egyenleteknek a négy alapművelettel és a gyökvonással való megoldását. Az egyenleteket még mindig pozitív együtthatókkal írták fel és ezért megoldás szempontjából külön problémát jelentettek a következők: $x^3 + bx = c$, az $x^3 = bx + c$ és az $x^3 + c = bx$ egyenletek. Megoldásukat külön keresték. Az első döntő lépés a harmadfokú és a negyedfokú egyenletek megoldóképletének a megtalálása és publikálása jelentette, ez főként Del Ferrónak, Tartagliának (Niccolo Fontana), Cardanónak és Ferrarinak köszönhetőek. Girolamo Cardano nevéhez fűződik a harmadfokú egyenlet megoldásának története. Akkor fejezte be a *Gyakorlati aritmetika és egyszerű mérések* című könyvének kéziratát, amikor értesült arról, hogy Scipione Del Ferro bolognai professzor és Niccolo Tartaglia bresciai számolómester egymástól függetlenül felfedezték az $x^3+px = q$ alakú harmadfokú egyenlet megoldását. Tartagliát kihívták egy matematikai párbajra és egyetlen éjjel sikerült neki megtalálnia $x^3 + bx = c$ alakú egyenletek megoldását, sőt az $x^3 = bx + c$ alakúakét is. Cardano szerette volna könyvébe belevenni, de a megoldással maga nem boldogult, Tartaglia pedig akkor még nem volt hajlandó elárulni. Később mégis elárulta neki, de titoktartást kért cserébe. Cardano 1545-ben kiadott *Ars Magna* című művében szavát szegve mégis közölte az addig titkolt képletet, sőt annak továbbfejlesztését is, illetve a negyedfokú egyenletek megoldását. Azonban egyikük sem tudott megbirkózni azzal az esettel, amelyben a harmadfokú egyenlet gyökei léteznek, sőt valósak, de a megoldóképlet nem ad választ, mert a benne szereplő négyzetgyökjel alatt negatív szám áll. Ezt nevezték "casus irreducibilis"-nek.

A nagy tudomány, azaz az algebra törvényeiről című műve az, amely először tartalmazott olyan matematikai felfedezéseket, amelyek túlhaladták az ókori görög és a középkori arab eredményeket. Ez a könyv az, amely miatt Cardano neve a matematikatörténetből nem hagyható ki.

Említésre méltó még Raffello Bombelli a bolognai mérnök-matematikus, akinek a fő műve a *l'Algebra* című háromrészes könyv. Az első rész a gyökmennyiségek közti műveleteket ismerteti, a második az egyenletmegoldásokkal foglalkozik és a harmadik részben mintegy 300 feladat van. Bombelli számnak tekintette a $(\pm\sqrt{-p})$-t, vagyis a negatív számból vont négyzetgyököt is értelmezte és definiálta a velük való műveleteket, így a komplex számfogalom megalapozásának úttörője lett.

Girolamo Cardano
(1501-1576)

Girolamo Cardano itáliai orvos, filozófus és matematikus. Egy milánái jogász törvénytelen gyermekeként látta meg a napvilágot. Először Paviában tanult jogot. Ezt abbahagyta és 1524-től a páduai egyetemen orvosnak tanult. Szegények iskolájában matematikát, csillagászatot és földrajzot tanított, majd a milánói orvosi kollégium igazgatója és a paviai egyetem rektora lett. Ez a két előkelően hangzó tisztség azonban anyagilag nagyon keveset jelentett. A pénze nagy részét kockázásból, kártyázásból és sakkozásból nyerte. A szerencsejátékoknak is volt matematikai haszna, mert igyekezett megfigyelni a játékok "törvényeit" és kidolgozni a lehető legjövedelmezőbb játékmódszereket (A kockajátékról). 1570-ben ismeretlen okból bebörtönözték, 1571-ben kiszabadult, de minden nyilvános szerepléstől eltiltották, így Rómába költözött. Itt élt visszavonultan, önéletrajzán dolgozva haláláig.

3.4. XVII. század

Átmenet a XVI. század és a XVII. század között

Nem különíthető el egyértelműen a XVII. század a XVI-tól hiszen Francois Viéte francia matematikus e két korszak határán alkotott. Viéte fő művében áttekintette a korábban kialakult algebrát, és szerette volna az egyenletmegoldási eljárásokat egységesíteni. Ehhez azonban alkalmas jelrendszerre volt szükség. Például egyik nagy újítása, hogy az egyenletek együtthatóit is betűkkel írta fel, ismeretlenekre: A, E, I, 0, U magánhangzókat, az együtthatókra: B, C, D, . . . mássalhangzókat használta. Megtartotta a + és a − jeleket, a szorzást pedig a latin in szócskával jelezte, tehát A in B annyi mint A-szor B, az osztás jele pedig a törtvonal. Viéte egy 1600-ban megjelent művében megtaláljuk a Horner-módszert, amelyet az egyenletek gyökeinek a meghatározására a kínai matematikusok is használtak. Harmadfokú egyenlet különféle típusai helyett általános alakkal foglalkozott, így elkezdődött az egyenletek elméletének egységes kiépítése. Az egyenletmegoldásban sok megfelelő helyettesítést, transzformációt alkalmazott, amelyek adott egyenlettípusra általánosságban is illettek. Rátalált több, az egyenlet együtthatóit és gyökeit összekapcsoló összefüggésre. Az együttható szót teljesen a mai értelemben használta. Például az ő nevét viseli az $a_n = (-1)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ összefüggés, amely az $x^n + a_1x_1 + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ egyenletre vonatkozik. Ezt a harmadfokú egyenletre már Cardano által kimondott összefüggést általánosította pozitív gyökök esetére. Azt is megállapította, hogy az $x^3 + p = 3qx$ egyenlet két pozitív gyökére igaz:

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 3q \quad \text{és} \quad x_1x_2^2 + x_2x_1^2 = p.$$

François Viéte (1540-1603) francia matematikus. Jogi tanulmányait Poitiers-ben befejezve, szülővárosában ügyvédkedett. 1567-ben bretagne-i képviselő lett, majd a király tanácsosa. 1584 és 1598. között kegyvesztett lett, de egy rejtjelezett spanyol levél megfejtésé után IV. Henrik visszahelyeztette. Párizsban halt meg. Ifjú házitanító korában kezdett el foglalkozni elsősorban a csillagászathoz szükséges trigonometriával. Matematikai munkásságát foglalja össze életének fű műve, a Bevezetés az analízis tudományába. A címben az analízis szó az algebrát jelenti. A teljes mű csak halála után jelent meg, amelyben áttekintette a korábban kialakult új algebrát.

A gyökök és együtthatók közötti összefüggést teljes általánosságban azonban, figyelembe véve a negatív és a komplex gyököket is először Albert Girard (1595-1632) holland matematikus közölte 1629-ben, az *Új felfedezések az algebrában* című könyvében. Ő mondta ki elsőként - bizonyítás nélkül - az algebra alaptételét olyan formában, hogy az n-ed fokú algebrai egyenletnek legfeljebb n számú gyöke van. A negatív gyököket ugyanis nem vette számításba. (A tételt később Gauss igazolta.) Ugyanakkor a negatív és a pozitív szám viszonyát geometriai szemlélettel haladásként értelmezte. Későbbiekben a számegyenesen való ábrázolást eredményezte.

A gyökök és együtthatók összefüggéseit Girard előtt fogalmazta meg Thomas Harriot (1560-1621) angol matematikus, de az írásai csak 1631-ben jelentek meg. Az algebra szimbólumait bővítette a $>$ (nagyobb) és a $<$ (kisebb) jelekkel, ő kezdte az egyenlet együtthatóit kisbetűkkel írni.

A barokk

A barokk egybeesik a matematikának egy elég jól elkülöníthető fejlődési szakaszával Descartes-tól a Bernoulli testvérekig. Megkezdődik a matematika különböző kutatási területeinek elkülönülése. A XVII. század előtti európai matematika már független a görög matematikától, és képes volt lényegesen új eredmények elérésére. Minden bizonynyal annak a következménye, hogy ebben a században megváltozik az emberi gondolkodásmód.

Descartes "Geometriájában" kimondja az algebra alaptételét, amelyet csak Gauss bizonyít be 1799-ben (az egyenletnek annyi gyöke van, amennyi a fokszáma), ebből látszik hogy már a gyökök közé számítja a komplex gyököket is. Definiálja a róla elnevezett előjelszabályt, amely kimondja (bizonyítás nélkül), hogy egy csupa valós gyökű egyenletnek annyi pozitív gyöke van, amennyi a rendezett alak együtthatóinál a jelváltások száma és annyi negatív gyöke, amennyi az azonos jelkövetkezések száma. Kutatja, hogy a racionális együtthatójú egész polinom mikor bontható ugyanilyen polinomok szorzatára, vagyis felveti a reducibilitás kérdését. De ezek a törekvések nem az algebra fejlesztésére voltak, hanem hogy a geometria és az algebra egyesítéséből megteremtse az egyetemes matematikát. Ebből a törekvésből származik az analitikus geometria, de az algebra ettől függetlenül fejlődött tovább.

3.5. XVIII. század

Newton *Általános aritmetika* című összefoglaló művében és Euler *Unyiverzalnaja arifmetyikája* című művében meghatározó köveket tettek le az algebra fejlődésének útján. A művekben az egyenletek megoldásainak kutatását, vizsgálatát és annak eredményeit írták le. Newton az együtthatók és gyökök összefüggéseire adott egy általánosítást bizonyítás nélkül, melyet Viéte és Girard tanulmányiból fejlesztett tovább.

$$x^n + a_1 x_{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0$$

egyenletre az általánosítás:

1. Ha $k < n$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-1} + ... + a_k \sum_{i=1}^{n} x_i^0 + a_{k+1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} + ... + a_n \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-n} = 0$$

2. Ha $k = n$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-1} + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-2} + ... + a_n \sum_{i=1}^{n} x_i^0 = 0$$

3. Ha $k > n$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-1} + ... + a_{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-n+1} + a_n \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-n} = 0$$

Euler és még sokan mások úgy gondolták, hogy a 4-nél magasabb fokú egyenlet megoldására létezik olyan algoritmus, amely a 4 alapműveletet, a hatványozást és a gyökvonást használja csak fel.

Ehrenfried Walter Graf Von Tschirnhausen német matematikus a $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0$ alakú egyenletek megoldását az alacsonyabb fokúra való visszavezetésben kereste. Miután megbizonyosodott, hogy a harmadfokúra igaz, kimondta az n-ed fokúra, hogy $(n-2)$-ed fokú egyenlet megoldására vezethető viszsza. Azt az alacsonyabb fokú egyenletet, amely a megoldást adja az eredetire Euler "megoldandó egyenlet rezolvensé"-nek nevezte el. Newton, Bernoulli, Lagrange is próbálkozott 4-nél magasabb fokú egyenletek megoldásával, de a rezolvens megoldása közben ugyanakkora fokú egyenletet kellett megoldani, mint az eredetié volt. A megoldás keresése közbe útnak indult az iterációs eljárás, a gyökközelítő módszer fejlődése. A felvetődő kérdések egyike volt, hogy minden algebrai egyenletnek létezik-e gyöke és hány. Válaszként d'Alambert adott először hiányos bizonyítást az algebra alaptételére, miután már Descartes és Girard is kimondta. De 1799-ben Gauss már egy teljes bizonyítást adott rá (később további hármat, amelyből a következő fejezetben egyet be is mutatok). Bár azt nem sikerült megoldani, hogy 4-nél magasabb fokúakra létezik-e megoldóképlet, de Gauss sejtésként kimondta, hogy ha az egyenlet fokszáma legalább 5, akkor gyökjelekkel megoldani nem lehet.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) német matematikus, csillagász és fizikus. Tehetsége korán megmutatkozott. Első igazi saját felfedezését 19 évesen tette, amikor is megtalálta a szabályos tizenhétszög megszerkeszthetőségének bizonyítását. Fennmaradt dokumentumok alapján azóta kiderült, hogy már gimnazista korában megsejtette a prímszámtételt. A későbbiekben érettebb fejjel pedig már olyan matematikai problémákat oldott meg, mint például a körosztási probléma, az algebra alaptétele, a kvadratikus reciprocitási tétel, amit saját maga által kifejlesztett titkosírással jegyzett le. Ezt az úgynevezett "naplóját" 1898-ban találták csak meg. Gauss csillagászként is maradandót hagyott az utókorra. Foglalkozott még geodéziával is és megalkotta az első abszolút fizikai mértékegységrendszert.

Euler vizsgálta az algebrai egyenlet gyökeinek racionális függvényeit, és megfigyelte a gyökök permutálásával történő változást. Megállapította, hogy ha létezik a gyököknek olyan racionális függvénye, amely állandó a gyökök minden permutációjával szemben, akkor ez a függvény az egyenlet együtthatóinak is racionális függvénye. Lagrange főként a gyökökben szimmetrikus függvényeket vizsgálta. Úgy vélte, hogy a gyökök permutációs csoportjának szabályait figyelembe véve lehet eljutni a gyökjelekkel való megoldhatósághoz.

Paolo Ruffini itáliai matematikus 1799-ben megjelent *Az egyenletek általános elmélete* című művében közölte azt a (hiányos) bizonyitást, amely a gyökök permutációit vizsgálja és megállapította, hogy az $n \geq 5$ fokszámú algebrai egyenletek gyökjelekkel nem oldhatók meg.

Leonhard Euler(1707-1783) Bázelban született. Apja kálvinista lelkésznek szánta. Johann Bernoulli matematikus volt a tanítója. 1726-ban szerzett diplomát, mint matematikus. 1727-től tagja a Szentpétervári Tudományos Akadámiának. 1731-ben a fizika professzora, majd 2 évvel később a matematikai osztály vezetője lett. Ez utóbbit Daniel Bernoullitól vette át. 1735-ben kezdődtek az egészségi problémái: súlyos láz majdnem a halálát okozta. 1740-ben a jobb szemére megvakult, majd 1771-ben a másik szemére is megvakult. 1766-ig az Akadémia alelnöke és a matematikai osztály vezetője volt. Elhagyta Berlint, mivel D'Alembert-rel képtelen volt együtt dolgozni. Ezután ismét Szentpéterváron alkotott egészen 1783.szeptember 18-ig, amikor is agyvérzés következtében meghalt.

3.6. XIX. század

Niels Henrik Abel (1802-1829) norvég matematikus azt hitte, hogy megtalálta az ötödfokú egyenlet radikálokkal való megoldásának a nyitját, de az 1824-ben írt tanulmányában felfedezi hibáját és arra a meggyőződésre jut, hogy az általános ötödfokú egyenlet a szokásos képletekkel nem oldható meg. Viszont az általános problémára, hogy egy egyenletet mikor lehet gyökjelekkel és a négy alapművelettel megoldani, Évariste Galois (1811-1832) ad választ. Galois Lagrange nyomán az egyenletek gyökeinek permutációcsoportjait kezdte tanulmányozni. Galois felfedezte, hogy a gyökök bizonyos racionális kifejezései nem változnak meg, ha bennük a gyököket bizonyos módon felcseréljük. Sikerült felfedeznie a szoros kapcsolatot az egyenlet radikálokkal való megoldhatósága és a róla elnevezett Galois-csoport tulajdonságai között. A "radikál" az $x^n - a = 0$ alakú algebrai egyenlet megoldását, az $\sqrt[n]{a}$-t jelenti. A radikálokkal való megoldhatóságon azt értjük, hogy az egyenlet megoldható olyan képlettel, amelyben legfeljebb a négy alapművelet és radikálok szerepelnek. Vagyis a $P_n(x) = 0$ algebrai egyenlet a négy alapművelettel és gyökvonással akkor és csak akkor oldható meg, ha az egyenlet Galois-csoportja feloldható. Galois tanulmányait többször is próbálta nyilvanosságra hozni, de rajta kívülálló okból ez soha nem sikerült.

Lagrange, Ruffini, Abel és Galois teremtették meg a csoport fogalmát. Ettől kezdve matematikusok figyelme főként az algebrai testek és csoportok vizsgálatára, illetve az algebrai struktúrák kutatására fókuszálodott.

Cauchy a véges csoportokra megállapított törvényeivel előmozdította a csoportelmélet fejlődését. Például: ha a csoport rendje (véges csoportnál az elemek száma) osztható egy p prímmel, akkor annak létezik legalább egy p-ed rendű részcsoportja. Az 1850-es években kezdett kialakulni az absztrakt csoportok fogalma. Csoportelméleti fogalmak definiálatlanul már korábban is jelen voltak, például Gaussnál a testkonstruálási módszer vagy a kommutatív csoportok tanulmányozásánál vagy a Gauss egészek gyűrűjének az aritmetikájánál, amivel megindult a kommutatív gyűrűk tanulmányozása. Ekkor jelennek meg a nem kommutatív csoportok is, mint Hamilton kvaterniói és Grassman vektorelmélete.

Évariste GALOIS (1811-1832.) tragikus sorsú francia matematikus, a csoportelmélet megalapozója. Egy Párizs melletti kisvárosban született. 12 éves koráig anyja tanította. Híres párizsi gimnáziumba került később. Itt kezdte el tanulmányozni Abel, Legendre és Jacobi műveit, nemsokára pedig már önálló eredményeket is mutatott. Felvételi dolgozatát azonban kétszer is elutasították. Harmadszorra eljutott a szóbeliig, de az botrányba fulladt. Az akadémiához beküldött dolgozatai sem találtak több megértésre. Egyiket Cauchy egyszerűen elvesztette. Végül 1829-ben beiratkozott a tanárképző intézetbe. Részt vett az 1830-as forradalomban, ezért kicsapták az iskolából és több hónapi börtönre ítélték. Kiszabadulása után egy párbajba keveredett egy rosszhírű nő miatt és a párbajban halálos lövést kapott. Halála előtti éjszakáján vetette papírra matematikai felfedezéseit. A mű megmentése Liouville érdeme, aki Galois halála után 14 évvel közölte le lapjában.

4. fejezet

Bizonyítások

Ebben a fejezetben kimondom többféleképpen az algebra alaptételét, amelyek természetesen ekvivalensek egymással. Majd 4 különböző bizonyítást mutatok rá. Elsőként Gauss bizonyítását fejtem ki modernebb feldolgozásban, hiszen történelmi szempontból is jelentős, mivel Gauss volt az aki elsőként bizonyította az alaptételt. Segítségül szolgált *B.Fine - G.Rosenberger: The fundamental theorem of the algebra* című könyve. A további 2 bizonyítás már korban közelebbi egy Elemi, egy Galois-elméleti illetve körülfordulási szám segítségével felhasznált bizonyítás, melyeket a Gauss-bizonyítás utáni alfejezetekben be is mutatok.

Az algebra alaptételének néhány változata:

1.) Minden legalább elsőfokú komplex polinomfüggvénynek létezik komplex gyöke, vagyis tetszőleges

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

polinomra, ahol $a_n \neq 0$ és $n > 0$ $\exists c \in \mathbb{C}$, amelyre $p(c) = 0$.

2.) Minden legalább elsőfokú komplex polinom gyöktényezők szorzatára bomlik, azaz multiplicitással számolva pontosan fokszámnyi gyöke van.

3.) $\mathbb{C}[x]$ -ben pontosan az elsőfokú polinomok az irreducibilis elemek.

4.) A komplex számtest algebrailag zárt.

4.1. Gauss bizonyítása

Gauss doktori disszertációjában írta le először az algebra alaptételének bizonyítását 1799-ben, amely csak 1815-ben jelent meg nyomtatott formában. Később további hármat adott (1815-ben, 1816-ban illetve 1849-ben). Az utolsót aranydoktori értekezésében jegyezte le. Bizonyításaiban arra tötekedett, hogy csupán algebrai eszközöket használjon fel, de nem sikerült elkerülnie az analízis eszközeinek felhasználását.

Bizonyítás:

Tekintsük a következő komplex polinomot:

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$$

Csak az $n > 2$ esetet fogjuk vizsgálni, mivel ha $n = 1$, akkor ez az egyenlet lineáris, és így biztos van gyöke, $n = 2$-re pedig a másodfokú megoldóképlet használható a gyökök keresésére.

Feltesszük, hogy $n > 2$: ekkor az együtthatókat trigonometrikus alakba felírva a következő összefüggést kapjuk:

$$a_{n-1} = A(\cos\alpha + i\sin\alpha),\ a_{n-2} = B(\cos\beta + i\sin\beta),\ ...,\ a_0 = L(\cos\lambda + i\sin\lambda)$$

A változót pedig írhatjuk a következő alakban:

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Ha ezek után az $f(z)$ polinomot a valós és képzetes részek összegeként írjuk fel:

$$f(z) = T(z) + iU(z)$$

akkor r és ϕ függvényében az alábbiakat kapjuk:

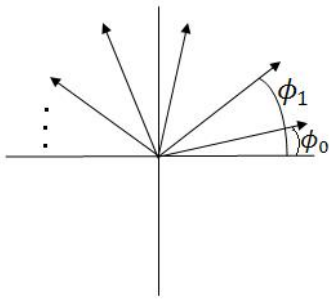
$$T(r;\phi) = r^n\cos(n\phi) + Ar^{n-1}\cos((n-1)\phi + \alpha) + Br^{n-2}\cos((n-2)\phi + \beta) + ... + L\cos\lambda$$

$$U(r;\phi) = r^n\sin(n\phi) + Ar^{n-1}\sin((n-1)\phi + \alpha) + Br^{n-2}\sin((n-2)\phi + \beta) + ... + L\sin\lambda$$

Először is azt szeretnénk belátni, hogy jól megválasztott r esetén a $T(r;\phi)$-ben és az $U(r;\phi)$-ben egyaránt a főtag előjele dominál.

Ehhez kiválasztjuk az alábbi irányokat:

$$\begin{array}{ccc}
\phi_0 = \dfrac{\pi}{4n} & \rightsquigarrow & n\phi_0 = \dfrac{\pi}{4} = 45^\circ \\[2ex]
\phi_1 = \dfrac{3\pi}{4n} & \rightsquigarrow & n\phi_1 = \dfrac{3\pi}{4} = 135^\circ \\[2ex]
\phi_2 = \dfrac{5\pi}{4n} & \rightsquigarrow & n\phi_2 = \dfrac{5\pi}{4} = 225^\circ \\[2ex]
\phi_3 = \dfrac{7\pi}{4n} & \rightsquigarrow & n\phi_3 = \dfrac{7\pi}{4} = 315^\circ \\
\vdots & & \vdots \\
\phi_{4n-1} = \dfrac{(8n-1)\pi}{4n} & \rightsquigarrow & n\phi_{4n-1} = \dfrac{7\pi}{4} = 315^\circ \quad (mod\ 2\pi)
\end{array}$$



Ezek után a $\cos(n\phi_k)$-t kicseréljük $\frac{1}{\sqrt{2}}$-vel vagy $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$-vel, így a következőket kapjuk $T(r, \phi_k)$-ra:

$$T(r, \phi_0) = r^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + Ar^{n-1}\cos((n-1)\phi + \alpha) + Br^{n-2}\cos((n-2)\phi + \beta) + ... + L\cos\lambda$$

$$T(r, \phi_1) = r^n \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + Ar^{n-1}\cos((n-1)\phi + \alpha) + Br^{n-2}\cos((n-2)\phi + \beta) + ... + L\cos\lambda$$

$$T(r, \phi_2) = r^n \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + Ar^{n-1}\cos((n-1)\phi + \alpha) + Br^{n-2}\cos((n-2)\phi + \beta) + ... + L\cos\lambda$$

$$T(r, \phi_3) = r^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + Ar^{n-1}\cos((n-1)\phi + \alpha) + Br^{n-2}\cos((n-2)\phi + \beta) + ... + L\cos\lambda$$

$$\vdots$$

Majd a $\cos((n-1)\phi + \alpha); \cos((n-2)\phi + \beta); ...; \cos\lambda$-t $|1|$-gyel becsüljük és így alsó- illetve felsőbecslést adhatunk $T(r; \phi_k)$-ra, attól függően, hogy:

ha $k \equiv 0, 3 \quad (mod\ 4)$, akkor:

$$T(r, \phi_k) = r^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + Ar^{n-1}\cos((n-1)\phi + \alpha) + Br^{n-2}\cos((n-2)\phi + \beta) + ... + L\cos\lambda \geq$$

$$\geq r^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (|A|r^{n-1} \cdot 1 + |B|r^{n-2} \cdot 1 + ... + |L| \cdot 1) \geq$$

$$\geq r^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + M(r^{n-1} + r^{n-2} + ... + 1), \text{ ahol } M = \max(|A|, |B|, ..., |L|)$$

ha viszont $k \equiv 1, 2 \quad (mod\ 4)$, akkor:

$$T(r, \phi_k) = r^n \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + Ar^{n-1}\cos((n-1)\phi + \alpha) + Br^{n-2}\cos((n-2)\phi + \beta) + ... + L\cos\lambda \leq$$

$$\leq r^n \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + (|A|r^{n-1} \cdot 1 + |B|r^{n-2} \cdot 1 + ... + |L| \cdot 1) \leq$$

$$\leq r^n \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + M(r^{n-1} + r^{n-2} + ... + 1), \text{ ahol } M = \max(|A|, |B|, ..., |L|)$$

Szeretnénk kiválasztani egy olyan R-t, melyre $r >$ R esetén teljesül, hogy

$$T(r;\phi_k) > 0 \text{ ha } k \equiv 0,3 \quad (mod\ 4)$$

$$\text{és}$$

$$T(r;\phi_k) < 0 \text{ ha } k \equiv 1,2 \quad (mod\ 4)$$

Ehhez az alábbi egyenlőtlenséget kell megoldani:

$$r^n \cdot \left|\frac{-1}{\sqrt{2}}\right| > M(r^{n-1} + r^{n-2} + ... + 1) = M \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$\Downarrow$$

$$r^n \cdot \frac{r-1}{r^n - 1} > M \cdot \sqrt{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{r^{n+1} - r^n}{r^n - 1} > M \cdot \sqrt{2}$$

$$\Downarrow$$

$$r^{n+1} - r^n > M \cdot \sqrt{2} \cdot (r^n - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$r^n \cdot (r - 1 - M - \sqrt{2}) > 0$$

$$\Downarrow$$

$$r > 1 + M \cdot \sqrt{2}$$

Tehát ha $R = 1 + M \cdot \sqrt{2}$-nek választjuk, akkor $r > R$ esetén teljesülni fog, hogy a főegyüttható határozza meg T előjelét.

Válasszunk egy r sugarú kört. P_k jelölje azokat a pontokat, ahol a ϕ_k szöghöz tartozó félegyenesek metszik az r sugarú kört. Tehát Arg. $P_k = \phi_k$. A köríven haladva P_0 és P_1 között T előjelet vált, vagyis valahol felveszi a 0 értéket, legyen ez a Q_0:

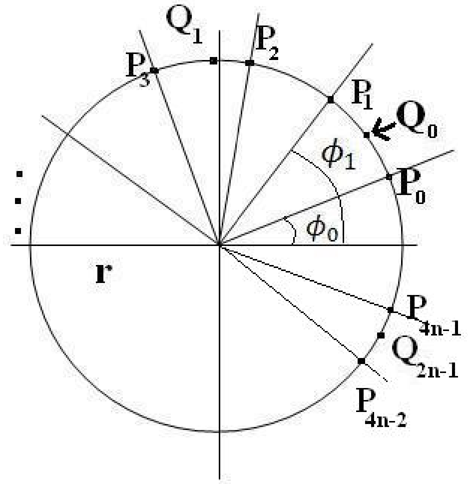
$$\left.\begin{array}{ll} T(P_0) & > 0 \\ T(P_1) & < 0 \end{array}\right\} \text{közöttük } Q_0 : T(Q_0) = 0$$

Ha haladunk tovább a köríven P_2 és P_3 T ismét előjelet vált, itt Q_1-ben veszi fel a 0 értéket, és így tovább:

$$\left.\begin{array}{ll} T(P_2) & > 0 \\ T(P_3) & < 0 \end{array}\right\} \text{közöttük } Q_1 : T(Q_1) = 0$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{array}{ll} T(P_{4n-2}) & >0 \\ T(P_{4n-1}) & <0 \end{array}\right\} \text{ közöttük } Q_{2n-1} : T(Q_{2n-1}) = 0$$



Tehát T-nek van legalább $2n$ gyöke az r sugarú körön.

Most megmutatjuk, hogy több gyöke nincs is:
Legyen $\zeta = tan\left(\frac{\phi}{2}\right)$ és ennek segítségével fejezzük ki $\cos\phi$-t és $\sin\phi$-t

$$\cos\phi = \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2},\ \sin\phi = \frac{2\zeta}{1+\zeta^2} \quad \text{és így} \quad z = r\left(\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2} + i\frac{2\zeta}{1+\zeta^2}\right)$$

Ha figyelembe vesszük az eredeti f(z) polinomot, a T valós részre a következőt kapjuk:

$$T = \frac{p_{2n}(\zeta)}{(1+\zeta^2)^n}$$

ahol $p_{2n}(\zeta)$ egy legfeljebb $2n$-ed fokú polinom. Ennek a polinomnak van $2n$ zérushelye, így a foka pontosan csak $2n$ lehet.

Nézzük meg, hogy a képzetes részről mit mondhatunk el ugyanezen a körön. Vizsgáljuk meg P_0 és P_1 között, azaz a ϕ_0 ésϕ_1 közötti értékre. Vegyük észre, hogy ezekre a ψ értékekre $n\psi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ és így $\sin n\psi > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ebből az alábbi becslést kapjuk:

$$U(r,\psi) = r^n \sin(n\psi) + Ar^{n-1}\sin((n-1)\psi+\alpha) + Br^{n-2}\sin((n-2)\psi+\beta) + ... + L\sin\lambda \geq$$

$$\geq r^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + Ar^{n-1}\sin((n-1)\psi+\alpha) + Br^{n-2}\sin((n-2)\psi+\beta) + ... + L\sin\lambda \geq$$

$$\geq r^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (|A|r^{n-1}\cdot 1 + |B|r^{n-2}\cdot 1 + ... + |L|\cdot 1) \geq$$

$$\geq r^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - M(r^{n-1} + r^{n-2} + ... + 1)$$

M itt is ugyanazt az értéket jelöli, mint a valós rész becslésénél: $M = \max(|A|, |B|, ..., |L|)$. Hasonlóképpen megnézzük a ϕ_2 és ϕ_3 között:

$$U(r, \psi) = r^n \sin(n\psi) + Ar^{n-1} \sin((n-1)\psi + \alpha) + Br^{n-2} \sin((n-2)\psi + \beta) + ... + L \sin \lambda \leq$$

$$\leq r^n \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + Ar^{n-1} \sin((n-1)\psi + \alpha) + Br^{n-2} \sin((n-2)\psi + \beta) + ... + L \sin \lambda \leq$$

$$\leq r^n \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + (|A|r^{n-1} \cdot 1 + |B|r^{n-2} \cdot 1 + ... + |L| \cdot 1) \leq$$

$$\leq r^n \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + M(r^{n-1} + r^{n-2} + ... + 1)$$

Ha tehát az előbb választott $r > R$ köríven vizsgáljuk a függvényt, a vizsgált íveken a főtag előjele dominál, vagyis:

ha $U(r, \psi)$-t ϕ_k és ϕ_{k+1} között nézzük, ahol $k \equiv 0 \pmod 4$, akkor $U(r, \psi) > 0$

ha $U(r, \psi)$-t ϕ_k és ϕ_{k+1} között nézzük, ahol $k \equiv 2 \pmod 4$, akkor $U(r, \psi) < 0$

$$\Downarrow$$

$$U(Q_0) > 0$$

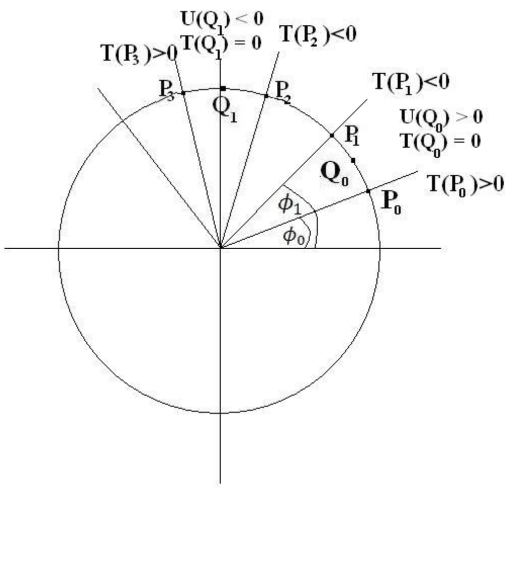
$$U(Q_1) < 0$$

$$U(Q_2) > 0$$

$$U(Q_3) < 0$$

$$\vdots$$

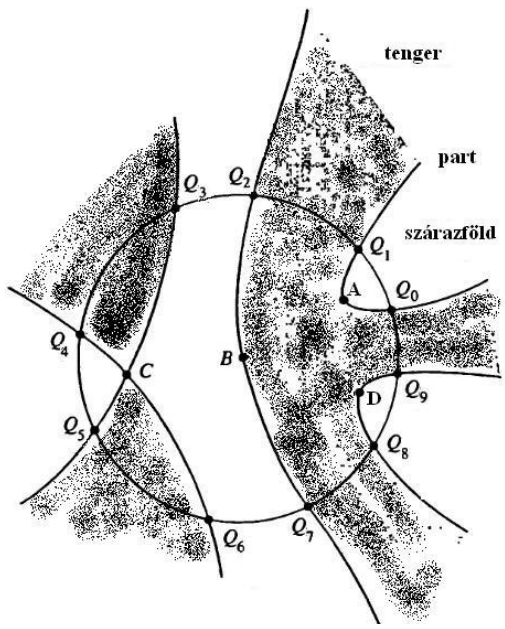
Képben összefoglalva ezt tudjuk idáig:



A továbbiakban a bizonyítás befejezéséhez a síkot aszerint osztjuk részekre, hogy T milyen előjelet vesz fel az adott pontban. Gauss nyomán a $T > 0$ területeket tengernek, a $T < 0$ területeket szárazföldnek, a $T = 0$-t pedig tengerpartnak nevezzük. Induljunk most el például a Q_0-ból a tengerparton az r sugarú kör belseje felé. Induláskor a szárazföld jobb kéz felé esik. Haladjunk a tengerparton, és tartsuk meg ezt a szabályt, hogy a szárazföld mindig jobb kéz felé essen. Előbb-utóbb ki kell jönnünk a körből, ez szemléletesen legalábbis világos, s ahol ismét metsszük a kört (ez csak valamelyik Q_i pont lehet), ott a szárazföld a körből kifelé tartva a jobb kéz felé esik. Ez azt jelenti, hogy Q_i indexe páratlan.

Miközben a partvonalon haladtunk, U értéke pozitívból negatívba változott, s a folytonossága miatt valahol fel kellett vennie a 0 értéket. Ebben a pontban az f polinomnak gyöke van.

Nézzünk egy példát. Az ábra egy ötödfokú polinomot ábrázol. Induljunk el a Q_0 pontból és haladjunk tovább a tengerparton a kör belseje felé, úgy hogy a szárazföld a szabály szerint mindig a jobb oldalunkra essen. Tudjuk, hogy $U(Q_0) > 0$ és azt is tudjuk, hogy páratlan indexűbe kell kiérkeznünk a körből. $U(Q_1) < 0$, vagyis U előjelet vált a két pont között. Itt gyöke lesz a polinomnak, amit az ábrán A jelöl. Így haladunk végig a pontokon. Észrevehetjük például, hogy nem feltétlenül fogunk közvetlen szomszédba érkezni (Q_2-ből Q_7-be jutunk) vagy például C-ben két partszakasz metszi egymást, ez azt jelenti, hogy C többszörös gyök.



4.2. Egy "elemi" bizonyítás

Tegyük fel, hogy a komplex együtthatós nem konstans

$$p(x) = a_n x^n + ... + a_0$$

polinomnak nincs gyöke.

1.) Be szeretnénk látni, hogy $|p(x)|$-nek van lokális minimuma. Osztás után feltehetjük, hogy $a_n = 1$ (az osztás megváltoztatja az esetleges minimum értékét de nem változtatja sem helyét, sem a hely létezésének tényét).

Legyen $R = 2(1 + |a_{n-1}| + ... + |a_0|)$. Jelöljük K-val az origó körüli R sugarú körlapot, azaz az összes olyan x komplex számot, amire $|x| \leq R$. A $|p(x)|$ függvénynek van minimuma K-n, hiszen K korlátos és zárt halmaz (azaz úgynevzett kompakt halmaz). Belátjuk, hogy ez K egy belső pontjában történik meg, és így ez a pont egy környezetében minimális érték. Minden, a körvonalon levő x pontra $|x| = R$, ezért

$$|p(x)| \geq R^n - |a_{n-1}|R^{n-1} - ... - |a_0|$$

Mivel $R > 1$, ez legalább

$$R^n - (|a_{n-1}| + ... + |a_0|)R^{n-1} \geq \frac{R^n}{2} > \frac{R}{2} \geq |a_0|$$

Mivel $|p(0)| = |a_0|$, legalább egy belső helyen $|p(x)|$ kisebb értéket vesz fel, mint a határon bárhol, tehát a minimumhely nem lehet a határon.

2.) Most abból a feltevésből, hogy $|p(x)|$-nek van nem nulla lokális minimuma, ellentmondásra jutunk. Feltehető - szükség esetén egy eltolást alkalmazva -, hogy lokális minimum helye a 0, és - esetleg leosztva a konstans taggal - azt is feltehetjük, hogy a polinom konstans tagja 1. Tudjuk, hogy az osztás nem változtatja meg a 0 lokális minimum jellegét, csak a minimum értékét. Tehát $|p(x)| \geq 1$ teljesül 0 egy környezetében. A polinomot $1 + A + B$ alakba írjuk, ahol is

$$A = a_r x^r \qquad \text{és} \qquad B = a_{r+1}x^{r+1} + ... + a_n x^n$$

azaz r a legkisebb index a $p(x) - 1$ polinomban, amire $a_r \neq 0$. Azt az esetet nézzük amikor B nem egyenlő 0-val. Válasszunk egy h $(0 < h < 1)$ értéket amely olyan kicsi, hogy

$$a)\ h < \frac{|a_r|}{|a_{r+1}| + ... + |a_n|}$$

$$b) |x| = h\text{-ra } |p(x)| \geq 1.$$

Tekintsük most azt az x értéket, amelyre $|x| = h$, és x argumentumra $\frac{\pi - \alpha}{r}$, ahol α

az a_r együttható irányszöge. Ekkor $a_r x^r$ szöge π, és így

$$a_r x^r = -|a_r|h^r$$

Vegyük az első két tag összegét:

$$1 + A = 1 + a_r x^r = 1 - |a_r|h^r$$

A feltételeink szerint a többi tag abszolút értékének összegére a következő felső becslést adhatjuk:

$$|a_{r+1}|h^{r+1} + ... + |a_n|h^n < (|a_{r+1}| + ... + |a_n|)h^{r+1} < |a_r|h^r$$

$$\Downarrow$$

$$|p(x)| < 1 - |a_r|h^r + |a_r|h^r = 1$$

ami ellentmondás, mert feltettük hogy $|p(x)| \geq 1$.

Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor $B = 0$, ekkor úgy választjuk meg h értékét, hogy csak a következő feltételnek kell teljesülnie:

$$|x| = h\text{-ra} \;\; p(x) \geq 1$$

Ugyanúgy választjuk meg x értékét, mint az előbb, vagyis

$$a_r x^r = -|a_r|h^r$$

Majd vesszük a tagok összegének abszolút értékét:

$$|1 + A + B| = |1 + A| = 1 - |a_r|h^r < 1$$

ami ellentmondáshoz vezet a feltételünk miatt. $\square$

4.3. Galois-elméleti bizonyítás

Először is bevezetek néhány fogalmat a Galois-elméletből, amire a későbbiek során szükségünk lesz.

Dehiníció: Ha K résztteste L-nek (ezt úgy is mondjuk, hogy L bővítése K-nak), akkor a bővítés fokának éppen az L bővítés K fölötti dimenzióját nevezzük.

$$K \leq L : \quad L|K \text{ bővítés} , \quad |L : K| = dim_K L$$

Definíció: Az $L|K$ bővítés normális, ha: $\forall\ f \in K[x]$ irreducibilis esetén, ha van olyan $\alpha \in L$, amelyre $f(\alpha) = 0$, akkor f lineáris faktorokra bomlik $L[x]$-ben.

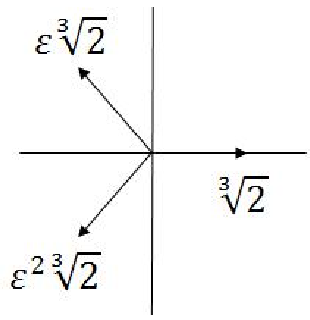
Állítás: Az $L|K$ véges bővítés pontosan akkor normális bővítés, ha $\exists\ f \in K[x]$ polinom, melyre: $f = c \cdot (x - \alpha_1)...(x - \alpha_n) \in L[x]$, $c \in K$ és $L = K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, azaz L a felbontási teste f-nek K fölött.

Példa$_1$: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ normális bővítés, mert fölbontási teste a $x^2 - 2$-nek, hiszen minden gyökét tartalmazza.

Példa$_2$: $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ nem normális bővítés, mert $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibilis és

$$\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : (\sqrt[3]{2})^3 - 2 = 0$$

de a másik két gyök $\varepsilon\sqrt[3]{2}$ és $\varepsilon^2\sqrt[3]{2}$ nem eleme $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$-nek, hiszen az csupa valós számból áll.



Definíció: Egy $f \in K[x]$ irreducibilis polinom, szeparábilis K felett, ha K semmilyen bővítésében sem létezik többszörös gyöke, vagyis $(f, f') = 1$

Megjegyzés$_1$: A fenti kritériumból látszik, hogy ha char$K = 0$, akkor $\forall\ f$ irreducibilis polinom szeparábilis.

Megjegyzés$_2$: Tudjuk azt is, hogy véges testek fölött is minden irreducibilis polinom szeparábilis.

Definíció: $L|K$ szeparábilis bővítés, ha L minden elemének K fölötti minimálpolinomja szeparábilis (vagyis egyetlen L-beli elem K feletti minimálpolinomjának sincs többszörös gyöke).

Feltevés: Innentől kezdve csak szeparábilis bővítésekkel foglalkozunk.

Definíció: Egy szeparábilis normális bővítést Galois-bővítésnek nevezzük.

Példa$_3$: $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, ... , $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{F}_q$ (véges testek)

Definíció: Legyen $L|K$ Galois-bővítés, ekkor

$$\mathrm{Gal}(L|K) = \{f \in \mathrm{Aut}L \quad | \quad f|_K = id_K\}$$

elemei az úgynevezett relatív automorfizmusok, ezt nevezik az $L|K$ bővítés Galois csoportjának.

Példa$_4$: Ha K prímteste L-nek, akkor $\mathrm{Gal}(L|K) = \mathrm{Aut}(L)$.

Példa$_5$: $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}_2$; elemei a helybenhagyáson kívül a komplex konjugálás.

Állítás: Ha $L|K$ Galois-bővítés és $G = \mathrm{Gal}(L|K)$, akkor $|G| = |L : K|$.

Definíció: Az $L|K$ bővítés köztes testének nevezzünk minden olyan M testet, melyre $K \leq M \leq L$.

Definíció: Legyen $L|K$ Galois-bővítés, $G =$Gal$(L|K)$.
Bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$\mathcal{K} = \{M : K \leq M \leq L\} \text{ köztes testek halmaza,}$$

$$\mathcal{H} = \{F \leq G\} \text{ Galois-csoport részcsoportjainak halmaza.}$$

Ekkor megadható két megfeleltetés $\mathcal{K}$ és $\mathcal{H}$ között az alábbi módon:

$$M \in \mathcal{K} \rightsquigarrow M^* = H = \{f \in G \quad | \quad f|_M = id_M\} \leq G \in \mathcal{H}$$

$$F \in \mathcal{H} \rightsquigarrow F^* = N = \{l \in L \quad | \quad \forall f \in F \ f(l) = l\}; \text{ ezek } F \text{ fixpontjainak a halmaza}$$

Nyilván $K \leq N \leq L$, azaz $N \in \mathcal{K}$ köztes test.
Könnyen belátható, hogy a $*$ megfeleltetés rendezésfordító, azaz:

$$F_1 \leq F_2 \in \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad F_1^* \geq F_2^*$$

$$M_1 \leq M_2 \in \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad M_1^* \geq M_2^*$$

Állítás: (A Galois-elmélet főtétele) Legyen $L|K$ Galois-bővítés, $G = \mathrm{Gal}(L|K)$, $\mathcal{K}$ a köztes testek, $\mathcal{H}$ pedig G részcsoportjainak a halmaza. Ekkor:

1. $(M^*)^* = M \quad \forall M \in \mathcal{K}$
   $(F^*)^* = F \quad \forall F \in \mathcal{H}$

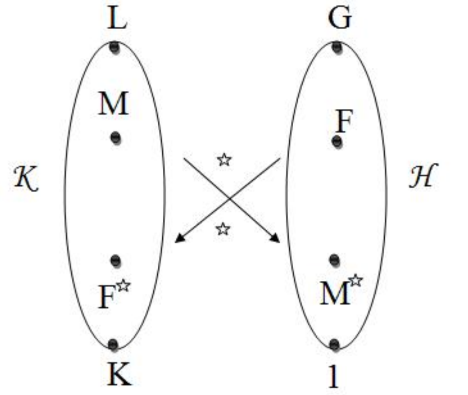
   Ebből következik, hogy mindkét megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, és egymásnak inverzei.

2. $G^* = K, \quad 1^* = L$
   $K^* = G, \quad L^* = 1$

3. $|M : K| = |G : M^*|$
   $F \leq G : \ |F| = |L : F^*|$

4. $M|K$ normális $\Longleftrightarrow M^* \lhd G$

5. $M|K$ normális $\Longrightarrow \mathrm{Gal}(M|K) = G/M^*$



Szükségünk lesz még néhány fogalomra a csoportelméletből is.

Állítás: (1. Sylow-tétel) Legyen G véges csoport, p tetszőleges prím, ekkor

$$\text{ha } |G| = p^\alpha \cdot q \quad \text{és} \quad (p,q) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \exists H \leq G: \quad |H| = p^\alpha$$

Megjegyzés: Azt mondjuk, hogy H p-Sylow G-ben, ha

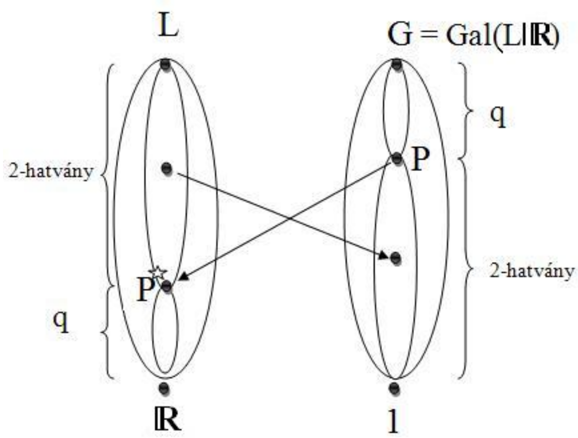
$$|H| = p^\alpha \quad \text{és} \quad (|G:H|, p) = 1.$$

Állítás: Ha $|H| = p^\alpha \implies \forall \beta \leq \alpha \quad \exists K \leq H: \quad |K| = p^\beta$

Ennyi előkészület után eljutottunk az algebra alaptételének bizonyításához:

Bizonyítás: Elegendő azt megmutatni, hogy $\mathbb{C}$-nek nincs algebrai bővítése.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{C}(\alpha)$ algebrai bővítés. Ha vesszük α minimálpolinomjának L felbontási testét, akkor egy $L|\mathbb{C}$ véges normális bővítést kapunk. Azt szeretnénk belátni, hogy $L = \mathbb{C}$.

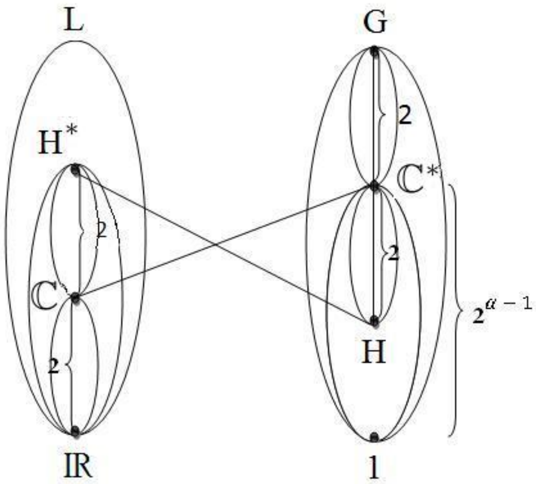


Vegyük először észre, hogy $L|\mathbb{R}$ is normális bővítés, és ha $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{R}) = G$ akkor $2|G$, mivel $|\mathrm{Gal}(L|\mathbb{R})| = |L : \mathbb{R}| = |L : \mathbb{C}| \cdot |\mathbb{C} : \mathbb{R}| = |L : \mathbb{C}| \cdot 2$

Legyen $P \leq G$ 2 - Sylow G-ben. Ekkor $|G : P| = q$ és a 2 nem osztja a q-t. A $P^*|\mathbb{R}$ bővítés foka $q \Longrightarrow P^*$-ban minden elem foka páratlan $\mathbb{R}$ fölött, mivel a $2 \not| \, q$.

A Bolzano-tételből következik, hogy minden páratlan fokú polinomnak létezik gyöke, tehát nem lehet irreducibilis, kivéve ha a polinom elsőfokú. Ez viszont azt jelenti, hogy $P^* = \mathbb{R}$.

Ebből azt kapjuk, hogy $P = G$, tehát G 2-csoport: $|G| = 2^\alpha$



$R \leq C < L,$ ahol is L páros fokú bővítése$\mathbb{C}$-nek

Ha $|G| = 2^\alpha$ és $|\mathbb{C} : \mathbb{R}| = 2 \quad \Longrightarrow \quad |G : \mathbb{C}^*| = 2$. Tehát $|\mathbb{C}^*| = 2^{\alpha-1}$.
Ha $|G| > 2$, akkor $\exists H \leq \mathbb{C}^* : \quad |H| = 2^{\alpha-2}$, ekkor viszont $|H^* : \mathbb{C}| = 2$

Ebből $\exists\, \beta \in H^*$, ami nem eleme $\mathbb{C}$-nek, és így $\mathrm{grad}\beta = 2$ vagyis a minimálpolinomja 2-odfokú irreducibilis polinom $\mathbb{C}[x]$-ben. Mivel a másodfokú egyenletekre ismerünk megoldóképletet, vagyis

$$\beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{C}$$

és mivel $\mathbb{C}$-ben minden számnak van négyztgyöke, ezért ellentmondást kaptunk. $\square$

Összefoglalás

A dolgozatom elején összefoglaltam az algebra történelmi múltját. Időben és térben bemutattam röviden a kialakulását, fejlődését és előrehaladását Európában és azon kívül. Színesítettem számos matematikus életrajzával.

Majd az algebra alaptételére adtam különböző bizonyítást. Először is az elsőként bizonyítótól, Gausstól mutattam be egyet modernebb feldolgozásban. Azután ismertettem egy elemi, illetve egy Galois elméletét felhasználót.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Ágoston Istvánnak, aki segített a témám kiválasztásában, dolgozatom elkészítésében illetve hasznos tanácsokkal, ötletekkel látott el a munkám során.

Köszönetet mondok évfolyamtársaimnak segítő, ösztönző tanácsaikért, és köszönöm mindazoknak, akik a szakdolgozatom megírása alatt lelkitámaszt adtak, illetve az egyetemi éveim alatt mellettem álltak.

Felhasznált irodalom

[1.] Sain Márton: *Nincs királyi út: Matematikatörténet*, Gondoloat, Bp., 1989

[2.] Benjamin Fine-Gerhard Rosenberger:*The fundamental theorem of algebra*, 1997

[3.] Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába*, Typotex, Bp., 2007

[4.] Simonovits András:*Válogatott fejezetek a matematika töténetéből*, Typotex, Bp.

[5.] http://hu.wikipedia.org/wiki/Algebra_alaptétele

Megjegyzés: A 27. oldalon található kép a Fine-Rosenberger könyvből vettem kiegészítve, a bizonyítás többi képe saját készítésű.