Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

A Laplace-transzformáció és alkalmazásai

Szakdolgozat

Laczkó Éva

Matematika BSc - Matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Bátkai András, Egyetemi docens

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

2010

Tartalomjegyzék

"Világos, hogy a Természet rendszerének
mostani állapota a megelőző pillanatban
fennállott állapot következménye,
és ha elképzelünk egy olyan Intelligenciát,
amely át tudja tekinteni az Univerzumban
található valamennyi létező közötti viszonyokat
egy adott pillanatban,
úgy ez az Intelligencia képes lenne arra,
hogy meghatározza e létezők helyét,
mozgását és általában hatásaikat
bármely korábbi vagy későbbi pillanatban."

(Pierre-Simon de Laplace)

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozat a Laplace-transzformáció ismertetésével, tulajdonságaival illetve azok alkalmazásaival foglalkozik. Először Laplace életéről és munkásságáról említek pár szót, majd definiálom a Laplace-transzformáció fogalmát elemi tulajdonságaival. Ezután néhány függvényre(generátorfüggvényre) alkalmazom a definíciót és kiszámolom a integrál segítségével a Laplace-transzformáltjukat. A Differenciálhatóság és integrálhatóság című fejezetben megvizsgálom a transzformáció generátorfüggvényének ($f(t)$) illetve a transzformált ($F(s)$) differenciálhatóságát és integrálhatóságát. Ezután további nem elemi tulajdonságokra nézek példákat, majd ismertetem a parciális törtekre bontás módszerét. Végül a közönséges differenciálegyenletekre (első-, másodrendű és magasabbrendű differenciálegyenletekre) vezetek le példákat, legvégül egy fizikai példával bemutatom a differenciálegyenlet-rendszerek megoldásához alkalmazható Laplace-transzformációt.

2. fejezet

Laplace élete

Pierre-Simon de Laplace 1749. március 23-án a normandiai Beaumont-en-Auge-n született. Apja, Pierre Laplace, almabor kereskedő, anyja, Marie-Anne Sochon, egy jómódú család mezőgazdasági földterület tulajdonosa, Tourgéville, de szüleit szegényparasztoknak vallotta. A helyi katonai iskola bejárós diákja volt, ahol hamar kitűnt a kíváló emlékezőképességével. Tanulmányai után ugyanitt tanított. Párizsba utazásának oka, hogy az adottságainak nem nyújtott eleget a vidéki iskola.

D'Alembertnél jelentkezett ajánlóleveleivel, bár a híres enciklopédista nem fogadta Laplace-t. Ekkor kézzel írt levélben kereste fel D'Alembert-et, aki a levél olvasása után Laplace elött kitárta kapuit, ugyanis ez az írás a mechanikai elvekről szólt. Nagyszerű értekezés volt, hiszen pár nappal később

Laplace az École Militaire matematika tanára lett. Ezután gyorsan haladt a tudományos karrierje, hiszen 24 évesen az akadémia levelező tagja, majd a királyi tüzérség növendékeinek vizsgáztatója. 1794-ben az École Normale Supérieure analízis tanára, majd a Mértékügyi Hivatal tagja és elnöke.

Laplace, a matematikus

1776-ben új módszert dolgozott ki Lagrange-zsal a közönséges differenciálegyenletek megoldására való visszavezetésre. A másodrendű parciális differenciálegyenletek között nevezetessé vált a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

a húrrezgés differenciálegyenlete. Melyet 1770-ben Eulernek sikerült kanonikus alakra hoznia

$$y = f(x + at) + \varphi(x - at).$$

Laplace ezt a módszert felhasználva megadta a másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet megoldását:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + A\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + B\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + C\frac{\partial z}{\partial x} + D\frac{\partial z}{\partial y} + Ez + F = 0.$$

1779-ben ő vezette be a határozott integrál fogalmát, ezért sokan csak úgy hívják, hogy

"Franciaország Newtona".

Laplace munkássága a XIX. század elején új fordulatot adott a valószínűségszámításnak. 1774-től e tárgyban gyűjtögetett tanulmányok 1812-re összeálltak a Théorie analytique des probabilités (A valószínűség analitikai elmélete) című művében. 2 évvel később az Essai philosophique des probabilités (A valószínűség filozófiai esszéje) című alkotás is megjelent. Laplace is az elsők közt ismerte fel, hogy az $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ valószínűségi görbe alatti terület pont a $\sqrt{\pi}$. A normálelszolással kapcsolatban csak Gauss nevét szokás említeni, pedig tőle függetlenül Laplace is felfedezte.

Laplace, a fizikus

A fizikai matematika számára kiemelkedően fontos volt a gravitációs és az elektromos erőterek potenciáljának megismeréséhez a differenciálegyenlet. Laplace 1787-ben bizonyította be, hogy egy erőtér V potenciálfüggvénye kielégíti az alábbi differenciálegyenletet:

$$\triangle V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

A Laplace-féle $\triangle V = 0$ differenciálegyenlet megoldása a fizikában sokféle alkalmazásra lelt, vagyis számos kitűnő matematikust és fizikust foglalkoztatott.

Laplace, a csillagász

A Mécanique Céleste (égi mechanika) első kötetében az első általános törvényeket fogalmazza meg, mint például, hogy mi az egyensúly a mozgás és a halmazállapot között, míg a második könyv az egyetemes gravitáció törvényéről, és a naprendszerbeli súlypontok mozgásairól szól. A legfontosabb matematikai megközelítés itt a felállított differenciálegyenletek és azok megoldása, melyek leírják a létrejövő mozgásokat. A második kötet foglalkozik a bolygók mechanikai alkalmazásainak tanulmányozásával.

1810 után majdnem minden európai tudományos akadémia tagja. A javára kell írni, hogy a fiatal tudósokat mindig őszinte barátsággal segítette, valamint tudóstársai becsülték és tisztelték. Rövid betegeskedés után 87 évesen 1827. március 5-én Párizsban hunyt el. Utolsó˝ mondata:

"Amit tudunk, az vajmi kevés, amit nem tudunk, az roppant sok!"

3. fejezet

A Laplace-transzformáció

3.1. Definíció és példák

A Laplace-transzformáció az $f(t)$ a $0 \leq t \leq \infty$ intervallumon értelmezett komplex változós függvényhez hozzárendeli a $F(s)$ komplex változós függvényt:

$$F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt,$$

ahol $s \in \mathbb{C}$ és s valós része pozitív (azaz $Re(s) > 0$). Az így előállított komplex változótól függő F függvényt nevezzük az f valós változós függvény Laplace-transzformáltjának. Az f függvényt eredeti függvénynek vagy generátorfüggvénynek nevezik. Szimbolikus jelölés: $L[f] = F$.

3.2. Néhány elemi tulajdonság

A Laplace-transzformáció alkalmazása során egyszerűbb, de fontos tulajdonság a linearitás.

1. $L[c \cdot f(t)] = c \cdot L[f(t)]$

   A c valós konstans kiemelhető:

$$L[c \cdot f(t)] = \int_0^\infty c \cdot f(t)e^{-st}dt = c \cdot \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = c \cdot L[f(t)]$$

2. $L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)]$

Az integrál additívitása és disztributívitása miatt:

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = \int_0^\infty (f_1(t) + f_2(t))e^{-st}dt =$$

$$= \int_0^\infty (f_1(t)e^{-st} + f_2(t)e^{-st})dt = \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt =$$
$$= L[f_1(t)] + L[f_2(t)]$$

3.3. Egyszerű alkalmazások

A definíció szerint számítsuk ki néhány függvény Laplace-transzformáltját!

1. Legyen $f(t) = 1$.

   Ekkor

   $$F(s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^\infty = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

   Vagyis $L[1] = \frac{1}{s}$, ahol $Re(s) > 0$.
   A linearitás miatt bármilyen $c \in R$ konstans esetén $L[c] = \frac{c}{s}$.

2. Legyen $f(t) = t^n$, ahol $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

   Az előállításhoz először parciálisan kell integrálnunk, majd felhasználjuk az előző példa eredményét.

   - Ha $n = 1$, vagyis $f(t) = t$, ekkor parciálisan integrálva ($\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$)
     $$F(s) = \int_0^\infty t \cdot e^{-st}dt = \left[t \cdot \frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}dt = 0 + \left[\frac{e^{-st}}{-s^2}\right]_{t=0}^\infty = \frac{1}{s^2}$$
     Vagyis $L[t] = \frac{1}{s^2}$ és tetszőleges $c \in R$ esetén $L[c \cdot t] = \frac{c}{s^2}$, ahol $Re(s) > 0$.

- Ha $n = 2$, azaz $f(t) = t^2$, akkor

$$F(s) = \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-st} dt = \left[t^2 \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty 2t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt =$$

$$= 0 - \int_0^\infty \frac{2}{-s} \cdot t \cdot e^{-st} dt = \frac{2}{s} \cdot \int_0^\infty t \cdot e^{-st} dt = \frac{2}{s} \cdot L[t] =$$

$$= \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3} = L[t^2],$$

ahol $Re(s) > 0$.

- Ha $n = 3$,vagyis $f(t) = t^3$, akkor (parciálisan integrálva)

$$F(s) = \int_0^\infty t^3 \cdot e^{-st} dt = \left[t^3 \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty 3t^2 \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt =$$

$$= 0 - \int_0^\infty \frac{3}{-s} \cdot t^2 \cdot e^{-st} dt = 0 + \frac{3}{s} \cdot \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-st} dt = \frac{3}{s} \cdot L[t^2] =$$

$$= \frac{3}{s} \cdot \frac{2}{s^3} = \frac{3 \cdot 2}{s^4} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{s^4} = \frac{3!}{s^4} = L[t^3],$$

ahol $Re(s) > 0$.

- Bármilyen n esetén teljes indukcióval adódik a Laplace-transzformált, de most nézzük meg részletesen:

$$L[t^n] = \int_0^\infty t^n \cdot e^{-st} dt = \left[t^n \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty n \cdot t^{n-1} \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt =$$

$$= 0 - \int_0^\infty \frac{n}{-s} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-st} dt = \frac{n}{s} \cdot \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{n}{s} \cdot \left(\left[t^{n-1} \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty (n-1) t^{n-2} \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt \right) =$$

$$= \frac{n}{s} \cdot \left(0 - \int_0^\infty \frac{n-1}{-s} \cdot t^{n-2} \cdot e^{-st} dt \right) = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \int_0^\infty t^{n-2} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \left(\left[t^{n-2} \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty (n-2) t^{n-3} \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt \right) =$$

$$= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \left(0 - \int_0^\infty \frac{n-2}{-s} \cdot t^{n-3} \cdot e^{-st} dt \right) =$$

$$= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \cdot \int_0^\infty t^{n-3} \cdot e^{-st} dt = ... =$$

$$= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \cdot ... \cdot \frac{4}{s} \cdot \int_0^\infty t^3 \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \cdot ... \cdot \frac{4}{s} \cdot L[t^3] = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \cdot ... \cdot \frac{4}{s} \cdot \frac{3!}{s^4} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 4 \cdot 3!}{s \cdot s \cdot s \cdot ... \cdot s \cdot s^4} = \frac{n!}{s^{n+1}} = L[t^n],$$

ahol $Re(s) > 0$.

3. Legyen $f(t) = e^{at}$.

   Ekkor

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_{t=0}^\infty = \frac{1}{s-a}$$

   Tehát $L[e^a] = \frac{1}{s-a}$, ahol $Re(s) > 0$.

4. Legyen $f(t) = t^n \cdot e^{at}$, ahol $a \in \mathbb{C}$, és $n \in \mathbb{N}^+$

   - Ha $n = 1$, azaz $f(t) = t \cdot e^{at}$, ahol a tetszőleges valós vagy komplex állandó.

     Itt is parciálisan integrálunk:

$$F(s) = \int_0^\infty t \cdot e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty t \cdot e^{-(s-a)t} dt =$$

$$= \left[t \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)^2} \right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} dt = 0 - \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)^2} \right]_{t=0}^\infty = \frac{1}{(s-a)^2}$$

     Tehát $L[t \cdot e^{at}] = \frac{1}{(s-a)^2}$, ahol $Re(s-a) > 0$.

   - Ha $n = 2$, vagyis $f(t) = t^2 \cdot e^{at}$, akkor parciálisan kell integrálni:

$$F(s) = \int_0^\infty t^2 \cdot e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-(s-a)t} dt =$$

$$= \left[t^2 \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty 2t \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} dt =$$

$$= 0 - \int_0^\infty \frac{2}{-(s-a)} \cdot t \cdot e^{-(s-a)t} dt =$$

$$= 0 + \frac{2}{(s-a)} \cdot \int_0^\infty t \cdot e^{-(s-a)t} dt = \frac{2}{s-a} \cdot \int_0^\infty t \cdot e^{at} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{2}{s-a} \cdot L[t \cdot e^{at}] = \frac{2}{s-a} \cdot \frac{1}{(s-a)^2} = \frac{2 \cdot 1}{(s-a)^3} = \frac{2!}{(s-a)^3} = L[t^2 \cdot e^{at}],$$

ahol $Re(s-a) > 0$.

- Teljes indukcióval igazolható $n \geq 3$, most részletesen nézzük meg:

$$L[t^n \cdot e^{at}] = \int_0^\infty t^n \cdot e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty t^n \cdot e^{-(s-a)t} dt =$$

$$= \left[t^n \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty n \cdot t^{n-1} \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} dt =$$

$$= 0 - \int_0^\infty \frac{n}{-(s-a)} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-(s-a)t} dt = \frac{n}{s-a} \cdot \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-(s-a)t} dt =$$

$$= \frac{n}{s-a} \cdot \left(\left[t^{n-1} \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty (n-1) t^{n-2} \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} dt \right) =$$

$$= \frac{n}{s-a} \cdot \left(0 - \int_0^\infty \frac{n-1}{-(s-a)} \cdot t^{n-2} \cdot e^{-(s-a)t} dt \right) =$$

$$= \frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \int_0^\infty t^{n-2} \cdot e^{-(s-a)t} dt =$$

$$= \frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \left(\left[t^{n-2} \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty (n-2) t^{n-3} \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} dt \right) =$$

$$= \frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \left(0 - \int_0^\infty \frac{n-2}{-(s-a)} \cdot t^{n-3} \cdot e^{-(s-a)t} dt \right) =$$

$$= \frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \frac{n-2}{s-a} \cdot \int_0^\infty t^{n-3} \cdot e^{-(s-a)t} dt = ... =$$

$$= \frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \frac{n-2}{s-a} \cdot ... \cdot \frac{3}{s-a} \cdot \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-(s-a)t} dt =$$

$$= \frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \frac{n-2}{s-a} \cdot ... \cdot \frac{3}{s-a} \cdot L[t^2 \cdot e^{at}] =$$

$$= \frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \frac{n-2}{s-a} \cdot ... \cdot \frac{3}{s-a} \cdot \frac{2!}{(s-a)^3} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2!}{(s-a) \cdot (s-a) \cdot (s-a) \cdot ... \cdot (s-a) \cdot (s-a)^3} =$$

$$= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} = L[t^n \cdot e^{at}],$$

ahol $Re(s-a) > 0$.

5. A trigonometrikus függvények Laplace-transzformáltjai:

- Legyen $f(t) = \sin at$, ahol a tetszőleges valós vagy komplex szám.

  Itt a kétszeri parciális integrálás helyett egy sokkal könnyebb számolással is megkapjuk a transzformáltat. Ha a sin függvényt exponenciálisokkal fejezzük ki. $\sin at = \frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2}$.
  Vagyis

$$F(s) = \int_0^\infty \sin at \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2} \cdot (e^{iat} - e^{-iat}) \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty \left(e^{iat} - e^{-iat}\right) \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty \left(e^{iat} \cdot e^{-st} - e^{-iat} \cdot e^{-st}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{iat} \cdot e^{-st} dt - \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-iat} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-(s-ia)t} dt - \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-(s+ia)t} dt =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^{-(s-ia)t}}{-(s-ia)}\right]_{t=0}^\infty - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^{-(s+ia)t}}{-(s+ia)}\right]_{t=0}^\infty$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-ia} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+ia} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s+ia-(s-ia)}{s^2+a^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s+ia-s+ia}{s^2+a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2ia}{s^2+a^2} = \frac{ia}{s^2+a^2},$$

  ahol $Re(s^2+a^2) > 0$.

- Legyen $f(t) = \cos at$, a valós vagy komplex szám.

  Az előzőekhez hasonlóan felhasználjuk a $\cos at = \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$ kifejezést.

$$F(s) = \int_0^\infty \cos at \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2} \cdot (e^{iat}+e^{-iat}) \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty \left(e^{iat}+e^{-iat}\right) \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty \left(e^{iat} \cdot e^{-st} + e^{-iat} \cdot e^{-st}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{iat} \cdot e^{-st} dt + \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-iat} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-(s-ia)t} dt + \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-(s+ia)t} dt =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^{-(s-ia)t}}{-(s-ia)}\right]_{t=0}^\infty + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^{-(s+ia)t}}{-(s+ia)}\right]_{t=0}^\infty$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-ia} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+ia} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s+ia+(s-ia)}{s^2+a^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s+ia+s-ia}{s^2+a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2},$$

  ahol $Re(s^2+a^2) > 0$.

6. A hiperbolikus függvények Laplace-transzformáltjai:

   - $f(t) = \cosh at$, ahol tetszőleges $a \in \mathbb{C}$ (vagy $a \in \mathbb{R}$)

     Mivel $\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$, ezért

$$F(s) = \int_0^\infty \cosh at \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{e^{at}+e^{-at}}{2} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2} \cdot \left(e^{at}+e^{-at}\right) \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty \left(e^{at}+e^{-at}\right) \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty (e^{at} \cdot e^{-st} + e^{-at} \cdot e^{-st}) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st} dt + \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt + \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_{t=0}^\infty + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right]_{t=0}^\infty =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+a} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s+a+s-a}{s^2-a^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{s^2-a^2} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

Vagyis $L[\cosh at] = \frac{s}{s^2-a^2}$, ahol $Re(s^2 - a^2) > 0$.

- Hasonlóan működik a $f(t) = \sinh at$ függvényre is, csak itt a $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ helyettesítést kell használni. Így $L[\sinh at] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{a}{s^2-a^2}$ összefüggést kapjuk, ahol $Re(s^2 - a^2) > 0$.

3.4. Differenciálhatóság és integrálhatóság

A generátorfüggvény deriválása

Eddig a definícióból számoltuk ki a függvények Laplace-transzformáltjait. A továbbiakban olyan eljárást vagy tételt fogunk alkalmazni, amellyel sokszor könnyebb előállítani a függvények Laplace-transzformáltját, mint a definícióból.

Először a függvény deriváltjának Laplace-transzformáltjával foglalkozunk, amely a definícióból következik:

$$L[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = \left[f(t) e^{-st} \right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty f(t)(-s) e^{-st} dt =$$

$$= -f(0) + s \cdot \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = s \cdot L[f(t)] - f(0) = s \cdot F(s) - f(0),$$

ahol F az f függvény Laplace-transzformáltja. Vagyis $f'(t)$ függvény Laplace-transzformáltja:

$$L[f'(t)] = s \cdot L[f(t)] - f(0),$$

ahol $Re(s) > 0$.

A magasabbrendű deriváltak Laplace-transzformáltjait is elő tudjuk állítani az előző felhasználásával.

$$L[f''(t)] = \int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt = \left[f'(t)e^{-st}\right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty f'(t)(-s)e^{-st}dt =$$

$$= -f'(0) + s \cdot \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = -f'(0) + s \cdot L[f'(t)] =$$

$$= -f'(0) + s \cdot (s \cdot L[f(t)] - f(0)) = -f'(0) + s^2 \cdot L[f(t)] - s \cdot f(0) =$$

$$= s^2 \cdot L[f(t)] - s \cdot f(0) - f'(0),$$

ahol $Re(s) > 0$.

Teljes indukcióval igazolható a generátorfüggvény n-edik deriváltjának a Laplace-transzformáltja, ahol $n \in N$.

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

ahol $Re(s) > 0$.

Ezt lehet másképp is írni:

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$

Ezeket a formulákat a differenciálegyenletek és differenciál-egyenletrendszerek megoldásai során alkalmazhatjuk.

Példák

1. Az $f(t) = t$ függvényt már korábban kiszámoltuk a definícióból, akkor $L[t] = \frac{1}{s^2}$ alakot kaptuk, ahol $Re(s) > 0$.
   Most az előbb mutatott módszert alkalmazzuk, amihez szükség van a függvény deriváltjára. $f'(t) = (t)' = 1$.
   A $L[f'(t)] = s \cdot L[f(t)] - f(0)$ formulába kell csak behelyettesíteni. Vagyis $L[1] = s \cdot L[t] - 0 = s \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s}$, ahol $Re(s) > 0$.

2. Nézzük az $f(t) = \cos at$ függvényt!

   Korábban már meghatároztuk a Laplace-transzformáltját:
   $$L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2},$$
   ahol $Re(s^2 + a^2) > 0$
   Valamint szükség van még a függvény deriváltjára:
   $$f'(t) = (\cos at)' = -a \cdot \sin at$$

   Ezekután már csak be kell helyettesítenünk a $L[f'(t)] = s \cdot L[f(t)] - f(0)$ képletbe.
   $$L[-a \cdot \sin at] = s \cdot L[\cos at] - \cos(a \cdot 0) = s \cdot L[\cos at] - \cos 0 = s \cdot \frac{s}{s^2 + a^2} - 1 =$$
   $$= \frac{s^2}{s^2 + a^2} - 1 = \frac{s^2 - (s^2 + a^2)}{s^2 + a^2} = \frac{s^2 - s^2 - a^2}{s^2 + a^2} = \frac{-a^2}{s^2 + a^2}$$

   A linearitás miatt:
   $$-a \cdot L[\sin at] = \frac{-a^2}{s^2 + a^2} \qquad / : (-a)$$
   $$L[\sin at] = -\frac{1}{a} \cdot \frac{-a^2}{s^2 + a^2} = \frac{a^2}{a \cdot (s^2 + a^2)} = \frac{a}{s^2 + a^2},$$
   ahol $Re(s^2 + a^2) > 0$.

3. Számítsuk ki az $f(t) = \sin^2 at$ függvény Laplace-transzformáltját!

   Szükség van a függvény deriváltjára:
   $f'(t) = (\sin^2 at)' = 2 \cdot \sin at \cos at \cdot a = a2 \sin at \cdot \cos at = a \cdot \sin 2at$

$$L[f'(t)] = L[a \cdot \sin 2at] = a \cdot L[\sin 2at] = a \cdot \frac{2a}{s^2 + 4a^2} = \frac{2a^2}{s^2 + 4a^2}$$

$$f(0) = \sin^2 a \cdot 0 = \sin^2 0 = 0^2 = 0$$

$$L[f'(t)] = s \cdot L[f(t)] - f(0)$$

$$\frac{2a^2}{s^2 + 4a^2} = s \cdot L[f(t)] - 0$$

$$\frac{2a^2}{s^2 + 4a^2} = s \cdot L[f(t)] \qquad / : s$$

$$\frac{2a^2}{s \cdot (s^2 + 4a^2)} = L[f(t)]$$

   Vagyis $L[\sin^2 at] = \frac{2a^2}{s \cdot (s^2+4a^2)}$, ahol $Re(s^2 + 4a^2) > 0$.

A Laplace-transzformált deriválása

Most a Laplace-transzformált deriváltját vizsgáljuk meg. A deriválás és integrálás felcserélhető a transzformált deriválásakor, ha a teljesülnek a szükséges feltételek a Laplace-transzformált létezéséhez.

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) \cdot \frac{d}{ds} e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) \cdot (-t) e^{-st} dt =$$

$$= -\int_0^\infty t \cdot f(t) e^{-st} dt = -L[t \cdot f(t)]$$

Vagyis $\frac{d}{ds}F(s) = -L[t \cdot f(t)]$, ahol $Re(s) > 0$.

$$\frac{d^2}{ds^2}F(s) = \frac{d^2}{ds^2}\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) \cdot \frac{d^2}{ds^2} e^{-st} dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\cdot(-t)^2 e^{-st}dt = (-1)^2 \cdot \int_0^\infty t^2 \cdot f(t) e^{-st}dt = 1 \cdot L[t^2 \cdot f(t)]$$

Vagyis $\frac{d^2}{ds^2}F(s) = L[t^2 \cdot f(t)]$, ahol $Re(s) > 0$.

Tekintsük tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az n-edrendű deriváltat:

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = \frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)\cdot \frac{d^n}{ds^n}e^{-st}dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\cdot(-t)^n e^{-st}dt = (-1)^n \cdot \int_0^\infty t^n \cdot f(t) e^{-st}dt = (-1)^n \cdot L[t^n \cdot f(t)]$$

Vagyis $\frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n \cdot L[t^n \cdot f(t)]$, ahol $Re(s) > 0$.

Példák

1. Nézzük az $f(t) = t \cdot \cos at$ függvényt!

   Korábbról már tudjuk, hogy $L[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2} = F(s)$. Alkalmazzuk az fenti módszert, vagyis helyettesítsünk be a $\frac{d}{ds}F(s) = -L[t \cdot \cos at]$ formulába.

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = -L[t \cdot \cos at] \qquad / : (-1)$$

$$L[t\cdot\cos at] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = -\left(\frac{1\cdot s^2+a^2-s\cdot 2s}{(s^2+a^2)^2}\right) =$$

$$= -\left(\frac{s^2+a^2-2s^2}{(s^2+a^2)^2}\right) = -\left(\frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2}\right) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2},$$

   ahol $Re(s^2+a^2) > 0$.

2. Számítsuk ki az $f(t) = t^2 \cdot \sinh at$ függvény transzformáltját!

   Tudjuk az $F(s) = L[\sinh at] = \frac{a}{s^2-a^2}$ transzformáltat.
   Most a $\frac{d^2}{ds^2}F(s) = (-1)^2 \cdot L[t^2 \cdot f(t)]$ formulát alkalmazzuk.

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{a}{s^2-a^2}\right) = (-1)^2 \cdot L[t^2 \cdot \sinh at]$$

Mivel $(-1)^2 = 1$, ezért:

$$L[t^2 \cdot \sinh at] = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{a}{s^2-a^2}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{0\,(\cdot s^2-a^2)-a\cdot(2s)}{(s^2-a^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{-2as}{(s^2-a^2)^2}\right) = \frac{-2a\cdot(s^2-a^2)^2-2as(2\cdot(s^2-a^2)\cdot 2s)}{(s^2-a^2)^4} =$$

$$= \frac{-2a\cdot(s^2-a^2)^2-6as^2(s^2-a^2)}{(s^2-a^2)^4} =$$

$$= \frac{(s^2-a^2)\cdot[-2a(s^2-a^2)+6as^2]}{(s^2-a^2)\cdot(s^2-a^2)^3} = \frac{-2as^2+2a^3+6as^2}{(s^2-a^2)^3} =$$

$$= \frac{2a^3+4as^2}{(s^2-a^2)^3} = \frac{2a(a^2+2s^2)}{(s^2-a^2)^3},$$

ahol $Re(s^2-a^2) > 0$.

3. Tetszőleges n pozitív egész esetén nézzük az $f(t) = t^n \cdot e^{at}$ függvényt!

Az előző fejezetben az e^{at} Laplace-transzformáltját már kiszámoltuk.

$$F(s) = L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$

Ebben a feladatban az n-edik deriváltra vonatkozó formulát alkalmazzuk: $\frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n \cdot L[t^n \cdot f(t)]$

$$\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-a}\right) = (-1)^n \cdot L[t^n \cdot e^{at}] \qquad / : (-1)^n$$

$$L[t^n \cdot e^{at}] = \frac{1}{(-1)^n}\cdot\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{1}{(-1)^n}\cdot\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left(\frac{(-1)}{(s-a)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(-1)^n}\cdot\frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}}\left(\frac{(-1)(-2)}{(s-a)^3}\right) = \frac{1}{(-1)^n}\cdot\frac{d^{n-3}}{ds^{n-3}}\left(\frac{(-1)(-2)(-3)}{(s-a)^4}\right) = ... =$$

$$= \frac{1}{(-1)^n}\cdot(-1)^n\cdot\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}},$$

ahol $Re(s-a) > 0$.

A generátorfüggvény integrálfüggvénye

Egy f függvény primitív függvényének Laplace-transzformáltjára levezethető egy összefüggés a deriváltakra vonatkozó formula alkalmazásával.

Legyen $\varphi(t) = \int_0^t f(s)ds$ a primitív függvény. Tehát $\varphi'(t) = f(t)$ összefüggésből adódik a következő formula:

$$L\left[\varphi'(t)\right] = L[f(t)]$$

A deriváltakra vonatkozó módszer alapján:

$$L\left[\varphi'(t)\right] = s \cdot L[\varphi(t)] - \varphi(0) = s \cdot L[\varphi(t)]$$

Mivel $\varphi(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$

$$L\left[\varphi'(t)\right] = s \cdot L[\varphi(t)]$$

$$L[f(t)] = s \cdot L\left[\int_0^t f(s)ds\right] \qquad / : s$$

$$L\left[\int_0^t f(s)ds\right] = \frac{1}{s} \cdot L[f(t)] = \frac{F(s)}{s}$$

ahol F az f függvény Laplace-transzformáltja.

Tehát az F transzformált s-sel való osztása azonos az f generátorfüggvény integrálásával.

Példák

1. Határozzuk meg a $\varphi(t) = \int_0^t s \cdot \cos asds$ függvény Laplace-transzformáltját!

   Az előbb bemutatott módszer alapján:

   $$L[\varphi(t)] = \frac{L[s \cdot \cos as]}{s} = \frac{1}{s} \cdot L[s \cdot \cos as] = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 - a^2}{\left(s^2 + a^2\right)^2} = \frac{s^2 - a^2}{s \cdot \left(s^2 + a^2\right)^2},$$

   ahol $Re(s^2 + s^2) > 0$.

2. Határozzuk meg a $\varphi(t) = \int_0^t s^3 \cdot e^s ds$ függvény Laplace-transzformáltját!

   Korábbi példák szerint:

   $$L[\varphi(t)] = \frac{L[s^3 \cdot e^s]}{s} = \frac{1}{s} \cdot L[s^3 \cdot e^s] = \frac{1}{s} \cdot \frac{3!}{(s-1)^4} = \frac{6}{s(s-1)^4},$$

   ahol $Re(s) > 0$ és $Re(s-1) > 0$.

3. Határozzuk meg a $\varphi(t) = \int_0^t \sin^2 asds$ függvény Laplace-transzformáltját!

   Hasonlóan az előzőekhez:

   $$L[\varphi(t)] = \frac{L[\sin^2 as]}{s} = \frac{1}{s} \cdot L[\sin^2 as] = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 + 2a^2}{s\left(s^2 + 4a^2\right)} = \frac{s^2 + 2a^2}{s^2\left(s^2 + 4a^2\right)},$$

   ahol $Re(s^2 + 4a^2) > 0$.

A Laplace-transzformált integrálása

A Laplace-transzformált integrálfüggvényének vizsgálatakor is egy érdekes formulát kapunk.

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) dt \int_s^\infty e^{-st} dt =$$

$$= \int_s^\infty \left(\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt\right) ds = \int_s^\infty F(s) ds,$$

ahol a $\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-st}}{t}\right) = -e^{-st}$ összefüggést használtuk fel.

Példák

1. Határozzuk meg az $f(t) = \frac{\sin at}{t}$ függvény transzformáltját!

   Felhasználva az előbbi módszert:

   $$L\left[\frac{\sin at}{t}\right] = \int_s^\infty L[\sin at] dt = \int_s^\infty \frac{a}{s^2 + a^2} ds =$$

$$= \int_s^\infty \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} ds = \frac{1}{a} \cdot \int_s^\infty \frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} ds = \left[\frac{1}{a} \cdot \left(\arctan\left(\frac{s}{a}\right)\right) \cdot a\right]_s^\infty =$$

$$= \left[\arctan\left(\frac{s}{a}\right)\right]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s}{a}\right) = \arctan\left(\frac{a}{s}\right),$$

ahol $Re(s) > 0$.

2. Határozzuk meg az $f(t) = \frac{\sin^2 at}{t}$ függvény transzformáltját! Korábbi feladatból már ismerjük: $L[\sin^2 at] = \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$

$$L[\sin^2 at] = \frac{2a^2}{s\left(s^2 + 4a^2\right)}$$

$$L[f(t)] = \int_s^\infty L[\sin^2 at] dt = \int_s^\infty \frac{2a^2}{s\left(s^2 + 4a^2\right)} ds$$

Parciális törtekre kell bontanunk (a módszert később mutatjuk be)

$$\frac{2a^2}{s\left(s^2 + 4a^2\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 4a^2} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2s}{s^2 + 4a^2}$$

$$\int_s^\infty \left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2s}{s^2 + 4a^2}\right) ds = \frac{1}{2} \ln|s| - \frac{1}{4} \ln|s^2 + 4a^2| =$$

$$= \frac{2}{4} \ln|s| - \frac{1}{4} \ln|s^2 + 4a^2| = \frac{1}{4} \ln|s^2| - \frac{1}{4} \ln|s^2 + 4a^2| = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{s^2}{s^2 + 4a^2}\right|$$

$$L\left[\frac{\sin^2 at}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{2a^2}{s\left(s^2 + 4a^2\right)} ds = \frac{1}{4} \left[\ln\left|\frac{s^2}{s^2 + 4a^2}\right|\right]_s^\infty =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\ln 1 - \ln\left|\frac{s^2}{s^2 + 4a^2}\right|\right] = \frac{1}{4} \cdot \ln\left|1 + \frac{4a^2}{s^2}\right|,$$

ahol $Re(s) > 0$.

3.5. További tulajdonságok

1. **Eltolás**

   Legyen adott f függvény, ahol a pozitív valós szám.

$$g(t) := \begin{cases} f(t-a), & \text{ha } t \geq a, \\ 0, & \text{ha } 0 \leq t < a. \end{cases}$$

   Vagyis az f függvény a valós x tengely mentén való eltolása a-val jobbra. Nézzük meg g Laplace-transzformáltját!

$$L[g(t)] = \int_0^\infty g(t) \cdot e^{-st} dt = \int_a^\infty g(t) \cdot e^{-st} dt = \int_a^\infty f(t-a) \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \int_0^\infty f(x) \cdot e^{-s(x+a)} dx = \int_0^\infty f(x) \cdot e^{-sx} \cdot e^{-sa} dx =$$

$$= e^{-as} \cdot \int_0^\infty f(x) \cdot e^{-sx} dx = e^{-as} \cdot L[f(t)],$$

   ahol $x = t-a$, $t = x+a$, $dt = dx$ helyettesítéseket alkalmaztuk. Vagyis a kapott összefüggés, azaz $L[f(t-a)] = e^{-as} \cdot L[f(t)]$ az eltolási tétel.

   Példák

   Számítsuk ki az alábbi függvények Laplace-transzformáltját!

   - $$g := \begin{cases} (t-3)^2, & \text{ha } t \geq 3; \\ 0, & \text{ha } 0 \leq t < 3. \end{cases}$$

     Ekkor $f(t) = t^2$ és $a = 3$, valamint már korábban kiszámolt a $L[t^2] = \frac{2!}{s^3}$ transzformált felhasználásával: $L[g(t)] = e^{-2s} \cdot L[f(t)] = e^{-2s} \cdot \frac{2!}{s^3}$, ahol $Re(s) > 0$.

   - $$g := \begin{cases} e^{-b(t-a)}, & \text{ha } t \geq a; \\ 0, & \text{ha } 0 \leq t < a. \end{cases}$$

     Itt $f(t) = e^{-bt}$, transzformáltja: $L[e^{-bt}] = \frac{1}{s+b}$.
     Tehát $L[g(t)] = e^{-as} \cdot L[e^{-bt}] = \frac{e^{-as}}{s+b}$, ahol $Re(s+b) > 0$.

2. **Csillapítási tétel**
   Az $F(s+a)$ függvénynek mi a generátorfüggvénye, ha F az f függvény Laplace-transzformáltja?

   Az $F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$ összefüggésből következik, hogy

$$F(s+a) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-(s+a)t} dt = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st-at} dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} \cdot e^{-at} dt = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-at} \cdot e^{-st} dt = L[f(t) \cdot e^{-at}]$$

   A kapott összefüggést, azaz $F(s+a) = L[f(t) \cdot e^{-at}]$ csillapítási tételnek nevezzük, vagy a Laplace-transzformáltra vonatkozó eltolási tételnek.

   Példák

   Számítsuk ki az alábbi függvények transzformáltjait a csillapítási tétel felhasználásával!

   - Legyen $f(t) = e^{-at} \cdot \cosh bt$.
     Korábbról már tudjuk, hogy $L[\cosh bt] = \frac{s}{s^2-b^2}$, $Re(s^2 - b^2) > 0$.
     Az $s = s + a$ helyettesítéssel a következő adódik:

$$L[e^{-at} \cdot \cosh bt] = \frac{s+a}{(s+a)^2 - b^2},$$

     ahol $Re((s+a)^2 - b^2) > 0$.

   - Legyen $f(t) = \frac{t^n}{n!} \cdot \sinh at$.
     Átalakítás után:

$$f(t) = \frac{t^n}{n!} \cdot \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} = e^{at} \cdot \frac{t^n}{2n!} - e^{-at} \cdot \frac{t^n}{2n!} =$$

$$= \frac{1}{2n!} e^{at} t^n - \frac{1}{2n!} e^{-at} t^n$$

     Korábban már beláttuk, hogy $L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Most a linearitás miatt $s = s - a$, illetve $s = s + a$ helyettesítésekkel a következőt kapjuk:

$$L[f(t)] = \frac{1}{2n!} \cdot \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} - \frac{1}{2n!} \cdot \frac{n!}{(s+a)^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s-a)^{n+1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s+a)^{n+1}} = \frac{1}{2(s-a)^{n+1}} - \frac{1}{2(s+a)^{n+1}} =$$

$$= \frac{(s+a)^{n+1} - (s-a)^{n+1}}{2(s^2-a^2)^{n+1}},$$

ahol $Re(s^2 - a^2) > 0$.

3. **Hasonlósági tétel**

Adott az f generátorfüggvény és az ő F Laplace-transzformáltja. Ezek alkalmazásával egyszerűen át lehet térni egy más argumentumú függvényre, vagyis a hasonlósági tétel segítségével.

$$F(s) = L[f(t)] = \int_s^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt,$$

ahol a t helyett $\alpha \cdot t$-t írunk, α pozitív konstans.

Összességében ez egy helyettesítéses integrálás, ahol a $\tau = \alpha \cdot t$, $t = \frac{\tau}{\alpha}$ jelöléssel az alábbi kifejezés adódik:

$$L[f(\alpha t)] = \int_0^\infty f(\alpha t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty f(\tau) \cdot e^{-s \cdot \frac{\tau}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\alpha} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \cdot \int_0^\infty f(\tau) \cdot e^{-s \cdot \frac{\tau}{\alpha}} d\tau = \frac{1}{\alpha} \cdot F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Vagyis $L[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} \cdot F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$.

Példa

Korábbi ismereteink alapján:

$$L[t - \sin t] = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{s^2 + 1 - s^2}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$$

Most a hasonlósági tételből:

$$L[t - \sin at] = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 \left(\left(\frac{a}{s}\right)^2 + 1\right)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{a^2} \cdot \frac{s^2+a^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{s^2(s^2+a^2)}{a^4}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^4}{s^2(s^2+a^2)} = \frac{a^3}{s^2(s^2+a^2)},$$

ahol $Re(s^2 + a^2) > 0$.

3.6. Parciális törtekre bontás módszere

A racionális törtfüggvényeket a parciális törtekre bontás módszerével a legegyszerűbb megoldani. Az adott racionális törtfüggvényt polinomok és résztörtek összegére bontjuk.

Példák

Számítsuk ki a következő F függvények inverz Laplace-transzformáltját a parciális törtekre bontás módszerével!

1. $F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$, ahol $Re(s) > 0$.

   A parciális törtekre bontás után:

   $$F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1},$$

   mivel $\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{s^2+1-s^2}{s^2+1} = \frac{1}{s(s^2+1)}$.

   Korábbról visszakeresve: $L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$, illetve $L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \cos t$, ezért

   $$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] = 1 - \cos t$$

2. $F(s) = \frac{s^2-2}{(s+2)^3}$ (3.6.1.), ahol $Re(s) > 0$.

   Parciális törtekre bontás után:

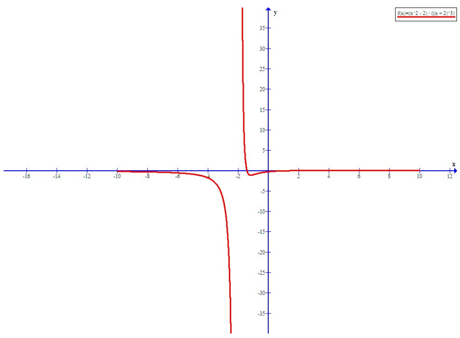
   $$F(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{2}{(s+2)^3},$$

mivel $\frac{1}{s+2} - \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{2}{(s+2)^3} = \frac{(s+2)^2-4(s+2)+2}{(s+2)^3} = \frac{s^2+4s+4-4s-8+2}{(s+2)^3} = \frac{s^2-2}{(s+2)^3}$.
Korábbi példákból: $L^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^n}\right] = t^n \cdot e^{-at}$. Vagyis

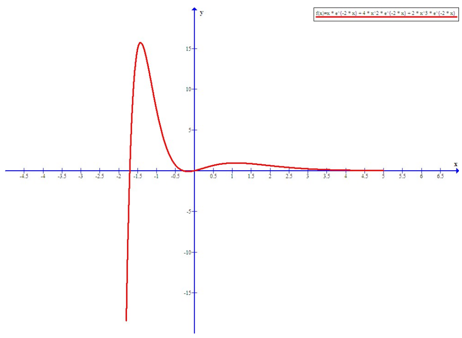
$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s+2} - \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{2}{(s+2)^3}\right] =$$

$$= L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] - L^{-1}\left[\frac{4}{(s+2)^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{2}{(s+2)^3}\right] =$$

$$= t \cdot e^{-2t} - 4 \cdot t^2 \cdot e^{-2t} + 2 \cdot t^3 \cdot e^{-2t} \quad (3.6.2.)$$



3.6.1. ábra



3.6.2. ábra

4. fejezet

Közönséges differenciálegyenletek

Az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek és differenciálegyenlet-rendszerek megoldása a Laplace-transzformáció egyik legfontosabb alkalmazása.

4.1. Első- és másodrendű differenciálegyenletek

Elsőrendű egyenletek

$$\begin{cases} a\dot{y}(t) + by(t) = f(t) \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

ahol a, b adott konstansok, $f(t)$ szintén adott függvény és $y(t)$ az ismeretlen függvény, $t > 0$. A differenciálhatóság fejezet alatt már láttuk, hogy $L[\dot{y}(t)] = s \cdot L[y(t)] - y(0)$. Vagyis

$$a\dot{y}(t) + by(t) = f(t)$$

$$a \cdot (s \cdot L[y(t)] - y(0)) + b \cdot L[y(t)] = L[f(t)]$$

$$a \cdot s \cdot L[y(t)] - a \cdot y(0) + b \cdot L[y(t)] = L[f(t)]$$

$$a \cdot s \cdot L[y(t)] - a \cdot y_0 + b \cdot L[y(t)] = L[f(t)]$$

$$(a \cdot s + b) \cdot L[y(t)] - a \cdot y_0 = L[f(t)]$$

$$(as + b) \cdot L[y(t)] - ay_0 = L[f(t)]$$

$$(as+b)\cdot L[y(t)] = L[f(t)] + ay_0$$
$$L[y(t)] = \frac{L[f(t)] + ay_0}{(as+b)}$$

másképp írva:

$$a\left[sL[y(t)] - y(0)\right] + bL[y(t)] = L[f(t)],$$

azaz ahol

$$\begin{cases} L[y(t)] = G(s)[ay(0) + L[f(t)]], \\ G(s) = [as+b]^{-1}. \end{cases}$$

Példa

Adjuk meg a következő differenciálegyenlet megoldását Laplace-transzformált segítségével!

$$\begin{cases} \dot{y}(t) + y(t) = e^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Mivel $L[e^t] = \frac{1}{s-1}$ és $L[\dot{y}(t)] = s \cdot L[y(t)] - y(0)$, ezért

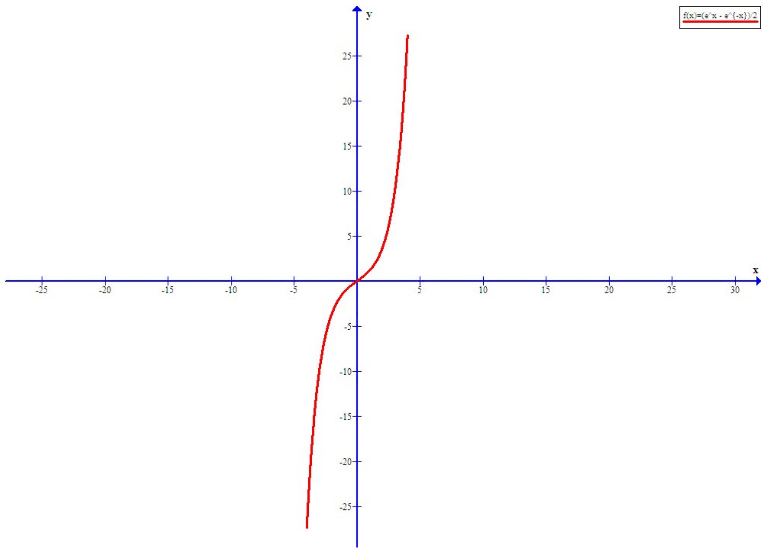
$$\dot{y}(t) + y(t) = e^t$$
$$s \cdot L[y(t)] - y(0) + L[y(t)] = \frac{1}{s-1}$$
$$(s+1) \cdot L[y(t)] - y(0) = \frac{1}{s-1}$$
$$(s+1) \cdot L[y(t)] - 1 = \frac{1}{s-1} \qquad / +1$$
$$(s+1) \cdot L[y(t)] = \frac{1}{s-1} + 1 \qquad / : (s+1)$$
$$L[y(t)] = \frac{\frac{1}{s-1} + 1}{s+1}$$
$$L[y(t)] = \frac{1}{(s-1)(s+1)} + \frac{1}{s+1}$$

$$L[y(t)] = \frac{1}{s^2-1} + \frac{1}{s+1}$$

Korábbi ismereteink alapján:

$$L[y(t)] = \sinh t + e^{-t} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} + e^{-t} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} + \frac{2e^{-t}}{2} =$$

$$= \frac{e^t - e^{-t} + 2e^{-t}}{2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t \ \ (4.1.1.)$$



4.1.1. ábra

Másodrendű egyenletek

Nézzük az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$\begin{cases} a\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) = f(t) \\ y(0) = y_0 \\ \dot{y}(0) = v_0, \end{cases}$$

ahol $t > 0$, a, b, c adott konstansok, $f(t)$ szintén adott függvény és $y(t)$ az ismeretlen függvény. Egy korábbi fejezetből már tudjuk, hogy

$$L[\dot{y}(t)] = s \cdot L[y(t)] - y(0),$$

illetve

$$L[\ddot{y}(t)] = s^2 \cdot L[y(t)] - s \cdot y(0) - \dot{y}(0).$$

Vagyis

$$a\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) = f(t)$$

$$a \cdot \left(s^2 \cdot L[y(t)] - s \cdot y(0) - \dot{y}(0)\right) + b \cdot (s \cdot L[y(t)] - y(0)) + c \cdot L[y(t)] = L[f(t)]$$

$$a \cdot s^2 \cdot L[y(t)] - a \cdot s \cdot y(0) - a \cdot \dot{y}(0) + b \cdot s \cdot L[y(t)] - b \cdot y(0) + c \cdot L[y(t)] = L[f(t)]$$

$$\left(a \cdot s^2 + b \cdot s + c\right) \cdot L[y(t)] - a \cdot s + b \cdot y(0) - a \cdot \dot{y}(0) = L[f(t)]$$

$$\left(a \cdot s^2 + b \cdot s + c\right) \cdot L[y(t)] - (a \cdot s + b) \cdot y_0 - a \cdot v_0 = L[f(t)]$$

$$\left(as^2 + bs + c\right) L[y(t)] - (as + b)\, y_0 - av_0 = L[f(t)] \qquad / + av_0$$

$$\left(as^2 + bs + c\right) L[y(t)] - (as + b)\, y_0 = L[f(t)] + av_0 \qquad / + (as + b)\, y_0$$

$$\left(as^2 + bs + c\right) L[y(t)] = L[f(t)] + av_0 + (as + b)\, y_0 \qquad / : \left(as^2 + bs + c\right)$$

$$L[y(t)] = \frac{L[f(t)] + av_0 + (as + b)\, y_0}{(as^2 + bs + c)}$$

$$L[y(t)] = \frac{L[f(t)]}{(as^2 + bs + c)} + \frac{av_0}{(as^2 + bs + c)} + \frac{(as + b)\, y_0}{(as^2 + bs + c)}$$

Másképp:

$$a[s^2 L[y(t)] - sy(0) - \dot{y}(0)] + b[sL[y(t)] - y(0)]cL[y(t)] = L[f(t)],$$

ahol

$$\begin{cases} L[y(t)] = G(s)[(as + b)y(0) + \dot{y}(0) + L[f(t)]], \\ G(s) = [s^2 + bs + c]^{-1} \end{cases}$$

Példa

Adjuk meg a következő differenciálegyenlet megoldását Laplace-transzformáció segítségével!

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) - 10\dot{y}(t) + 25y(t) = e^{-3t} \\ \dot{y}(0) = 0 \\ y(0) = 1/25 \end{cases}$$

Mivel már tudjuk, hogy $L[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3}$ és

$$L[\dot{y}(t)] = s \cdot L[y(t)] - y(0),$$

illetve

$$L[\ddot{y}(t)] = s^2 \cdot L[y(t)] - s \cdot y(0) - \dot{y}(0).$$

Ezért behelyettesítünk:

$$\ddot{y}(t) - 10\dot{y}(t) + 25y(t) = e^{-3t}$$

$$s^2 \cdot L[y(t)] - s \cdot y(0) - \dot{y}(0) - 10 \cdot (s \cdot L[y(t)] - y(0)) + 25 \cdot L[y(t)] = \frac{1}{s+3}$$

$$s^2 \cdot L[y(t)] - s \cdot y(0) - \dot{y}(0) - 10 \cdot s \cdot L[y(t)] + 10 \cdot y(0) + 25 \cdot L[y(t)] = \frac{1}{s+3}$$

$$\left(s^2 - 10 \cdot s + 25\right) \cdot L[y(t)] - (s - 10) \cdot y(0) - \dot{y}(0) = \frac{1}{s+3}$$

$$\left(s^2 - 10 \cdot s + 25\right) \cdot L[y(t)] - (s - 10) \cdot \frac{1}{25} - 0 = \frac{1}{s+3} \qquad / + (s-10) \cdot \frac{1}{25}$$

$$\left(s^2 - 10 \cdot s + 25\right) \cdot L[y(t)] = \frac{1}{s+3} + (s - 10) \cdot \frac{1}{25}$$

$$(s-5)^2 \cdot L[y(t)] = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{25} \cdot (s - 10) \qquad / : (s-5)^2$$

$$L[y(t)] = \frac{1}{(s+3)(s-5)^2} + \frac{1}{25} \cdot \frac{(s-10)}{(s-5)^2}$$

Alkalmazzuk a parciális törtekre bontás módszerét:

Egyrészt

$$\frac{1}{(s+3)\,(s-5)^2} = \frac{a}{s+3} + \frac{b}{s-5} + \frac{c}{(s-5)^2}$$

$$1 = a(s-5)^2 + b(s+3)(s-5) + c(s+3)$$

$$1 = a(s^2 - 10s + 25) + b(s^2 - 5s + 3s - 15) + cs + 3c$$

$$1 = as^2 - 10as + 25a + bs^2 - 2bs - 15b + cs + 3c$$

$$1 = (a+b)s^2 + (-10a - 2b + c)s + 25a - 15b + 3c$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -10a - 2b + c = 0 \\ 25a - 15b + 3c = 1 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $a = \frac{1}{64}$, $b = -\frac{1}{64}$, $c = \frac{1}{8}$

$$\frac{1}{(s+3)(s-5)^2} = \frac{\frac{1}{64}}{s+3} + \frac{-\frac{1}{64}}{s-5} + \frac{\frac{1}{8}}{(s-5)^2}$$

$$\frac{1}{(s+3)(s-5)^2} = \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{s+3} - \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{s-5} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(s-5)^2}$$

Másrészt

$$\frac{(s-10)}{(s-5)^2} = \frac{d}{s-5} + \frac{e}{(s-5)^2}$$

$$s - 10 = d(s-5) + e$$

$$s - 10 = ds - 5d + e$$

$$\begin{cases} d = 1 \\ -5d + e = -10 \end{cases}$$

Vagyis a megoldások: $d = 5$, illetve $e = -5$

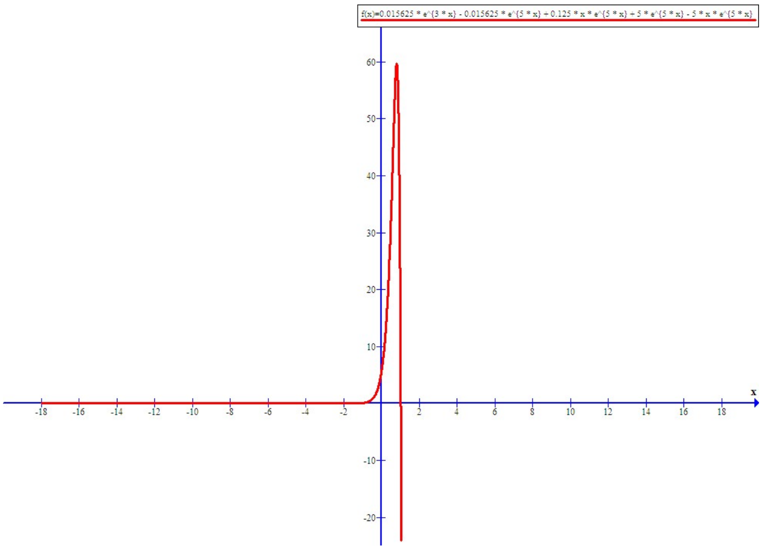
$$\frac{(s-10)}{(s-5)^2} = \frac{5}{s-5} + \frac{-5}{(s-5)^2}$$

$$\frac{(s-10)}{(s-5)^2} = 5 \cdot \frac{1}{s-5} - 5 \cdot \frac{1}{(s-5)^2}$$

Végeredmény:

$$L[y(t)] = \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{s+3} - \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{s-5} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(s-5)^2} + 5 \cdot \frac{1}{s-5} - 5 \cdot \frac{1}{(s-5)^2}$$

$$L[y(t)] = \frac{1}{64} \cdot e^{-3t} - \frac{1}{64} \cdot e^{5t} + \frac{1}{8} \cdot te^{5t} + 5 \cdot e^{5t} - 5 \cdot te^{5t} \quad (4.1.2.)$$



4.1.2. ábra

4.2. Magasabbrendű differenciálegyenletek

Az n-edrendű differenciálegyenlet is hasonlóan működik.

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t),$$

ahol $t > 0$. Tehát a következő képletet alkalmazhatjuk az $f(t)$ transzformációjának a kiszámítására:

$$L[f^n(t)] = s^n L[f(t)] - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$

Vagyis picit másképp:

$$L[f(t)] = \sum_{k=1}^{n} a_k \left[s^k L[y(t)] - \sum_{l=0}^{k-1} s^{k-l-1} y^{(l)}(0) \right] + a_0 L[y(t)] = F(s)$$

Ha $L[y(t)] = Y(s) = G(s)\,[H(s) + F(s)]$, ahol $H(s)$ a kezdeti feltételeket tartalmazó polinom, akkor

$$G(s) = \left[\sum_{k=0}^{n} a_k p^k \right]^{-1},$$

$$H(s)=\sum_{l=0}^{n-1} y^{(l)}(0)\sum_{k=l+1}^{n} a_k p^{k-l-1}$$

Ekkor a formálisan megadott n-edrendű differenciálegyenlet a következőképpen néz ki:

$$\begin{cases} y(t)=L^{-1}\left[G(s)H(s)\right]+\int_0^t g(t-\tau)f(t)d\tau, \\ g(t)=L^{-1}\left[G(s)\right]. \end{cases}$$

Példa

Ha

$$y^{(4)}+4y(t)=\sin t,$$
$$y^{(3)}(0)=y^{(2)}(0)=y'(0)=y(0)=0,$$

akkor az előzőek szerint

$$Y(s)=G(s)\frac{1}{s^2+1},$$

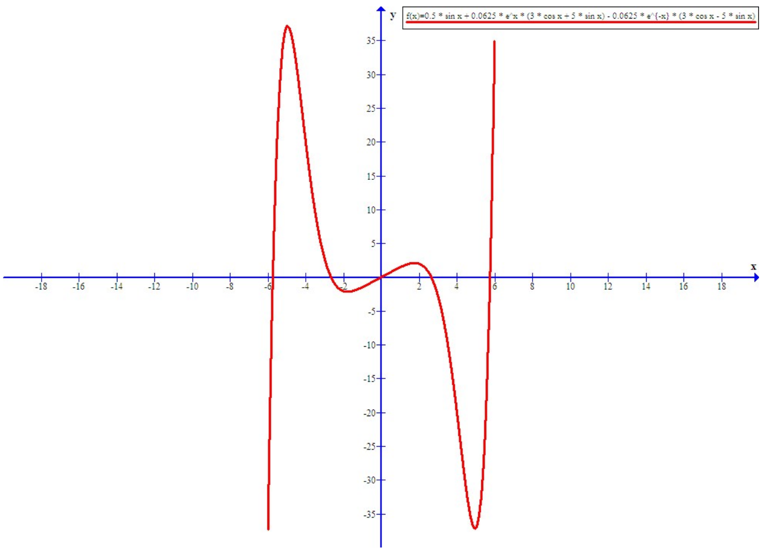
$$G(s)=\frac{1}{s^4+4}.$$

Akkor

$$Y(s)=\frac{-i}{4(s-i)}+\frac{i}{4(s+i)}+\frac{3-5i}{32(s-1-i)}+\frac{3+5i}{32(s-1+i)}-\frac{3+5i}{32(s+1-1)}-\frac{3-5i}{32(s+1+i)}$$

A megoldás:

$$y(t)=\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{16}e^t(3\cos t+5\sin t)-\frac{1}{16}e^{-t}(3\cos t-5\sin t) \quad (4.2.1.)$$



4.2.1. ábra

4.3. Differenciálegyenlet-rendszerek

A Laplace-transzformáció hatékony eljárás az állandó együtthatójú differenciálegyenletek megoldására. Ez az eljárás hatásosabb a differenciálegyenlet-rendszerek megoldására és némi számolás után látható a megszokott módszerekkel összehasonlítva a különbség.

Példa

Tekintsünk két elhanyagolható tömegű és k rugóállandójú rugót, melyek két m tömegű testet tartanak egymásra akasztva. Az alsó tömeg egy lineáris csillapítású szerkezethez van kapcsolva, amely a sebességgel arányos ellenállást fejt ki. Ha a felső és az alsó tömeg függőleges irányú kimozdulását rendre $y_1(t)$ és $y_2(t)$ jelöli,ahol a lefelé irányuló elmozdulást vesszük pozitívnak, akkor a mozgásegyenletek a következőek:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1(t) + ky_1(t) - k(y_2(t) - y_1(t)) = 0, \\ m\ddot{y}_2(t) + k\dot{y}_2(t) - k(y_2(t) - y_1(t)) = 0 \end{cases}$$

Először nézzük az első egyenletet:

$$m\left(s^2L[y_1(t)] - sy_1(0) - \dot{y}_1(0)\right) + kL[y_1(t)] - k(L[y_2(t)] - L[y_1(t)]) =$$

$$= ms^2L[y_1(t)] - msy_1(0) - m\dot{y}_1(0) + kL[y_1(t)] - kL[y_2(t)] - kL[y_1(t)] =$$

$$= ms^2L[y_1(t)] - msy_1(0) - m\dot{y}_1(0) - kL[y_2(t)] = 0$$

Most a második egyenletet:

$$m\left(s^2L[y_2(t]) - sy_2(0) - \dot{y}_2(0)\right) + k\left(sL[y_2(t)] - y_2(0)\right) - k(L[y_2(t)] - L[y_1(t)]) =$$

$$= ms^2L[y_2(t]) - msy_2(0) - m\dot{y}_2(0) + ksL[y_2(t)] - ky_2(0) - kL[y_2(t)] - kL[y_1(t)] =$$

$$= ms^2L[y_2(t]) - msy_2(0) - m\dot{y}_2(0) + ksL[y_2(t)] - ky_2(0) - kL[y_2(t)] - kL[y_1(t)] = 0$$

$$\begin{cases} ms^2L[y_1(t)] - kL[y_2(t)] = msy_1(0) + m\dot{y}_1(0) \\ (ms^2 + ks - k)L[y_2(t]) - kL[y_1(t)] = (ms + k)y_2(0) + m\dot{y}_2(0) \end{cases}$$

Leosztunk m-mel:

$$\begin{cases} s^2L[y_1(t)] - \frac{k}{m}L[y_2(t)] = sy_1(0) + \dot{y}_1(0), \\ (s^2 + \frac{ks}{m} - \frac{k}{m})L[y_2(t]) - \frac{k}{m}L[y_1(t)] = (s + \frac{k}{m})y_2(0) + \dot{y}_2(0) \end{cases}$$

Ha $\omega^2 = \frac{k}{m}$ és $\gamma = \frac{c}{m}$, akkor

$$\begin{cases} (s^2 + 2\omega^2)L[y_1(t)] - \omega^2L[y_2(t)] = sy_1(0) + \dot{y}_1(0), \\ (s^2 + s\gamma - \omega^2)L[y_2(t]) - \omega^2L[y_1(t)] = (s + \gamma)y_2(0) + \dot{y}_2(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2 + 2\omega^2)L[y_1(t)] - \omega^2L[y_2(t)] = sy_1(0) + \dot{y}_1(0), \\ -\omega^2L[y_1(t)] + (s^2 + s\gamma - \omega^2)L[y_2(t]) = (s + \gamma)y_2(0) + \dot{y}_2(0) \end{cases}$$

Az ismeretlenek kiküszöbölésével:

$$L[y_1(t)] = G(s)H_1(s),$$

$$L[y_2(t)] = G(s)H_2(s),$$

$$G(s) = \left[\left(s^2 + 2\omega^2\right)\left(s^2 + s\gamma - \omega^2\right) - \omega^4\right]^{-1},$$

$$H_1(s) = [s^2 + s\gamma - \omega^2][sy_1(0) + \dot{y}_1(0)] + \omega^2[(s+\gamma)y_2(0) + \dot{y}_2(0)],$$

$$H_2(s) = \omega^2[sy_1(0) + \dot{y}_1(0)] + [s^2 + 2\omega^2][(s+\gamma)y_2(0) + \dot{y}_2(0)].$$

Innen a megoldás, mint egy negyedfokú egyenlet esetén: de talán most könnyebb, ha feltesszük a csillapítási tényező kicsi, vagyis

$$G(s) = (s^2 + \Gamma_1 s + \Omega_1^2)^{-1}(s^2 + \Gamma_2 s + \Omega_2^2)^{-1},$$

$$\Omega_1^2 \cong \frac{1}{2}\omega^2(3 + \sqrt{5}) \cong 2,62\omega^2,$$

$$\Omega_2^2 \cong \frac{1}{2}\omega^2(3 - \sqrt{5}) \cong 0,38\omega^2,$$

$$\Gamma_1 \cong \frac{1}{2}\gamma(1 - 1/sqrt5) \cong 0,27\gamma,$$

$$\Gamma_2 \cong \frac{1}{2}\gamma(1 + 1/sqrt5) \cong 0,72\gamma.$$

5. fejezet

Összegzés

A dolgozatban kiszámolt Laplace-transzformáltakat illetve azok inverzeit összegyűjtöttem az alábbi összegző táblázatba.

Összegző táblázat	$f(t)$	$L[f(t)]$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$
3.	t^2	$\frac{2!}{s^3}$
4.	t^3	$\frac{3!}{s^4}$
5.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
7.	$t \cdot e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
8.	$t^2 \cdot e^{at}$	$\frac{2!}{(s-a)^3}$
9.	$t^n \cdot e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
10.	$\sin at$	$\frac{ia}{s^2+a^2}$
11.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
12.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
13.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
14.	$\sin^2 at$	$\frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$
15.	$t \cdot \cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
16.	$t^2 \cdot \sinh at$	$\frac{2a(a^2+2s^2)}{(s^2-a^2)^3}$

Összegző táblázat	$f(t)$	$L[f(t)]$
17.	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan\left(\frac{a}{s}\right)$
18.	$\frac{\sin^2 at}{t}$	$\frac{1}{4}\cdot\ln\left\vert 1+\frac{4a^2}{s^2}\right\vert$
19.	$(t-3)^2$	$e^{-2s}\cdot\frac{2!}{s^3}$
20.	$e^{-b(t-a)}$	$\frac{e^{-as}}{s+b}$
21.	$e^{-at}\cdot\cosh bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2-b^2}$
22.	$\frac{t^n}{n!}\cdot\sinh at$	$\frac{(s+a)^{n+1}-(s-a)^{n+1}}{2(s^2-a^2)^{n+1}}$
23.	$t-\sin t$	$\frac{a^3}{s^2(s^2+a^2)}$
24.	$1-\cos t$	$\frac{1}{s(s^2+1)}$
15.	$t\cdot\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
16.	$t^2\cdot\sinh at$	$\frac{2a(a^2+2s^2)}{(s^2-a^2)^3}$

Irodalomjegyzék

[1] Hanka László-Zalay Miklós: *Komplex függvénytan* Műszaki Könyvkiadó, Budapest (2003)

[2] Brian Davies: *Integráltranszformációk és alkalmazásaik* Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1983)

[3] Bátkai András: *Analízis III.* ELTE kézirat

[4] Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC* Tankönyvkiadó, Budapest (1974)