Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Madarász Éva
Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Elemi matematika

Témavezető: Fried Katalin, főiskolai docens
Matematika Módszertani Tanszék

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozatomban az elemi matematikával és ezen belül pedig a sorozatokkal foglalkozom. A választásom azért erre a témára esett, mert középiskolásokkal foglalkozom.

A matematika tantárgy önálló műveltségterület a közoktatásban. A matematika lehetőséget nyújt a logikus gondolkodás kialakitására, fejlesztésére, az összefüggésben való látás fejlesztésére, az elemző gondolati tevékenységek formálásával, a logikai gondolkodási módszerek megismertetésével.

A kerettanterv spirális szerkezetű, mert a matematika nyelvezete, szimbólumai, jelölésrendszere, tartalmi felépítése illeszkedik az adott korosztály életkori sajátosságaihoz. Ezért tér vissza egy-egy témára úgy, hogy azt egyre pontosabban, összefüggéseiben egyre árnyaltabban mutassa meg a már magasabb évfolyamokra járó és fejlettebb gondolkodással rendelkező tanulóknak.

Ez adta az ötletet, hogy egy témát végigkövessek, miként változik a tananyagnak az általam vizsgált része az általános iskolától a középiskoláig. Mivel a diákoknak egyre több információ áll rendelkezésükre, ezért változik a feladatok jellege, összetettsége és nehézsége. Ezt a tankönyvekben és feladatgyűjteményekben szereplő és különböző versenyekről származó feladatok segítségével szeretném bemutatni.

A sorozatokkal való foglalkozás során fejlődik az összefüggéslátás, a számolási készség, mindeközben megismerkedhetünk konkrét sorozatokkal, megfigyelhetjük a tulajdonságaikat. A napjainkban közkedvelt IQ-tesztekben is sok olyan feladat van, amelyek sorozatokkal kapcsolatosak.

A Fibonacci-sorozat és az ennek mintájara keletkezett Fibonacci-típusú sorozatok sok érdekes kutatásra ösztönözték a matematikusokat. Mára kiderült, hogy ez a sorozat kapcsolatba hozható kombinatorikai jellegű vagy a játékelmélet körébe vágó problémával, a természetes növekedés törvényszerűségeivel. Felfedezhetjük különböző növényekmintázatában és számos művészeti alkotás szerkezetében. Fibonacci-féle sorozathoz vezet, ha meg akarjuk határozni például egy szövőgép optimális fordulatszámát.[17]

2. fejezet

5–6. osztály

Az általános iskola első 4 osztályában a diákok még csak az alapműveletekkel, a szám fogalmával, a törtekkel és a mennyiségekkel ismerkednek. A sorozatokat logikai összefüggések felismerésére, a műveleti talajdonságok analógiáinak felismerése használják. Az 5. osztálytól kezd „érdekes" lenni a tananyag. Itt hallanak először a sorozat fogalmáról mint matematikai diszciplináról. A tankönyvek jelentős része a sorozatok előtt egyfajta rávezetésként az összefüggések, szabályszerűségek keresésével, a függvényfogalom megalapozásával foglalkoznak. A feladatok között szerepelnek olyanok, amelyekben megadott ábrák alapján kell kitalálni a helyes mintát vagy a megadott szavakból kell rájönni, hogy mi lehet a folytatás, illetve hogy a felsorolt számok milyen szabály szerint követik egymást. (Ezekhez hasonló feladatokkal találkozhatunk egyes intelligencia-tesztek, illetve vetélkedők kérdései között.)

2.1. Számsorozat

A számsorozat egy, a természetes számokon értelmezett függvény. (Úgy képzelhetjük, hogy számokat írunk sorban, egymás után.) Például számsorozat : 4, -45, 64, 17, ... A sorozatnak az első tagja a 4, a második tagja a -45, a harmadik a 64 és így tovább. A felsorolás végén a három pont megállapodás szerint azt jelzi, hogy a számok írása végtelenségig folytatható. Mi most olyan sorozatokat fogunk vizsgálni, amelyek elemeit valamely szabállyal adjuk meg. Vizsgálni fogjuk konkrét sorozatok esetén, hogy ha csak véges sok tagját adjuk meg, akkor azok milyen szabályszerűségnek tehetnek eleget.

1. **Példa:** Ha számsorozat hatodik, hetedik, nyolcadik, kilencedik tagja például: 4, 14, 24, 34, akkor megfigyelhetjük, hogy jobbra haladva tízzel növekszenek a számok. Ezért például lehet:
a negyedik tag: -14,

az ötödik tag: -4,
a tízedik tag: 44.

2. **Példa:** A 4, 44, 444, 4444, 44444, sorozat alább megadott szabálya szerint a sorozat csak egy irányba folytatható. Minden következő szám pontosan eggyel több 4-es számjegyet tartalmaz. Ennek a sorozatnak az első tagja a 4. [1], [3]

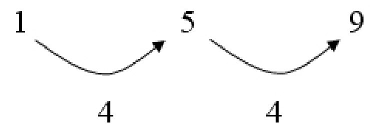
2.2. Feladatok

1. *Keress szabályt az alábbi sorozatokhoz, és a megtalált szabály szerint folytasd a következő öt elemmel!* [2]

a) 1; 5; 9;... *b)* -17; -11; -5;... *c)* -4; -7; -10;...

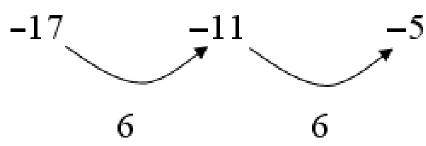
Megoldás:

a) Nézzük meg, hogy az egymás melletti elemek között mekkora a különbség:



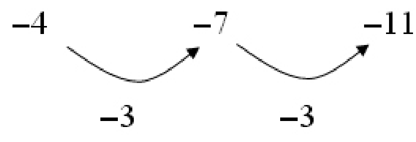
A sorozat minden eleme mindig 4-gyel nagyobb, mint az őt megelőző. A sorozat következő elemei: 13, 17, 21, 25, 29.

b) Az előző feladathoz hasonlóan állítsuk elő a különbségeket:



Ennél a sorozatnál a szomszédos elemek kölönbsége mindig 6. Ez alapján a sorozat következő elemei: 1, 7, 13, 19, 25.

c) A megoldás, mint az *a)* és *b)* feladatnál:



Itt egy hárommal csökkenő sorozatot kaptunk. A sorozat következő elemei: -13, -16, -19, -22, -25.

Megjegyzés: 5–6. osztályban a megadott elemekre igaz szabályszerűségeket keresnek a diákok, de később majd figyelni kell arra, hogy egy sorozatot csak akkor tekintünk ismertnek, ha az őt meghatározó függvényt ismerjük, például megadtuk a sorozatnak a képzési szabályát is.

Fontos beszélni arról, hogy ezeket a sorozatokat másképpen is lehet folytatni, az itt megadott megoldás csak egy a lehetséges megoldások közül, például a sorozat első három eleme periodikusan ismétlődnek, vagy az $a_n = n \cdot a_1 + (n-1) \cdot a_2 + (n-2) \cdot a_3$ ahol $n \geq 4$. Néhány megoldási ötlettel lendületbe hozhatjuk a gyerekek fantáziáját a szabály keresésben.

2. *Peti szeret sportolni, úszóedzésre jár. Az alapozó edzéseken elhatározta, hogy mindennap* 100 m*-rel többet úszik, mint az előző napon. Hány métert úszik a* 14. *és a* 20. *napon, ha az alapozó edzés első napján* 1600 *métert úszott?* [1]

Megoldás: Az első napon a feladat szerint Peti 1600 métert úszott és minden további napon 100 méterrel növelte a távot, ez táblázatba összefoglalva:

Napok		Leúszott táv
1.	1600	$= 1600 + 0 \cdot 100 = 1600$ m
2.	$1600 + 100$	$= 1600 + 1 \cdot 100 = 1700$ m
3.	$1600 + 100 + 100$	$= 1600 + 2 \cdot 100 = 1800$ m
4.	$1600 + 100 + 100 + 100$	$= 1600 + 3 \cdot 100 = 1900$ m
5.	$1600 + 100 + 100 + 100 + 100$	$= 1600 + 4 \cdot 100 = 2000$ m

A táblázat segítségével felismerhetjük a szabályt, hogy hogyan tudjuk megadni a 14. és a 20. tagját a sorozatnak anélkül, hogy az előtte lévő összes elemet ki kellene számolnunk.

$$\begin{aligned} &\text{14. nap:} \quad 1600 + 13 \cdot 100 = 2900 \text{ m} \\ &\text{20. nap:} \quad 1600 + 19 \cdot 100 = 3500 \text{ m} \end{aligned}$$

3. *A cseppkőbarlangban a cseppkövek nagyon lassan nőnek, egy év alatt* 1 mm*-t. Hány év alatt nő fél métert egy cseppkő?* [1]

Megoldás: Mivel a növekedést mm-ben adták meg, ezért a 0,5 m-t érdemes átváltani.

$$0{,}5 \text{ m} = 500 \text{ mm}$$

Itt is készíthetünk táblázatot arról, hogy mennyit nő a cseppkő az évek alatt.

Év	növekedés
1.	$1 = 1 \cdot 1 = 1$ mm
2.	$1 + 1 = 2 \cdot 1 = 2$ mm
3.	$1 + 1 + 1 = 3 \cdot 1 = 3$ mm
4.	$1 + 1 + 1 + 1 = 4 \cdot 100 = 4$ mm
5.	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \cdot 100 = 5$ mm

A táblázatból látszik, hogy a cseppkő annyi mm-t nőtt ahány évig hagytuk nőni, vagyis az 500 mm-es növekedést 500 év alatt éri el.

Megjegyzés: Ha nem túl bonyolult a szabály, akkor minden tanulótól elvárható, hogy a sorozat akárhányadik elemét megadja. Kezdetben előfordulhat, hogy a szöveges feladatok esetén gondot jelenthet a sorozat és a hozzá tartozó szabály felismerése.

4. *Számország egyik tartományában nem használják a 2-es számjegyet. Számország ezen a részén melyik számot használják huszadikként a pozitív egész számok sorozatában?* [2]

Megoldás: Nézzük meg, hogy a 2-es számjegy hiánya miatt mely számok maradnak ki az első 30 pozitív egész szám közül:

1-től 10-ig	1 szám marad ki (2)
11-től 20-ig	2 szám marad ki (12, 20)
21-től 30-ig	9 szám marad ki (21, 22, ..., 28, 29)

Ez azt jelenti, hogy 12 szám maradt ki eddig, így Számország adott tartományában a pozitív egész számok sorozatában a 30 a $(30 - 12) = 18$-dik elemnek felel meg. Ez alapján a 31 a 19. elem és a 32 kihagyása miatt a 33 lesz a 20-dik eleme az adott sorozatnak.

Megjegyzés: Ennek a sorozatnak a szabályát nehezebben találják meg a gyerekek, mint amikkel eddig találkoztunk, emiatt érdekes az adott elem megtalálása.

5. *Egy számsorozat első tagja* 2*, a második* 3*, és a további tagokat úgy képezzük, hogy minden egyes tag eggyel kisebb, mint a két szomszédjának a szorzata. Mennyi a sorozat első* 1110 *tagjának az összege?* [2]

Megoldás: Számoljuk ki a sorozat első néhány tagjának az értéket a feladatban megadottak alapján.

$$2, \quad 3, \quad a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f, \quad g, \quad \dots$$

$$\begin{array}{lll}
3 = (2 \cdot a) - 1 & \rightarrow & a = \frac{3+1}{2} = 2 \\
a = (3 \cdot b) - 1 & \rightarrow & b = \frac{a+1}{3} = \frac{2+1}{3} = 1 \\
b = (a \cdot c) - 1 & \rightarrow & c = \frac{b+1}{a} = \frac{1+1}{2} = 1 \\
c = (b \cdot d) - 1 & \rightarrow & d = \frac{c+1}{b} = \frac{1+1}{1} = 2 \\
d = (c \cdot e) - 1 & \rightarrow & e = \frac{d+1}{c} = \frac{2+1}{1} = 3 \\
e = (d \cdot f) - 1 & \rightarrow & f = \frac{e+1}{d} = \frac{3+1}{2} = 2 \\
f = (e \cdot g) - 1 & \rightarrow & g = \frac{f+1}{e} = \frac{2+1}{3} = 1
\end{array}$$

Ez alapján a sorozat első néhány elem az alábbi:

$$2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad \dots.$$

A kiszámolt elemeknél ismétlődést figyelhetünk meg, minden hatodik elem megegyezik. Emiatt csoportosítsuk az elemeket ötösével. Az így kapott csoportok száma:

$$1110 : 5 = 222.$$

$$(2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1) \quad (2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1) \quad (2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1) \quad \dots$$

Az elemek összege egy-egy csoportban: $(2 + 3 + 2 + 1 + 1) \cdot 222 = 1998$.

Megjegyzés: Ez a feladat jó példa arra, hogy néha érdemes a megadott sorozatnak több elemét is kiszámolni, hogy a megoldáshoz szükséges utat, szabályszerűséget megtaláljuk.

2.3. Versenyfeladatok

1. *Két raktár közül az elsőben* 12 *tonna cukorrépa van, a másodikban csak feleannyi. Ezután az első raktárba mindennap további 9 tonna cukorrépát szállítanak, míg a másodikba mindennap további* 12 *tonnát. Hány nap múlva lesz a két raktárban lévő cukorrépa tömegének különbsége ugyanannyi, mint eredetileg volt?*

(Bonifert Domonkos Matematika Verseny 2005/2006, 5. osztály 2. forduló)

Megoldás: Az egyik sorozat legyen az egyes raktár, aminél az első nap 12 tonna cukorrépa van és mindennap 9 tonnával nő ez a mennyiség. A másik sorozat pedig a kettes raktár, amiben első nap 9 tonna cukorrépa volt, itt a mennyiség 12 tonnával nő naponta. Írjuk be egy táblázatba, hogy hogyan alakul a két raktárban a cukorrépa mennyisége.

Ha ebbe a táblázatba harmadik sorként még a két raktár különbségét is bevesszük, akkor könnyen választ tudunk adni a feladat kérdésére.

	1. nap	2. nap	3. nap	4. nap
1-es rakár	12 t	21 t	30 t	39 t
2-es rakár	9 t	21 t	33 t	45 t
különbség	3 t	0 t	3 t	6 t

A harmadik sorból le tudjuk olvasni, hogy a harmadik napon, vagyis két nap múlva lesz ismét a két raktár különbsége ismét 3 tonna.

2. *Egy sorozat bármely két egymást követő elemének összege* 11. *A sorozat* 523. *eleme a* 7. *Mennyi a sorozat első* 2005 *tagjának összege?*

(Bonifert Domonkos Matematika Verseny 2005/2006, 5. osztályosoknak 3. forduló)

Megoldás: Írjuk fel a 2005. elemig az összeget!

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{523} + a_{524} + \ldots + a_{2003} + a_{2004} + a_{2005} =$$

Használjuk fel, hogy tudjuk a szomszédos elemek összegét, csoportosítsuk az elemeket kettesével:

$$= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{523} + a_{524}) + \ldots + (a_{2003} + a_{2004}) + a_{2005} =$$

Minden zárójeles mennyiségről tudjuk, hogy 11-et ér. Mivel kettesével csoportosítottuk az elemeket, ezért 2005 : 2 = 1002,5 alapján 1002 ilyen zárójeles kifejezés van. Most már csak azt kell megtudnunk, hogy a 2005. elemnek mi az értéke.

Vizsgáljuk, meg a sorozat elemeit és keressünk összefüggést közöttük, ehhez használjuk fel ismét a szomszédos elemek összegét. Az erre felírt egyenleteket rendezzük is át.

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 = 11 \quad &\to \quad a_1 = 11 - a_2\\
a_1 + a_2 = 11 \quad &\to \quad a_2 = 11 - a_1\\
a_2 + a_3 = 11 \quad &\to \quad a_3 = 11 - a_2 = 11 - (11 - a_1) = a_1\\
a_3 + a_4 = 11 \quad &\to \quad a_4 = 11 - a_3 = 11 - a_1 = a_2\\
a_4 + a_5 = 11 \quad &\to \quad a_5 = 11 - a_4 = 11 - (11 - a_1) = a_1\\
a_5 + a_6 = 11 \quad &\to \quad a_6 = 11 - a_5 = 11 - a_1 = a_2
\end{aligned}$$

Az átalakítások után látszik, hogy $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots$; és $a_2 = a_4 = a_6 = \ldots$. Ami azt jelenti, hogy a páros indexű elemek azonos értékűek, és ez a páratlan indexű elemek értéke is megegyezik. Az 523. elem és a 2005. elem is páratlan indexű, ezért egyenlőek, vagyis mind a két elem a 7. Most már ki tudjuk számolni az összeget:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2003} + a_{2004} + a_{2005} = 1002 \cdot 11 + 7 = 11\,029.$$

3. *A Fibonacci-sorozat első két eleme:* 1, 1*; a további elemeket úgy kapjuk, hogy az előző két elemet összeadjuk:* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... *Bizonyítsuk be, hogy a sorozat minden ötödik eleme osztható* 5*-tel!*

(Kalmár László Országos Matematika Verseny, 1995., 6.osztály, országos döntö)

Megoldás:

Tudjuk, hogy $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Írjunk f_{n-1} helyébe $f_{n-2} + f_{n-3}$-at:

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-3} + f_{n-2} = 2f_{n-2} + f_{n-3}.$$

Tovább alakítva egyenlőségünket a képzési szabály ismételt felhasználásával:

$$\begin{aligned} f_n &= 3f_{n-3} + 2f_{n-4}, \\ f_n &= 5f_{n-4} + 3f_{n-5}, \\ f_n &= 8f_{n-5} + 5f_{n-6}, \\ &\vdots \\ f_n &= f_k f_{n-k+1} + f_{k-1} f_{n-k}. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon álló *Fibonacci-számok* együtthatói is mindig *Fibonacci-számok* lesznek. Bevezetve az $m = n - k$ jelölést:

$$f_{m+k} = f_k f_{m+1} + f_{k-1} f_m.$$

Ez alapján:

$$f_{m+5} = f_5 f_{m+1} + f_4 f_m.$$

A jobb oldalon álló összeg első tagja biztosan osztható 5-tel, hiszen $f_5 = 5$ többszöröse. Ha f_m osztható 5-tel, akkor az összeg másik tagja, így maga az összeg is osztható öttel.

Megjegyzés: Hasonló módon belátható, hogy a *Fibonacci-számok* közül minden 3. páros, vagy minden 4. osztaható hárommal. Ezen az úton elindulva elérünk ahhoz a fontos eredményhez, hogy két *Fibonacci-szám* közül az egyik akkor és csak akkor osztója a másiknak, ha indexe osztója a másik indexének. Ebből következik, hogy azok a *Fibonacci-számok*, amelyeknek indexe összetett szám, maguk is összetett számok. (Erről bővebben a irodalomjegyzékben megadott 17. irodalomban olvashatunk.)

3. fejezet

7–8. osztály

A különböző tankönyvcsaládok között jelentős az eltérés atekintetben, hogy a 7–8. osztályban mennyire részletesen veszik a sorozatokat. Ugyan mindegyik tankönyvben szerepel a számtani sorozat, de ez nem mondható el a mértani sorozatról. Az sem egységes, hogy a függvények és a sorozatok közötti kapcsolattal mennyire foglalkoznak, annak ellenére, hogy túlnyomórészt ez a két témakör egymást követő fejezet a könyvekben. Nem csoda, hiszen a sorozat speciális függvény (a természetes számokon van értelmezve). [5], [6], [7], [9]

3.1. Tananyag

Több könyv alapján a 7–8. osztályosok a következő ismereteket sajátíthatják el a sorozatokról:

3.1.1. Sorozat

A sorozat intuitíve elemek sorbarendezését jelenti. Így egy speciális függvényt határozunk meg, hiszen a pozitív egész számokhoz egyértelműen rendeljük hozzá a vizsgált halmaz elemeit.

Más szóval: Az olyan függvényeket, amelyeknek az értelmezési tartománya a természetes számok halmaza, sorozatnak nevezzük.

Vagy másképp: A sorozat olyan függvény, melynek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza. Az értékkészlet elemeit a sorozat elemeinek vagy tagjainak nevezzük.

A sorozat n-edik elemét a_n-nel jelöljük, ahol n természetes szám. Ha a sorozat első néhány elemét felsoroljuk, akkor többféle sorozatot kaphatunk.

Egy sorozatot csak akkor tekintünk ismertnek, ha az őt meghatározó függvényt ismerjük, például megadtuk a sorozatnak a képzési szabályát is.

3.1.2. Számtani sorozat

Számtani sorozatnak nevezzük az olyan sorozatot, amelyben a második tagtól kezdve minden tagot úgy kapunk meg, hogy az őt megelőző taghoz ugyanazt a számot hozzáadjuk. Vagyis a sorozat bármely eleméből kivonva az előtte álló elemet, a különbség állandó. Megadjuk az első elemet, a_1-et és az állandó d differenciát. Az n-edik tagot úgy kapjuk meg, hogy az első taghoz mindig eggyel kevesebbszer adjuk hozzá a differenciát, mint ahányadik tagot szeretnénk felírni:

$$a_n = a_{n-1} + d = \ldots = a_1 + (n-1)d.$$

A számtani sorozat első n elemének az összege:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} n.$$

3.1.3. Mértani sorozat

A mértani sorozat olyan számsorozat, amelyben (a második elemtől kezdve) bármelyik elem a közvetlenül előtte álló elemek ugyanannyiszorosa (q-szorosa). A q a mértani sorozatra jellemző állandó szorzótényező (kvóciens vagy hányados). A k-ik elem előállítása:

$$a_k = a_1 q^{k-1}.$$

3.2. Feladatok

1. *Mennyi annak a számtani sorozatnak a differenciája, amelynek első eleme* -8*, és első két elemének számtani közepe* -6. [5]

Megoldás:

$$\begin{cases} a_1 & = & -8 \\ \frac{a_1+a_2}{2} & = & -6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= -12 \\ a_2 &= -12 - a_1 \\ a_2 &= -4 \\ a_2 &= a_1 + d \\ d &= a_2 - a_1 \\ d &= (-4) - (-8) \end{aligned}$$

A sorozat differenciája 4.

2. *Virág néninek két fiától 7 unokája van. A legfiatalabb 3 éves, és az unokák életkor-sorozatának különbségsorozata csupa kettesből áll.*

a) *Írjuk föl az unokák életkorát!*

b) *A két családban a gyermekek életkorának a számtani közepe (átlaga) ugyanannyi. Hány évesek lehetnek a gyerekek az egyes családokban?*

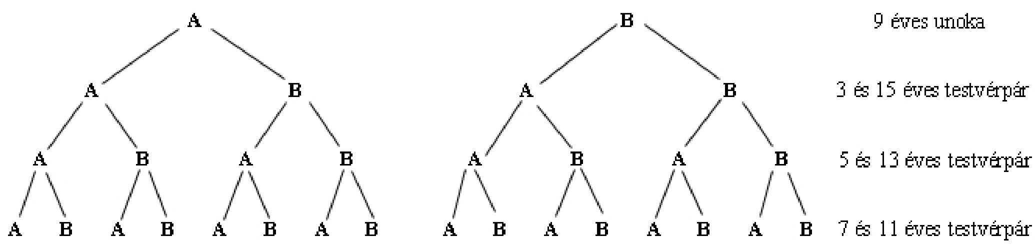
c) *Az unokák születésnapi tortáját a nagymama készíti. Hány gyertyát használ föl ebben az évben?* [8]

Megoldás:

a) Az unokák életkorát a következő sorozattal tudjuk leírni: $a_1 = 3$, és a differencia $d = 2$. A sorozat első 7 eleme:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3 \\
a_2 &= a_1 + d = 5 \\
a_3 &= a_1 + 2d = 7 \\
a_4 &= a_1 + 3d = 9 \\
a_5 &= a_1 + 4d = 11 \\
a_6 &= a_1 + 5d = 13 \\
a_7 &= a_1 + 6d = 15
\end{aligned}$$

b) Virág néni unokáinak az átlag életkora 9, a két családban külön-külön is ugyanennyi. Mivel a 3 és 15 éves, az 5 és 13 éves, a 7 és 11 éves gyerekek életkorának számtani közepe szintén 9 év, ezért ők biztosan testvérek. Az egyik családot jelöljük A-val, a másik családot pedig B-vel.



A három testvérpár és a 9 éves gyerek a fenti ábra alapján 16 féle képpen lehet a két család tagja, de ezek közül két eset nekünk nem jó, mert tudjuk, hogy mindegyik családnál van gyerek. Így azt kapjuk, hogy 14 módon lehetnek a gyerekek a két családban.

c) Az unokák életkorának összegét jelölje S_7.

$$S_7 = \frac{(a_1 + a_7)7}{2} = \frac{(3 + 15)7}{2} = 63.$$

3. *Határozzuk meg az adatok alapján a keresett tagot!*

a)	$a_1 = 5;$	$d = 3;$	$a_{71} = ?$	
b)	$a_{10} = 10;$	$d = -3;$	$a_{20} = ?$	
c)	$a_8 = 60;$	$a_{21} = 92,5;$	$a_{100} = ?$	[6]

Megoldás:

Mind a három feladat megoldásánál a sorozat n-edik elemének általános képletét használjuk fel:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

a)

$$a_{71} = a_1 + (71-1) \cdot d = 5 + 70 \cdot 3 = 215$$

b)

$$\begin{cases} a_{10} = a_1 + (9-1)d \\ a_{20} = a_1 + (19-1)d \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_{20} - a_{10} = (a_1 + (19-1)d) - (a_1 + (9-1)d) = 10d \\ a_{20} = a_{10} + 10d = 10 + 10(-3) = -20 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{cases} a_8 = 60 = a_1 + 7d \\ a_{21} = 92,5 = a_1 + 20d \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_{21} - a_8 &= 32,5 \\ a_{21} - a_8 &= (a_1 + 20d) - (a_1 + 7d) \\ 13 \cdot d &= 32,5 \\ d &= 2,5 \\ a_1 &= a_8 - 7d = 42,5 \\ a_{100} &= a_1 + 99d = 290 \end{aligned}$$

4. *Ha egy fénynyaláb valamely üveglapon áthalad, akkor erőssége ötödrészére csökken. Hányadrészére csökken a fény erőssége, ha egymás után hat ilyen üveglemezen hatol át?* [10]

Megoldás:
A feladat egy mértani sorozatnak fogható fel, ahol az első elem 1 és a sorozatra jellemző $q = \frac{1}{5}$. Mivel a fénynyaláb 6 üveglemezen hatolt át, így a sorozat 7-dik elemét kell kiszámolnunk, hogy a kérdésre megkapjuk a választ.

$$a_7 = a_1 \cdot q^6 = 1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6 = \left(\frac{1}{5}\right)^6$$

A fényerősség az 5^6-od részére csökkent le. *Megjegyzés:* Ez a feladat a szövege miatt akár fizika óraán is szerepelhet.

5. *Egy számtani sorozatban :* $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$. *Számítsuk ki a sorozat tizedik elemét és az első tizenkilenc elem összegét!* [7]

Megoldás:
A feladat megoldásáshoz a számtani sorozat n-edik elemének általános formáját használjuk fel.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{cases} a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224 \\ a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = (a_1 + 3d) + (a_1 + 7d) + (a_1 + 11d) + (a_1 + 15d) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} &= 224 \\ 4 \cdot a_1 + 36d &= 224 \\ a_1 + 9d &= 56 \\ a_{10} &= 56 \end{aligned}$$

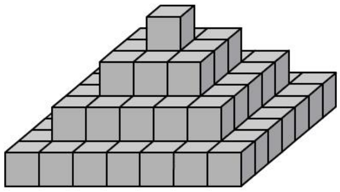
Következő lépésként a számtani sorozat első n tagjának összegképletét használjuk fel.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$\begin{aligned} S_{19} &= \frac{(a_1 + a_{19}) \cdot 19}{2} \\ S_{19} &= \frac{(a_1 + (a_1 + 18d) \cdot 19}{2} \\ S_{19} &= (a_1 + 9d) \cdot 19 \\ S_{19} &= 19 \cdot a_{10} \\ S_{19} &= 56 \cdot 19 = 1064 \end{aligned}$$

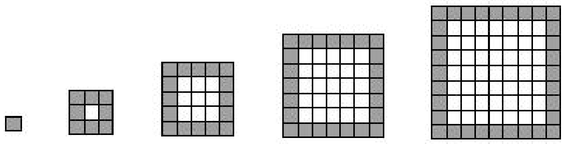
3.3. Versenyfeladatok

1. *Az iskolában a diákok egy halom egyforma kockából piramist építettek, amelynek egy része az ábrán látható. Ez a piramis, amelyik a maga nemében a legnagyobb volt a világon, az iskola udvarán állt és sajnos többször megázott. Ezért egy idő után ki kellet cserélni az összes eső érte kockát (tehát a felületén lévőket). Összesen 2025 kockát kellett kicserélni. Hány szintje volt a piramisnak?*



(Matematikai Olimpia, 2006/07, 8. évfolyam, I. ford)

Megoldás:
Lerajzoltuk egymás mellé a piramis első öt sorát fellülnézetből, és szürkére színeztük be azokat a kockákat amiket ki kellett cserélni.



A T_n területe most az adott sort alkotó kockák számát jelölje. A sorokban mindig 2-vel nő a négyzetek oldalát alkotó kockák szám, ami egy $a_1 = 1$ és $d = 2$ számtani sorozatnak felel meg. Adjuk meg, hogy mekkora az egyes sorokban a szürkére színezett terület.

$$\begin{array}{ll}
1. \text{ sor} & 1^2, \\
2. \text{ sor} & 3^2 - 1^2, \\
3. \text{ sor} & 5^2 - 3^2, \\
4. \text{ sor} & 7^2 - 5^2, \\
 & \vdots \\
n. \text{ sor} & (2n-1)^2 - (2n-3)^2.
\end{array}$$

Ha ezeket összeadjuk, akkor 2025-öt kell kapnunk, mert összesen ennyi kockát cseréltek ki. Írjuk fel az összeget, és rendezük is át utána az egyenletet.

$$\begin{aligned}
(1^2) + (3^2 - 1^2) + (5^2 - 3^2) + (7^2 - 5^2) + \ldots + ((2n-1)^2 - (2n-3)^2) &= 2025 \\
1^2 - 1^2 + 3^2 - 3^2 + 5^2 - 5^2 + 7^2 + \ldots + (2n-3)^2 - (2n-3)^2 + (2n-1)^2 &= 2025
\end{aligned}$$

Azt tapasztaljuk, hogy páronként kiejtik egymást a tagok, és az egyenlet leegyszerűsödik.

$$\begin{aligned}(2n-1)^2 &= 2025\\ n &= 22.\end{aligned}$$

A piramisnak 22 szintje volt.

2. *Számítsd ki a következő összeget!*

$$\Big(\frac{1}{19}+\frac{2}{19}+\ldots+\frac{18}{19}\Big)+\Big(\frac{1}{20}+\frac{2}{20}+\ldots+\frac{19}{20}\Big)+\Big(\frac{1}{21}+\frac{2}{21}+\ldots+\frac{20}{21}\Big)+\Big(\frac{1}{22}+\frac{2}{22}+\ldots+\frac{21}{22}\Big)$$

(Kalmár László verseny (KMBK) 1985, 7. osztály, megyei forduló)

Megoldás:
Első lépésként használjuk ki, hogy a zárójeleken belül a törtek nevezője megegyezik.

$$\Big(\frac{1+2+\ldots+18}{19}\Big)+\Big(\frac{1+2+\ldots+19}{20}\Big)+\Big(\frac{1+2+\ldots+20}{21}\Big)+\Big(\frac{1+2+\ldots+21}{22}\Big)=$$

A számlálókat ki tudjuk számolni a sorozat első n elemének összegképletével.

$$\Big(\frac{19\cdot 9}{19}\Big)+\Big(\frac{19\cdot 10}{20}\Big)+\Big(\frac{21\cdot 10}{21}\Big)+\Big(\frac{21\cdot 11}{22}\Big)=39.$$

3. *Kati egy könyv olvasásába kezdett. Első nap* 25 *oldalt olvasott el, majd naponként mindig* 6 *oldallal többet, egészen az ötödik napig. A hatodik napon is ugyanannyit olvasott, mint az ötödiken, majd a hátralévő napok mindegyikén* 6 *oldallal kevesebbet az előző napinál. Így az utolsó napon* 19 *oldalt olvasott volna, de a könyvből már csak* 12 *oldal volt hátra. Hány oldalas a könyv?*

(Varga Tamás matematikai versenyek , 1990/91, 7.osztály megyei forduló)

Megoldás:
Az első öt napon olvasott oldalak száma egy olyan számtani sorozatot alkot, aminél $a_1 = 25$, és a $d = 6$. Ez alapján az első öt napon olvasott oldalak száma:

$$S_5 = \frac{(a_1+a_5)\cdot 5}{2} = \frac{(a_1+(a_1+4d)\cdot 5}{2} = 185.$$

Mivel ismerjük a_1-et és a d-t, ezért azt is meg tudjuk mondani, hogy hány oldalt olvasott az ötödik és a hatodik napon Kati:

$$a_5 = a_1 + 4d = 25 + 24 = 49.$$

A 6. naptól az olvasott oldalak száma egy olyan sorozatot alkot, aminek első eleme a 49 és a $d = -6$. Az utolsó napon 19 oldalt kellet volna olvasnia Katinak, vagyis a sorozat n-edik tagja a 19. Határozzuk meg n értékét.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ 19 &= 49 + (n-1)(-6) \\ 6n &= 36 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy Kati még további hat napig olvasott. Számoljuk ki a sorozat első 6 elemének az összegét.

$$S_6 = \frac{(a_1 + a_6) \cdot 6}{2} = (49 + 19) \cdot 3 = 204$$

Mivel az utolsó napon 19 helyett már csak 12 oldal volt vissza, ezért az olvasott oldalak száma:

$$S_5 + S_6 - 7 = 185 + 205 - 7 = 382.$$

4. *A pozitív egész számokat a következő „háromszög-táblázatba" írjuk fel: A táblázat középső sora így kezdődik:* 1, 3, 7, 13, 21, ... *Mi lesz ennek a középső oszlopnak a* 100. *eleme?*

				1				
			4	3	2			
		9	8	7	6	5		
	16	15	14	13	12	11	10	
25	24	23	22	21	20	19	18	17

(Kalmár László verseny (KMBK) 1998, 7. osztály, megyei forduló)

Megoldás:

Alakítsuk át a táblázatot úgy, hogy a középső oszlop elemeitől balra lévő számokat csúsztassuk át a következő sor jobb oldalára.

1								
3	4	2						
7	6	5	9	8				
13	12	11	10	16	15	14		
21	20	19	18	17	25	24	23	22

Ezzel az átalakítással könnyebben észre lehet venni, hogy milyen szabály szerint változik az eredeti táblázat középső sorában az elemek különbsége.

0	
2	$3-1$
4	$7-3$
6	$13-7$
8	$21-13$

Írjuk fel a sorok függvényében a differenciákat. Mivel a különbség mindig 2-vel nő, ezért a sorok számának feltehetően a kétszeresét kell használni a képletben. Innen megsejtjük, hogy: $d_n = 2n - 2$. Ennek a d_n sorozatnak az első 100 elemének az összege adja meg a „háromszög-táblázat" középső oszlopában ez első és a 100. elem különbségét. Innen a keresett elem:

$$1 + S_{100} = 1 + \frac{(0+198)\cdot 100}{2} = 9901.$$

Megjegyzés: A feladatban szereplő „háromszög-táblázatról" más feladatokban például a következő kérdésekkel találkozhatunk:

a) Melyik szám áll az n-edik sor első helyén?

b) Mennyi az első n sorban álló számok összege?

c) Mennyi az n-dik sorban álló számok összege?

Mindegyik feladat megoldásánál felhasználjuk, hogy minden következő sorba két számmal több van írva, mint az előzőbe.

4. fejezet

9–12. osztály

4.1. Számsorozatok, sorozatok

Definíció: A végtelen valós számsorozat (röviden számsorozat, sorozat) olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya a pozitív egész számok vagy (megállapodástól függően) a természetes számok halmaza, az értékkészlete a valós számok egy részhalmaza. Ha az értelmezési tartományt leszűkítjük a pozitív egész számok valamely véges részhalmazára, akkor véges számsorozatról beszélünk.

A függvény helyettesítési értékeit a számsorozat elemeinek nevezzük.

A számsorozatot többféleképpen jelölhetjük:

- $f\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}, n \mapsto f(n) = a_n$
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}; \{a_n\}(n \in \mathbb{N}^+)$, illetve $(a_n)(n \in \mathbb{N}^+)$ vagy röviden $\{a_n\}$, illetve (a_n)
- $n \to 2n + 3 \quad (n \in \mathbb{N}^+)$
- $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Ahol a_n jelöli a számsorozat n-edik (általános) elemét, n $(\in \mathbb{N}^+)$ pedig az elem indexét (sorszámát).

A számsorozatot megadhatjuk:

– a számsorozat általános elemével: $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}^+$; pl.

$$a_n = \frac{n}{(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$a_n = (n+1)^2, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

– visszavezethető lépésekkel, vagyis rekuzív módon: tagjait sorban, az előző tagok segítségével tudjuk megadni. Megadjuk a számsorozat néhány elemét, az általános elemet pedig a megelőző elem(ek) függvényeként definiáljuk; pl.

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \quad n > 2$$

$$a_1 = -1, a_2 = 2, a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}, \quad n \geq 3$$

– utasítással; pl. tekintsük a prímszámok növekvő sorozatát (e sorozat általános eleme képlettel nem adható meg).

a_n= az n-edik prímszám

$$a_n = \begin{cases} n & \text{, ha } n \text{ páros} \\ 1 & \text{, ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

A sorozatok függvények, tehát *koordináta-rendszerben* ábrázolható a grafikonjuk. Az $\mathbb{N}^+$ értelmezési tartomány miatt a sorozatok képe diszkrét pontokból áll. A pontok x koordinátái világosan mutatják, hogy azok a sorozat hányadik tagját jelképezik.

Sorozatok jellemzése

- Az a_n sorozat monoton növekedő, ha bármely n-re $a_n < a_{n+1}$.
- Az a_n sorozat monoton nemcsökkenő, ha bármely n-re $a_n \leq a_{n+1}$.
- Az a_n sorozat monoton csökkenő, ha bármely n-re $a_n > a_{n+1}$.
- Az a_n sorozat monoton nemnövekedő, ha bármely n-re $a_n \geq a_{n+1}$.
- Az a_n sorozat alulról korlátosnak nevezzük, ha van olyan k szám, hogy minden n-re $a_n > k$
- Az a_n sorozatot felülről korlátosnak nevezzük, ha van olyan K szám, hogy minden n-re $a_n < K$
- Az a_n sorozatot korlátosnak nevezzük, ha alulról is korlátos és felülről is korlátos, azaz ha van olyan k és van olyan K szám, hogy minden n-re $k < a_n < K$

Kovnergens és divergens sorozat

Az ebben a fejezetben szereplő fogalmakat, állításokat [23] alapján ismertetjük.
Definíció. Az (a_n) számsorozat határértéke az A szám, ha A bármely környezetébe – a sorozat véges sok elemének kivételével – a sorozat minden eleme beletartozik.

Ezzel ekvivalensek az alábbi definíciók.

Definíció. Az (a_n) számsorozat határértéke az A valós szám, ha bármely $\varepsilon>0$ számhoz megadható olyan $N(\varepsilon$-tól függő) küszöbszám, hogy minden $n > N(\varepsilon)$-ra

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

azaz

$$\mid a_n - A \mid < \varepsilon \text{ minden } n > n_0$$

egyenlőtlenség teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens (összetartó).

Definíció. Ha egy sorozatnak nincs határértéke, akkor divergensnek (széttartónak) nevezzük.

Jelölés. Ha az (a_n) sorozat az A számhoz tart, akkor ezt úgy jelöljük, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b$$

$a_n \to b$, ha $n \to \infty$ (illetve röviden $a_n \to b$).

A számtani sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha elemeinek különbsége zérus, a mértani sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha a q hányadosára teljesül a $-1 < q \leq 1$

A határérték egyértelműsége

Ha az (a_n) sorozat konvergens, vagy végtelenhez, vagy mínusz végtelenhez tart, akkor azt mondjuk, hogy (a_n)-nek van határértéke. Ha (a_n)-nek nincs határértéke, akkor az (a_n) sorozatot oszcillálva divergensnek nevezzük.

Tétel Ha egy számsorozat konvergens, akkor korlátos is.

Tétel Ha a számsorozat monoton (nő vagy csökken) és korlátos, akkor konvergens.

Tétel Ha az (a_n) sorozat végtelenhez tart, akkor alulról korlátos és felülről nem korlátos. Ha az (a_n) sorozat mínusz végtelenhez tart, akkor felülről korlátos és alulról nem korlátos.

Tétel Bármely sorozatnak legfeljebb egy határétéke lehet.

4.2. Néhány nevezetes sorozat

4.2.1. Számtani sorozat

A számtani vagy aritmetikai sorozat egy elemi matematikai fogalom, mely a matematika sok részterületén előfordul. Egy legalább három számból álló – akár véges, akár végtelen – sorozatot akkor nevezünk számtani sorozatnak, ha a szomszédos elemek különbsége egy, a sorozatra jellemző állandó, ez a különbség a sorozat differenciája.

Legegyszerűbb példák a számtani sorozatra a (csupa azonos elemből álló) konstans sorozatok, hiszen ezekben két szomszédos elem különbsége mindig 0; nagyon egyszerű példa még a természetes számok sorozata (0, 1, 2, 3, 4, 5, ...) vagy a páros számok sorozata (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...).

Számtani sorozat elemeinek megadása

Általános tag meghatározása

1. Az első taggal kifejezve

A sorozat n-edik elemére explicit képlet adható. Mivel a sorozat minden lépésben d-vel növekszik, ezért

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Bővebben,

- $a_2 = a_1 + d$;
- $a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$;
- $a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$;
- stb.

Mindezekből következik, hogy

- $a_n = a_{n-1} + d = (a_1 + (n-2)d) + d = a_1 + (n-1)d.$

2. A szomszédos tagokkal kifejezve

Amiatt, hogy az egyes elemek az őket megelőző elemből d hozzáadásával kaphatók, levezethető az a tulajdonság, amelyről a számtani sorozatok nevüket kapták. Ugyanis a sorozat $n-1$-edik, n-edik és $n+1$-edik elemeire $(n > 1)$ fennállnak az $a_{n-1} = a_n - d$ és $a_{n+1} = a_n + d$ összefüggések.
Tehát (összeadva a fenti egyenlőségeket)

$$a_{n-1} + a_{n+1} = (a_n - d) + (a_n + d) = 2a_n.$$

Vagyis az n-edik elem a két szomszédos elem számtani közepe (átlaga):

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

De érvényes – hasonló okok miatt – az ennél általánosabb:

$$a_n = \frac{a_{n-i} + a_{n+i}}{2}$$

egyenlőség is minden $i < n$-re. Azaz egy sorozat akkor és csak akkor számtani sorozat, ha bármely eleme számtani közepe a sorozatban tőle azonos index-távolságra lévő tagoknak.

3. Analitikus szemléletű definíció

Az n-edik tagra vonatkozó képletet átrendezve:

$$a_n = dn + (a_1 - d).$$

Így látható, hogy a számtani sorozatok éppen azok a sorozatok, melyek az n lineáris függvényei, azaz az

$$f(n) = mn + c$$

alakú sorozatok, ahol m, c olyan valós állandók, melyekre $m = d$ és $c = a_1 - d$.

Rekurzív definíció

A számtani sorozat rekurzív képlete:

$$a_{n+1} = a_n + d, \qquad \forall n \in N^+.$$

Ez azt jelenti, hogy a sorozat következő elemét mindig úgy kapjuk, hogy hozzáadjuk az előző taghoz a differenciát. Ez valóban pontosan azt jelenti, hogy a sorozat szomszédos tagjainak különbsége állandó.

Összegzési képlet

A sorozat első n tagjának összegét (S_n) a következő ötlettel határozhatjuk meg. Képzeletben írjuk fel egymás mellé az első n tagot, ezek: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Majd írjuk fel ezek alá a tagokat fordított sorrendben, vagyis $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$. Számítsuk ki ennek a $2n$ darab számnak az összegét. Ez egyrészt a keresett összeg kétszerese, hiszen az első n tag mindegyike pontosan kétszer szerepel. Másrészt pedig az egymás alatt lévő számok összege éppen $a_1 + a_n$. Összesen n egymás alatti pár van, vagyis az összeg éppen $(a_1 + a_n)n$. De ez az általunk keresett összeg (azaz az első n tag összegének) kétszerese, vagyis a helyes eredmény:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Ha még azt is felhasználjuk, hogy $a_n = a_1 + (n-1)d$, akkor

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}.$$

Ezt a képletet alkalmazva $a_1 = 1$ és $d = 1$ esetben, megkapjuk az első n pozitív egész szám összegét, azaz $\frac{(n+1)\cdot n}{2}$-t vagy másképp: $\frac{n^2+n}{2}$.

További tulajdonságok

1. Növekedési tulajdonságok

- A számtani sorozat monoton növekvő és alulról korlátos,
  ha $d > 0$.
- A számtani sorozat monoton csökkenő és felülről korlátos,
  ha $d < 0$.
- A számtani sorozat nemnövekvő, nemcsökkenő, azaz állandó,
  ha $d = 0$.

2. Algebrai tulajdonságok

Két számtani sorozat összege és különbsége, továbbá egy számtani sorozat valós számszorosa (mint például ellentettje) is számtani sorozat.

Konkrétan: ha $a_n = a_1 + (n-1)d$ és $b_n = b_1 + (n-1)e$ két számtani sorozat, akkor $((a+b)_n) = (a_n + b_n) = (a_1 + b_1 + (n-1)(d+e))$ is számtani sorozat, melynek első tagja a tagok első tagjai összege, azaz $a_1 + b_1$, és differenciája a tagok differenciáinak összege, azaz $d + e$.

Továbbá ha $\alpha \in R$ tetszőleges valós szám, akkor $\alpha(a_n) = (\alpha a_1 + (n-1)d)$ is számtani sorozat, első tagja az eredeti sorozat első tagjának α-szorosa; differenciája az eredeti sorozat differenciájának α-szorosa.

Ez azt jelenti, hogy a valós számtani sorozatok az összeadással kommutatív csoportot[1], illetve a számmal szorzást is hozzávéve, vektorteret alkotnak.

[1] A G halmazt csoportnak nevezzük, ha definiálva van rajta egy * kétváltozós művelet, melyre teljesülnek a következő feltételek:
– a $*$ művelet asszociatív;

Igazolható, hogy két számtani sorozat szorzata mindig másodrendű számtani sorozat, hiszen ha

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ és } b_n = b_1 + (n-1)e \text{ , akkor}$$

$$a_n b_n = [a_1 + (n-1)d] \cdot [b_1 + (n-1)e] = a_1 b_1 + (n-1)(d+e) + (n-1)2de =$$

$$(a_1 b_1 - d - e + de) + (d + e - 2de)n + (de)n^2 \text{ ,}$$

ami megfelel a másodrendű számtani sorozatok analitikus szemléletű definíciójának, továbbá az ott írtak alapján az is megállapítható, hogy a szorzatsorozat

1. különbségsorozatának differenciája a tényezők differenciáinak kétszeres szorzata;

$$(D = 2de)$$

2. különbségsorozatának első tagja az 1-gyel megnövelt differenciák szorzatánál eggyel kisebb ($\triangle(ab)_1 = (d+1)(e+1) - 1$); és ami a tagonkénti szorzat definíciójának is egyszerű következménye – első tagja természetesen a tényezők első tagjainak szorzata.

4.2.2. Mértani sorozat

Mértani sorozatnak nevezzük az olyan sorozatokat, amelyekben a második elemtől kezdve bármelyik tagot az őt megelőző tagból egy, a sorozatra jellemző q számmal megszorozva kapjuk. Ezt az állandó szorzót idegen szóval kvóciensnek nevezzük, jele: q. A neve (kvóciens, hányados) onnan ered, hogy ha nem 0, akkor felírható a sorozat (másodiktól kezdve) bármelyik tagjának és az azt megelőző tag hányadosaként.

A mértani sorozat n-edik tagja

Legyen a sorozat n-edik tagja a_n. Ekkor:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{vagy}$$

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-i} \cdot a_{n+i}} \quad \text{ahol } \; i \in \mathbb{N}.$$

Ez utóbbi azt is jelenti, hogy a mértani sorozat n-edik tagja az $(n+i)$-edik és az $(n-i)$-edik tagjának a mértani közepe.

– a G halmaznak van neutrális eleme, azaz $e * a = a * e = a$;

– a G halmaz bármely a eleméhez hozzárendelhető egy olyan a^{-1}-gyel jelölt G-beli elem (melyet az a elem inverzének nevezünk), hogy a $* \; a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Egy G csoportot kommutatívnak, vagy Abel csoportnak nevezünk, ha rajta értelmezett művelet kommutatív, tehát $a + b = b + a$ minden $a; b \in G$-re.

A mértani sorozat első n tagjának összege

$q \neq 1$ esetén: Írjuk fel az első n tag összegét tagonként:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... + a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát q-val:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... + a_1 \cdot q^n.$$

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt!

$$S_n \cdot q - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1$$

Ebből S_n-t kifejezve:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Ha $q = 1$, akkor a mértani sorozat minden tagja egyenlő, így:

$$S_n = a_1 \cdot n.$$

A sorozat első n tagjának szorzata

Írjuk fel tényezőnként ezt a szorzatot:

$$a_1 \cdot (a_1 \cdot q) \cdot (a_1 \cdot q^2) \cdot (a_1 \cdot q^3) \cdot ... \cdot (a_1 \cdot q^{n-1}) =$$

$$\underbrace{a_1 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_1}_{ndb} \cdot q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot ... \cdot q^{n-1} = a_1^n \cdot q^{1+2+3+\ldots+n-1}.$$

Mivel: $1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ (a számtani sorozatnál látott összegképletet alkalmaztuk), a mértani sorozat első n tagjának szorzata:

$$a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

4.2.3. *Fibonacci-sorozat*

Leonardo Pisaro *Fibonacci* Liber Abaci című híres művében szerepel az alábbi probléma: Hány pár nyúl származik egy évben egyetlen pártól, ha minden pár havonta egy új párt szül és minden új pár kéthónapos korától kezdve válik tenyészképessé, és közben egyetlen nyúl sem pusztul el? (Ebből a feladatból származik az a sorozat, ami a matematikus nevét megőrizte.)

A feladat megoldása közben a nyúlpárok számának alakulását vizsgáljuk az idő függvényében. Az első két hónapban nem változik a párok száma, a harmadik hónapban az első pár új párnak ad életet, majd a negyedik hónapban is. Az ötödik hónapban az eredeti szülők mellett az új pár is utódokat hoz létre, ekkor az újszülött párok száma már kettővel nő. Ha felfigyelünk arra, hogy az állomány száma minden hónapban annyival nő, ahány legalább két hónapos pár van, akkor könnyen tudjuk követni a nyulak szaporodását. A párok számának alakulását az alábbi táblázat foglalja össze.

hónapok (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
nyúlpárok (f_n)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	...

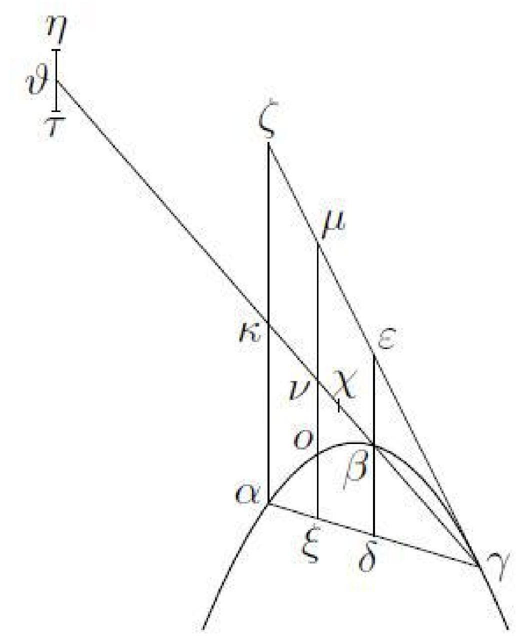
Az így kapott számsorozat a *Fibonacci-sorozat*, amelynek képzési szabálya vagy rekurzív definíciója:

$$f_1 = f_2 = 1 \quad \text{és} \quad f_n = f_{n_1} + f_{n-2} \quad \text{ha} \quad n > 2.$$

Fibonacci-típusú sorozatot kapunk, ha *Fibonacci-sorozat* képzési szabályát megtartjuk, de a két kezdőelemet megváltoztatjuk.

Egy édekes tétel

Állítás: Legyen adott az $\alpha\beta\gamma$ szelet, amelyet az $\alpha\gamma$ egyensesszakasz és az $\alpha\beta\gamma$ parabolaív zár közre. Vegyük fel az ε pontot a γ-ban húzott érintőn úgy, hogy a felezőpontját, és a $\delta\beta\varepsilon$ egyenesszakasz legyen párhuzamos a parabola tengelyével, majd kössük össze a β pontot α és γ-val. Állítom, hogy az $\alpha\beta\gamma$ szelet egyharmadával nagyobb az $\alpha\beta\gamma$ háromszögnél. – Írja Archimédesz.



Archimédész nem csak matematikai úton, hanem geomatriai úton is bebizonyította az állítást. Ehhez szüksége volt arra, hogy meghatározza az 1/4 kvóciensű mértani sorozat első n elemének az összegét (véges eljárással összegezni végtelen sort). Eljárása a következő volt: Legyen a szóbanforgó mértani sorozat első n eleme: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. A sorozat definíciójából következik, hogy

$$\frac{4}{3}a_2 = a_2 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3}a_1$$
$$\frac{4}{3}a_3 = a_3 + \frac{1}{3}a_3 = \frac{1}{3}a_2$$
$$\frac{4}{3}a_4 = a_4 + \frac{1}{3}a_4 = \frac{1}{3}a_3$$
$$\vdots$$
$$\frac{4}{3}a_n = a_n + \frac{1}{3}a_n = \frac{1}{3}a_{n-1}$$

Összegezve:

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1})$$

Adjunk most mindkét oldalhoz a_1-et, és vonjunk ki $\frac{1}{3}(a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1})$ -et. Ekkor:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \frac{1}{3}a_n = \frac{4}{3}a_1$$

Így a közelítő módszerrel azt kapjuk, hogy

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{4}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_n = \frac{4}{3}a_1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} a_1 = \frac{4}{3}a_1$$

amit bizonyítani akartunk.

4.2.4. Indukció, teljes indukció

Az *indukciós módszernél* egyes esetekből szeretnénk következtetni az általánosra. Ezzel azonban legfeljebb egy sejtéshez juthatunk, de bizonyításhoz nem.

A *teljes indukció* a matematika egyik leggyakrabban használt bizonyítási módszere a természetes számok körében. Az elve a következő: Ha egy tulajdonság igaz az $n = 1$-re, továbbá ez a tulajdonság olyan természetű, hogy öröklődik, vagyis ha igaz n ($n \in N^+$) esetében, akkor igaz $n + 1$-re is, akkor azt kapjuk, hogy a tulajdonsággal az összes természetes szám rendelkezik.

A módszer segítségével egyszerre megszámlálhatóan végtelen sok állítást lehet bizonyítani. Az első állítás igazsága és az indukciós lépés együtt már az összes állítás igazságát is bizonyítja.

[11], [12], [13], [14], [15]

4.3. Feladatok

1. *Egy mértani sorozat öt szomszédos eleme közül a páratlan indexű elemek összege* 63*, a páros indexű elemek összege pedig* 30*. Melyik ez a sorozat?* [14]

Megoldás: A keresett mértani sorozat első eleme legyen a, és a hányadosa q.

$$\begin{aligned} a + aq^2 + aq^4 &= 63 \\ aq + aq^3 &= 30 \\ a(1 + q^2 + q^4) &= 63 \\ a(q + q^3) &= 30. \end{aligned}$$

Feltéve, hogy $a \neq 0$, $q \neq 0$, $(q^2 + 1) \neq 0$, osszuk el az első egyenletet a másodikkal.

$$\frac{1 + q^2 + q^4}{q + q^3} = \frac{21}{10}$$

Rendezzük az egyenletet.

$$10q^4 - 21q^3 + 10q^2 - 21q + 10 = 0$$

$$10q^2 + \tfrac{10}{q^2} - 21q - \tfrac{21}{q} + 10 = 0$$

Vezessünk be új jelölést: $t = q + \dfrac{1}{q}$, $t^2 = q^2 + \dfrac{1}{q^2} + 2$.

A behelyettesítés után a következő másodfokú egyenletet kell megoldani:

$$10(t^2 - 2) - 21t + 10 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján: $t_1 = \dfrac{5}{2}$, és $t_2 = \dfrac{-2}{5}$.

Innen a q-ra a következő másodfokú egyenleteket kapjuk:

$${q_1}^2 - \frac{5}{2}q_1 + 1 = 0, \quad \text{és} \quad {q_2}^2 + \frac{2}{5}q_2 + 1 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján: $q_{1,1} = 2$, $q_{1,2} = \dfrac{1}{2}$; a q_2-re nem kapunk megoldást a természetes számok halmazán.

A keresett sorozatok: $a = 48$, $q = \dfrac{1}{2}$; és $a = 3$, $q = 2$.

2. *Bizonyítsuk be, hogy minden* n *pozitív egész szám esetében a következő szám egész szám:* $F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$. [16]

Megoldás:

A teljes indukció segítségével bizonyítjuk be a feladatot. Ha n helyére behelyettesítjük az 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számokat, akkor az $n = 0, 1$ értékekre azonnal látszik, hogy a fenti érték éppen 0, illetve 1, $n = 2$ esetében pedig megkapjuk az 1-et. $n = 3$, 4, 5, 6, 7 … esetében rendre a következő eredményeket kapja: 2, 3, 5, 8, …

Ezek a számok pedig a Fibonacci sorozat első néhány tagja, csak a szokásostól eltérően nem az első, hanem az úgynevezett 0-dik taggal kezdődik. A harmadiktól kezdődően bármelyik tag az előző kettő összegével egyenlő:

Azt kell megmutatni, hogy:

$$\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}+\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+2}\sqrt{5}}=\frac{(1+\sqrt{5})^{n+2}-(1-\sqrt{5})^{n+2}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

Hozzuk közös nevezőre a törteket:

$$\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}+\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+2}\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{(1+\sqrt{5})^n(6+2\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})^n(6-2\sqrt{5})}{2^{n+2}\sqrt{5}}=\frac{(1+\sqrt{5})^{n+2}-(1-\sqrt{5})^{n+2}}{2^{n+2}\sqrt{5}}=$$

éppen ezt szerettük volna bizonyítani.

A fenti összefüggés éppen a Fibonacci sorozat n-dik tagját adja meg.

Megjegyzés: Ha egy szakaszt két részre felosztunk úgy, hogy a nagyobbik és kisebbik rész aránya megegyezzen az egész és a nagyobbik rész arányával, azaz: $\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$, akkor az $\frac{a}{b}$ arányra a $(1+\sqrt{5})$ és $(1-\sqrt{5})$ értékeket kapjuk. Egy szakasz ily módon való felosztását *aranymetszés*nek nevezik.

3. *Egy számtani sorozat első három elemének összege* 105*. Ha a harmadik számhoz* 180*-at adunk egy mértani sorozat első három eleméhez jutunk. Melyek ezek?* [13]

Megoldás:

$$a_1+a_2+a_3=105$$

Ha a harmadik taghoz 180-at adunk, akkor egy mértani sorozat szomszédos tagjait kapjuk, tehát:

$$a_2{}^2=a_1(a_3+180).$$

Írjuk fel mindkét összefüggést a_1 és d segítségével:

$$\begin{aligned}(\mathrm{I.})\ a_1+a_1+d+a_1+2d &= 105\\ 3a_1+3d &= 105\\ a_1+d &= 35\end{aligned}$$

$$(\mathrm{II.})\ (a_1+d)2=a_1(a_1+2d+180).$$

Fejezzük ki az I. kifejezésből d-t:

$$d = 35 - a_1,$$

helyettesítsük ezt a II. kifejezésbe:

$$(a_1 + 35 - a_1)2 = a_1(a_1 + 2(35 - a_1) + 180)$$

$$a_1{}^2 - 250a_1 + 352 = 0.$$

A másodfokú egyenletet gyökei: $a_1 = 5$ vagy $a_1 = 245$. Az első esetben $a_1 = 5$; $a_2 = 35$; $a_3 = 65$. A második esetben $a_1 = 245$; $a_2 = 35$; $a_3 = -175$.

4.4. Versenyfeladat

1. *Kétfordulós labdarugó-bajnokságban 8 csapat vesz részt. Egy mérkőzés után 2 pontot kap a nyertes; döntetlen esetén minkét csapat 1-1 ponot kap. A bajnokság végén a csapatok pontszámai egy szigorúan csökkenő számtani sorozat egymást követő elemeivel egyenlőek, és minden csapat szerzett pontot. Meg lehet-e adni a pontverseny végeredményét csupán ennyi adatból?*

(Országos Szakközépiskolai Tanulmányi Verseny, 1984.)

Megoldás:

A vesztes csapat pontszáma legyen a_1. A pontszámok a következőek:

$$\begin{aligned} &a_1, \\ &a_1 + d, \\ &\vdots \\ &a_1 + 7d, \end{aligned}$$

ahol $a_1 > 0$, d a számtani sorozat differenciája, (a és d egészek). A 8 csapat összesen $8 \cdot 7 = 56$ meccset játszott. Ez azt jelenti, hogy a megszerezhető pontok száma 112. Ezzel megegyezik a sorozatunk tagjainak összegével.

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + 7d}{2} \cdot 8.$$

$$112 = (2a_1 + 7d) \cdot 4$$

$$2a_1 = 7 \cdot (4 - d)$$

A jobb oldalon a $(4 - d)$ egész szám, és a 7 prímszám, ezért a_1-nek oszthatónak kell lennie 7-tel. A bal oldal osztható kettővel, ezért a jobb oldal is. Mivel 7 nem osztható 2-vel, ezért a $7 \cdot (4 - d)$ szorzatnak csak úgy lehet osztója, ha osztója $(4 - d)$-nek, ami úgy lehetséges, ha osztója d-nek.

$$a_1 = 14 - 7\frac{d}{2}$$

Mivel a_1 és d is pozitív szám, ezért csak a $d = 2$ eset lehetséges, ekkor $a_1 = 7$. A pontszámok sorozat: 21, 19, 17, 15,13, 11, 9, 7 lehet csak.

4.5. KöMaL Feladatok

[2] **B.** 4115. *Mely k pozitív egész esetén fordul elő az 1 az (a_n) sorozat elemei között, ha $a_1 = k$, és $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, ha a_n páros, illetve $a_{n+1} = a_n + 5$, ha a_n páratlan?*

Megoldás: A képzési szabály szerint a sorozat minden eleme pozitív egész szám, és vagy minden elem osztható 5-tel, vagy egyik sem. Így ha k osztható 5-tel, akkor a sorozat elemei között az 1 nem fordulhat elő. Megmutatjuk, hogy minden más esetben viszont előfordul. Tegyük fel tehát, hogy a sorozat egyik eleme sem osztható 5-tel. Ha a_n páros, akkor $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} < a_n$, ha pedig páratlan, akkor $a_{n+2} = \frac{a_n+5}{2} < a_n$, feltéve, hogy $a_n > 5$. Mivel $a_n = 5$ most nem lehet, ez azt mutatja, hogy a sorozat minden 4-nél nagyobb eleme után található a sorozatban egy nála kisebb elem. Ez pedig azt jelenti, hogy előbb vagy utóbb a sorozatban megjelenik egy olyan a_n elem, amelyre $a_n \leq 4$. Ha $a_n = 1$, akkor készen vagyunk, ha $a_n = 2$, akkor $a_{n+1} = 1$, ha $a_n = 4$, akkor $a_{n+2} = 1$, ha pedig $a_n = 3$, akkor $a_{n+4} = 1$.

B. 4129. *Az (a_n) sorozatot a következő rekurzióval definiáljuk: $a_0 = 0, a_1 = 1$, $n > 1$ esetén pedig $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$. Igazoljuk, hogy ha $2^k \mid n$, akkor $2^k \mid a_n$.*

Megoldás: Ha $n = 0$, akkor az állítás nyilván igaz, így elegendő annyit megmutatni, hogy minden m pozitív egész számra $2a_m \mid a_{2m}$ teljesül. Ekkor ugyanis k szerinti teljes indukcióval könnyen megmutatható, hogy $2^k a_m \mid a_{2^k m}$, tehát $n = 2km$ esetén, lévén a sorozat elemei egész számok, $2^k \mid a_n$ valóban teljesül.
A sorozat képzési szabálya szerint $2a_m = a_{m+1} - a_{m-1}$, ahonnan

$$a_{m+1} \equiv a_{m-1} \pmod{2a_m}$$

Most i szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy minden $0 \leq i \leq m$ esetén

$$a_{m+i} \equiv (-1)^{i+1} a_{m-1} \pmod{2a_m}$$

teljesül. Ez $i = 0$ esetén magától értetődő, $i = 1$ esetén pedig az imént láttuk be. Ha pedig $2 \leq i \leq m$ és kisebb i értékek esetén az állítást már igazoltuk, akkor

$$a_{m+i} = 2a_{m+i-1} + a_{m+i-2} \equiv 2 \cdot (-1)^i a_{m-i+1} + (-1)^{i-1} a_{m-i+2} \pmod{2a_m}$$

és itt a jobb oldalon tényleg$(-1)^{i+1} a_{m-i} = (-1)^{i+1}(a_{m-i+2} - 2a_{m-i+1})$ áll. A kapott eredményt $i = m$ esetén alkalmazva adódik, ami éppen azt jelenti, hogy $2a_m \mid a_{2m}$.

[2]Ebben a fejezetben szereplő feladatok és megoldások a 21. hivatkozásban megjelölt helyről származnak

Megjegyzés: Ez a feladat azért ragadta meg az érdeklődésemet, mert a képzési szabálya emlékeztet a Fibonacci-típusú sorozat képzési szabályára.

B. 3462**.** *Milyen n-ekre érhető el, hogy a $\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm n$ alakú összegek között szerepeljen a* 100*?*

Megoldás: Az első n darab természetes szám öszege $S_n = \frac{(1+n)n}{2}$. Mivel S_n értékét mindig egy szám kétszeresével csökkentjük, ezért a 100-at csak páros S_n-ből kiindulva érhetjük el. $S_{13} = 91$ még kevés, $S_{14} = 105$ páratlan, viszont $S_{15} = 120$, így ha az összegben a 10 előjelét negatívra változtatjuk, akkor pont 100 lesz az eredmény:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 - 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 100.$$

$$S_{16} = 136, \quad 8 + 10 = \tfrac{36}{2}, \qquad \text{így}$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 100.$$

Bármely négy egymást követő egész szám előjele változtatható úgy, hogy az így kapott négy szám összege 0 legyen: $a - (a + 1) - (a + 2) + (a + 3) = 0$, így ha $n = 4k + 15$ vagy $n = 4k + 16$, akkor meg tudjuk változtatni az előjeleket a kívánt módon. Ha $n = 4k + 1$, akkor , ami páratlan. Ha $n = 4k + 2$, akkor , ez is páratlan, ezekre az n-ekre tehát nem kaphatunk 100-at. összegezve: pontosan akkor kaphatunk 100-at, ha $n = 4k$, vagy ha $n = 4k + 3$.

Összefoglalás

A dolgozatomban a tankönyvek alapján a három fejezetben fokozatosan épül fel, hogy a középiskolai tanulmányok végére, milyen általános ismeretekkel rendelkeznek a diákok a sorozatokról.

Minden fejezetet feladtokkal zárok le. Ezeket egy részével az órákon is találkoznak a tanulók, és akadnak olyanok is amik inkább csak szakkörökön vagy versenyeken kerülnek elő.

Ahogy bővülnek az ismeretek, úgy egyre összetettebb feladatok kerülnek elő. Találkozunk olyan feladatokkal is, amiknél már nem elegendő a sorozatokra vonatkozó definíciók ismerete. A megoldához szükség van arra is, hogy a más témakörökből származó ismereteinket is fel tudjuk használni.

Köszönetnyilvánítás

A dolgozat átnézéséért köszönetet mondok évfolyamtársamnak, Szalai Gábornak.

Felhasznált irodalom

1. Békéssy Szilvia, dr. Fried Katalin, Korándi József, Paróczay József, Számadó László, Tamás Beáta: Matematika 5. (Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.,Budapest, 2006)

2. Békéssy Szilvia, dr. Fried Katalin, Korándi József, Paróczay József, Számadó László, Tamás Beáta: Matematika 5. Feladatgyűjtemény (Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.,Budapest, 2006)

3. Békéssy Szilvia, dr. Fried Katalin, Korándi József, Paróczay József, Számadó László, Tamás Beáta: Matematika 6. (Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.,Budapest, 2006)

4. Békéssy Szilvia, dr. Fried Katalin, Korándi József, Paróczay József, Számadó László, Tamás Beáta: Matematika 6. Feladatgyűjteményt (Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.,Budapest, 2006)

5. Bölcskei Attila, Kaposiné Pataky Krisztina, Dr. Szabadi László, Szokol ágnes: Matematika 7−8. osztályosok számára, (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2002)

6. Békésss Szilvia, dr. Fried Katalin, Korándi József, Paróczay József, Számadó László, Tamás Beáta: Matematika 7. évfolyam, (Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt., Budapest, 2006)

7. Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Szeredi éva: Matematika 7. osztály I. kötet (Apáczai Kiadó, Celdömölk, 2008)

8. Dr. Andrási Tiborné, Dr, Czeglédy Istvánné, Dr. Hajdú Sándor, Dr. Czeglédy István, Novák Lászlóné, Dr. Sümegi Lászlóné, Szalontay Tibor: Matematika Fealdatgyűjtemény 7-8. osztály számára (Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1990)

9. Dr. Czeglédy István, Dr, Czeglédy Istvánné, Dr. Hajdú Sándor, Novák Lászlóné, Dr. Sümegi Lászlóné, Szalontay Tibor, Zankó Istvánné: Matematika 8. (Műszaki kiadó, Budapest, 2006)

10. Kosztolányi József, Mike János, Palánkainé Jakab ágnes, Dr. Szederkényi Antalné, Vincze István: Matematika összefoglaló feladatgyűjtemény 10−14 éveseknek (Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1993)

11. dr. Korányi Erzsébet, dr. Urbán János: Matematika IV. osztály (Tankönyvkiadó, Budapest, 1986)

12. dr. Korányi Erzsébet: Matematika III. osztály /fakultatív A osztály/ (Tankönyvkiadó, Budapest, 1983)

13. Hajnal Imre, Számadó László, Békessy Szilvia: Matematika 12. gimnáziumok számára (Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2004)

14. Czapáry Endre, Gyapjas Ferenc: Matematika a középiskolák 12. évfolyama számára (Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2004)

15. Blázsovics József: Ennyit kell(ene) tudnod matematikából (Akkor kiadó kft és Panem Kft, Budapest, 1994)

16. Blázsovics József: Ötösöm lesz matematikából példatár (Novotrade Kiadó, 1990)

17. Török Judit: A Fibonacci−sorozat (Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984)

18. http://www.math.u-szeged.hu/∼klukovit/Hallgatoknak/MatTort/mattort0607/gorog.pdf

19. http://www.math.u-szeged.hu/∼klukovit/Hallgatoknak/MatTort/mattort0809/archim.pdf

20. http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/egyeb/kalmar/Kd6/Kd6.html

21. http://www.komal.hu/verseny/feladatok.h.shtml

22. Radnainé Szendrei Julianna: Szakközépiskolai versenyek matematikafeladatai mindnekinek (Tankönyvkiadó, Budapest, 1988)

23. Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: Analízis I.(Nemzeti Tankönykiadó, Budapest, 2006)