Szakdolgozat

Numerikus integrálás

Írta: Pásztor Nikolett

Matematika BSc - matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Kurics Tamás, egyetemi tanársegéd

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2010

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Motiváció

Az integrálszámítással többféle matematikai szinten is foglalkozunk. Ebben a dolgozatban a numerikus integrálási módszereket fogjuk tanulmányozni.

Erre miért van szükségünk? Az alkalmazásokban gyakran találkozhatunk olyan feladattal, amikor egy-egy határozott integrált kell kiszámítani. Ezen számítások azonban nem mindig egyszerűek. Ugyanis nem minden integrál fejezhető ki ismert függvény segítségével, nem áll rendelkezésünkre mindig „szép” képlet. A másik eset pedig ha ugyan ismert a függvény a megoldáshoz, de az túl bonyolult, hogy kiszámítsuk. Ilyen esetekben a megoldást a közelítő integrálási módszerek jelentik, amelyekkel a határozott integrálok értékét közelítőleg meg tudjuk határozni.

A dolgozatban bemutatok néhány numerikus integrálási módszert, és azt is, hogy ezek a módszerek mennyire pontosak.
De először ismerkedjünk meg a határozott integrál fogalmával.

1.2. A határozott integál

1. Definíció. *Legyen adott egy f függvény, amely az $[a, b]$ zárt intervallum minden pontjában értelmezett. Ennek az f függvénynek az a-tól b-ig vett határozott integrálja az*

$$I := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\overline{x_i}),$$

az ún. Riemann-féle közelítő összegek határértéke, ahol a Δx_i az $[a, b]$ intervallum i. részintervallumának hossza, azaz: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Az $f(\overline{x_i})$ pedig ennek az i. részintervallumnak egy tetszőleges pontjához tartozó függvényérték, ahol: $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$. Az x_i pontok pedig az $[a, b]$ intervallumnak egy n-től függő felosztását képezik:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Ha a felírt határérték létezik, akkor az $f(x)$ függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumban. Ez a határozott integrál könnyen kiszámítható, ha ismert az f primitív függvénye, vagyis: $F' = f$ ismert. Ekkor a Newton-Leibniz-féle formula alkalmazható:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F]_a^b.$$

De mi van akkor ha nincs primitív függvénye az adott függvénynek? Ekkor ugyebár nem tudjuk alkalmazni a Newton-Leibniz-formulát, tehát más módszert kell keresnünk az integrál kiszámítására. Egy ilyen módszer a numerikus integrálás, amellyel közelítőleg ki tudjuk számolni az integrál értékét. A kérdés pedig az, hogy ezt hogyan tehetjük meg, vagyis azt hogy hogyan közelítünk?

1.3. Hogyan közelítünk?

Jelöljük a határozott integrált a következőképpen: $I(f) := \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
Ekkor $I(f)$ közelítését így határozzuk meg:

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot f(x_i), \quad \text{ahol} \quad x_i \in [a, b].$$

Itt a c_i-ket súlyoknak nevezzük, az x_i-ket pedig alappontoknak hívjuk.

2. Definíció. *Az $I_n(f) = I_n(f, c_0, x_0, \ldots, c_n, x_n)$-et kvadratúraképletnek nevezzük.*

Tehát a továbbiakban azt a módszert alkalmazzuk, hogy $I(f)$-et $I_n(f)$-fel közelítjük. Mivel ezek a módszerek csak közelítő pontosságot adnak, azt is meg kell vizsgálnunk, ha f elég sokszor differenciálható, akkor mennyi lehet legfeljebb az eltérés $I(f)$ és $I_n(f)$ között.

2. fejezet

Interpolációs kvadratúraképletek

A határozott integrál közelítő kiszámítása:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot f(x_k), \quad \text{ahol a } c_k \text{ súlyok ismeretlen együtthatók.} \tag{2.1}$$

A feladat tehát a c_k együtthatók meghatározása.

Ötlet: Helyettesítsük f-et az $x_i \in [a, b]$ alappontokra ($i = 0, \dots, n$) támaszkodó Lagrange-féle interpolációs polinommal, majd azt integráljuk. Tehát:

$$\int_a^b f(x) \ \ \mathrm{d}x \approx \int_a^b L_{n,f}(x) \ \ \mathrm{d}x.$$

Lagrange-féle interpolációs polinomok:

Adottak az $(x_0, \dots, x_n)$ és az $(f_0, \dots, f_n)$ értékek. A Lagrange-féle interpolációs polinom a

$$L_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot l_k(x), \quad \text{ahol} \quad l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Ezután integráljuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot az $[a, b]$ intervallumon:

$$\int_a^b L_{n,f}(x) \ \ \mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot l_k(x) \ \ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \ \ \mathrm{d}x.$$

Tehát a következőt kaptuk a Lagrange-interpolációs polinom integráljára:

$$\sum_{k=0}^{n} f_k \cdot \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \ \ \mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

A (2.1) és a (2.2) alapján a következőt kapjuk a c_k együtthatóra:

$$c_k = \int_a^b l_k(x) \quad \mathrm{d}x = \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad \mathrm{d}x \tag{2.3}$$

3. Definíció. *Azokat a* (2.1) *típusú numerikus integráló formulákat, amelyekre az együtthatókat a* (2.3) *alapján számoljuk, interpolációs integráló formulának nevezzük.*

Tehát ismerünk egy eljárást, amivel ki tudjuk számítani a határozott integrál közelítő értékét. Mivel az alappontok ismertek, ezekből ki tudjuk számítani a súlyokat a Lagrange-féle interpoláció segítségével.

Nézzük ennek a módszernek a hibáját! Ismerjük a Lagrange-interpoláció hibaképletét, ezért felírhatjuk az interpolációs kvadratúraképlet hibáját. A Lagrange-interpoláció hibája a következő, ha $f \in C^{n+1}[a, b]$:

$$f(x) - L_{n,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x).$$

Ezt a hibaképletet most integráljuk:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b L_{n,f}(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x) \ \mathrm{d}x.$$

Ebből a hibára a következőt kapjuk:

$$|\ e_n(x)\ | \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \int_a^b |\ \omega_{n+1}(x)\ | \,\mathrm{d}x, \qquad \text{ahol} \quad M_{n+1} := \max_{[a,b]} |\ f^{(n+1)}\ | \ .$$

1. Következmény. *Az interpolációs kvadratúraképletek, ha $n+1$ pontra támaszkodnak, akkor az n-edfokú polinomokra pontosak.*

4. Definíció. *Ekvidisztáns felosztás esetén, azaz ha $x_k - x_{k-1} = h$ állandó, ezeket a formulákat Newton-Cotes típusú kvadratúráknak nevezzük.*

3. fejezet

Newton-Cotes formulák

Newton-Cotes típusú formulák azok, amelyekben a felosztás ekvidisztáns, azaz:
$x_k = x_0 + k \cdot h,$ ahol $h = \frac{b-a}{n}$ és $k = 0, 1, \ldots, n.$

5. Definíció. *A Newton-Cotes kvadratúraformulát zártnak nevezzük, ha a és b is osztópont, azaz $a = x_0$, $b = x_n$ és ekkor $x_k = a + k \cdot h$, $(k = 0, \ldots, n)$,és nyíltnak hívjuk, ha az a és b nem alappontok, $x_k = a + (k+1) \cdot h$, $(k = 0, \ldots, n)$ és $h = \frac{b-a}{n}$.*

3.1. Egyszerű kvadratúraképletek

3.1.1. A középpont szabály avagy érintőformula

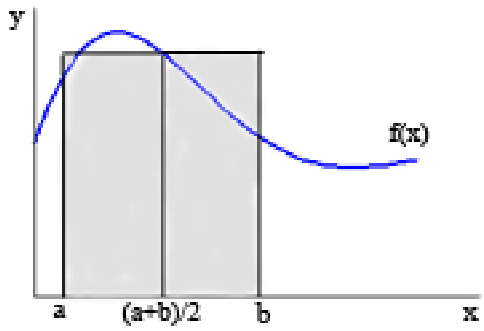
Ez a formula nyílt formula, tehát a és b nem osztópont, és egy osztópont lesz, az intervallum középpontja: $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

Ahogy az előző fejezetben tárgyaltuk, Lagrange-interpolációs polinommal közelítsünk (ez egy egytényezős összeg, mivel egy osztópont van):

$$\int_a^b f(x) \approx f(x_0) \cdot \underbrace{\int_a^b l_0(x) \ \mathrm{d}x}_{c_0} \tag{3.1}$$

$$c_0 = \int_a^b 1 \ \mathrm{d}x = [x]_a^b = b - a$$

Ez azért igaz, mert a (3.1)-es képletben az $l_0(x)$ 0-tényezős szorzat (mivel csak egy osztópont van) és ennek értéke 1, aminek integrálját a Newton–Leibniz-formulával könnyen



3.1. ábra. Érintőformula.

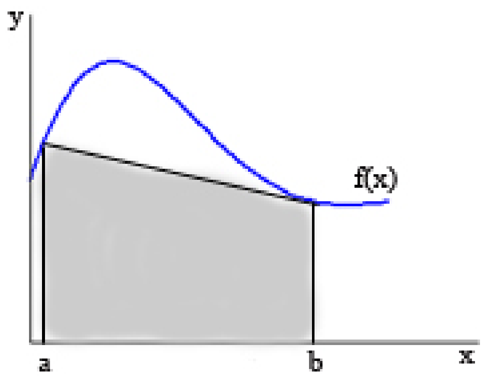
kiszámolhatunk, és így kijön a c_0 értéke. Így már mindent ismerünk, tehát felírhatjuk az érintőformulát:

$$E(f) := f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a)$$

3.1.2. Trapézformula

Ez a formula zárt formula, és két alappontja van, ami a zártság miatt az intervallum két széle: a és b.

Mint azt tudjuk a határozott integrál egy adott intervallumon egy adott függvény görbe alatti területét számolja ki. Ezt a formulát azért nevezzük trapézformulának, mert az $f(x)$ integrálját egy trapéz területével közelítjük.



3.2. ábra. Trapézformula

Feladat: Fektessünk az $(a, f(a))$ és a $(b, f(b))$ pontokra Lagrange-interpolációs polinomot:

$$\int_a^b f(x) \approx \sum_{i=0}^{1} c_i \cdot f(x_i), \quad \text{ahol} \quad c_0 = \int_a^b l_0(x)\mathrm{d}x \quad \text{és} \quad c_1 = \int_a^b l_1(x)\mathrm{d}x.$$

Ezután kiszámoljuk ezeket a c_0, c_1 súlyokat, ahol $l_0(x)$-ről és $l_1(x)$-ről a következőt tudjuk:

$$l_0(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - b}{a - b},$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Ezután már ki tudjuk számolni c_0-et és c_1-t.

$$\begin{aligned} c_0 = \int_a^b l_0(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{x - b}{a - b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a - b} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - bx\right]_a^b = \frac{1}{a - b} \cdot \left(\frac{b^2}{2} - b^2 - \frac{a^2}{2} + ab\right) = \\ &= \frac{-\frac{1}{2} \cdot (a - b)^2}{(a - b)} = -\frac{1}{2} \cdot (a - b) = \frac{1}{2} \cdot (b - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 = \int_a^b l_1(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{x - a}{b - a}\mathrm{d}x = \frac{1}{b - a} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_a^b = \frac{1}{b - a} \cdot \left(\frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2\right) = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (b - a)^2}{(b - a)} = \frac{1}{2} \cdot (b - a) \end{aligned}$$

A trapézformula a következő lesz:

$$T(f) = \frac{b - a}{2} \cdot (f(a) + f(b))$$

3.1.3. Simpson-formula

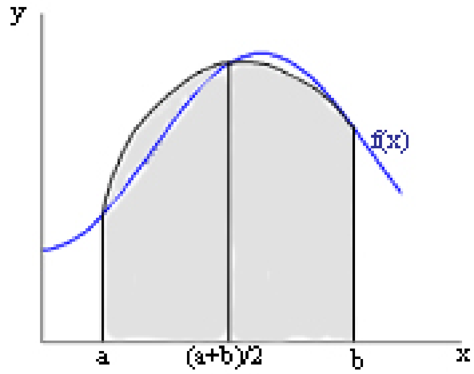
Ez a formula zárt formula és 3 alappontja van. A zártság miatt az intervallum két széle is alappont lesz.

Az alappontok tehát a következők lesznek:

$$x_0 = a \quad , \quad x_1 = \frac{a + b}{2} \quad \text{és} \quad x_2 = b.$$

A formulát a következő alakban keressük:

$$S(f) = c_0 \cdot f(a) + c_1 \cdot f\left(\frac{a + b}{2}\right) + c_2 \cdot f(b).$$



3.3. ábra. Simpson-formula.

A c_0, c_1 és c_2 súlyokat pedig úgy számoljuk ki mint az előző fejezetben, a 3 alappontra Lagrange-interpolációs polinomot fektetünk, és így a súlyok a következők lesznek:

$$c_0 = \int_a^b l_0(x)\mathrm{d}x\,, \quad c_1 = \int_a^b l_1(x)\mathrm{d}x \quad \text{és} \quad c_2 = \int_a^b l_2(x)\mathrm{d}x.$$

Mivel ismerjük a következőket: $l_0(x), l_1(x)$ és $l_2(x)$, ezért ki tudjuk számolni a súlyokat:

$$c_0 = \int_a^b l_0(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{(a-b)(a-\frac{a+b}{2})}\mathrm{d}x = \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \int_a^b (2x^2 - 3bx - ax + ab + b^2)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3bx^2}{2} - \frac{ax^2}{2} + abx + b^2x\right]_a^b$$

Tehát kiszámoljuk a határozott integrált Newton-Leibniz formulával és egyszerűsítés után a következőt kapjuk:

$$c_0 = \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \frac{b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3}{6} = \frac{-(a-b)^3}{6(a-b)^2} = \frac{b-a}{6}$$

A c_1 és c_2 súlyokat ugyanígy számoljuk ki, és a következő eredményeket kapjuk:

$$c_1 = \int_a^b \frac{(x-b)(x-a)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(b-a)^2} \cdot \int_a^b (x^2 - bx - ax + ab)\mathrm{d}x = \frac{4(b-a)}{6}$$

$$c_2 = \int_a^b \frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(b-a)(b-\frac{a+b}{2})}\mathrm{d}x = \frac{1}{(b-a)^2} \cdot \int_a^b (2x^2 - 3ax - bx + ab + a^2)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}$$

Most hogy már mindent ismerünk, felírhatjuk a Simpson-formulát:

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{b-a}{6} \cdot f(a) + \frac{4(b-a)}{6} \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6} \cdot f(b) = \\ &= \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \end{aligned}$$

Megjegyzés: A Simpson-formulát előállíthatjuk a trapézformula és az érintőformula kombinálásával a következőképpen: $\frac{2}{3}\cdot$ érintőformula és $\frac{1}{3}\cdot$ trapéz-szabály:

$$S(f) = \frac{2}{3} \cdot (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)) =$$

$$= \frac{4}{6} \cdot (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6} \cdot (f(a) + f(b)).$$

3.1.4. A kvadratúraképletek pontossága

Mivel közelítő módszerekről beszélünk, érdemes megvizsgálni, hogy ezekkel a formulákkal számolva milyen egyszerű függvények esetén kapjuk meg az integrál pontos értékét? A következő állítások igazak az eddig felsorolt formulákra:

- Csak konstans és lineáris függvény esetén pontos a középpont szabály és a trapéz-formula.
- A Simpson-formula pedig pontos a legfeljebb harmadfokú polinomokra.

Ezeket könnyen ellenőrizhetjük a következő módon:

a) *Középpont szabály:*
Legyen $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$. Ekkor ennek az integrálja, $I(f)$ a következő lesz:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[c_0 x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{3}x^3\right]_a^b = (b-a) \cdot \left[c_0 + \frac{c_1}{2}(b+a) + \frac{c_2}{3}(b^2 + ab + a^2)\right].$$

A középponti szabály szerint pedig ennek az integrálja:

$$E(f) = (b-a) \cdot \left(c_0 + c_1 \frac{a+b}{2} + c_2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right).$$

Tehát az eltérés a következőképpen alakul:

$$I(f) - E(f) = (b-a) \cdot \frac{c_2}{12}(b^2 - 2ab + a^2) = \frac{c_2(b-a)^3}{12}$$

Itt mind a c_0, mind a c_1 kiesik, tehát ez nem befolyásolja a különbséget. Csak a c_2-től függ az eltérés. Ez alapján csak akkor 0 az eltérés, ha $c_2 = 0$, tehát ha a polinom legfeljebb elsőfokú. Ezzel ellenőriztük a középpont szabály pontosságát, ami tehát csak akkor pontos, ha a függvény konstans, vagy lineáris.

b) *Trapéz szabály:*

Hasonlóan számoljuk ki mint a középpont szabály esetében.

Legyen $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$. Ekkor $I(f)$ ugyanaz mint az előbb, tehát csak a trapéz szabályt kell felírnunk erre a függvényre:

$$T(f) = \frac{b-a}{2} \cdot [c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + c_0 + c_1 b + c_2 b^2]$$

Ekkor a különbség:

$$I(f) - T(f) = (b-a) \cdot \frac{c_2}{6}(-b^2 + 2ab - a^2) = -\frac{c_2(b-a)^3}{6}$$

Ez is csak akkor 0, ha a $c_2 = 0$. Tehát a trapéz szabály akkor pontos, ha a függvény konstans, vagy lineáris.

c) *Simpson-formula:*

Erre a formulára az [1]-es könyvben található gondolatmenet szerint írjuk fel a formula pontosságának ellenőrzését.

Elöször nézzük meg mit kapunk akkor, ha az előző f-fel számolunk:

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) = \\ &= \frac{b-a}{6}(6c_0 + 3(a+b)c_1 + c_2(a^2 + (a+b)^2 + c_2 b^2)) = I(f) \end{aligned}$$

Ezzel tehát igazoltuk, hogy a Simpson-képlet pontos a másodfokú polinomokra. Ezután vegyünk egy speciális $p_3(x) := (x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)$ harmadfokú polinomot. Ezzel számolva a Simpson-képlet a következő:

$$S(p_3) = \frac{b-a}{6}(f(a) + f\left(\frac{a+b}{6}\right) + f(b)) = 0$$

Tehát a Simpson-képlet alappontjaiban ez a harmadfokú polinom eltűnik: $S(p_3) = 0$. Ezután nézzük az $S(f + \alpha p_3)$-at, ahol α tetszőleges valós szám. Itt alkalmazzuk a következő tulajdonságokat: Az I integrálok és az I_n kvadratúraképlet is additív és homogén:

- ha $f = f_1 + f_2$ függvények, akkor $I_n(f) = I_n(f_1) + I_n(f_2)$,
- és ha $f = \alpha f_1$, ahol α konstans, akkor $I_n(f) = \alpha I_n(f_1)$.

Tehát ezeket alkalmazva:

$$S(f + \alpha p_3) = S(f) + S(\alpha p_3) = S(f).$$

Ugyanakkor a szimmetria miatt $I(p_3) = 0$ is igaz, vagyis

$$I(f + \alpha p_3) = I(f) = S(f).$$

Bármely harmadfokú polinom felírható $f + \alpha p_3$ alakban, ahol f egy tetszőleges másodfokú polinom. Így beláttuk, hogy a Simpson-formula a legfeljebb harmadfokú polinomokra pontos.

Mind a három formulára felírhatjuk a hibaképletét (ld. [3]).

1. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható. Ekkor az érintőformula hibaképlete a következő:*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - E(f) = \frac{(b-a)^3}{24} \cdot f''(\xi), \qquad \text{ahol} \quad \xi \in [a, b].$$

2. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható. Ekkor a trapézformula hibaképlete a következő:*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\xi), \qquad \text{ahol} \quad \xi \in [a, b].$$

3. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ négyszer folytonosan differenciálható. Ekkor a Simpson-formula hibaképlete a következő:*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - S(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\xi), \qquad \text{ahol} \quad \xi \in [a, b].$$

3.1.5. Magasabbrendű Newton-Cotes formulák

Ebben a fejezetben felsoroljuk a további Newton-Cotes típusú formulákat. Írjuk fel a nyílt és zárt típusú formulákat.

Legyenek az $a = x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ az alappontok, az $f_1, f_2, ..., f_n$ a hozzájuk tartozó függvényértékek. Valamint legyen $h := \frac{b-a}{n-1}$.

- Nyílt Newton-Cotes formulák:

  Mivel nyílt formula, ezért az intervallum két széle nem lesz osztópont. Írjuk fel ezeket a formulákat a hibataggal együtt:

  - 1 alappont: ez volt az érintőformula: $E(f) = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} \cdot f''(\xi)$.
  - 2 alappont:
  $$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{3}{2}h \cdot (f_1 + f_2) + \frac{1}{4}h^3 \cdot f''(\xi).$$
  - 3 alappont:
  $$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{4}{3}h \cdot (2f_1 - f_2 + 2f_3) + \frac{28}{90}h^5 \cdot f^{(4)}(\xi).$$
  - 4 alappont:
  $$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{5}{24}h \cdot (11f_1 + f_2 + f_3 + 11f_4) + \frac{95}{144}h^5 \cdot f^{(4)}(\xi).$$
  - 5 alappont:
  $$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{6}{20}h \cdot (11f_1 - 14f_2 + 26f_3 - 14f_4 + 11f_5) - \frac{41}{140}h^7 \cdot f^{(6)}(\xi).$$
  - 6 alappont:
  $$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x &= \frac{7}{1440}h \cdot (611f_1 - 453f_2 + 562f_3 + 562f_4 - 453f_5 + 611f_6) - \\ &- \frac{5257}{8640}h^7 \cdot f^{(6)}(\xi).\end{aligned}$$
  - 7 alappont:
  $$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x &= \frac{8}{945}h \cdot (460f_1 - 954f_2 + 2196f_3 - 2459f_4 + 2196f_5 - 954f_6 + \\ &+ 460f_7) - \frac{3956}{14175}h^9 \cdot f^{(8)}(\xi).\end{aligned}$$

- Zárt Newton-Cotes formulák:

  Mivel zárt formula, ezért az intervallum két széle is alappont lesz. Írjuk fel ezeket a formulákat is, úgy mint a nyílt formulákat:

  - 2 alappont: ez a trapézszabály: $T(f) = \frac{h}{2} \cdot (f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\xi)$.
  - 3 alappont: ez a Simpson-szabály:

  $$S(f) = \frac{h}{6} \cdot \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) - \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}.$$

  - 4 alappont: ezt úgy hívjuk, hogy Simpson $\frac{3}{8}$ szabály:

  $$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{3}{8}h \cdot (f_1 + 3f_2 + 3f_3 + f_4) - \frac{3}{80}h^5 \cdot f^{(4)}(\xi).$$

  - 5 alappont: ezt úgy hívjuk, hogy Boole-szabály:

  $$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{45}h \cdot (7f_1 + 32f_2 + 12f_3 + 32f_4 + 7f_5) - \frac{8}{945}h^7 \cdot f^{(6)}(\xi).$$

  - 6 alappont:

  $$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x &= \frac{5}{288}h \cdot (19f_1 + 75f_2 + 50f_3 + 50f_4 + 75f_5 + 19f_6) - \\ &- \frac{275}{12096}h^7 \cdot f^{(6)}(\xi). \end{aligned}$$

  - 7 alappont:

  $$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{140}h \cdot (41f_1 + 216f_2 + 27f_3 + 272f_4 + 27f_5 + 216f_6 + \\ &+ 41f_7) - \frac{9}{1400}h^9 \cdot f^{(8)}(\xi). \end{aligned}$$

  - 8 alappont:

  $$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x &= \frac{7}{17280}h \cdot (751f_1 + 3577f_2 + 1323f_3 + 2989f_4 + 2989f_5 + \\ &+ 1323f_6 + 3577f_7 + 751f_8) - \frac{8183}{518400}h^9 \cdot f^{(8)}(\xi). \end{aligned}$$

3.2. Összetett kvadratúraképletek

Az eddig látott alacsonyabbrendű formulák pontosságát úgy lehet javítani, hogy nem az $[a,b]$ intervallumra, hanem ennek az intervallumnak a részintervallumaira alkalmazzuk az egyszerű formulákat.

Feltehetjük azt a kérdést, hogy miért nem használjuk a magasabbrendű Newton-Cotes formulákat, amelyek sok osztópontra vannak felírva? Ezzel több probléma is van. Az egyik ilyen probléma az, hogy a magasfokú polinommal való interpoláció oszcillál az intervallum szélén. Ezért jobb, ha szakaszonkénti polinomiális interpolációval dolgozunk.

Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot m egyenlő részre, az intervallumok hossza pedig legyen $h := \frac{b-a}{m}$. Az alappontok a következőek: $a = x_0 < x_1 < ... < x_{m-1} < x_m = b$. Ezután minden részintervallumra alkalmazzuk az előző fejezetben levezetett egyszerű formulákat, és így megkapjuk az összetett formulákat.

a) Összetett érintőformula:

Az érintőformulát alkalmazzuk az összes részintervallumra. Az érintőformulát ismerjük az $[a,b]$ intervallumra, amikor egy osztópont van, az intervallum felezőpontja: $E(f) = f(\frac{a+b}{2}) \cdot (b-a)$. Most ezt írjuk fel minden intervallumra, jelöljük ezt az összetett formulát $E_m(f)$-vel:

$$\begin{aligned} E_m(f) &= h \cdot f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + h \cdot f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + ... + h \cdot f\left(\frac{x_{m-1}+x_m}{2}\right) = \\ &= h \cdot \sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \end{aligned}$$

b) Összetett trapézformula:

A trapézszabályt írjuk fel az összes részintervallumra. Már láttuk az $[a,b]$ intervallumra felírva, amikor a két osztópont az intervallum két széle volt, a és b: $T(f) = \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b))$. Most ezt írjuk fel minden részintervallumra, és jelöljük ezt az összetett formulát $T_m(f)$-vel:

$$\begin{aligned} T_m(f) &= \frac{h}{2} \cdot [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2} \cdot [f(x_1) + f(x_2)] + ... + \frac{h}{2} \cdot [f(x_{m-1}) + f(x_m)] = \\ &= \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_0) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right) \end{aligned}$$

c) Összetett Simpson-formula:

Az egyszerű Simpson-formulát 3 alappontra írtuk fel, amik: a, b és $\frac{a+b}{2}$. A formula pedig a következő volt: $S(f) = \frac{b-a}{6} \cdot \big(f(a) + 4 \cdot f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\big)$. Most ezt a formulát kell felírni minden egyes részintervallumra. Az intervallumot m részre kell felosztani, de ebben az esetben feltesszük azt hogy m páros, mivel itt a Simpson-formulát nem egy részintervallumra írjuk fel, hanem kettőre. Tehát az intervallumokat kettessével vesszük és így írjuk fel a formulát. Így nem h lesz az adott intervallumunk hossza, hanem $2h$. Tehát az összetett formula a következő lesz, amit $S_m(f)$-vel jelölünk:

$$\begin{aligned} S_m(f) &= \frac{2h}{6} \cdot (f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + f(x_2)) + \frac{2h}{6} \cdot (f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + f(x_4)) + \ldots = \\ &= \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_0) + f(x_m) + 4 \cdot \sum_{i \text{ páratlan}} f(x_i) + 2 \cdot \sum_{i \text{ páros}} f(x_i) \right). \end{aligned}$$

Ugyanúgy mint az egyszerű formuláknál, itt is felírhatjuk a hibaképleteket.

Hibaképletek:

- Összett érintőformula hibaképlete:

$$\int_a^b f(x) \ \ \mathrm{d}x - E_m(f) = \frac{(b-a)^3}{24m^2} \cdot f''(\xi), \qquad \text{ahol} \quad \xi \in [a, b].$$

- Összett trapézformula hibaképlete:

$$\int_a^b f(x) \ \ \mathrm{d}x - T_m(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot f''(\xi), \qquad \text{ahol} \quad \xi \in [a, b].$$

- Összett Simpson-formula hibaképlete:

$$\int_a^b f(x) \ \ \mathrm{d}x - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} \cdot f^{(4)}(\xi), \qquad \text{ahol} \quad \xi \in [a, b].$$

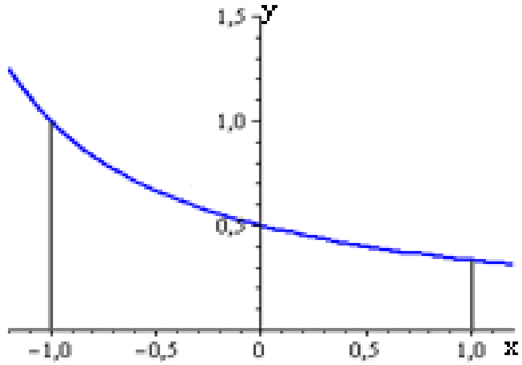
3.3. Példák

Ebben az alfejezetben oldjunk meg néhány példát az eddig levezett formulák segítségével.

1. Számoljuk ki a következő integrált:

$$I := \int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x} \ \mathrm{d}x$$

trapézszabály, Simpson-szabály, Boole-szabály és összetett Simpson-formula segítségével.



3.4. ábra. 1. példa.

Megoldás:

a) Trapézszabály:

Az alappontok: $x_0 = -1$ és $x_1 = 1$. Az ezekhez tartozó fügyvényértékek: $f(x_0) = 1$ és $f(x_1) = \frac{1}{3}$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x} \ \mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2} \cdot (f(x_0) + f(x_1)) = \frac{2}{2} \cdot (1 + \frac{1}{3}) = \frac{4}{3} \approx 1,3333.$$

b) Simpson-szabály:

Alappontok: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. Fügvényértékek: $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = \frac{1}{2}$ és $f(x_2) = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x} \ \mathrm{d}x &\approx \frac{b-a}{6} \cdot (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) = \\ &= \frac{2}{6} \cdot (1 + \frac{4}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{20}{18} \approx 1,1111. \end{aligned}$$

c) Boole-szabály:

Alappontok: $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$ és $x_4 = 1$. Fügvényértékek: $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = \frac{2}{3}$, $f(x_0) = \frac{1}{2}$, $f(x_3) = \frac{2}{5}$ és $f(x_4) = \frac{1}{3}$. Valamint a $h = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x}\ \mathrm{d}x &\approx \frac{2h}{45} \cdot (7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)) = \\
&= \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{45} \cdot \left(7 + 32 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{1}{2} + 32 \cdot \frac{2}{5} + 7 \cdot \frac{1}{3}\right) = \\
&= \frac{1}{45} \cdot \left(13 + \frac{71}{3} + \frac{64}{5}\right) = \frac{742}{675} \approx 1,09925.
\end{aligned}$$

d) Összetett Simpson-szabály:

Ebben a feladatban osszuk fel a $[-1, 1]$ intervallumot 6 egyenlő részre és így $h = \frac{1}{3}$.

Így az alappontok a következőek lesznek: $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{1}{3}$, $x_5 = \frac{2}{3}$ és $x_6 = 1$.

A függvényértékek: $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = \frac{3}{4}$, $f(x_2) = \frac{3}{5}$, $f(x_3) = \frac{1}{2}$, $f(x_4) = \frac{3}{7}$, $f(x_5) = \frac{3}{8}$ és $f(x_6) = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x}\ \mathrm{d}x &\approx \frac{h}{3} \cdot (f_0 + f_6 + 4 \cdot (f_1 + f_3 + f_5) + 2 \cdot (f_2 + f_4)) = \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + 4 \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right) + 2 \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{7}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{13}{2} + \frac{72}{35}\right) = \\
&= \frac{1}{9} \cdot \frac{280 + 1365 + 432}{210} = \frac{2077}{1890} \approx 1,09894.
\end{aligned}$$

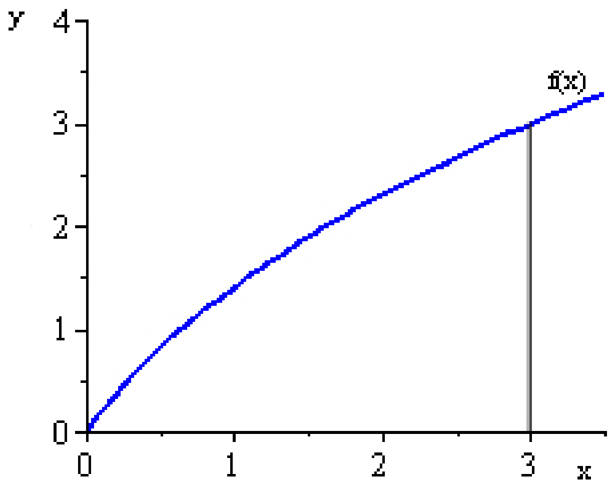
Kiszámoltuk a közelítő értékeket, most nézzük meg mi az integrál pontos értéke:

$$I := \int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x}\ \mathrm{d}x = [\ln(2+x)]_{-1}^{1} = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3) \approx 1,09861.$$

Láthatjuk, hogy ehhez az értékhez az összetett Simpson-formulával kiszámított érték van a legközelebb. Ezután a Boole-szabállyal számított érték következik. Tehát észrevehetjük, hogy sok alappont esetén kapunk jobb megoldást.

2. Számoljuk ki Simpson $\frac{3}{8}$ szabállyal, valamint összetett Simpson-szabállyal a következő integrált:

$$I := \int_{0}^{3} \frac{2x}{\sqrt{1+x}}\ \mathrm{d}x.$$



3.5. ábra. 2. példa.

Megoldás:

a) Simpson $\frac{3}{8}$ szabály:

Ez a szabály 4 alappontra van és $h = 1$. Az alappontok tehát: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ és $x_3 = 3$. A függvényértékek pedig: $f_0 = 0$,$f_1 = \sqrt{2}$, $f_2 = \frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}$ és $f_3 = 3$.

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x &\approx \frac{3}{8}\cdot h\cdot(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) = \\ &= \frac{3}{8}\cdot(0 + 3\cdot\sqrt{2} + 3\cdot\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3} + 3) \approx 5,3140\end{aligned}$$

b) Összetett Simpson-szabály:

Összetett szabály esetén előbb állapítsuk meg, hány részintervallumra osszuk fel a $[0, 3]$ intervallumot. Osszuk fel most 6 egyenlő részre ezt az intervallumot, így $h = \frac{1}{2}$.

Az alappontok: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = 2$, $x_5 = \frac{5}{2}$ és $x_6 = 3$. Függvényértékek: $f_0 = 0$; $f_1 = 0,8164$; $f_2 = \sqrt{2} = 1,4142$; $f_3 = 1,8973$;

$f_4 = \frac{4\cdot\sqrt{3}}{3} = 2,6726$; $f_5 = 2,6726$ és $f_6 = 3$.

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{1+x}}\ \mathrm{d}x &\approx \frac{h}{3}\cdot(f_0+f_6+4\cdot(f_1+f_3+f_5)+2\cdot(f_2+f_4)) = \\
&= \frac{1}{6}\cdot(3+4\cdot(0,8164+1,8973+2,6726)+ \\
&+ 2\cdot(1,4142+2,3094)) = \\
&= \frac{1}{6}\cdot(3+21.5452+7,4472) \approx 5,3320
\end{aligned}$$

Most, hogy kiszámoltuk, nézzük meg az integrál pontos értékét:

$$\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{1+x}}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3}\cdot\sqrt{1+x}\cdot(-2+x)\right]_0^3 = \frac{16}{3} \approx 5,3333.$$

Láthatjuk, hogy az összetett szabállyal számított közelítő érték közelebb van a pontos értékhez, mint az egyszerű formulával számolt érték.

3. Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt. Ha összetett érintőformulával akarjuk kiszámolni a $[0,1]$ intervallumon ennek közelítését, akkor hány részintervallumra osszuk fel, hogy a hiba kisebb legyen mint 10^{-4}-en?

Megoldás: Az összetett érintőformula hibája a következő volt:

$$\int_a^b f(x)\ \ \mathrm{d}x - E_m(f) = \frac{(b-a)^3}{24m^2}\cdot f''(\xi), \qquad \text{ahol} \quad \xi\in[a,b]$$

Ennek kell kisebbnek lennie, mint 10^{-4}. Azaz

$$\left|\frac{(b-a)^3}{24m^2}\cdot f''(\xi)\right| < 10^{-4}.$$

Tudjuk, hogy $f''(\xi) = (x^2)'' = 2$. Ezért egyszerűsítés után a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12m^2} &< 10^{-4} \\
m &\geq 29.
\end{aligned}$$

Tehát a $[0,1]$ intervallumot legalább 29 részre kell felosztani, hogy a hiba kisebb legyen, mint 10^{-4}.

4. fejezet

Gauss-féle kvadratúra

Az eddig levezetett formulák csak összetett alakban és magas pontszám esetén adtak pontos eredményt, ekkor viszont már a kerekítési hibák észrevehetővé válhatnak. Tehát a kérdés a következő: hogyan lehetne az alappontok számának aránylag kis száma mellett a kvadratúra pontosságát növelni?

A Gauss-kvadratúrák lényege az, hogy mi magunk válasszuk meg nem csak a súlyokat, hanem az alappontokat is, ahol a függvényt megszeretnénk közelíteni. A Gauss-kvadratúra pontos értéket ad $2n-1$ vagy ennél alacsonyabb fokú polinomok esetén az x_i alappontok és c_i súlyok megfelelő megválasztása esetén $(i = 1, ..., n)$. Ez kétszer magasabb fok lesz, mint a Newton-Cotes formulák esetén. Azonban magasabb fok akkor jelent nagyobb pontosságot, amikor az integrálandó függvény sima és jól meg lehet közelíteni egy polinommal.

Tehát a feladat a következő: mi válasszuk meg az alappontokat is.

Ahhoz, hogy megvalósítsuk ezt a fokú pontosságot, az alappontoknak és a súlyoknak a következő feltételt kell kielégítenie:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (x_k)^i = \int_a^b x^i \quad \mathrm{d}x, \qquad \text{ahol } \; i = 0, ..., 2n-1.$$

Ebben a fejezetben ezeket a Gauss-kvadratúrákat fogjuk egy kicsit jobban megvizsgálni. Haladjunk egy kicsit általánosabban. Legyen

$$Q(f) := \int_a^b w(x) f(x) \quad \mathrm{d}x, \tag{4.1}$$

ahol w egy súlyfüggvény. Feltesszük, hogy $w : (a, b) \to \mathbb{R}$ folytonos és pozitív, valamint létezik $\int_a^b w(x)\, \mathrm{d}x$. Fontos esetek a következők:

a) $w(x) = 1$, amit Gauss-Legendre kvadratúrának hívunk.

b) $w(x) = \sqrt{1-x^2}$.

c) $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, amit Gauss-Csebisev kvadratúrának hívunk.

Ahol az integrálra feltesszük, hogy $[a, b] = [-1, 1]$.

6. Definíció. *Az*

$$\int_a^b w(x)f(x) \quad \mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k) \tag{4.2}$$

kvadratúra formulát n különböző alapponttal Gauss-kvadratúra formulának nevezzük, ha az integrál minden $p \in P_{2n-1}$ polinom esetén pontos, azaz ha

$$\sum_{k=1}^{n} c_k p(x_k) = \int_a^b w(x)p(x) \quad \mathrm{d}x$$

minden $p \in P_{2n-1}$-re.

4. Tétel. (ld. [5]) *Az n alapponttal rendelkező $(x_1, ..., x_n)$ interpolációs tipusú kvadratúraformula minden legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinomra pontos $\iff$ ha az alappontokkal alkotott $q(x) := (x-x_1)\cdots(x-x_n)$ n-edfokú polinom ortogonális minden legfeljebb $(n-1)$ -edfokú polinomra a $w(x)$ súlyfüggvényre nézve.*

Bizonyítás:

$\Rightarrow$

Tegyük fel, hogy a kvadratúraformula pontos minden legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinomra.

Legyen $R(x)$ legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom. Azt kell belátni, hogy $q(x)$ ortogonális R-re a $w(x)$ súlyfüggvényre nézve. Az $f(x) = q(x) \cdot R(x)$ egy $(2n-1)$-edfokú polinom. Tehát erre a (4.2) pontos, azaz:

$$\int_a^b w(x)f(x) \quad \mathrm{d}x = \int_a^b w(x)q(x)R(x) \quad \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} c_k w(x_k)R(x_k) = 0.$$

$\Leftarrow$

Tegyük fel, hogy $q(x)$ ortogonális minden legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinomra.

Legyen $f(x)$ legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinom. Ekkor f a következőképpen írható fel:

$$f(x) = q(x)R(x) + r(x),$$

ahol $R(x)$ és $r(x)$ legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom. Így felírhatjuk ezt a következőképpen:

$$\int_a^b w(x)f(x) \ \ \mathrm{d}x = \underbrace{\int_a^b w(x)q(x)R(x) \ \ \mathrm{d}x}_{0} + \int_a^b w(x)r(x) \ \ \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k).$$

5. Tétel. (ld. [3]) *A Gauss-kvadratúra formula súlyai mind pozitívak.*

6. Tétel. (ld. [3]) *Legyen* $f \in C^{2n}[a,b]$. *Ekkor a Gauss-kvadratúra hibája a következő:*

$$\int_a^b w(x)f(x) \ \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k) = \frac{f^{2n}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b w(x)[q(x)]^2 \ \mathrm{d}x,$$

ahol $\xi \in [a,b]$.

1. Lemma. *Létezik a polinomoknak egy* q_n *sorozata, hogy* $q_n = 1$ *és*

$$q_n(x) = x^n + r_{n-1}(x), \quad n = 1, 2...,$$

ahol $r_{n-1} \in P_{n-1}$ *és* q_n *kielégíti az ortogonalitási feltételt:*

$$\int_a^b w(x)q_n(x)q_m(x) \ \mathrm{d}x = 0, \quad n \neq m.$$

4.1. Gauss-Csebisev kvadratúra

Tekintsük azt a Gauss-kvadratúrát, ahol a súlyfüggvény a következő:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1,1].$$

A Csebisev-polinom a $[-1,1]$ intervallumon a

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x).$$

Nyilvánvalóan $T_0(x) = 1$ és $T_1(x) = x$. A $\cos(n+1)t + \cos(n-1)t = 2\cos(nt)$ addíciós képlet alapján levezethetjük a

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x), \quad n = 1, 2, ...$$

rekurzív formulát. Ezért létezik $T_n \in P_n$, hogy

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + ..., \quad n = 1, 2, ...$$

Helyettesítsük be az alábbiakba $x = \cos(t)$-t:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)\ \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & n = m = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & n = m > 0, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Ezért az 1. lemma alapján: $q_n = 2^{1-n}T_n$. A $T_n = 0$-nak van megoldása, ezért a kvadratúra alappontjai a Csebisev-polinom gyökei lesznek, azaz

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad k = 0, ..., n-1.$$

A súlyokat pedig könnyen kiszámolhatjuk a

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k T_m(x_k) = \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x, \quad m = 0, ..., n-1.$$

pontosság feltételből. $T_m(x)$-et behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k \cos\left(\frac{(2k+1)m}{2n}\pi\right) = \begin{cases} \pi, & m = 0, \\ 0, & m = 1, ..., n-1, \end{cases}$$

amelynek megoldása megadja a

$$c_k = \frac{\pi}{n}, \quad k = 0, ..., n-1.$$

súlyt. Tehát minden megvan, hogy felírjuk a Gauss-Csebisev kvadratúrát $n = 1, 2...$ esetén:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right).$$

4.2. Gauss-Legendre kvadratúra

Most nézzük azt az esetet, amikor a

$$w(x) = 1, \quad x \in [-1, 1]$$

a súlyfüggvény. Az

$$L_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

az n-edik Legendre-polinom. Amelyről tudjuk, hogy $L_n \in P_n$. Ha $m < n$, akkor parciális integrálással az

$$\int_{-1}^{1} x^m \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\ \mathrm{d}x = 0$$

összefüggést kapjuk, mivel a $(x^2-1)^n$ értéke a végpontokban 0. Ezért érvényes hogy,

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)L_m(x)\mathrm{d}x = 0, \quad n \neq m.$$

Nézzük meg az $n = 1$ és $n = 2$ eseteket.

Az első Gauss-Legendre kvadratúra alappontja az $x_1 = 0$. A súlyokat pedig megkapjuk az

$$c_1 = \int_{-1}^{1} 1 \ \mathrm{d}x = 2$$

pontosság feltételből. Így az első Gauss-Legendre kvadratúra az

$$\int_{-1}^{1} f(x) \ \ \mathrm{d}x = 2f(0)$$

lesz. Ez pedig a téglalapszabály a $[-1, 1]$ intervallumra.

A második Gauss-Legendre kvadratúrát a következőképpen kapjuk meg:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= \int_{-1}^{1} 1 \ \mathrm{d}x = 2 \\ c_1x_1 + c_2x_2 &= \int_{-1}^{1} x \ \mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva jutunk az

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

alappontokhoz, és az

$$c_1 = 1 \quad \text{és} \quad c_2 = 1$$

súlyokhoz. Ezért felírhatjuk a második Gauss-Legendre formulát:

$$\int_{-1}^{1} f(x) \ \mathrm{d}x \approx f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Ennek hibája:

$$\int_{-1}^{1} f(x) \ \mathrm{d}x - f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{135} f^{(4)}(\xi),$$

ahol $\xi \in [-1, 1]$.

Azonban a Gauss-Legendre kvadratúra nemcsak a $[-1, 1]$ intervallumra alkalmazható, hanem tetszőleges $[a, b]$ intervallumra is. Ekkor

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}.$$

Legyen

$$g(t) := f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right).$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 g(t)\ \mathrm{d}t \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^n c_k f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right).$$

Így tehát ezzel a képlettel tetszőleges intervallumon is alkalmazhatjuk a Gauss-Legendre kvadratúrát.

5. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban a numerikus integrálás alapjaival próbáltam megismertetni az olvasókat. Azt, hogy ez miért is hasznos számunkra, és hogy milyen módszereket használhatunk az integrálok közelítő kiszámítására. Ezeknek a módszereknek egy részét írtam le, mutattam be őket.

A bemutatást az interpolációs kvadratúrákkal kezdtem. Ez a formula n alappont esetén az $(n-1)$-edfokú polinomok osztályán pontos. Ezután a Newton-Cotes formulák következtek, ezek nyílt és zárt változatai. A cél az volt hogy csökkentsük a hibát. Ezután ezt még jobban szerettük volna csökkenteni, ezért bemutattam az összetett formulákat, amik sok részintervallum esetén pontosabbak mint az egyszerű formulák. De még mindig nem elég hatékonyak ezek a formulák, ugyanis az egyszerű formulák magas alappontszám esetén adnak pontosabb eredményt, az összetett formulák pedig sok részintervallumnál. Erre mutattam néhány példát is. Tehát más módszereket kell keresni, és egy ilyen a Gauss-kvadratúra, aminek foka kétszer nagyobb lesz mint a Newton-Cotes formuláké, kis alalppontszám mellett.

Én ezeket az egyszerű eseteket mutattam be részletesen.

Irodalomjegyzék

[1] Stoyan Gisbert: *Numerikus matematika mérnököknek és programozóknak,* Typotex Kiadó, Budapest, 2007

[2] Peter Henrici: *Numerikus analízis,* Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1985

[3] Rainer Kress: *Numerical analysis,* Springer, 1998

[4] Stoyan Gisbert, Takó Galina: *Numerikus módszerek I.,* Typotex Kiadó, Budapest, 2005

[5] *http://www.inf.unideb.hu/valseg/dolgozok/koko/files/numanal2.pdf*

[6] *http://hu.wikipedia.org/wiki/Gauss-kvadrat%C3%BAra*

[7] *http://mathworld.wolfram.com/Newton-CotesFormulas.html*

[8] Faragó István: *Alkalmazott analízis I. előadásjegyzet,* ELTE, 2008