

# Függvények közelítése

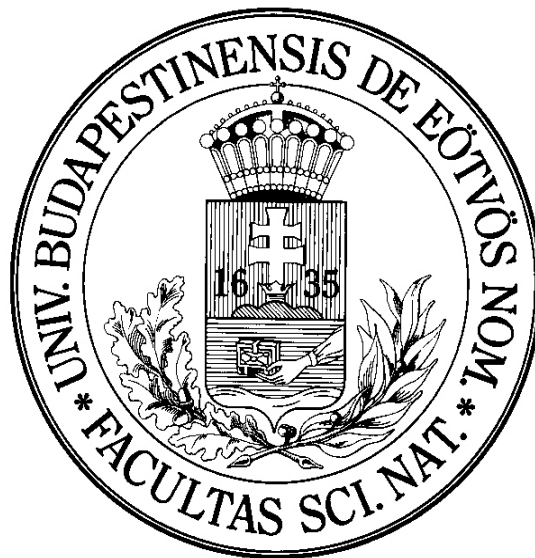
Szakdolgozat

**Sáfrányos Anita**

Matematika BSC, Matematika elemző szakirány

*Témavezető:* Gémes Margit, Műszaki gazdasági tanár

Analízis Tanszék



Eötvös Lóránd Tudományegyetem  
Természettudományi Kar

Budapest, 2010

# Tartalomjegyzék

Bevezetés .....	3
1. Fourier sorok .....	5
2. Taylor polinom .....	14
3. Bernstein polinom .....	19
4.1. Lagrange-féle interpolációs polinom .....	24
4.2. Spline-ok .....	28
Összefoglalás.....	30
Melléklet .....	31
Irodalomjegyzék .....	36

## Bevezetés

*„Hippokratész: ... Matematikával foglalkozni tehát nem más, mint a világot, amelyben élünk, gondolkodásunk tükrében szemlélni és tanulmányozni: a matematika a való világról készített térkép.”*

*Rényi Alfréd: Dialógusok a matematikáról*

A tudományok közül a matematika az, amelyre az embernek egész életén át szüksége van. Ahhoz, hogy a mindennapi feladatainkat meg tudjuk oldani, időnként elengedhetetlen, hogy leegyszerűsítsük azokat. A cél általában az, hogy matematikailag leírjuk ezeket a problémákat. Ha ez sikerült, megpróbáljuk megoldani, ha nem, tovább egyszerűsítjük a modellt. Ha ezt megoldottuk, fejlesztjük.

A függvények a matematika szerves részét képezik. Ezekkel számos bonyolult tudományos és hétköznapi kérdésre látványosan, gyakran egyszerűbben tudunk válaszokat kapni, mint bármi mással. Előfordulhat azonban, hogy olyan függvénnyel kerülünk szembe, melyet különböző okoknál fogva nem tudunk közvetlenül felhasználni. Ilyenkor alkalmazhatjuk azt, hogy egy másik, az eredetit „jól közelítő” és a feladatunk szempontjából egyszerűbb típusú függvényt tekintünk. Ilyet folytonos függvényekhez mindig találunk valamilyen módon, hisz Weierstrass igazolta az approximáció alaptételét, azaz, hogy adott véges intervallumon folytonos függvény approximálható, vagyis tetszőlegesen megközelíthető polinomokkal. (Tehát akárhogy is adunk meg a függvény görbéje körül egy sávot, mindig találhatunk olyan polinomot, amelynek a görbéje ebben a sávban halad.) Mit is jelent az, hogy „jól közelíthető”? Hogy állítjuk ezeket elő és mire is használhatjuk pontosan? Dolgozatomban néhány közelítő módszerrel keresztül ezekre a kérdésekre szeretnék egyértelmű válaszokat adni.

A legelső módszer, amit megemlítenék a Fourier-sorfejtés. Ez talán a legelterjedtebb, olyan szempontból, hogy a mai modern világ

mindennapjaihoz szükségeltetik a használata. Alkalmazzák különböző matematikai és fizikai vizsgálatokra, programok tömörítésére, képek feldolgozására, zajszűrésre. Matematikailag a többi eljáráshoz képest ezt részesíthetjük előnyben, ha globális közelítést szeretnénk kapni a függvényről. Különlegessége még, hogy szakadós függvényekre is kiválóan alkalmazható. Az első fejezetben erről lesz szó.

További lehetőség a Taylor-polinommal való közelítés. Erről fog szólni a második fejezet. Az előző módszerhez képest ez ellentétes olyan szempontból, hogy nem globálisan, hanem lokálisan közelít jól. Ennél az eljárásnál figyelniük kell arra, hogy kizárólag többszörösen differenciálható függvényekre alkalmazhatjuk.

A harmadik fejezetben a Bernstein polinomokkal foglalkozok. Ez a módszer rendelkezik azzal az előnnyel, hogy nem nagyon tér el az approximálandó függvény kiválasztott pontjait összekötő törött vonaltól. Az általa szolgáltatott görbe tetszetős, számítógépes grafikára használható.

Az utolsó fejezet a Lagrange-polinommal való közelítésről fog szólni. Ennek az előnye, hogy adott pontokban nagyon pontosan közelít a függvényhez. Ebben a részben szó lesz az úgynevezett spline-okról is, melyekkel stabilitásuknak és könnyű illeszthetőségüknek köszönhetően igen komplex formákat lehet jól közelíteni. A gyakorlatban például térképek szintvonalainak rajzolására is használják.

# 1. Fourier sorok

Ahogy a bevezetőben is említettem a Fourier sorok gyakorlati alkalmazása igen jelentős. Kialakulása visszavezethető a fizika és a műszaki tudományok területén felvetődött kérdésre, ami a következő: vajon minden  $2\pi$  szerint periodikus  $f(x)$  függvényt elő lehet állítani trigonometrikus rendszerbeli függvények lineáris kombinációjaként?

A Fourier sorok bemutatását néhány definícióval és igazolt tételekkel kezdem:

**1.1. Definíció.** Tegyük fel, hogy  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodikus  $2\pi$  szerint és integrálható  $[0, 2\pi]$ -ben. Az  $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$  és  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$ ,  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$  formulák által definiált számokat  $f$  Fourier-együtthatóinak, a segítségükkel felírt  $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  sort pedig  $f$  Fourier-sorának nevezzük.

**1.2. Tétel.** Egy folytonos és  $2\pi$  szerint periodikus függvény Fourier-sorának a szummája egyenlő a függvénnyel.

**1.3. Következmény.** Az 1.2. tételből következik, hogy ha egy folytonos függvény Fourier-sora valahol konvergens, akkor az összege csak a függvény értéke lehet.

**1.4. Tétel (Teljességi tétel).** Legyen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodikus  $2\pi$  szerint. Ha  $f$  minden Fourier-együtthatója nulla, akkor  $f$  azonosan nulla.

**1.5. Tétel.** Legyen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos és periodikus  $2\pi$  szerint. Ha  $f$  Fourier-sora egyenletesen konvergens  $\mathbb{R}$ -en, akkor az összeg minden pontban  $f(x)$ -szel egyenlő.

**1.6. Definíció.** Tegyük fel, hogy  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$  a  $H$  halmazon. Azt mondjuk, hogy a  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  függvénysor egyenletesen konvergens  $H$ -n, ha az  $s_n = \sum_{i=1}^n f_i$  függvényekből álló függvénysorozat egyenletesen konvergál az  $f$  függvényhez  $H$ -n. Ezt úgy jelöljük, hogy  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$  egyenletes  $H$ -n.

**1.7. Tétel.** Ha  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodikus  $2\pi$  szerint és kétszer folytonosan differenciálható, akkor a Fourier-sora mindenütt előállítja.

**1.8. Definíció.** Az  $f$  függvény Fourier-sora *tiszta szinuszos sor*, ha csak szinuszos tagokat tartalmaz, azaz  $a_k = 0 \forall k = 0, 1, 2, \dots$ -re. Ha pedig  $f$  Fourier-sora csak koszinuszos tagokat tartalmaz, azaz  $b_k = 0 \forall k = 0, 1, 2, \dots$ -re, akkor azt mondjuk, hogy a Fourier-sor *tiszta koszinuszos sor*.

**1.9. Tétel.** Legyen  $f \in L_2((-L, L), \mathbb{R})$ .

1. Ha  $f$  páratlan függvény, akkor a Fourier-sora tiszta szinuszos sor.

$$a_k = 0, b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, k = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

2. Ha  $f$  páros függvény, akkor a Fourier-sora tiszta koszinuszos sor.

$$\forall b_k = 0, a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

**1.10. Tétel.** Legyen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  szakaszonként folytonosan differenciálható,  $2L$  szerint periodikus függvény. Ha  $f$  folytonos az  $x$  pontban, akkor a Fourier-sora  $x$ -ben konvergál az  $f(x)$  függvényértékhez.

**1.11. Példa.** Tekintsük a  $2\pi$  szerint periodikus  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt, amelyre  $f(x) = x$ , ha  $-\pi \leq x < \pi$ .

Fejtsük  $f$ -et Fourier sorba!

Vegyük észre, hogy  $f$  páratlan függvény, így csak a szinuszos tagok

együtthatóit kell kiszámolni:  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx$ .

Parciális integrálással kapjuk:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx = \left[ -x \frac{\cos kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = \left[ -x \frac{\cos kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \left[ \frac{\sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\pi \frac{\cos k\pi}{k} + (-\pi) \frac{\cos(-k\pi)}{k} + \frac{1}{k^2} \sin k\pi - \frac{1}{k^2} \sin(-k\pi) = -\frac{2\pi}{k} \cos k\pi.$$

Tehát

$$b_k = -\frac{2\pi}{k} \cos k\pi = -\frac{2}{k} (-1^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

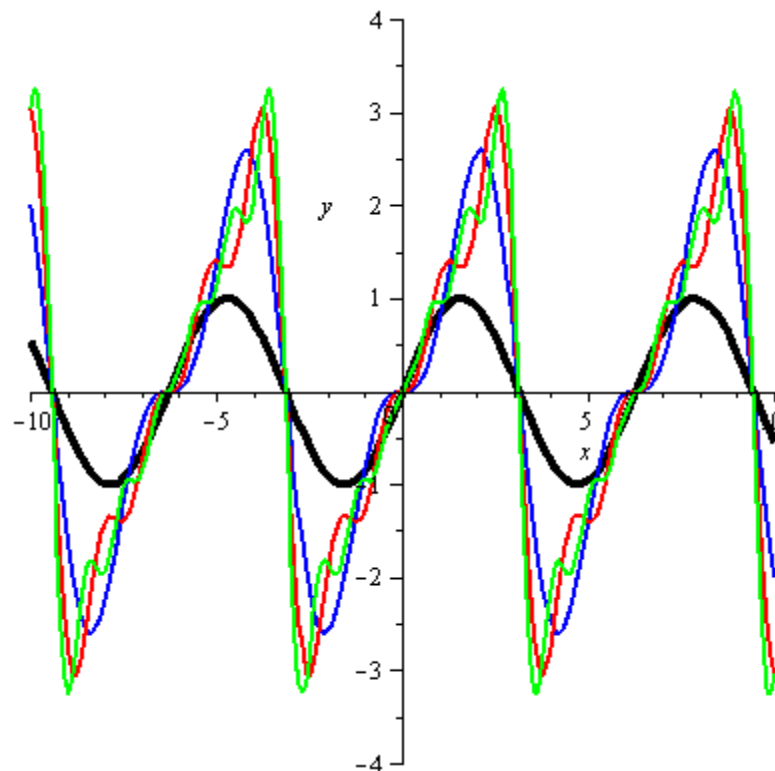
és így

$$f(x) \sim 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right).$$

A Fourier-sor  $n$ -edik részletösszegét jelölje:

$$f_n(x) = 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \right).$$

A következő (1.1.-es) ábrán a szinusz függvényt, az  $f_2$ ,  $f_4$  és az  $f_6$  közelítő összegek grafikonját láthatjuk. (Rendre fekete, piros, kék és zöld színnel jelölve.)



1.1. ábra

Ezek után felvetődhet a kérdés, hogy hogyan lehet Fourier-sorba fejteni egy  $[0, L]$  intervallumon definiált függvényt. Megoldás erre, hogy kiterjesztjük a függvényt a  $[-L, L]$  intervallumra, és a kiterjesztett függvénynek számítjuk ki a Fourier-sorát. Ekkor az 1.9. Tételben megadott feltételek teljesülése esetében a Fourier-sor konvergál a kiterjesztett függvényhez, illetve  $[0, L]$ -re leszűkítve a Fourier-sor értelmezési tartományát, az eredeti függvényhez.

A kiterjesztést egy speciális esetre vizsgáljuk:

páratlan függvényként terjesztjük ki  $f$ -et a  $[-L, 0]$  intervallumra, azaz legyen

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -f(-x), & x \in [-L, 0], \\ 0, & x = 0, \\ f(x), & x \in [0, L]. \end{cases}$$

Ekkor  $\tilde{f}$  páratlan periodikus függvény, ezért a Fourier-sora tiszta szinuszos lesz, azaz minden  $a_k = 0$ . A  $b_k$  együtthatókat a következőképpen kapjuk:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \tilde{f}(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \left( \int_{-L}^0 \tilde{f}(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx + \int_0^L \tilde{f}(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx \right) \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

**1.12. Példa.** Számítsuk ki az  $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = 1$  függvény tiszta szinuszos Fourier sorát!

A (1.3) képlet szerint:

$$b_k = \frac{2}{5} \int_0^5 \sin \frac{k\pi x}{5} dx = \frac{2}{5} \left[ -\frac{\cos \frac{k\pi x}{5}}{\frac{k\pi}{5}} \right]_0^5 = \frac{2}{[k\pi]} (1 - \cos k\pi) = \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

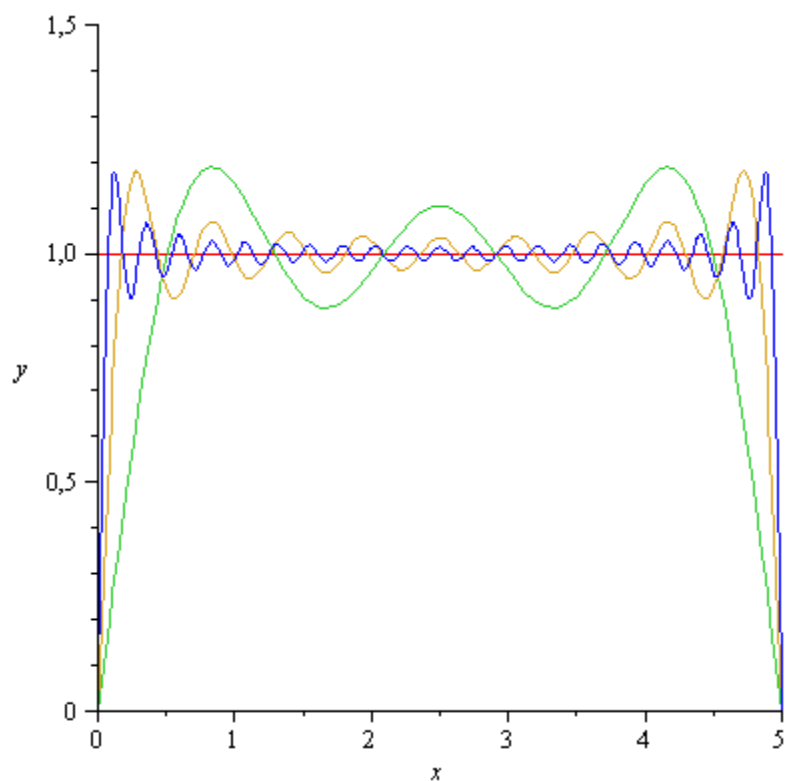
$$\text{ezért } 1 = \frac{4}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{5} + \frac{1}{7} \sin \frac{7\pi x}{5} + \dots \right), \quad x \in (0, 5).$$

$x = 0$  és  $x = 5$ -re a Fourier-sor összege 0.

Jelölje  $f_n$  a Fourier-sor  $n$ -edik részletösszegét, azaz  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k \sin \frac{k\pi x}{5}$ .

Az 1.2-es ábrán az  $f_5(x)$ ,  $f_{17}(x)$  és  $f_{41}(x)$  részletösszegének grafikonjai láthatók.





1.2. ábra

Tekintsünk további érdekes példákat:

**1.13. Példa.** Legyen a  $2\pi$  szerint periodikus  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amelyre

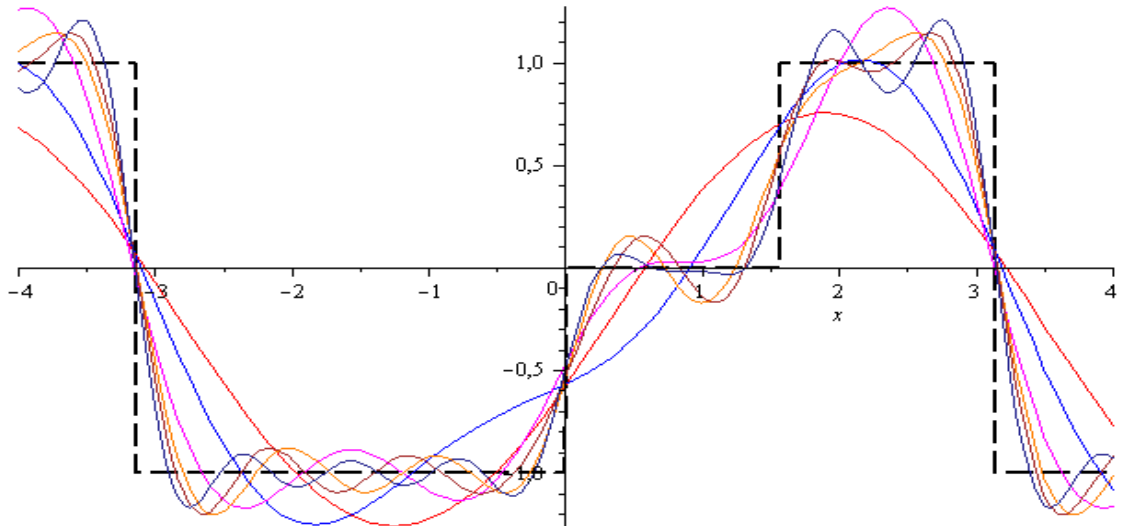
$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } -\pi \leq x < 0 \\ 0, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}.$$

Ekkor  $a_0 = -\frac{1}{4}$ ,  $a_k = -\frac{1}{k\pi} \sin(\frac{k\pi}{2})$ ,  $b_k = \frac{1}{k\pi} (1 - 2(-1)^k + \cos(\frac{k\pi}{2}))$ , vagyis a

Fourier-sora a következő:

$$F(x) = -\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{\sin(\frac{k\pi}{2}) \cos kx}{k\pi} + \frac{(1 - 2(-1)^k + \cos(\frac{k\pi}{2})) \sin k\pi}{k\pi} \right).$$

Az 1.3-as ábrán látható a függvény és a Fourier-sorának hét elemével való közelítése.



1.3. ábra

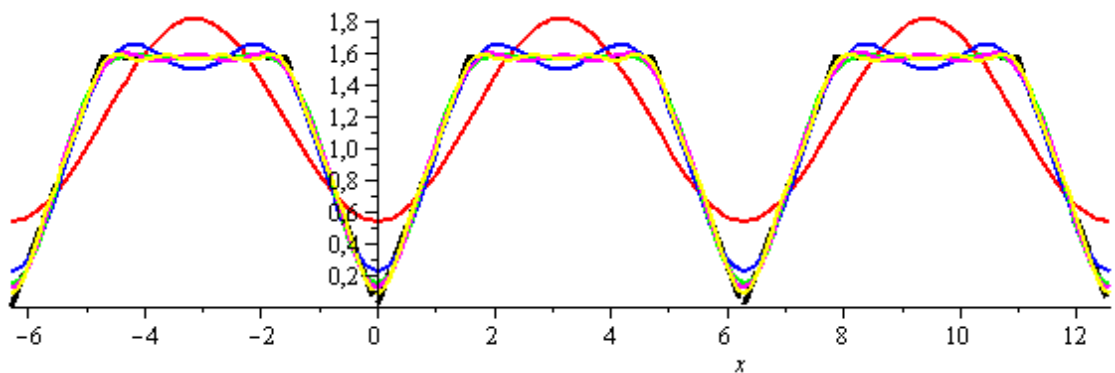
**1.14. Példa** Vegyük a  $2\pi$  szerint periodikus  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt, amelyre  $f(x) = \min\left(|x|, \frac{\pi}{2}\right)$ , ha  $-\pi \leq x < \pi$ .

$$\text{Ekkor } a_0 = -\frac{3\pi}{8}, \quad a_k = \frac{2(-1 + \cos\left(\frac{\pi k x}{2}\right))}{\pi k x^2}, \quad b_k = 0.$$

Ezen függvény Fourier-sora a következő lesz:

$$F(x) = -\frac{3\pi}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \left[ -\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1}{k^2\pi} \right] \cos(kx).$$

Az 1.4-es ábra szemlélteti a függvényt.

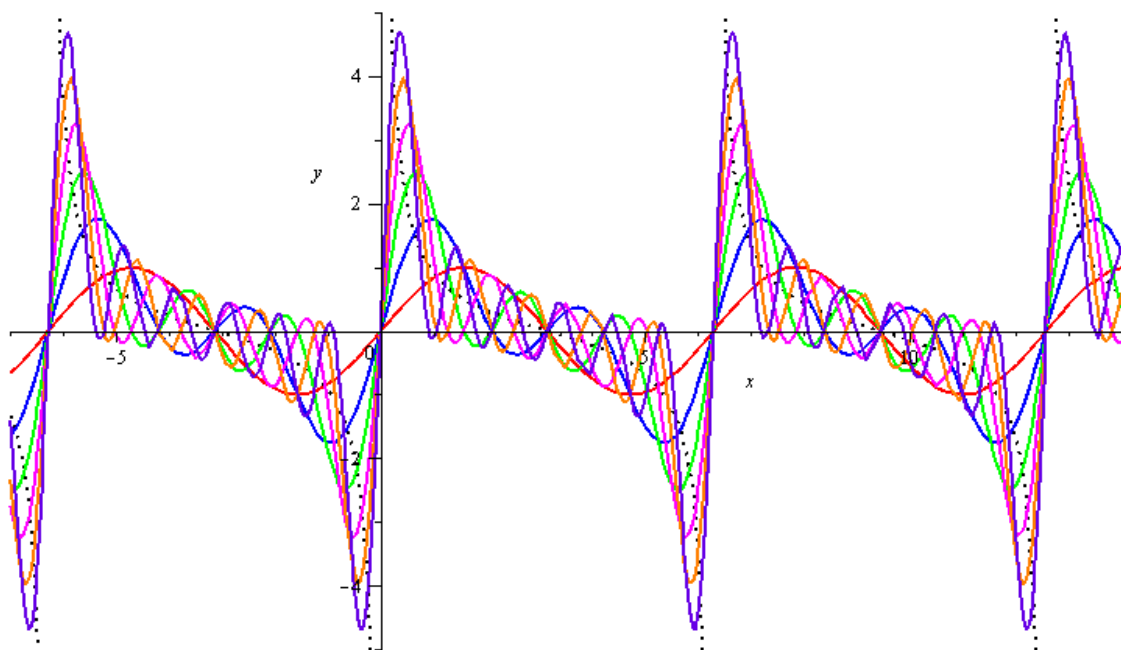


1.4. ábra

**1.15. Példa** Nézzük az  $f(x) = \frac{1}{2} \cot\left(\frac{x}{2}\right)$  függvényt a  $[0, \pi]$  intervallumban. Figyelembe kell vennünk, hogy az  $f(x)$ -nek aszimptotája van az  $x = 2n\pi$  pontokban, ahol  $n$  egész szám.

Az  $f(x)$  Fourier-sora:  $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$ .

Az 1.5-ös ábrán figyelhetjük meg ezt a példát.



1.5. ábra

**1.16. Példa.** Legyen  $f(x) = xe^x$ , ha  $-1 \leq x < 1$ .

Kiszámolhatjuk, hogy

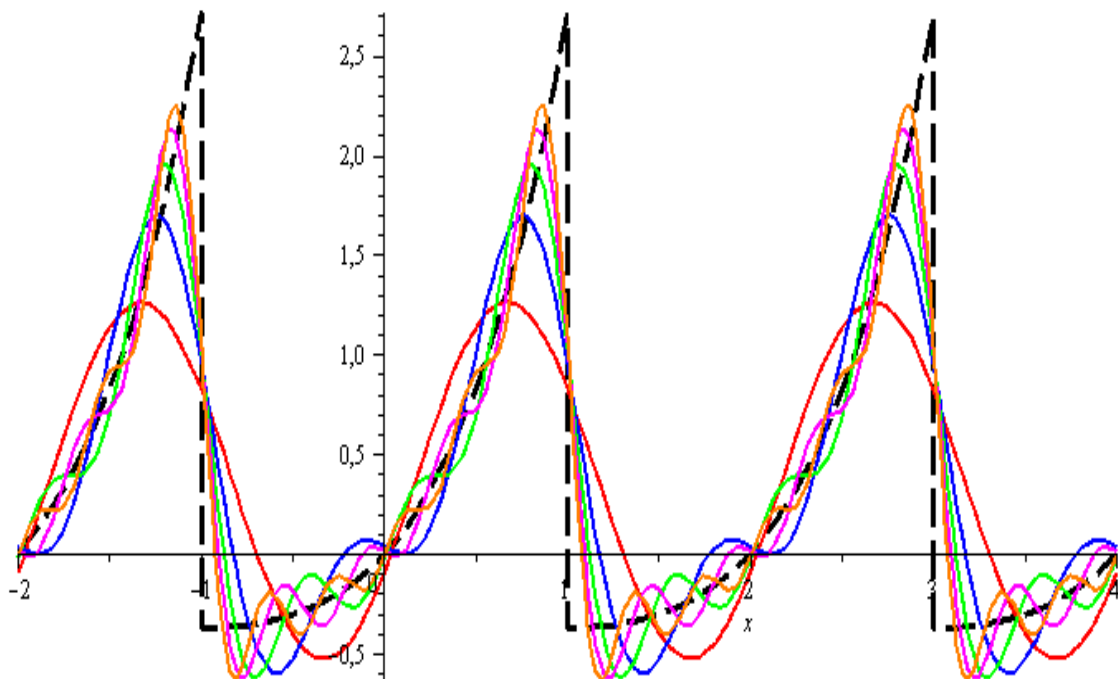
$$a_0 = e^{-1},$$

$$a_k = 2(-1)^k \left( \frac{k^2 \pi^2 e + e^{-1}}{(1+k^2 \pi^2)^2} \right),$$

$$b_k = (-1)^k k \pi \left( \frac{e^{-k^2 \pi^2 e - 3e^{-1} - k^2 \pi^2 e^{-1}}}{(1+k^2 \pi^2)^2} \right), \text{ tehát}$$

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k k \pi (e^{-k^2 \pi^2 e - 3e^{-1} - k^2 \pi^2 e^{-1}})}{(1+k^2 \pi^2)^2} \right) \sin(k\pi x).$$

Lássuk a függvényt:



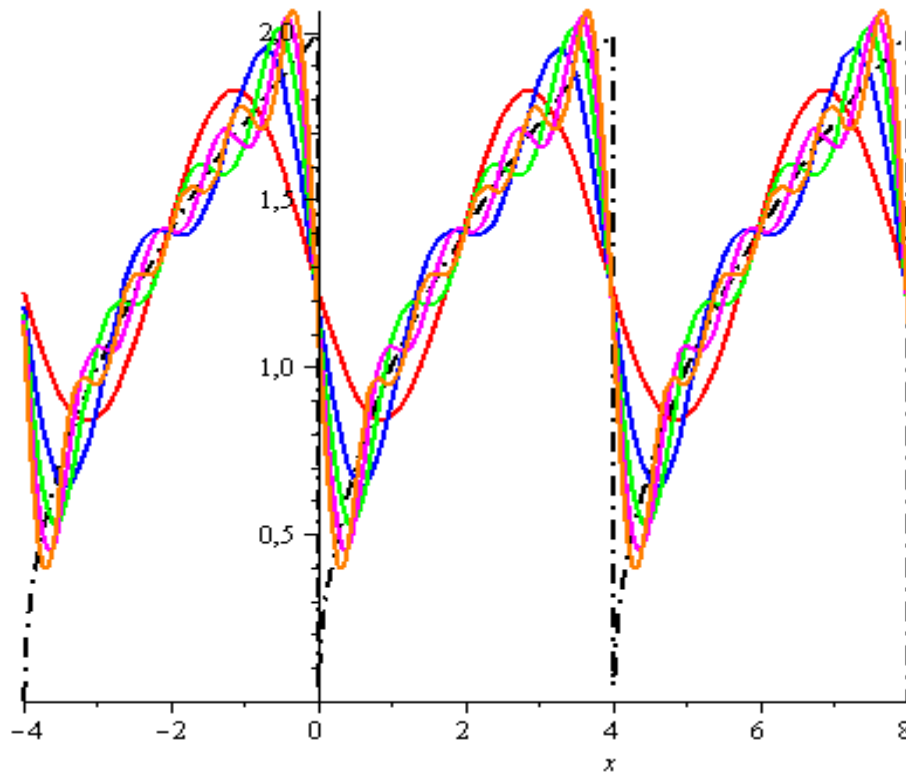
1.6. ábra

**1.17. Példa.** Legyen  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $0 \leq x < 4$ .

Fourier-sora a következő:

$$F(x) = \frac{4}{3} + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cos\left(\frac{1}{2}k\pi x\right) + b_k \sin\left(\frac{1}{2}k\pi x\right) \right)$$

amit az 1.7. ábra kiválóan szemléltet.



1.7. ábra

## 2. Taylor polinom

Abban az esetben, ha a függvény egy adott pontjában a lokálisan legjobb közelítésre vagyunk kíváncsiak, célszerű a Taylor-polinomokkal való approximációt használni. Fontos tudnunk, ahogy a bevezetőben is kiemeltem, hogy ez a módszer csak többszörösen differenciálható függvényekre alkalmazható.

**2.1. Definíció.** Az  $f$  függvény  $a$  pontbeli  $n$ -edik Taylor polinomjának nevezzük az alábbi  $t_n$  polinomot

$$t_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n$$

**2.2. Tétel.** Legyen az  $f$  függvény  $n$ -szer differenciálható az  $a$  pontban, és legyen  $t_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n$ .

(i) A  $t_n$  polinom az egyetlen a legfeljebb  $n$ -edfokú polinomok között, amelynek az  $i$ -edik deriváltja az  $a$  pontban  $f^{(i)}(a)$ -val egyenlő minden  $i \leq n$ -re. Tehát  $t_n(a) = f(a), t_n'(a) = f'(a), \dots, t_n^{(n)}(a) = f^n(a)$ ,  $p(a) = f(a), p'(a) = f'(a), \dots, p^{(n)}(a) = f^n(a)$ , akkor szükségképpen  $p = t_n$ .

(ii) A  $t_n$  polinomra teljesül, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - t_n(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Ha egy legfeljebb  $n$ -ed fokú  $p$  polinomra teljesül  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p(x)}{(x - a)^n} = 0$ , akkor szükségképpen  $p = t_n$ . Tehát a legfeljebb  $n$ -edfokú polinomok közül a  $t_n$  polinom az, amelyik az  $f$  függvényt az  $a$  pontba lokálisan a legjobban közelíti.

**2.3. Tétel (Taylor-formula).** Legyen az  $f$  függvény  $(n + 1)$ -szer differenciálható az  $[a, x]$  intervallumban. Ekkor van olyan  $c \in (a, x)$  szám, amelyre

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1} \quad (2.1)$$

és van olyan  $d \in (a, x)$  szám, amelyre

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(d)}{(n+1)!} (x-d)^{n+1} \quad (2.2)$$

Ha  $f$   $(n+1)$ -szer differenciálható az  $[x, a]$  intervallumban, akkor van olyan  $c \in (x, a)$ , amelyre (2.1) teljesül, és van olyan  $d \in (x, a)$ , amelyre (2.2) teljesül.

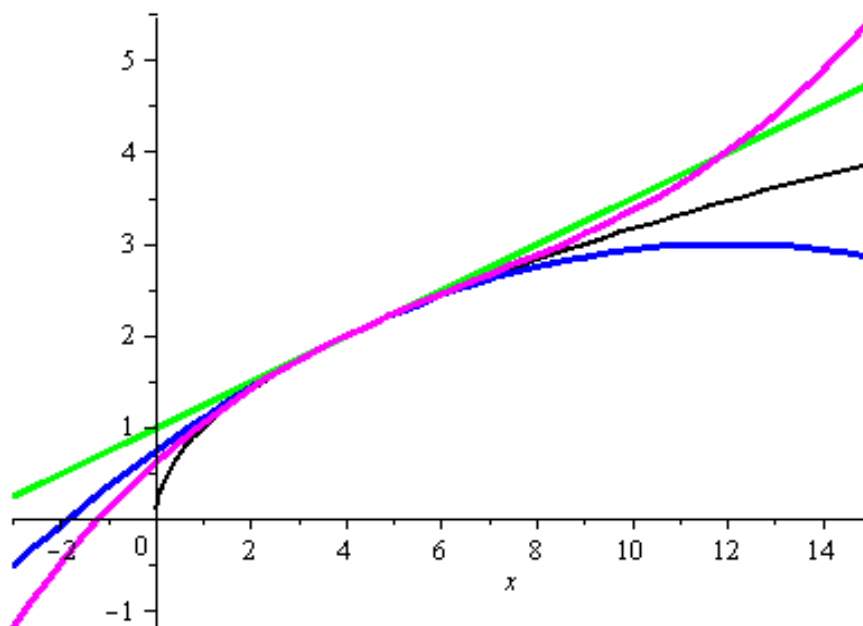
A (2.1) egyenlőség az úgynevezett Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal, (2.2) pedig a Cauchy-féle maradéktaggal. Az  $a = 0$  esetben (2.1)-et szokás Maclaurin-formulának nevezni.

**2.4. Példa.** Fejtsük Taylor sorba az alábbi függvényt az  $a = 4$  pont körül:  $f(x) = \sqrt{x}$

Megoldás:  $F(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 + O((x-4)^4)$

$$F_3(x) = 1 + \frac{x}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512}$$

A 2.1. ábrán láthatjuk a példát:



2.1. ábra

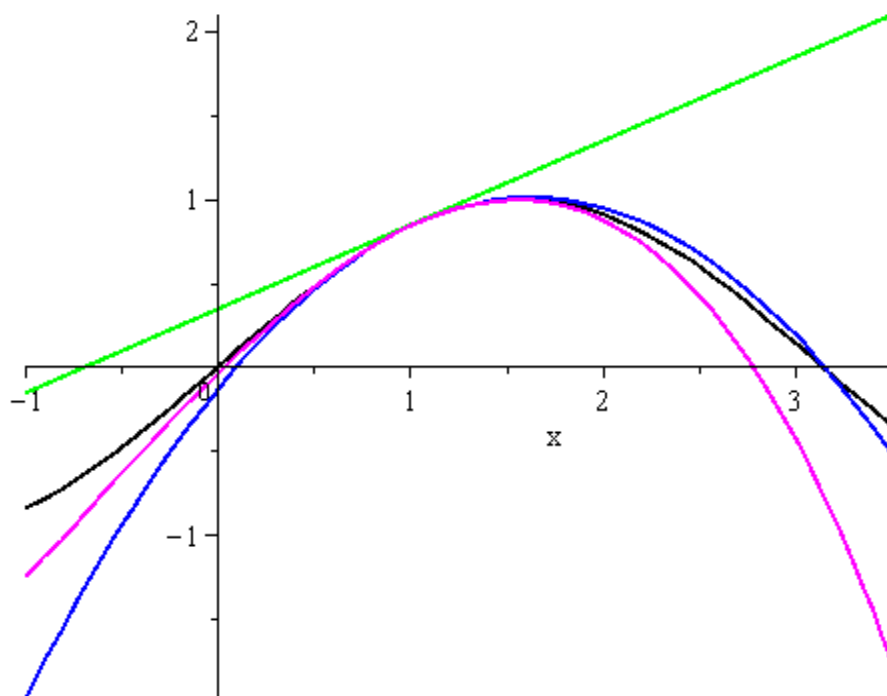
**2.5. Példa.** Legyen  $f(x) = \sin x$ .

Taylor-polinomja az  $a = \frac{\pi}{3}$  pont körül:

$$F(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + O\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right)$$

$$F_3(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}{4} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3}{12}$$

Szemléletesen:



2.2. ábra

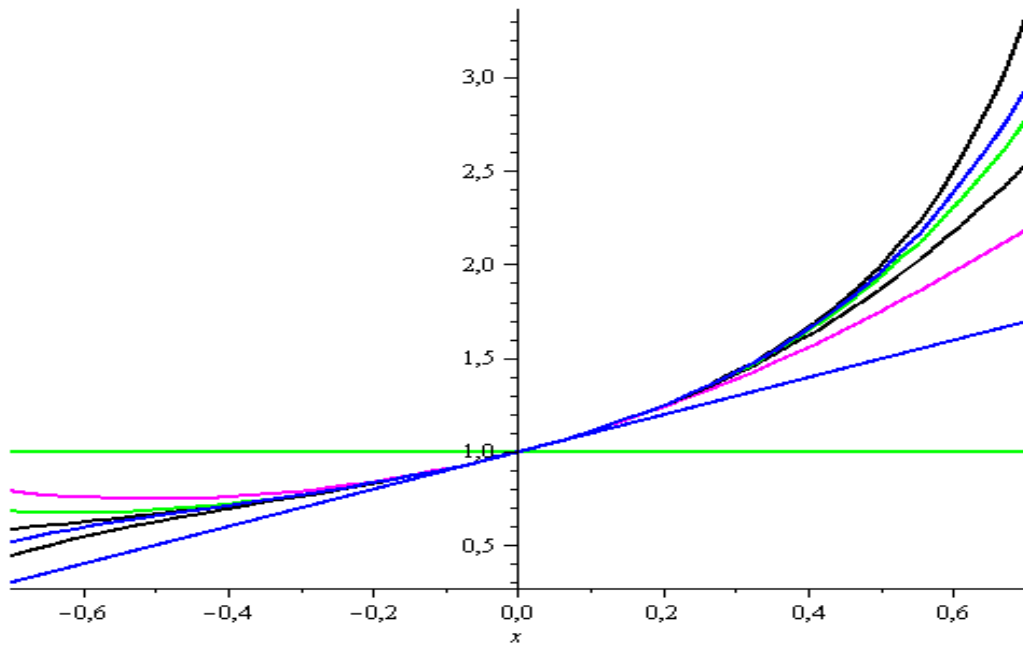
**2.6. Példa.** Tekintsük az  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  függvényt.

Taylor-polinomja az  $a = 0$  pont körül a következő:

$$F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^4), \text{ ebből } F_6(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5.$$

Nézzük a példához tartozó 2.3-as ábrát:





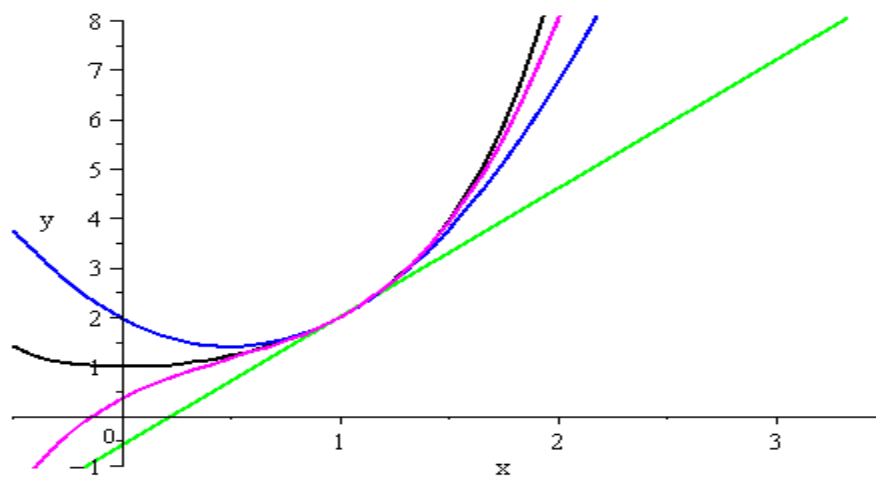
2.3. ábra

**2.7.Példa.** Legyen  $f(x) = (x + 1)^x$ .

Az  $f(x)$  harmadrendű Taylor-polinomja az  $a = 1$  pont körül:

$$F_3(x) = 2 + (2 \ln(2) + 1)(x - 1) + (1 + \ln(2)^2 + \ln(2))(x - 1)^2 + \left(\frac{1}{4} + \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(2)^2 + \frac{1}{3}\ln(2)^3\right)(x - 1)^3$$

Figyeljük meg a 2.7-es példát a 2.4-es ábrán.



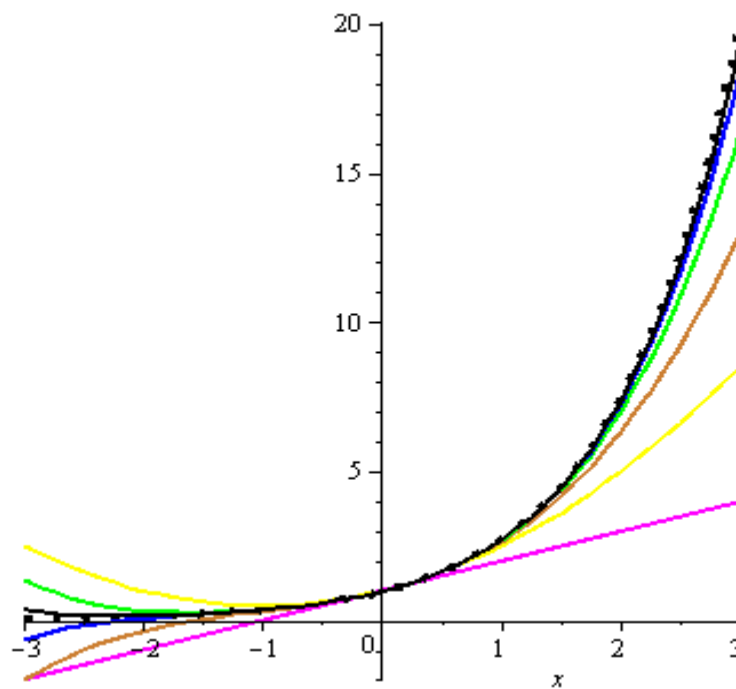
2.4. ábra

**2.8. Példa.** Számoljuk ki az  $f(x) = e^x$  függvény hatod rendű Taylor-polinomját az  $a = 0$  pont körül!

Megoldás:

$$F_6(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$

A 2.5. ábra szemlélteti a 2.8-as példát.



2.5. ábra

### 3. Bernstein polinom

A Bernstein polinomokkal való közelítésnek nagyon hasznos az alakmegőrzési tulajdonsága. Ha a függvény konvex, akkor a Bernstein-polinomja is konvex lesz. Így a matematika számos területén rendkívül fontosak, például a valószínűség-számításban, vagy a geometriában. A számítógépekben gyakran használt Bézier-görbék is ezekre épülnek. Ezt a módszert kizárólag folytonos függvényekre tudjuk alkalmazni. Lassú, de biztos közelítés. A gyakorlatban használatos polinomiális approximációk foka ritkán emelkedik  $n = 20$  fölé, mert a magasabb fokszámú polinomokkal már elég nehézkes dolgozni.

**3.1. Definíció.** Legyen  $n$  nemnegatív egész,  $i$  tetszőleges egész. A  $B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$  polinomot *Bernstein polinomnak* nevezzük, ahol

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

**3.2. Megjegyzés.** A 4.1. Definícióból következik, hogy a Bernstein polinomok nemnegatívak a  $[0,1]$  intervallumon, pozitívak a  $(0,1)$  intervallumon.

**3.3. Tétel.** A Bernstein polinomok kielégítik az alábbi rekurziót:

$$B_0^0 = 1, B_i^n(u) = (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u), \text{ továbbá } B_i^n(u) = 0, i \notin \{0, \dots, n\}.$$

**3.4. Tétel.** A Bernstein polinomok egységbontást alkotnak, azaz

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1.$$

**3.5. Tétel.** A Bernstein polinomok deriváltja:

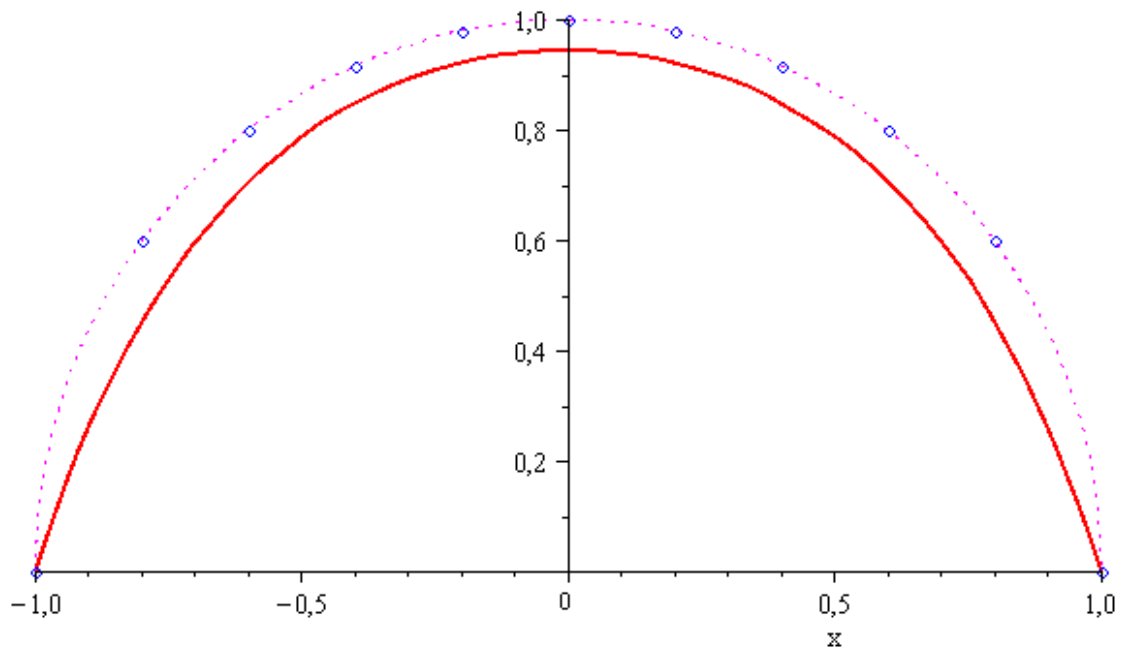
$$\frac{d}{du} B_i^n(u) = [n B_{i-1}^{n-1}(u) - n B_i^{n-1}(u)].$$

**3.6. Következmény.**  $i \neq 0$ ,  $n$  esetén a  $B_i^n$  polinomnak  $u = \frac{i}{n}$ -nél lokális maximuma van.

**3.7. Példa.** Legyen  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ . Nézzük a tizedfokú és az ötvened fokú Bernstein-polinomját a  $[-1,1]$  intervallumon.

A tizedfokú Bernstein-polinom:

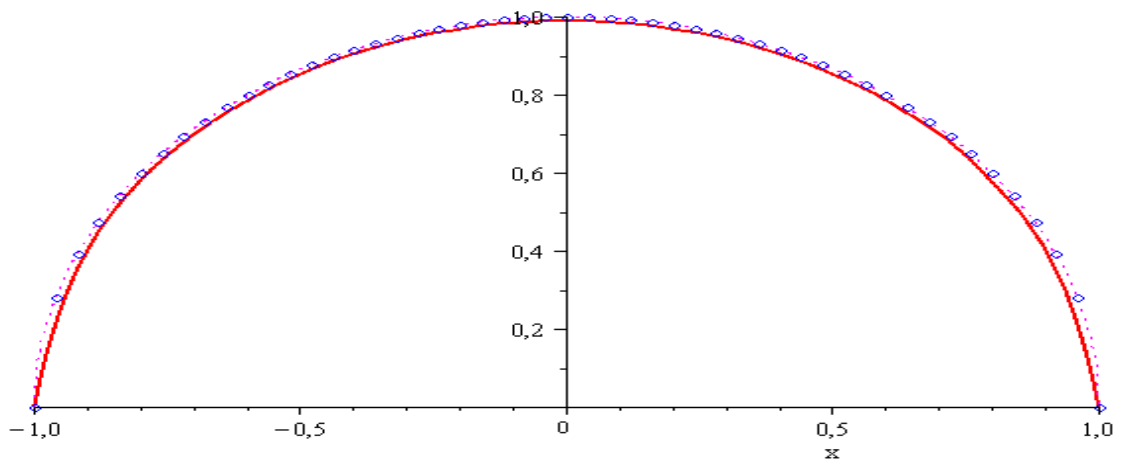
$$B = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{5} C(10, k) \sqrt{-k^2 + 10k} \left(\frac{1+x}{2}\right)^k \left(\frac{1-x}{2}\right)^{10-k}$$



3.1.1. ábra

Az ötvened fokú Bernstein-polinom:

$$B = \sum_{k=0}^{50} \frac{1}{25} C(50, k) \sqrt{-k^2 + 50k} \left(\frac{1+x}{2}\right)^k \left(\frac{1-x}{2}\right)^{50-k}$$



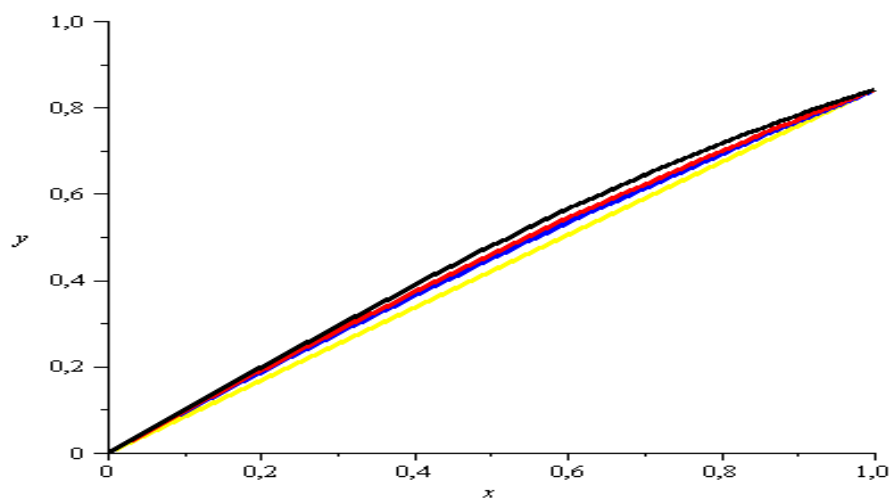
3.1.2. ábra

Érdekességképp nézzük annak a két függvénynek a közelítését, amely már az előző két approximációs módszer bemutatásánál is szerepelt példaként:

**3.8. Példa.** Legyen  $f(x) = \sin(x)$ . Figyeljük meg, hogy közelíti az első három Bernstein polinommal az  $f(x)$  függvényt a  $[0,1]$  intervallumban!

$$B = \sum_{k=0}^3 \sin\left(\frac{k}{3}\right) C(3, k) x^k (1-x)^{3-k}$$

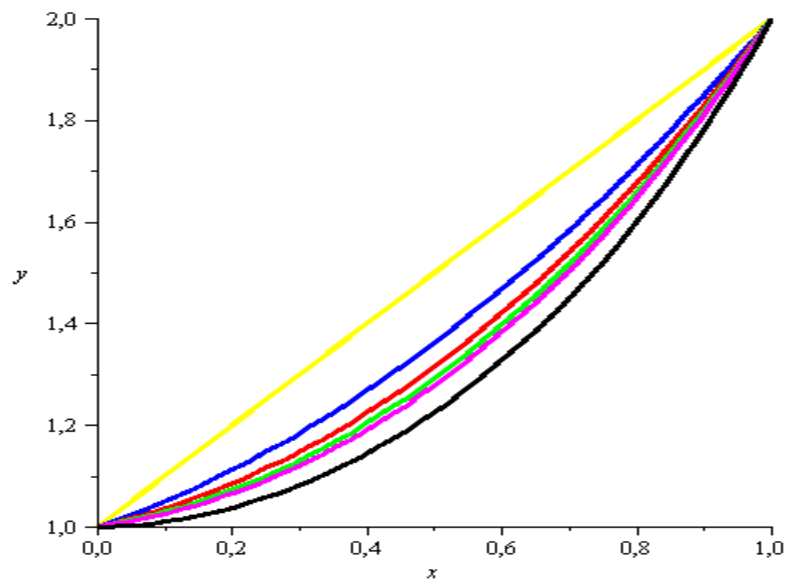
A példát a 3.2-es ábra szemlélteti.



3.2. ábra

**3.9. Példa.** Legyen  $f(x) = (x + 1)^x$ , nézzük meg eme függvény közelítését az első öt Bernstein-polinommal.

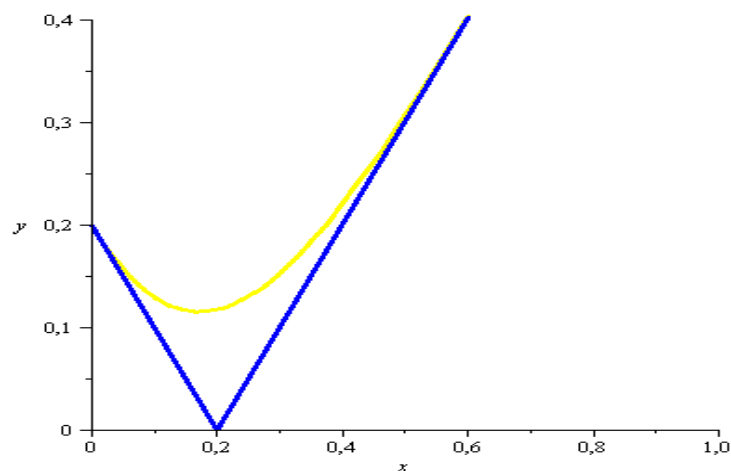
$$B = \sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{5}k + 1\right)^{\frac{1}{5}k} C(5, k)x^k(1-x)^{5-k}$$



3.3. ábra

**3.10. Példa.** Legyen  $f(x) = |x - 0,2|$ . Hogyan ábrázolnánk a nyolcad fokú Bernstein-polinommal való közelítését a  $[0,1]$  intervallumon?

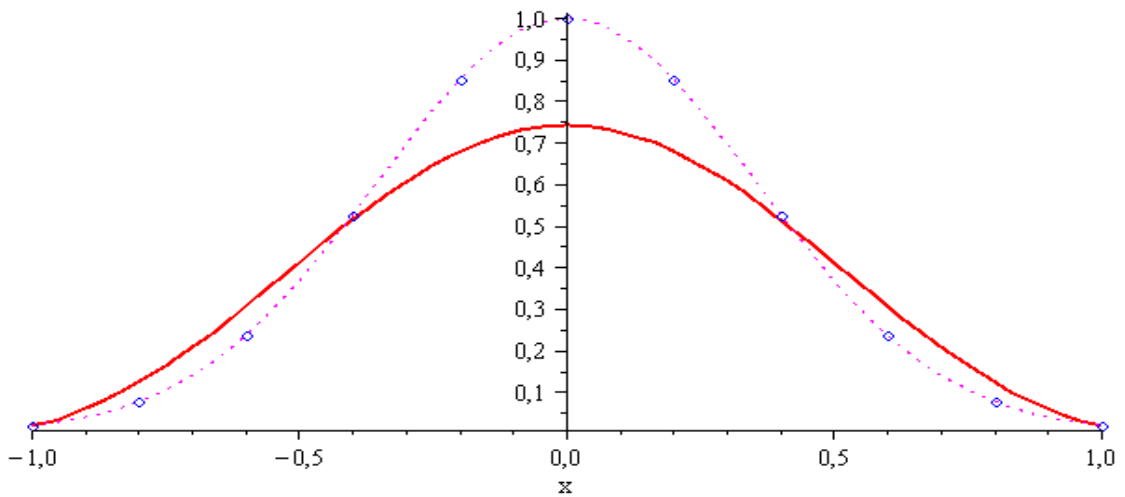
Megoldás:  $B = \sum_{k=0}^8 C(8, k)x^k(1-x)^{8-k} \left|\frac{1}{8}k - 0,2\right|$



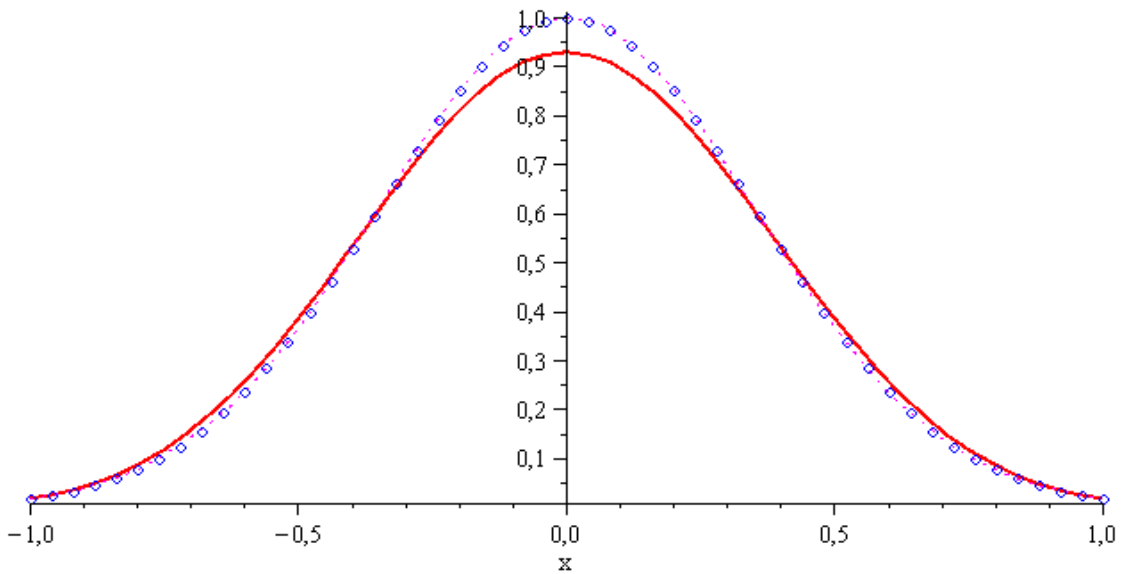
3.4. ábra

**3.11. Példa.** Nézzük az  $f(x) = e^{-4x^2}$  függvény közelítését a tized (3.5. ábra) és az ötvened (3.6. ábra) fokú Bernstein-polinommal.

$$B = \sum_{k=0}^{10} e^{-4\left(\frac{k}{5}-1\right)^2} C(10, k) \left(\frac{1+x}{2}\right)^k \left(\frac{1-x}{2}\right)^{10-k}$$



3.5.1. ábra



3.5.2. ábra

## 4.1. Lagrange-féle interpolációs polinom

Gyakran előfordulhat, hogy arra van szükségünk, hogy véges sok pontból rekonstruáljunk egy adott  $f$  függvényt. Ez esetben a legegyszerűbb, ha olyan polinomot keresünk, amely a lehető legalacsonyabb fokú és adott pontokban megegyezik a függvénnyel.

**4.1.1. Feladat:** Keressünk olyan  $g$  függvényt, amely kielégíti a  $g(x_i) = f_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  interpolációs feltételeket. A  $g$ -t a polinomok osztályából keressük (azaz olyan polinom, amely átmennek az  $n + 1$  db ponton).  $\{x_i\}_{i=0}^n$  és  $\{f_i\}_{i=0}^n$  adott számok és  $x_i \neq x_j$ , ha  $i \neq j$ . Az  $x_i$ -k az alappontok (feltehetjük  $x_i < x_{i+1}$ ),  $h_i = x_{i+1} - x_i$  a lépéstávolság. (Amikor a lépéstávolságok egyenlők, ekvidisztáns alappontokról beszélünk.)

**4.1.2. Tétel.** Jelölje  $P_n$  a maximum  $n$ -ed fokú polinomok osztályát. Az 1.1-es feladatnak  $P_n$ -ben létezik, és egyetlen megoldása van.

### Bizonyítás

Először bizonyítsuk be, hogy ha létezik ilyen polinom, akkor csak egy ilyen lehetséges. Tegyük fel indirekt, hogy  $g, h \in P_n$ , melyekre az interpolációs feltételek érvényesek, emellett  $g \neq h$ . A feltételekből következik, hogy  $g - h \in P_n$ , és  $(g - h)(x_i) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  (mert  $g(x_i) = h(x_i)$ ). A  $(g - h)$   $n$ -ed fokú polinomnak legalább  $n + 1$  darab gyöke van. De egy algebrai polinomnak maximum  $n$  gyöke lehet az algebra alaptétele miatt, azaz a  $g - h$  kizárólag a 0 polinom lehet, amiből következik, hogy  $g = h$ .

A következő lépésben használjuk azt, hogy az  $n$ -edfokú  $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$  polinom zérus minden egyes alappontban, kivéve  $x_i$ -ben.

Tehát  $q_i(x) = q_i^{(n)}(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$  kielégíti a  $q_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$



relációkat. Emiatt világos, hogy az alábbi polinom a 2.1. feladat egyik megoldása:

$$L_n(f(x)) \equiv L_n(f) = \sum_{i=0}^n f_i q_i(x) = \sum_{i=0}^n f_i \left( \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \right) \quad (2.1.1)$$

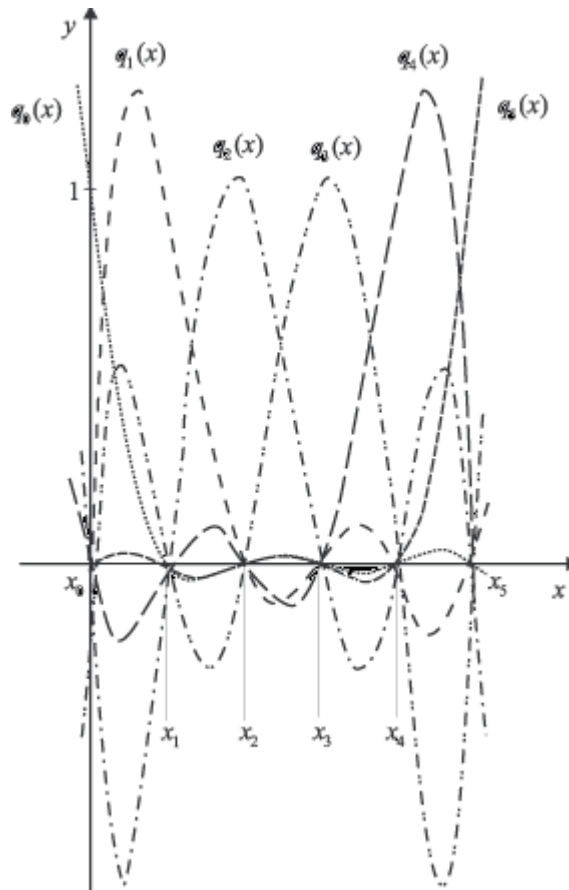
vagyis

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega_{n+1}(x_i)(x-x_i)}, \text{ ahol } \omega_0 := 1, \omega_k(x) := \prod_{i=0}^{k-1} (x-x_i), k = 1, 2, \dots$$

De az előzőek szerint (2.1.1) az egyetlen megoldás  $P_n$ -ben.  $\square$

**4.1.3. Definíció.** A 2.1.2.-es tételben található (2.1.1)-es polinom a *Lagrange-féle interpolációs polinom*.

**4.1.4. Példa.** A Lagrange-interpoláció bázisfüggvényei. ( $n = 5$ )  
Az alappontok:  $(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5)$ .

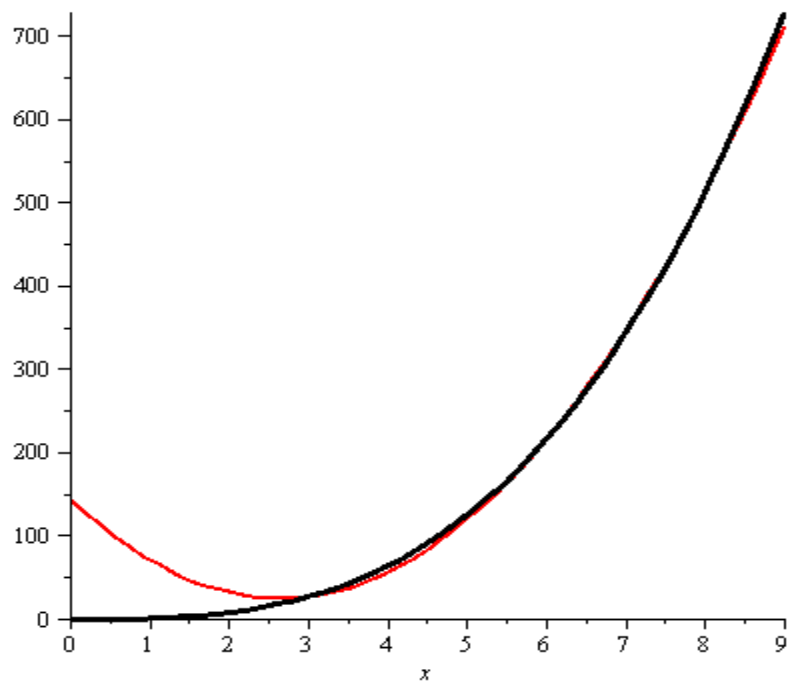


4.1.1. ábra

**4.1.5. Példa.** Nézzük meg, hogy a Lagrange interpolációs polinom hogyan közelíti az  $f(x) = x^3$  függvényt a  $(3,9)$ ,  $(6,216)$ ,  $(8,512)$  alappontokba. A harmadfokú Lagrange-polinom a következő:

$$L_3(x) = \frac{9}{5}(x-6)(x-8) - 36(x-3)(x-8) + \frac{256}{5}(x-3)(x-6)$$

A 4.1.5-ös példát a 4.1.2-es ábra szemlélteti.

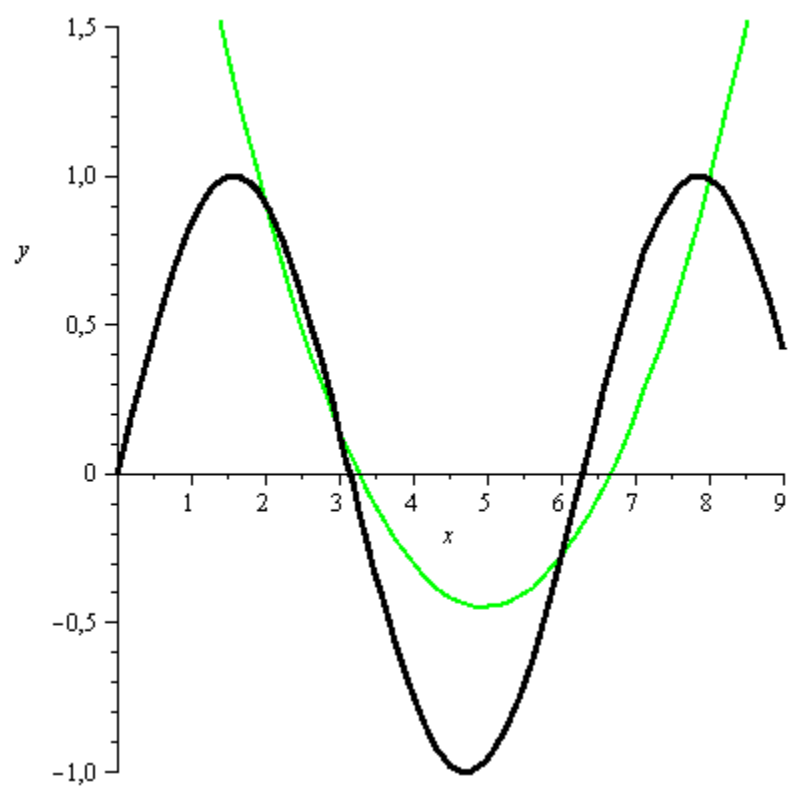


4.1.2. ábra

**4.1.6. Példa.** Legyen  $f(x) = \sin(x)$ , az alappontok:  $(2, \sin 2)$ ,  $(6, \sin 6)$ ,  $(8, \sin 8)$  alappontokba. A harmadfokú Lagrange-polinom a következő:

$$L_3(x) = \frac{1}{24}(x-6)(x-8) \sin(2) - \frac{1}{8}(x-2)(x-8) \sin 6 + \frac{1}{12}(x-2)(x-6) \sin 8$$

A példát a 4.1.3.-as ábra szemlélteti.



4.1.3. ábra

## 4.2. Spline-ok

A Lagrange interpoláció nagy hátránya, hogy bizonyos esetekben indokolatlanul erőteljes hullámzások jelennek meg a polinom grafikus képében, két egymást követő pont között. Ez annak tudható be, hogy az eredeti, a tabulált pontokat származtató,  $f(x)$  megközelítendő függvény nem polinomiális és egy megközelítő polinom csak úgy tud eleget tenni az összes pont érintési követelményének, hogy a pontok között lokális maximumokon és minimumokon halad keresztül. Ezt úgy küszöböljük ki, hogy több alacsony fokszámú polinomból összerakott függvényt keresünk úgy, hogy az adott pontokon való áthaladás megkövetelése mellett az is elvárás, hogy a szomszédos polinomok a csatlakozási pontokban előírt differenciálhatósági feltételeknek is eleget tegyenek. Ez a *spline-interpoláció*. Az igénybevett polinomok fokszáma alapján beszélhetünk kvadratikus vagy köbös spline-ről. A polinom interpoláció esetén a polinom fokszáma,  $n$  egyenlő  $m - 1$ -el, ahol  $m$  a pontok száma. Spline alkalmazásakor általában a fokszám lényegesen kisebb, mint az alappontok száma. Amennyiben egy olyan polinomot illesztünk, amelynek fokszáma kisebb, mint  $m - 1$ , akkor görbeillesztésről beszélünk. Ez a polinom persze nem feltétlenül megy át minden alapponton.

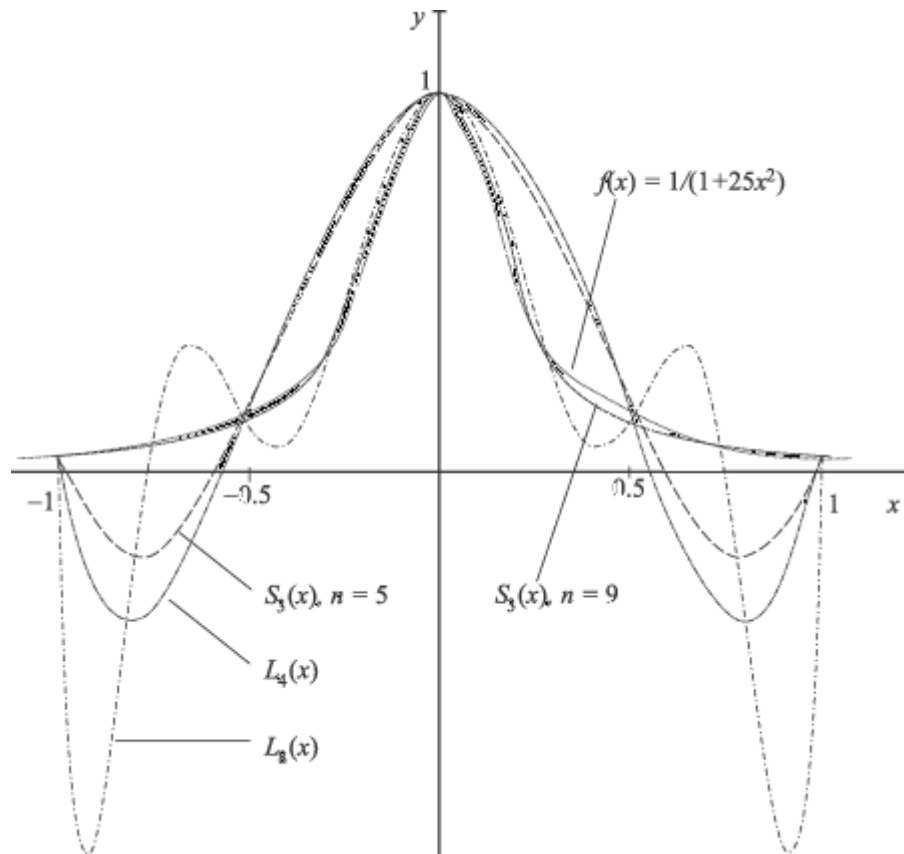
**4.2.1. Definíció.** Az  $[a, b]$  intervallumon definiált  $S = S_g$  függvényt akkor hívjuk *spline*-nak, ha az ott folytonos, az  $a = x_1 < \dots < x_n = b$  felosztás összes  $[x_i, x_{i+1}]$  részintervallumán polinom:  $S_g|_{[x_i, x_{i+1}]} = s_i \in P_g([x_i, x_{i+1}])$ , és a meghatározásához a felosztás belső pontjaiban  $(x_2, \dots, x_{n-1})$  csak függvényértékek szükségesek.

**4.2.1. Megjegyzés.** A spline-interpoláció előnyös tulajdonságai:

1. Az összes  $C^2 [a, b]$ -beli interpolációs függvény között kitüntetett azzal, hogy fizikailag is interpretálható minimum feltételeknek tesz eleget.
2. A spline interpoláció stabil.

3. A spline első néhány deriváltjával együtt konvergál, és ehhez nem szükséges, hogy többszörösen differenciálható legyen.
4.  $O(n)$  műveletigénnyel előállítható.

**4.2.3. Példa.** A köbös spline és a Lagrange-interpoláció összehasonlítása a Runge-példán.



4.2.1. ábra

## Összefoglalás

A mindennapi problémáink megoldásához gyakran hívjuk segítségül a matematikát, azon belül a függvénytant. Gyakran előfordul, hogy olyan függvényekkel találkozunk feladataink során, amelyeket nem tudunk közvetlenül alkalmazni. Ilyenkor bevált gyakorlat, hogy az eredetit jól közelítő függvényt hívjuk segítségül. Ahhoz, hogy ilyen approximációs függvényt találjunk, többféle módszer létezik. Dolgozatomban ezekből mutattam be néhányat, különös figyelmet szentelve a látványosságnak. Megismerkedhettünk a Fourier-sorral, a Taylor-polinommal, a Bernstein-polinommal, a Lagrange-polinommal és a spline-okkal. Figyelnünk kell arra, hogy mindegyik eljárásnak megvan a maga sajátossága, azaz, hogy milyen körülmények között ad reális képet a közelítendő függvényről, ezeket a fejezetekben részleteztem.

# Melléklet

A szakdolgozatomban szereplő ábrák többségét a Maple program segítségével jelenítettem meg.

Jelen mellékletben felsorolom az általam írt programokat.

## 1.1. ábra

```
> restart;
> F[2]:=2*(sin(x)+(-sin(2*x))/(2));
> F[4]:=2*(sin(x)+(-sin(2*x))/(2)+(sin(3*x))/(3)+(-sin(4*x))/(4));
> F[6]:=2*(sin(x)+(-sin(2*x))/(2)+(sin(3*x))/(3)+(-sin(4*x))/(4)+(sin(5*x))/(5)+(-sin(6*x))/(6));
> plot ([sin(x),F[2],F[4],F[6]],x=-10..10,y=-4..4,
color=[black,blue,red,green],thickness=[4,2,2,2]);
```

## 1.2. ábra

```
> f:=1
> F[5]:=sum(((2/(k*Pi))*((1-(-1)^k)))*sin((k*Pi*x)/5),k=1..5):
> F[17]:=sum(((2/(k*Pi))*((1-(-1)^k)))*sin((k*Pi*x)/5),k=1..17):
> F[41]:=sum(((2/(k*Pi))*((1-(-1)^k)))*sin((k*Pi*x)/5),k=1..41):
> plot([f,F[5], F[17], F[41],x=0..5,y=0..1.5);
```

## 1.3. ábra

```
> f := x -> piecewise (x<0,-1,x<Pi/2,0,1):
> f_ := x -> f(x-2*Pi*floor((x+Pi)/(2*Pi))):
> FS := (x,n) -> -1/4+sum(-sin(1/2*Pi*k)/(k*Pi)*cos(k*x)+(1-2*(-1)^k+cos(k*Pi/2))/(k*Pi)*sin(k*x),k=1..n):
> plot([f_(x),seq(FS(x,i),i=1..7)],x=-4..4,
color=[black,red,blue,green,magenta,coral,brown,navy],linestyle=[3,1$5]);
```

## 1.4. ábra

```
> f := x -> min(abs(x),Pi/2):
> f_ := x -> f(x-2*Pi*floor((x+Pi)/(2*Pi))):
> FS := (x,n)->3*Pi/8+sum(2*(cos(1/2*Pi*k)-1)/(Pi*k^2)*cos(k*x),k=1..n):
> plot([f_(x),FS(x,1),FS(x,2),FS(x,3),FS(x,5),FS(x,6)],x=-2*Pi..4*Pi,
color=[black,red,blue,green,magenta,coral],linestyle=[3,1$5]);
```

### 1.5. ábra

```
> FS := (x,n) -> sum(sin(k*x),k=1..n);
> plot([cot(x/2)/2,FS(x,1),FS(x,2),FS(x,3),FS(x,4),FS(x,5),FS(x,6)],x=-
7..14,y=-5..5,
color=[black,red,blue,green,magenta,coral,COLOR(RGB,4,0,9)],
linestyle=[2,1$6],discont=true);
```

### 1.6. ábra

```
> f := x -> x*exp(x);
> f_ := x -> f(x-2*floor((x+1)/2));
> FS := (x,n) -> exp(-1)+sum(2*(-1)^k*(k^2*Pi^2*exp(1)+exp(-
1))/((1+k^2*Pi^2)^2)*cos(k*Pi*x) + (-1)^k*k*Pi*(exp(1)-k^2*Pi^2*exp(1)-
3*exp(-1)-exp(-1)*k^2*Pi^2)/(1+k^2*Pi^2)^2*sin(k*Pi*x),k=1..n);
> plot([f_(x),FS(x,1),FS(x,2),FS(x,3),FS(x,4),FS(x,5)],x=-2..4,
color=[black,red,blue,green,magenta,coral],linestyle=[3,1$5]);
```

### 1.7. ábra

```
> f := x -> sqrt(x);
> f_ := x -> f(x-4*floor(x/4));
> FS := (x,n) -> 4/3+sum(a[k]*cos(k*Pi*x/2)+b[k]*sin(k*Pi*x/2),k=1..n);
> plot([f_(x),FS(x,1),FS(x,2),FS(x,3),FS(x,4),FS(x,5)],x=-4..8,
color=[black,red,blue,green,magenta,coral],linestyle=[3,1$5],
thickness=[2,2,2,2,2,2]);
```

### 2.1. ábra

```
> f := x -> sqrt(x): 'f(x)'=f(x);
> plot([f(x),seq(convert(taylor(f(x),x=4,i),polynom),i=2..4)],x=-3..15,
color=[black,green,blue,magenta],thickness=2);
```

### 2.2. ábra

```
> f := x -> sin(x): 'f(x)'=f(x);
> plot([f(x),seq(convert(taylor(f(x),x=Pi/3,i),polynom),i=2..4)], x=-1..3.5,
color=[black,green,blue,magenta],thickness=2);
```

### 2.3. ábra

```
> f := x -> 1/(1-x): 'f(x)'=f(x);
> plot([f(x),seq(convert(taylor(f(x),x=0,i),polynom),i=1..6)],x=-.7..0.7,
color=[black,green,blue,magenta],thickness=2);
```



## 2.4. ábra

```
> f := x -> (x+1)^x: 'f(x)'=f(x);
> plot([f(x),seq(convert(taylor(f(x),x=Pi/3,i),polynom),i=2..4)],
x=-0.5..3.5,y=-1 ...8,color=[black,green,blue,magenta],thickness=2);
```

## 2.5. ábra

```
> i := 'i': n := 'n':
> plot([exp(x),seq(sum(x^i/i!,i=0..n),n=1..6)],x=3...3,
thickness=[4,2,2,2,2,2,2],linestyle=[2,1$6],color=[black,magenta,yellow,
gold,green,blue]);
```

### 3.1.1. ábra

```
> alias(C=binomial):
> n := 10:
> f := x -> sqrt(1-x^2):
> Sum(C(n,k)*f(2*k/n-1)*((1+x)/2)^k*((1-x)/2)^(n-k),k=0..n):
sort(simplify(value(%))):
> g := unapply(%,x):
> n := 10;
>xvals := [seq(2*i/n-1,i=0..n)];
>yvals := map(f,xvals);
>pts := zip((x,y)->[x,y],xvals,yvals):
>plot([g(x),f(x),pts],x=-1..1,color=[red,magenta,blue],
style=[line$2,point],symbol=circle,linestyle=[1,2],thickness=[2,1],
legend=[`g(x)`, `f(x)`, `f(x) points`]);
```

### 3.1.2. ábra

```
> alias(C=binomial):
> n := 50:
> f := x -> sqrt(1-x^2):
> Sum(C(n,k)*f(2*k/n-1)*((1+x)/2)^k*((1-x)/2)^(n-k),k=0..n):
sort(simplify(value(%))):
> g := unapply(%,x):
> n := 10;
>xvals := [seq(2*i/n-1,i=0..n)];
>yvals := map(f,xvals);
>pts := zip((x,y)->[x,y],xvals,yvals):
>plot([g(x),f(x),pts],x=-1..1,color=[red,magenta,blue],
style=[line$2,point],symbol=circle,linestyle=[1,2],thickness=[2,1],
legend=[`g(x)`, `f(x)`, `f(x) points`]);
```

### 3.2. ábra

```
> restart;
> f := sin(t);
> g := sum(binomial(n,k)*x^k*(1-x)^(n-k)*subs(t=k/n,f),k=0..n);
> h1 :=subs(n=1,g);
> h2 :=subs(n=2,g);
> h3 :=subs(n=3,g);
> Sum(B(k,x),k=0..n):
> plot([h1,h2,h3,cos(x)],x=0..1,y=0..1,color=[yellow,blue,red,green,black],
scaling=constrained,thickness=3);
```

### 3.3. ábra

```
> restart;
> f := (t+1)^t;
> g := sum(binomial(n,k)*x^k*(1-x)^(n-k)*subs(t=k/n,f),k=0..n);
> h1 :=subs(n=1,g);
> h2 :=subs(n=2,g);
> h3 :=subs(n=3,g);
> h4 :=subs(n=4,g);
> h5 :=subs(n=5,g);
> Sum(B(k,x),k=0..n):
> plot([h1,h2,h3,h4,h5,(x+1)^x],x=1..1,y=1..2,color=[yellow,blue,red,green,
magenta,black],thickness=3);
```

### 3.4. ábra

```
> f := abs(t-0.2);
> g := sum(binomial(n,k)*x^k*(1-x)^(n-k)*subs(t=k/n,f),k=0..n);
> h :=subs(n=8,g);
> Sum(B(k,x),k=0..n);
> plot([h,abs(x-0.2)],x=0..1,y=0..0.4 color=[yellow,blue], thickness=3);
```

#### 3.5.1. ábra

```
> alias(C=binomial):
> n := 10:
> f := x -> exp(-4*x^2):
> Sum(C(n,k)*f(2*k/n-1)*((1+x)/2)^k*((1-x)/2)^(n-k),k=0..n):
> simplify(evalf(%)):
> g := unapply(%,x):
```

```

> n := 10:
> xvals := [seq(2*i/n-1,i=0..n)]:
> yvals := map(f,xvals):
> pts := zip((x,y)->[x,y],xvals,yvals):
> plot([g(x),f(x),pts],x=-1..1,color=[red,magenta,blue],
      style=[line$2,point],symbol=circle,linestyle=[1,2],thickness=[2,1],
      legend=[`g(x)`, `f(x)`, `f(x) points`]);

```

### 3.5.2. ábra

```

> alias(C=binomial):
> n := 50:
> f := x -> exp(-4*x^2):
> Sum(C(n,k)*f(2*k/n-1)*((1+x)/2)^k*((1-x)/2)^(n-k),k=0..n):
> simplify(evalf(%)):
> g := unapply(%,x):
> n := 50:
> xvals := [seq(2*i/n-1,i=0..n)]:
> yvals := map(f,xvals):
> pts := zip((x,y)->[x,y],xvals,yvals):
> plot([g(x),f(x),pts],x=-1..1,color=[red,magenta,blue],
      style=[line$2,point],symbol=circle,linestyle=[1,2],thickness=[2,1],
      legend=[`g(x)`, `f(x)`, `f(x) points`]);

```

### 4.1.2. ábra

```

> x0:=3;x1:=6;x2:=8;
> y0:=3^3;y1:=6^3;y2:=8^3;
> f0:=(x-x1)*(x-x2);f1:=(x-x0)*(x-x2);f2:=(x-x0)*(x-x1);
> g0:=(x0-x1)*(x0-x2);g1:=(x1-x0)*(x1-x2);g2:=(x2-x0)*(x2-x1);
> L3:=f0*y0/g0+f1*y1/g1+f2*y2/g2;
> plot([L3,x^3],x=0..9,color=[red,black],thickness=[2,3]);

```

### 4.1.3. ábra

```

> x0:=2;x1:=6;x2:=8;
> y0:=sin(2);y1:=sin(6);y2:=sin(8);
> f0:=(x-x1)*(x-x2);f1:=(x-x0)*(x-x2);f2:=(x-x0)*(x-x1);
> g0:=(x0-x1)*(x0-x2);g1:=(x1-x0)*(x1-x2);g2:=(x2-x0)*(x2-x1);
> L3:=f0*y0/g0+f1*y1/g1+f2*y2/g2;
> plot([L3,sin(x)],x=0..9,y=-1..1.5,color=[green,black],thickness=[2,3]);

```

## Irodalomjegyzék

- Gyóri István, Hartung Ferenc: MA1114f és MA 6116a előadásjegyzet 2006/2007
- Laczkovich Miklós-T. Sós Vera: Analízis I.
- Laczkovich Miklós-T. Sós Vera: Analízis II.
- <http://hu.wikipedia.org>
- Faragó István: Alkalmazott analízis I. órai jegyzet
- Stoyan Gisbert Takó Galina Numerikus módszerek I.
- <http://www.termesztvilaga.hu/tv2002/tv0203/totik.html>(A folytonos közelítés mestere Beszélgetés TOTIK VILMOS akadémikussal)
- <http://www.szt.vein.hu/~gyori/ma1114f/jegyzet6.pdf>
- Numerikus módszerek (Lázár Zsolt, Lázár József, Járai-Szabó Ferenc (Kolozsvári egyetemi kiadó, 2008))
- <http://zeus.nyf.hu/~kovacs/sec03.pdf>