Topologikus terek, folytonosság és a Brouwer-fixponttétel

Szakdolgozat

Írta: **Földi Eszter**

Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető: **Pfeil Tamás**, adjunktus

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2010

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatom témájául a topologikus terek és topologikus téren értelmezett folytonos függvények vizsgálatát választottam, ezenkívül egy nevezetes fixponttétellel ismertetem meg az Olvasót.

Tekintettel a terjedelmi követelményekre, a szakdolgozat első része csak a topologikus terek alapfogalmaiba nyújt betekintést, és olyan alapvető tételeket ismertet, amelyek a további fejezetek tárgyalásához szükségesek. A második fejezetben megismerjük a topologikus téren értelmezett konvergens sorozatok és folytonos függvények tulajdonságait, emellett egy-egy szép példát is láthatunk folytonos függvényre és homeomorfizmusra. Az utolsó fejezet témája a Brouwer-féle fixponttétel, amely fontos és érdekes megállapítást tesz a folytonos leképezésekről. A tétel kimondja, hogy az n dimenziós korlátos, zárt és konvex tartományokat önmagukba leképező folytonos leképezéseknek létezik fixpontja. Brouwer tételét a Sakk-lemma segítségével Czách László útmutatása alapján nem közismert módon bizonyítjuk kétdimenziós esetben, majd az általános fixponttételt egy algebrai tétel bizonyításához alkalmazzuk.

1. fejezet

Topológiai bevezetés

1.1. Halmazrendszerek

Ebben az alfejezetben olyan fogalmakkal és tulajdonságokkal ismerkedünk meg, melyek a topológia értelmezéséhez alapvetően szükségesek.

1.1.1. Definíció. *Egy olyan nemüres halmazt, melynek elemei maguk is halmazok, halmazrendszernek nevezünk. Az olyan halmazrendszereket, amelyeknek elemei egy adott nemüres halmaz bizonyos részhalmazai, X-beli halmazrendszereknek nevezzük.*

A halmazrendszer fogalmát függvény segítségével is értelmezhetjük. Az $f : I \to X$ függvény által meghatározott halmazrendszer $\{f(i) \in P(X) : i \in I\}$.

1.1.2. Definíció. *Egy $\mathcal{A}$ halmazrendszert metszetzártnak nevezünk, ha bármely két $\mathcal{A}$-beli halmaz metszete is $\mathcal{A}$-beli halmaz.*

Ebből az következik, hogy metszetzárt $\mathcal{A}$ halmazrendszer esetén bármely véges sok $\mathcal{A}$-beli halmaz metszete is $\mathcal{A}$-beli.

1.1.3. Definíció. *Tetszőleges $\mathcal{A}$ halmazrendszer esetén jelölje $\mathcal{A}_m$ az $\mathcal{A}$-beli halmazok összes véges metszeteiből álló halmazrendszert, amelyet $\mathcal{A}$ metszetzárt burkának nevezzük.*

Az $\mathcal{A}_m$ halmazrendszer metszetzárt, és $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_m$, emellett $\mathcal{A}_m$ azonos a legszűkebb olyan metszetzárt halmazrendszerrel, amelynek részhalmaza $\mathcal{A}$. Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer pontosan akkor metszetzárt, ha $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}$.

Megjegyzés. Halmazok végtelen metszetére nézve $\mathcal{A}$ nem mindig zárt.

Legyen például $\mathcal{A} := \{(a,b) \in P(\mathbb{R}) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{\emptyset\}$. $\mathcal{A}$ metszetzárt, de

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\tfrac{1}{n}; \tfrac{1}{n}) = \{0\} \notin \mathcal{A}.$$

1.1.4. Definíció. *Egy $\mathcal{A}$ X-beli halmazrendszer felszálló, ha az $\mathcal{A}$ halmazrendszer valamely halmazát tartalmazó X-beli halmaz is eleme a halmazrendszernek. Azaz, ha $\forall A \in \mathcal{A}$ és $\forall H \subset X$-re, amelyre $A \subset H$, teljesül $H \in \mathcal{A}$.*

1.1.5. Definíció. *Tetszőleges $\mathcal{A}$ X-beli halmazrendszer esetén legyen $[\mathcal{A}]$ az X összes olyan részhalmazaiból álló halmazrendszer, amely tartalmaz $\mathcal{A}$-beli halmazt, vagyis*

$$[\mathcal{A}] := \{H \subset X : \exists\ A \in \mathcal{A}\quad A \subset H\},$$

melyet $\mathcal{A}$ felszálló burkának nevezzük.

$[\mathcal{A}]$ felszálló halmazrendszer, amelyre $\mathcal{A} \subset [\mathcal{A}]$, emellett $[\mathcal{A}]$ azonos a legszűkebb X-beli felszálló halmazrendszerrel, amelynek részhalmaza $\mathcal{A}$. Ebből következik, hogy egy $\mathcal{A}$ X-beli halmazrendszer pontosan akkor felszálló, ha $[\mathcal{A}] = \mathcal{A}$.

1.1.6. Állítás. *Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ X-beli halmazrendszerek, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. *Minden $\mathcal{A}$-beli halmaz tartalmaz $\mathcal{B}$-beli halmazt,*

2. *$[\mathcal{A}] \subset [\mathcal{B}]$.*

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2): Tegyük fel, hogy mindegyik $\mathcal{A}$-beli halmaz tartalmaz $\mathcal{B}$-beli halmazt. Ha $H \in [\mathcal{A}]$, akkor létezik $A \in \mathcal{A}$, hogy $A \subset H$. A feltevésünk szerint létezik olyan $B \in \mathcal{B}$, amelyre $B \subset A$, így $B \subset H$, amiből következik $H \in [\mathcal{B}]$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Tegyük fel, hogy $[\mathcal{A}] \subset [\mathcal{B}]$, és legyen $A \in \mathcal{A}$ egy tetszőleges halmaz. Mivel $\mathcal{A} \subset [\mathcal{A}] \subset [\mathcal{B}]$, azért $A \in [\mathcal{B}]$, de akkor $[\mathcal{B}]$ értelmezése miatt van olyan $B \in \mathcal{B}$, amelyre $B \subset A$. □

1.1.7. Definíció. *Egy $\mathcal{A}$ X-beli halmazrendszer bázisa olyan $\mathcal{B}$ X-beli halmazrendszer, amelyre az alábbiak teljesülnek:*

1. *$\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$,*

2. *Minden $\mathcal{A}$-beli halmaz tartalmaz $\mathcal{B}$-beli halmazt.*

1.1.8. Definíció. *Az $\mathcal{A}$ X-beli halmazrendszer szűrő, ha $\mathcal{A}$ metszetzárt és felszálló halmazrendszer, továbbá $\emptyset \notin \mathcal{A}$.*

1.1.9. Definíció. *Az $\mathcal{A}$ X-beli halmazrendszer rács, ha bármely két $\mathcal{A}$-beli halmaz metszete tartalmaz $\mathcal{A}$-beli halmazt, és $\emptyset \notin \mathcal{A}$.*

1.2. Topológia értelmezése környezetekkel

A topologikus teret, mint a topológia alapfogalmát többféle (ekvivalens) módon definiálhatjuk. Az analízisben leggyakrabban környezetekkel értelmezzük a topológiát. Az előbbi pontban bevezetett definíciókra támaszkodunk a továbbiakban.

1.2.1. Definíció. *Adott egy X alaphalmaz és egy $\tau : X \to P(P(X))$ függvény, amelyik minden $x \in X$ ponthoz hozzárendel egy $\tau(x)$ X-beli halmazrendszert. Az (X, τ) párt topologikus térnek nevezzük, ha teljesülnek az alábbi feltételek $\forall x \in X$ esetén:*

1. *$\forall U \in \tau(x)$ esetén $x \in U$, azaz a $\tau(x)$ halmazrendszer illeszkedik x-re,*

2. *ha $U, V \in \tau(x)$, akkor $U \cap V \in \tau(x)$, tehát $\tau(x)$ metszetzárt,*

3. *ha $U \in \tau(x)$ és $U \subset V \subset X$, akkor $V \in \tau(x)$, tehát $\tau(x)$ felszálló halmazrendszer,*

4. *$\forall$ $U \in \tau(x)$ halmazhoz $\exists$ $V \in \tau(x)$ halmaz, amelyre $V \subset U$, és emellett $\forall y \in V$-re $V \in \tau(y)$.*

Ha (X, τ) topologikus tér, akkor a $\tau : X \to P(P(X))$ függvényt topológiának nevezzük, $x \in X$ esetén a $\tau(x)$ halmazrendszer elemeit az x pont környezeteinek hívjuk. A definíció első három követelményéből látszik, hogy minden $x \in X$ esetén a $\tau(x)$ halmazrendszer az x pontra illeszkedő szűrő.

1.3. Topológiai alapfogalmak

A további vizsgálathoz olyan alapfogalmak szükségesek, amelyek gyakran előfordulnak a topologikus terek tárgyalásakor.

Legyen (X, τ) egy tetszőleges topologikus tér.

1.3.1. Definíció. *Legyen $H \subset X$ egy tetszőleges halmaz. Egy $x \in X$ pontot a H halmaz belső pontjának nevezzük, ha az x pontnak környezete H, azaz $H \in \tau(x)$. Jelölje* int$H$ *a H halmaz belső pontjainak halmazát.*

A definíció szerint $\mathrm{int}H \subset H$ és $x \in \mathrm{int}H \Leftrightarrow H \in \tau(x)$.

1.3.2. Definíció. *Legyen $H \subset X$ egy tetszőleges halmaz. Az $x \in X$ pontot a H halmaz külső pontjának nevezzük, ha x belső pontja H^c-nek. Jelölje* $\mathrm{ext}H$ *a H halmaz külső pontjainak halmazát.*

A definíció szerint $\mathrm{ext}H = \mathrm{int}H^c \quad$ és $\quad \mathrm{ext}H \subset H^c$.

1.3.3. Definíció. *Legyen $H \subset X$ egy tetszőleges halmaz. Az $x \in X$ pontot a H halmaz határpontjának nevezzük, ha x sem belső, sem külső pontja a H halmaznak. Jelölje ∂H a H halmaz határpontjainak halmazát.*

A definíció szerint $\partial H = (\mathrm{int}H \cup \mathrm{ext}H)^c \quad$ és $\quad \partial H = \partial H^c$.

1.3.4. Definíció. *Legyen $H \subset X$ egy tetszőleges halmaz. Az $x \in X$ pontot a $H \subset X$ halmaz érintkezési pontjának nevezzük, ha x belső vagy határpontja a H halmaznak. Jelölje $\overline{H}$ a H halmaz érintkezési pontjainak halmazát. Ezt a halmazt a H halmaz lezárásának nevezzük.*

A definíció szerint $\overline{H} = \mathrm{int}H \cup \partial H = (\mathrm{ext}H)^c$.

1.3.5. Definíció. *Legyen $H \subset X$ egy tetszőleges halmaz. Az $x \in X$ pontot a $H \subset X$ halmaz torlódási pontjának nevezzük, ha az x pont bármely környezete tartalmaz x-től különböző H halmazbeli pontot. Jelölje H' a H halmaz torlódási pontjainak halmazát.*

1.3.6. Definíció. *Az x pont egy kipontozott környezetén az $\dot{U} := U \setminus \{x\}$ halmazt értjük, ha $U \in \tau(x)$ az $x \in X$ pont egy tetszőleges környezete.*

Ezzel a torlódási pont definíciója úgy is fogalmazható, hogy az $x \in X$ pont a $H \subset X$ halmaz torlódási pontja, ha az x pont bármely kipontozott környezete tartalmaz H halmazbeli pontot.

1.3.7. Lemma. *Ha $x \in \partial H$, de $x \notin H$, akkor $x \in H'$.*

Bizonyítás. Mivel $x \in \partial H$, azért x pont bármely környezetében van H-beli és H^c-beli pont, és az állítás feltétele szerint az x pont nem eleme a H halmaznak, azért x bármely környezetében van x-től különböző H-beli pont, azaz $x \in H'$. $\square$

1.3.8. Definíció. *Az $x \in X$ pontot a $H \subset X$ halmaz izolált pontjának nevezzük, ha $x \in H$, és az x pontnak van olyan környezete, amely az x ponton kívül nem tartalmaz más H-beli pontot.*

A fenti definíciókból következik, hogy tetszőleges $x \in H$ pont torlódási vagy pedig izolált pontja a H halmaznak.

1.4. Nyílt halmazok, zárt halmazok és azok tulajdonságai

Az alábbiakban a nyílt, ill. zárt halmazok tulajdonságaival foglalkozunk, amelyek ismeretében a topológiát, valamint a topologikus teret egy másik (az előzővel ekvivalens) felépítéssel is megadhatjuk.

1.4.1. Definíció. *Az (X, τ) topologikus térben egy $G \subset X$ halmazt nyíltnak nevezünk, ha e halmaz minden pontjának környezete G, vagyis*

$$G \text{ nyílt halmaz} \Leftrightarrow \forall x \in G\text{-re } G \in \tau(x).$$

Legyen $\mathcal{G}$ a tér nyílt halmazainak halmazrendszere.

1.4.2. Tétel. *Az (X, τ) topologikus tér nyílt halmazaira teljesülnek az alábbiak:*

1. *$\emptyset$ és X nyílt,*
2. *véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt,*
3. *tetszőleges sok nyílt halmaz uniója is nyílt.*

Bizonyítás. (1): Az üreshalmaz nyílt, és mivel minden $x \in X$ mellett $X \in \tau(x)$, ezért X is nyílt.

(2): Legyenek G és H nyílt halmazok, és legyen $x \in G \cap H$ egy tetszőleges pont. Mivel $x \in G$ és $x \in H$, a nyílt halmazok értelmezése miatt $G \in \tau(x)$ és $H \in \tau(x)$, amiből az következik, hogy a metszetük is környezete az x pontnak, mert $\tau(x)$ metszetzárt halmazrendszer.

(3): Legyen $\{G_i : i \in I\}$ a nyílt halmazok egy tetszőleges rendszere, valamint

$$G := \bigcup_{i \in I} G_i.$$

Ha $x \in G$ egy tetszőleges pont, akkor van olyan $i \in I$ index, amelyre $x \in G_i$. G_i nyílt, ezért $G_i \in \tau(x)$. Mivel $\tau(x)$ felszálló halmazrendszer és $G_i \subset G$, azért G is környezete x-nek. □

1.4.3. Állítás. *Bármely $H \subset X$ halmazra* $\mathrm{int}H$ *megegyezik a H halmazban lévő nyílt halmazok uniójával, így* $\mathrm{int}H$ *azonos a H halmaz legnagyobb nyílt részhalmazával.*

Bizonyítás. Jelölje G_0 a H halmazban lévő nyílt halmazok unióját, azaz

$$G_0 := \bigcup\{G \in \mathcal{G} : \ G \subset H\}.$$

G_0 nyílt, $G_0 \subset H$ és G_0 a legnagyobb nyílt halmaz H-ban. Csak azt kell belátnunk, hogy

$$\mathrm{int}H = G_0.$$

Legyen $x \in \mathrm{int}H$ egy tetszőleges pont, akkor a belső pont definíciója miatt $H \in \tau(x)$, ezért a környezetszűrő 4. axiómája szerint létezik olyan G nyílt halmaz, amelyre $x \in G \subset H$. Ekkor G_0 értelmezéséből $G \subset G_0$, így x is benne van G_0-ban, ami azt jelenti, hogy

$$\mathrm{int}H \subset G_0.$$

Megfordítva, legyen $x \in G_0$. Akkor $G_0 \in \tau(x)$, mert G_0 nyílt. Mivel $G_0 \subset H$ és $\tau(x)$ egy felszálló halmazrendszer, azért $H \in \tau(x)$, ami megegyezik azzal, hogy $x \in \mathrm{int}H$. Ebből következik, hogy

$$G_0 \subset \mathrm{int}H.$$

□

1.4.4. Definíció. *Az (X, τ) topologikus térben a nyílt halmazok komplementereit zárt halmazoknak nevezzük.*

1.4.5. Állítás. *Az (X, τ) topologikus tér zárt halmazaira teljesülnek az alábbiak:*

1. *$\emptyset$ és X zárt,*
2. *véges sok zárt halmaz uniója zárt,*
3. *tetszőleges sok zárt halmaz metszete is zárt.*

Bizonyítás. Az állítás a nyílt halmazokra megfogalmazott tételből rögtön következik a de Morgan-azonosságok alapján. □

1.4.6. Állítás. *Bármely $H \subset X$ halmaz $\overline{H}$ lezárása azonos a H-t tartalmazó zárt halmazok metszetével, vagyis $\overline{H}$ a H-t tartalmazó legkisebb zárt halmaz.*

Bizonyítás. Az állítás az 1.4.3. Állításból és a zárt halmaz definíciójából következik. □

1.4.7. Következmény. *Bármely $H \subset X$ esetén* $\mathrm{int}H$*,* $\mathrm{ext}H$ *nyílt halmazok és* ∂H*,* $\overline{H}$ *zárt halmazok.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\mathrm{ext}H = \mathrm{int}H^c$, ezért $\mathrm{ext}H$ nyílt halmaz. $\partial H = (\mathrm{int}H \cup \mathrm{ext}H)^c$, ezért zárt halmaz. $\overline{H} = (\mathrm{ext}H)^c$ zárt halmaz, mivel láttuk, hogy $\mathrm{ext}H$ nyílt halmaz. □

1.4.8. Állítás. *Bármely $H \subset X$ halmaz esetén $\overline{H} = H \cup H'$.*

Bizonyítás. A torlódási pont definíciójából következik, hogy a H halmaz minden torlódási pontja érintkezési pontja is H-nak, azaz $H' \subset \overline{H}$, továbbá $H \subset \overline{H}$, és ebből azt kapjuk, hogy $H \cup H' \subset \overline{H}$.

Megfordítva, legyen $x \in \overline{H}$ egy tetszőleges pont. Akkor a $\overline{H} = H \cup \partial H$ egyenlőségből vagy $x \in H$ következik, vagy $x \notin H$ esetén $x \in \partial H$, de akkor az 1.3.7. Lemma szerint $x \in H'$. Tehát $\overline{H} \subset H \cup H'$. □

A következő két tételben a nyílt és zárt halmazokra vonatkozó ekvivalens állításokat foglalunk össze.

1.4.9. Tétel. *Ha $G \subset X$, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. *G nyílt,*
2. *$\forall x \in G$-re $G \in \tau(x)$,*
3. *$G = \mathrm{int}G$,*
4. *G egyetlen határpontját sem tartalmazza, azaz $G \cap \partial G = \emptyset$.*

1.4.10. Tétel. *Ha $F \subset X$, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. *F zárt,*
2. *$\partial F \subset F$,*
3. *$F' \subset F$,*
4. *$F = \overline{F}$.*

1.5. Topológia értelmezése nyílt halmazokkal

Az egyik legegyszerűbb és legrövidebb módon a nyílt halmazok megadásával definiálhatjuk a topologikus teret.

1.5.1. Definíció. *Legyen X egy nemüres alaphalmaz és $\mathcal{G}$ egy olyan X-beli halmazrendszer, amelyek teljesítik az alábbi követelményeket:*

1. *$\emptyset$ és $X \in \mathcal{G}$,*

2. *véges sok $\mathcal{G}$-beli halmaz metszete $\mathcal{G}$-beli,*

3. *$\mathcal{G}$-beli halmazok tetszőleges uniója is $\mathcal{G}$-beli halmaz.*

Az ilyen $(X, \mathcal{G})$ rendezett párt topologikus térnek nevezzük.

Az alábbi állítás szerint a topologikus tér 1.5.1 Definícióbeli megadása egyenértékű az 1.2.1-belivel.

1.5.2. Állítás. *A topologikus tér nyílt halmazokkal való megadása ekvivalens a környezetekkel definiált topológiával.*

1. *Ha $(X, \mathcal{G})$ teljesíti az 1.5.1. Definíció feltételeit, akkor a $\tau_{\mathcal{G}}(x) := [\{G \subset \mathcal{G} : x \in G\}]$, $x \in X$ függvény topológia X-en, és $\mathcal{G}$ az $(X, \tau_{\mathcal{G}})$ topologikus tér nyílt halmazainak halmazrendszere.*

2. *Ha (X, τ) topologikus tér és $\mathcal{G}$ a nyílt halmazok rendszere, akkor $(X, \mathcal{G})$ kielégíti az 1.5.1 Definíció követelményeit, és bármely $x \in X$ esetén $\mathcal{G}$ x-re illeszkedő részének felszálló burka $\tau(x)$.*

Bizonyítás. 1. Elsőként azt bizonyítjuk, hogy ha $G \in \mathcal{G}$, akkor G nyílt $(X, \tau_{\mathcal{G}})$-ben. Ha $x \in G$, akkor $G \in \tau_{\mathcal{G}}(x)$. Megfordítva, ha U nyílt halmaz $\tau_{\mathcal{G}}$-ben, akkor minden $x \in U$ esetén $U \in \tau_{\mathcal{G}}(x)$, így létezik $G_x \in \mathcal{G}$, amelyre $U \supset G_x \ni x$. Legyen $G^* := \bigcup_{x \in U} G_x$, ekkor $G^* \in \mathcal{G}$, és $U \subset G^* \subset U$ is teljesül. Ebből kapjuk, hogy $U = G^* \in \mathcal{G}$.

2. Azt bizonyítjuk, hogy $\tau = \tau_{\mathcal{G}}$. Legyen $U \in \tau(x)$, ekkor $\mathrm{int}U \in \mathcal{G}$. Így $\mathrm{int}U \in \tau_{\mathcal{G}}(x)$, amiből már $\mathrm{int}U \subset U$ alapján következik, hogy $U \in \tau_{\mathcal{G}}(x)$. Megfordítva, legyen $U \in \tau_{\mathcal{G}}(x)$, ekkor létezik $G \in \mathcal{G}$, hogy $x \in G \subset U$. Eképpen $G \in \tau(x)$, és mivel $\tau(x)$ felszálló halmazrendszer, ezért $U \in \tau(x)$ is teljesül.

□

1.6. Környezetbázis

1.6.1. Definíció. *Az (X, τ) topologikus térben az $x \in X$ pont $\tau(x)$ környezetszűrőjének egy bázisán olyan $\beta(x)$ X-beli halmazrendszert értünk, amelyre teljesül*

1. $\beta(x) \subset \tau(x)$,
2. *minden $\tau(x)$-beli halmaz tartalmaz $\beta(x)$-beli halmazt.*

A $\tau(x)$ környezetszűrő egy bázisát az x pont környezetbázisának nevezzük. Az x pont nyílt halmazokból álló környezetbázisát az x pont egy nyílt környezetbázisának nevezzük.

A definícióban szereplő két feltétel ekvivalens azzal, hogy a $\beta(x)$ halmazrendszer felszálló burka megegyezik a $\tau(x)$ környezetszűrővel, azaz $[\beta(x)] = \tau(x)$.

1.6.2. Állítás. *Minden (X, τ) topologikus térben minden $x \in X$ pontnak létezik nyílt környezetbázisa.*

Bizonyítás. Ha $x \in X$, akkor $\beta(x) := \{\text{int}U \subset X : U \in \tau(x)\}$. Tudjuk, hogy az így megadott $\beta(x)$ nyílt halmazokból áll, melyekre $U \supset \text{int}U$ és $U \in \tau(x)$. Ebből az következik, hogy $x \in \text{int}U$, így $\text{int}U \in \tau(x)$ is teljesül. □

Meghatározzuk a szükséges és elégséges feltételét annak, hogy egy X alaphalmazon értelmezett halmazrendszer értékű $\beta : X \to P(P(X))$ függvényhez mikor létezik az X alaphalmazon olyan $\tau : X \to P(P(X))$ topológia, amelyre minden $x \in X$ esetén a $\beta(x)$ halmazrendszer az x pont egy nyílt környezetbázisa.

1.6.3. Definíció. *Az X nemüres halmazon értelmezett $\beta : X \to P(P(X))$ függvény kielégíti a Hausdorff-féle környezetaxiómákat, ha a függvényre igazak az alábbi feltételek:*

1. *minden $x \in X$ mellett a $\beta(x)$ halmazrendszer az x pontra illeszkedő rács,*
2. *minden $x \in X$ esetén minden $V \in \beta(x)$ halmazhoz és ennek minden $y \in V$ pontjához van olyan $W \in \beta(y)$ halmaz, amelyre $W \subset V$.*

1.6.4. Állítás. *Ha (X, τ) egy topologikus tér és $\beta : X \to P(P(X))$ az x pont egy nyílt környezetbázisa, akkor a β függvény kielégíti a Hausdorff-féle környezetaxiómákat.*

Bizonyítás. Mivel minden $x \in X$ esetén a $\tau(x)$ halmazrendszer az x pontra illeszkedő szűrő és $\beta(x)$ ennek egy bázisa, ezért a $\beta(x)$ halmazrendszer is illeszkedik az x pontra. Sőt, $\beta(x)$ rács, ha ugyanis $U, V \in \beta(x)$, akkor $U \cap V \in \tau(x)$, és $\tau(x)$ bázisa $\beta(x)$, ezért létezik $W \in \beta(x)$, amely része $U \cap V$-nek. Így $\beta(x)$ kielégíti a Hausdorff-féle első környezetaxiómát.

Mivel minden $x \in X$ esetén $\beta(x)$ az x pont egy nyílt környezetbázisa, ezért minden $V \in \beta(x)$ halmaz az x pont egy nyílt környezete. Ez azt jelenti, hogy minden $y \in V$ esetén $V \in \tau(y)$, emellett mivel $\beta(y)$ a $\tau(y)$ környezetszűrő egy bázisa, azért van olyan $W \in \beta(y)$, amelyre $W \subset V$, tehát β megfelel a Hausdorff-féle második környezetaxióma feltételének is. $\square$

1.6.5. Állítás. *Ha $\beta : X \to P(P(X))$ az X nemüres halmazon értelmezett olyan függvény, amely kielégíti a Hausdorff-féle környezetaxiómákat, akkor a*

$$\tau(x) := [\beta(x)], \qquad x \in X$$

egyenlőséggel definiált $\tau : X \to P(P(X))$ függvény olyan topológia X-n, amelyre minden $x \in X$ esetén a $\beta(x)$ halmazrendszer az x pont egy nyílt környezetbázisa.

Bizonyítás. Az első Hausdorff-féle környezetaxióma szerint minden $x \in X$ esetén a $\beta(x)$ halmazrendszer az x pontra illeszkedő rács. Ezért a $\tau(x)$ halmazrendszer az x pontra illeszkedő szűrő, emellett $\beta(x)$ a $\tau(x)$ egy bázisa.

Megmutatjuk, hogy a topológia 4. axiómája is teljesül, amihez elegendő belátni, hogy a $\beta(x)$ halmazrendszer minden eleme nyílt halmaz. Legyen $V \in \beta(x)$ egy tetszőleges halmaz és $y \in V$ egy tetszőleges pont. A második Hausdorff-féle környezetaxióma szerint van olyan $W \in \beta(y)$, amelyre $W \subset V$, és mivel $\tau(y) = [\beta(y)]$, ezért $V \in \tau(y)$.

$\square$

1.7. Példák topologikus terekre

Az első négy példában olyan topologikus tereket láthatunk, melyeket a nyílt halmazok halmazrendszerének segítségével adunk meg. A további példákban környezetszűrővel definiáljuk a topologikus teret. Mindegyik példában legyen X egy tetszőleges alaphalmaz.

1. Példa.

$$\mathcal{G} := \{\emptyset, X\}.$$

Az $(X, \mathcal{G})$ pár kielégíti az 1.5.1. Definíció feltételeit. Ezt a $\mathcal{G}$ topológiát X-beli *antidiszkrét topológiá*nak nevezzük, az $(X, \mathcal{G})$ párt pedig antidiszkrét térnek mondjuk. Az antidiszkrét térben csak az üreshalmaz és az X alaphalmaz nyílt halmazok, ugyanezek a zárt halmazok is. Ebből azt látjuk, hogy minden $x \in X$ pont környezetszűrője $\tau(x) = \{X\}$.

2. Példa.

$$\mathcal{G} := P(X).$$

Ezt a $\mathcal{G}$ topológiát X-beli *diszkrét topológiá*nak nevezzük, az $(X, \mathcal{G})$ párt pedig diszkrét térnek mondjuk. A diszkrét térben minden halmaz nyílt (és egyben zárt is), így bármely $x \in X$ pont környezetszűrőjét a következőképpen írhatjuk fel: $\tau(x) = \{U \subset X : x \in U\}$. Tehát az x pont környezetszűrője azonos X olyan részhalmazainak összességével, amelyek tartalmazzák az x pontot.

3. Példa.

$$\mathcal{G} := \{U \subset X : U^c \text{ véges}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Az ilyen $\mathcal{G}$ topológiát *ko-véges topológiá*nak nevezzük. Ebben az $(X, \mathcal{G})$ topologikus térben az üreshalmaz mellett azok a halmazok nyíltak, amelyeknek komplementere véges halmaz. Ebből az következik, hogy a zárt halmazok X és a véges halmazok. Így bármely $x \in X$ pont környezetszűrője $\tau(x) := \{U \subset X : x \in U \text{ és } U^c \text{ véges}\}$.

4. Példa.

$$\mathcal{G} := \{U \subset X : U^c \text{ megszámlálható}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Ezt a $\mathcal{G}$ topológiát *ko-megszámlálható topológiá*nak nevezzük. Ebben a topologikus térben a nyílt halmazok az üreshalmaz és X olyan részhalmazai, amelyek komplementere megszámlálható. Bármely $x \in X$ pont környezetszűrője

$$\tau(x) := \{U \subset X : x \in U \text{ és } U^c \text{ megszámlálható}\}.$$

5. Példa.

Legyen $X := \mathbb{R}$ és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\beta(x) := \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \mathbb{R} : \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}.$$

A $\tau(x) := [\beta(x)]$, $x \in \mathbb{R}$ egyenlőséggel értelmezett $\tau : \mathbb{R} \to P(P(\mathbb{R}))$ függvény olyan topológia a valós számok halmazán, amelynél minden $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\beta(x)$ halmazrendszer az x pont egy nyílt környezetbázisa. Ez a példa az *euklideszi topológia* a valós számok halmazán.

6. Példa.

Legyen $X := \mathbb{R}$ és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

1. $\beta(x) := \{(x - \varepsilon, x] : \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$,
2. $\beta(x) := \{[x, x + \varepsilon) : \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$.

Hasonlóan az előző példánkhoz, az itt szereplő $\beta(x)$ halmazrendszerek is kielégítik a Hausdorff-féle környezetaxiómákat. Legyen mindkét esetben $\tau(x) := [\beta(x)]$, $x \in \mathbb{R}$. A $\tau : \mathbb{R} \to P(P(\mathbb{R}))$ topológiát *bal oldali, ill. jobb oldali konvergenciatopológiá*nak nevezzük.

1.8. Topologikus tér alterei

Egy $(X, \mathcal{G})$ topologikus tér minden nemüres részhalmazán a $\mathcal{G}$ topológia segítségével természetes módon értelmezhető topológia. Legyen $\emptyset \neq X_0 \subset X$ egy tetszőleges részhalmaz, és jelölje $\mathcal{G}_0$ a $\mathcal{G}$-beli halmazoknak az X_0 halmazzal való metszeteiből álló halmazrendszert, vagyis $\mathcal{G}_0 := \{G \cap X_0 : G \in \mathcal{G}\}$.

Ha az X_0 halmazt tekintjük alaphalmaznak, a $\mathcal{G}_0$ halmazrendszer kielégíti a topológia 1.5.1. Definícióbeli feltételeit, vagyis a $\mathcal{G}_0$ halmazrendszer topológia az X_0 alaphalmazon. Az így kapott $(X_0, \mathcal{G}_0)$ topologikus teret az $(X, \mathcal{G})$ topologikus tér alterének, a $\mathcal{G}_0$ topológiát pedig altér-topológiának nevezzük. A $\mathcal{G}_0$ topológia elemeit X_0-beli nyílt halmazoknak nevezzük.

1.8.1. Állítás. *Legyen $(X, \mathcal{G})$ topologikus tér, $(X_0, \mathcal{G}_0)$ ennek egy altere, és legyen $x \in X_0$ egy tetszőleges pont. Jelölje $\tau(x)$, ill. $\tau_0(x)$ az x pont X-beli, illetve X_0-beli környezetszűrőjét. Ekkor $\tau_0(x) = \{U \cap X_0 : U \in \tau(x)\}$.*

1.9. Szétválasztási axiómák

1.9.1. Definíció. *Az (X, τ) topologikus teret T_1 térnek, és ezzel együtt a τ topológiát T_1 topológiának nevezzük, ha a tér bármely két különböző pontjának van egy-egy olyan környezete, amelyik a másik pontot nem tartalmazza, vagyis ha $x, y \in X$, $x \neq y$, akkor van olyan $U \in \tau(x)$ és $V \in \tau(y)$, hogy $x \notin V$ és $y \notin U$.*

1.9.2. Definíció. *Az (X, τ) topologikus teret T_2 térnek vagy Hausdorff-térnek, és ezzel együtt a τ topológiát T_2 topológiának nevezzük, ha a tér bármely két különböző pontjának létezik diszjunkt környezete, vagyis ha bármely $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén létezik olyan $U \in \tau(x)$ és $V \in \tau(y)$, melyekre $U \cap V = \emptyset$.*

A további értelmezésekhez szükségünk lesz a következő fogalomra.

1.9.3. Definíció. *Legyen (X, τ) topologikus tér és $A \subset X$ tetszőleges halmaz. Egy $U \subset X$ halmazt az A egy környezetének mondjuk, ha U tartalmaz A-t tartalmazó nyílt halmazt, azaz ha van olyan G nyílt halmaz X-ben, amelyre $A \subset G \subset U$.*

Ha G egy tetszőleges nyílt halmaz, amelyre $A \subset G$, akkor ez a G halmaz környezete az A-nak, amelyet az A egy nyílt környezetének mondjuk. Az A halmaz összes környezeteiből álló halmazrendszert $\tau(A)$-val jelöljük, vagyis

$$\tau(A) := \{U \subset X : \exists G \in \mathcal{G}, A \subset G \subset U\}.$$

1.9.4. Definíció. *Legyenek A és B az X tér tetszőleges nemüres részhalmazai. Az A és B halmazok szétválaszthatók, ha ezeknek a halmazoknak vannak diszjunkt környezeteik, vagyis ha van olyan $U \in \tau(A)$ és $V \in \tau(B)$, amelyekre $U \cap V = \emptyset$.*

A definícióból azonnal következik, hogy az A és B halmazok csak akkor szétválaszthatók, ha az A és B halmazok maguk is diszjunkt halmazok. Ennek megfordítása viszont nem mindig igaz. Tehát abból, hogy $A \cap B = \emptyset$, nem feltétlen következik, hogy az A és B halmazoknak vannak diszjunkt környezeteik. Hiszen a T_2 tér definíciója úgy is fogalmazható, hogy egy (X, τ) topologikus tér T_2 tér, ha benne bármely két diszjunkt egyelemű halmaz szétválasztható.

1.9.5. Tétel. *Egy topologikus tér pontosan akkor T_1 tér, ha a térben minden egyelemű halmaz zárt.*

Bizonyítás. Legyen (X, τ) T_1 tér, és legyen $y \in X \setminus \{x\}$ egy tetszőleges pont. Ekkor $y \neq x$, így az x és y pontoknak létezik egy-egy olyan környezete, amelyik a másik pontot nem tartalmazza. Az y pontnak tehát van olyan $V \in \tau(y)$ környezete, amelyre $x \notin V$. De akkor $V \subset \{x\}^c$, amiből az következik, hogy $\{x\}^c \in \tau(y)$. Ez pontosan azt jelenti, hogy az $\{x\}$ egyelemű halmaz zárt.

Megfordítva, legyen (X, τ) olyan topologikus tér, amelyben minden egyelemű halmaz zárt. Legyen $x, y \in X$, $x \neq y$. Jelölje $U := X \setminus \{y\}$ és $V := X \setminus \{x\}$ halmazokat. U és V nyílt halmazok, és mivel $x \in U$ és $y \in V$, ezért $U \in \tau(x)$ és $V \in \tau(y)$. Ezzel igazoltuk, hogy (X, τ) T_1 tér. □

1.9.6. Tétel. *Ha (X, τ) T_1 tér, $H \subset X$ és az x pont a H halmaz egy torlódási pontja, akkor az x pont bármely környezete végtelen sok H-beli pontot tartalmaz.*

Bizonyítás. Legyen $W \in \tau(x)$ az x pont egy tetszőleges környezete. Ekkor a torlódási pont definíciója szerint létezik olyan $x_1 \in W \cap H$, amelyre $x_1 \neq x$. Mivel (X, τ) T_1 tér, azért az x pontnak van olyan $U_1 \in \tau(x)$ környezete, amelyre $x_1 \notin U_1$. Legyen $W_1 := U_1 \cap W$, ekkor $W_1 \in \tau(x)$ és $W_1 \subset W$. Mivel az x pont torlódási pontja H-nak, azért az x pont W_1 környezetében is van x-től különböző H-beli pont. Vagyis létezik olyan $x_2 \in W_1 \cap H$, amelyre $x_2 \neq x$. Mivel $x_1 \notin U_1$, viszont $x_2 \in U_1$, azért $x_1 \neq x_2$, továbbá $W_1 \subset W$ figyelembevételével az x_1 és az x_2 pontok W-ben vannak. Ezen eljárást indukcióval folytatva kapunk egy olyan (x_n) pontsorozatot, amelynek tagjai páronként különbözőek, emellett minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $x_n \in W$, amiből a tétel már következik. □

1.9.7. Tétel. *Ha (X, τ) T_1 tér, akkor bármely $H \subset X$ halmaz torlódási pontjainak H' halmaza zárt.*

Bizonyítás. Egy halmaz pontosan akkor zárt, ha tartalmazza minden érintkezési pontját. A tétel igazolásához megmutatjuk, hogy $\overline{H'} \subset H'$. Legyen $x \in \overline{H'}$ az H' halmaz egy érintkezési pontja, továbbá U az x pont egy nyílt környezete. Mivel $x \in H'$, ezért az érintkezési pont értelmezése miatt van olyan $y \in U$, hogy $y \in H'$. Tudjuk, hogy $U \in \tau(y)$, és az előző tétel szerint az U halmazban végtelen sok H-beli pont van. Ebből az következik, hogy létezik $z \in U \cap H$, amelyre $z \neq x$. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy x torlódási pontja a H halmaznak. □

Érdemes megemlíteni, hogy a T_1 követelménynél van egy gyengébb, T_0 szétválasztási axióma is.

1.9.8. Definíció. *Az (X,τ) topologikus teret T_0 térnek nevezzük, ha bármely két különböző X-beli pont egyikének létezik olyan környezete, amelyik nem tartalmazza a másik pontot.*

1.10. Megszámlálhatósági axiómák

A következő két definíciót első, ill. második megszámlálhatósági axiómának nevezzük.

1.10.1. Definíció. *Az (X,τ) topologikus teret M_1 térnek, ennek topológiáját pedig M_1 topológiának nevezzük, ha X minden pontjának van megszámlálható környezetbázisa.*

1.10.2. Definíció. *Az (X,τ) topologikus teret M_2 térnek, ennek topológiáját pedig M_2 topológiának nevezzük, ha a térnek létezik megszámlálható bázisa.*

1.10.3. Tétel. *Ha (X,τ) M_1 tér, akkor minden $x \in X$ pontnak van olyan $\beta^*(x) := \{V_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ megszámlálható környezetbázisa, ahol a (V_n) halmazsorozat monoton fogyó, azaz $V_n \supset V_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^+$. Ezt röviden úgy fogalmazhatjuk, hogy az M_1 térben minden pontnak létezik megszámlálható monoton fogyó környezetbázisa.*

Bizonyítás. Mivel (X,τ) M_1 tér, ezért minden $x \in X$ pontnak létezik $\beta(x) := \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ megszámlálható környezetbázisa.

Legyen
$$V_n := \bigcap_{k=1}^{n} U_k\ , \ n \in \mathbb{N}.$$

A (V_n) halmazsorozat monoton fogyó, továbbá minden n-re $V_n \in \tau(x)$ (tudjuk, hogy $\tau(x)$ metszetzárt) és $V_n \subset U_n$. Tekintsük a (V_n) halmazsorozat tagjaiból álló $\beta^*(x) := \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ halmazrendszert, amelyre $\beta^*(x) \subset \tau(x)$. Ha U az x pont egy tetszőleges környezete, akkor van olyan $U_n \in \beta(x)$, amelyre $U_n \subset U$, hiszen $\beta(x)$ az x pont egy környezetbázisa. De akkor $V_n \subset U_n$ miatt $V_n \subset U$, azaz az x pont minden U környezete tartalmaz $\beta^*(x)$-beli halmazt, amiből az következik, hogy a $\beta^*(x)$ halmazrendszer az x pont környezetbázisa. Így a tételt igazoltuk. □

1.11. Példák

1. Példa. Példa olyan T_0 térre, amelyik nem T_1 tér.

Legyen $X := \mathbb{R}$ és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\beta(x) := \{(x-\varepsilon, \infty) : \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$.

A $\tau(x) := [\beta(x)]$, $x \in \mathbb{R}$ egyenlőséggel értelmezett $\tau : \mathbb{R} \to P(P(\mathbb{R}))$ függvény olyan topológia a valós számok halmazán, amely T_0 tér, hiszen bármelyik két valós számot kiválasztva az egyiknek biztosan létezik olyan környezete, amely nem tartalmazza a másik pontot. Például ha $x < y$, akkor $\varepsilon < |x-y|$ esetén y-nak van olyan $(y-\varepsilon, \infty)$ környezete, amelyben x nincs benne. Viszont x bármely környezete tartalmazza y-t, tehát az így definiált topológia nem T_1 tér.

2. Példa. Példa olyan T_1 térre, amelyik nem T_2 tér.

Legyen X egy végtelen halmaz, és lássuk el ko-véges topológiával. Ebben a topologikus térben egy $x \in X$ pont környezetszűrője

$$\tau(x) = \{U \subset X : x \in U \text{ és } U^c \text{ véges}\}.$$

A zárt halmazok a véges halmazok és X, így minden egyelemű halmaz zárt, tehát (X, τ) T_1 tér. Azonban X végtelen halmaz, ezért tetszőleges $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén bármely $U \in \tau(x)$ és $V \in \tau(y)$ mellett $U \cap V \neq \emptyset$, ezért (X, τ) nem T_2 tér.

3. Példa. Példa olyan M_1 térre, amelyik nem M_2 tér.

Tekintsük a már említett bal oldali konvergenciatopológiát a valós számok halmazán, melyben az $x \in \mathbb{R}$ pont nyílt környezetbázisa a $\beta(x) := \{(x-\varepsilon, x] : \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ halmazrendszer. Az x pont környezetszűrője

$$\tau(x) := [\beta(x)] = \{U \subset \mathbb{R} : \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ , amelyre } (x-\varepsilon, x] \subset U\}.$$

Az ilyen topológiával megadott $(\mathbb{R}, \tau)$ topologikus tér M_1 tér, de nem M_2 tér.

Indirekt módon, ha $\mathcal{B}$ bázis volna, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ és $(x-1, x] \in \tau(x)$ esetén létezne $B \in \mathcal{B}$, melyre $B \in \tau(x)$ és $(x-1, x] \supset B$. Ezekből az következik, hogy $x \in B$ és $\sup B \leq x$. Így létezik $\max B = x$. Tehát minden $x \in \mathbb{R}$ valós számhoz létezik olyan $B_x \in \mathcal{B}$, amelyre $\max B_x = x$. Ha $x_1 \neq x_2$, akkor $B_{x_1} \neq B_{x_2}$. Eképpen létezik $\mathbb{R} \to \mathcal{B}$ injekció, amiből azt kapjuk, hogy $|\mathcal{B}| \geq |\mathbb{R}|$. Tehát $\mathcal{B}$ nem megszámlálható.

2. fejezet

Folytonos függvények

Ebben a fejezetben a konvergens sorozatokkal és a folytonos függvényekkel foglalkozunk. A topologikus terek bevezetését főként az motiválta, hogy a függvények folytonosságát a lehető legáltalánosabb módon lehessen értelmezni.

2.1. Konvergens sorozat

2.1.1. Definíció. *Az (X,τ) topologikus tér pontjaiból álló (x_n) sorozatot konvergens sorozatnak nevezzük, ha létezik olyan $x \in X$ pont, hogy az x pont bármely $U \in \tau(x)$ környezetéhez van olyan $N \in \mathbb{N}^+$ index, amelyre minden $n \geq N$ esetén $x_n \in U$. Ekkor $(x_n) \longrightarrow x$, másképpen az x pont az (x_n) sorozat határértéke, azaz $x = \lim(x_n)$.*

A környezetbázis, ill. a konvergens sorozat definíciójából következik az alábbi két állítás.

2.1.2. Állítás. *Az (X,τ) topologikus térben $(x_n) \longrightarrow x$ pontosan akkor, ha az x pont egy tetszőleges $\beta(x)$ környezetbázisának minden $V \in \beta(x)$ eleméhez létezik olyan N index, hogy minden $n \geq N$ esetén $x_n \in V$.*

2.1.3. Állítás. *Az (X,τ) topologikus térben a konvergens sorozatok rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:*

1. *Ha (x_n) egy stacionárius sorozat, melynek egy indextől minden eleme x, akkor $(x_n) \longrightarrow x$.*

2. *Konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens.*

3. *Ha* $(x_n) \longrightarrow x$*, akkor az* (x_n) *sorozatból véges sok tag elhagyásával vagy bővítésével keletkező új sorozat is konvergens, és a határértéke* x.

4. *Ha* $(x_n) \longrightarrow x$ *és* $(y_n) \longrightarrow x$*, akkor az* (x_n) *és* (y_n) *sorozatok összefésüléséből kapott*

$$z_n := \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, \text{ ha } n \text{ páratlan} \\ \\ y_{\frac{n}{2}}, \text{ ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

sorozat is konvergens, és határértéke x.

Tetszőleges topologikus térben a konvergens sorozatok szerepe korántsem akkora, mint az euklideszi $\mathbb{R}$ térben. Hiszen a topologikus terekben egy konvergens sorozatnak több határértéke (akár végtelen sok) is lehet. Az antidiszkrét topologikus térben például minden (x_n) sorozat konvergens, és a tér bármely pontja határértéke a sorozatnak.

2.2. Adott pontban folytonos függvény

A továbbiakban legyenek (X, τ_1) és (Y, τ_2) topologikus terek, valamint legyen $f : X \to Y$ függvény. A most következő alfejezetben bevezetjük az f függvény folytonosságának fogalmát egy adott pontban, majd erre vonatkozó állításokat gyűjtünk össze.

2.2.1. Definíció. *Az* $f : X \to Y$ *függvény egy* $x_0 \in D(f)$ *pontban folytonos, ha az* $f(x_0) \in Y$ *pont bármely* V *környezetéhez létezik az* x_0 *pontnak olyan* U *környezete, hogy minden* $x \in U \cap D(f)$ *esetén* $f(x) \in V$ *teljesül.*

A környezetbázis értelmezése szerint a fenti definícióban elegendő, ha az x_0 és $f(x_0)$ pontok U és V környezetét a pontok egy-egy környezetbázisából választjuk.

2.2.2. Állítás. *Jelölje* $\beta_1(x_0)$*, ill.* $\beta_2(f(x_0))$ *az* $x_0 \in D(f)$*, ill. az* $f(x_0)$ *pontok egy tetszőleges környezetbázisát. Ekkor az* $f : X \to Y$ *függvény pontosan akkor folytonos az* x_0 *pontban, ha*

$$\forall V \in \beta_2(f(x_0)) \ \exists U \in \beta_1(x_0), \ \forall x \in U \cap D(f) \quad f(x) \in V.$$

Alkalmazzuk az állítást az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, ahol a valós számok halmazát mindkét esetben az euklideszi topológiával látjuk el. Az $x_0 \in D(f)$, ill. az $f(x_0) \in \mathbb{R}$ pont egy-egy környezetbázisa

$$\beta(x_0) := \{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \delta \in \mathbb{R}^+\}, \ \ \beta(f(x_0)) := \{(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) : \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}.$$

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor folytonos az $x_0 \in D(f)$ pontban, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in D(f)$, $|x - x_0| < \delta$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2.2.3. Állítás. *Az $f : X \to Y$ függvény egy $x_0 \in D(f)$ pontban pontosan akkor folytonos, ha az $f(x_0)$ képpont bármely V környezetének $f^{-1}(V)$ ősképe az x_0 pont környezete.*

Bizonyítás. Az állítás abból következik, hogy f pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha bármely $V \in \tau_2(f(x_0))$ környezethez létezik olyan $U \in \tau_1(x_0)$ környezet, melyre $U \subset f^{-1}(V)$. □

2.2.4. Állítás. *Az $f : X \to Y$ függvény egy $x_0 \in D(f)$ pontban pontosan akkor folytonos, ha az $f(x_0)$ képpont egy $\beta(f(x_0))$ környezetbázisa bármely V elemének $f^{-1}(V)$ ősképe az x_0 pont környezete, azaz f folytonos x_0-ban $\Leftrightarrow$ $\forall V \in \beta(f(x_0))$ $f^{-1}(V) \in \tau(x_0)$.*

2.2.5. Állítás. *Az $f : X \to Y$ függvény az értelmezési tartományának minden izolált pontjában folytonos.*

Bizonyítás. Ha $x_0 \in X$ izolált pontja a függvény értelmezési tartományának, akkor van olyan U környezete x_0-nak, amelyre $U \cap D(f) = \{x_0\}$. Ekkor f x_0-beli folytonosságának definíciójában ez a környezet megfelel. □

A továbbiakban szükségünk lesz a függvények határértékének értelmezésére.

2.2.6. Definíció. *Legyen $f : X \to Y$ függvény, és $x_0 \in D(f)'$ a függvény értelmezési tartományának egy torlódási pontja. Az f függvénynek az x_0 pontban határértéke $y_0 \in Y$, ha az y_0 pont bármely V környezetéhez létezik x_0-nak olyan U környezete, hogy minden $x \in U \cap D(f)$, $x \neq x_0$ mellett $f(x) \in V$. Jelölése:* $\lim_{x \to x_0} f = y_0$.

A topologikus terek közötti függvény adott pontbeli határértéke nem mindig egyértelmű. Ha például τ_2 az antidiszkrét topológia az Y halmazon, akkor tetszőleges $x_0 \in D(f)'$ pontban az $f : X \to Y$ függvény határértéke bármely $y_0 \in Y$.

2.2.7. Állítás. *Az $f : X \to Y$ függvény az értelmezési tartomány egy $x_0 \in D(f)'$ torlódási pontjában pontosan akkor folytonos, ha az f függvénynek az x_0 pontban létezik legalább egy határértéke, és az egyik határérték megegyezik f x_0-beli helyettesítési értékével, azaz $\lim_{x \to x_0} f = f(x_0)$.*

2.3. Adott pontban sorozatfolytonos függvény

Legyenek (X, τ) és (Y, ξ) tetszőleges topologikus terek, valamint legyen $f : X \to Y$ függvény.

2.3.1. Definíció. *Az $f : X \to Y$ függvényt az $x_0 \in D(f)$ pontban sorozatfolytonosnak hívjuk, ha bármely $(x_n) \subset D(f)$, $x_n \longrightarrow x_0$ esetén $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.*

2.3.2. Állítás. *Ha az $f : X \to Y$ függvény folytonos az $x_0 \in D(f)$ pontban, akkor az f függvény sorozatfolytonos is ebben a pontban.*

Bizonyítás. Ha az x_0 pont az értelmezési tartomány izolált pontja, akkor x_0-nak létezik olyan U környezete, melyre $U \cap D(f) = \{x_0\}$. Ha $(x_n) \subset D(f)$, $x_n \longrightarrow x_0$, akkor a konvergencia definícióját erre az U környezetre alkalmazva kapjuk, hogy (x_n) egy indextől kezdve az x_0 értékű konstanssorozat. Ebből az következik, hogy $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.

Ha x_0 az értelmezési tartomány torlódási pontja, és a függvény folytonos x_0-ban, akkor x_0-nak létezik határértéke $f(x_0)$-ban. Azt kell belátnunk, hogy bármely $(x_n) \subset D(f)$, $x_n \longrightarrow x_0$ esetén $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.

Legyen $V \in \xi(f(x_0))$. Az f függvény x_0-beli folytonossága szerint létezik olyan $U \in \tau(x_0)$ környezet, amelyre $f(U) \subset V$. Mivel $x_n \longrightarrow x_0$, létezik $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n \geq N$ esetén $x_n \in U$, sőt $x_n \in U \cap D(f)$, így minden $f(x_n)$ benne van $f(x_0)$ V környezetében. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.

□

2.4. Folytonos függvény

Legyenek (X, τ_1) és (Y, τ_2) tetszőleges topologikus terek, valamint legyen $f : X \to Y$ függvény.

2.4.1. Definíció. *Az $f : X \to Y$ függvény folytonos a $H \subset D(f)$ halmazon, ha f a H halmaz minden pontjában folytonos. Ha $D(f) = X$ és f az egész X alaphalmazon folytonos, akkor az f függvényt folytonosnak hívjuk.*

2.4.2. Tétel. *Az $f : X \to Y$ függvény pontosan akkor folytonos, ha minden Y-beli nyílt halmaz őséképe nyílt halmaz X-ben.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos, és legyen $G \subset Y$ egy tetszőleges nyílt halmaz. Megmutatjuk, hogy az $f^{-1}(G)$ halmaz nyílt X-ben. Legyen $x \in f^{-1}(G)$ egy tetszőleges pont. Ekkor $f(x) \in G$, és mivel G nyílt, ezért G az $f(x)$ pont egy környezete, de akkor ennek őseképe, $f^{-1}(G)$ az x pont egy környezete.

Megfordítva, legyen $f : X \to Y$ egy olyan függvény, hogy minden Y-beli nyílt halmaz ősképe nyílt az X halmazon. Azt igazoljuk, hogy ekkor f folytonos. Legyen $x_0 \in X$ egy tetszőleges pont és $\beta_2(f(x_0))$ az $f(x_0) \in Y$ képpont egy nyílt környezetbázisa. Ekkor bármely $V \in \beta_2(f(x_0))$ esetén $f^{-1}(V)$ nyílt és $x_0 \in f^{-1}(V)$, amiből az következik, hogy $f^{-1}(V) \in \tau_1(x_0)$, tehát az f függvény folytonos. □

2.4.3. Következmény. *Az $f : X \to Y$ függvény pontosan akkor folytonos, ha minden Y-beli zárt halmaz ősképe zárt halmaz X-ben.*

2.4.4. Példa. *Ha (X, τ) és (Y, ξ) topologikus terek és $y_0 \in Y$, akkor az $f : X \to Y$, $f(x) := y_0$, $D(f) := X$ konstansfüggvény folytonos.*

Bizonyítás. Minden Y-beli nyílt halmaz ősképe nyílt halmaz X-ben, hiszen bármely halmaz ősképe X vagy $\emptyset$. □

2.4.5. Példa. *Ha (X, τ) egy diszkrét topologikus tér, (Y, ξ) pedig egy tetszőleges topologikus tér, akkor minden $f : X \to Y$, $D(f) := X$ függvény folytonos.*

Bizonyítás. A diszkrét topologikus térben minden halmaz nyílt, így az Y-beli nyílt halmazok ősképe is nyílt. □

2.4.6. Példa. *Ha (X, τ) egy tetszőleges topologikus tér, (Y, ξ) pedig egy antidiszkrét topologikus tér, akkor minden $f : X \to Y$, $D(f) := X$ függvény folytonos.*

Bizonyítás. Az Y antidiszkrét térnek két nyílt halmaza van, Y és az üreshalmaz. Ezek ősképe X, ill. az üreshalmaz, melyek nyíltak X-ben. □

2.4.7. Tétel. *Ha $(X, \tau_1), (Y, \tau_2), (Z, \tau_3)$ tetszőleges topologikus terek, valamint $g : X \to Y$ és $f : Y \to Z$ folytonos függvények, akkor az $f \circ g : X \to Z$ kompozíciófüggvény is folytonos.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy bármely $H \subset Z$ halmaz esetén $(f \circ g)^{-1}(H) = g^{-1}(f^{-1}(H))$. Ha $H \subset Z$ egy tetszőleges nyílt halmaz, akkor az f folytonossága miatt $f^{-1}(H)$ nyílt halmaz Y-ban, és g folytonossága miatt $g^{-1}(f^{-1}(H))$ nyílt halmaz X-ben. A fenti egyenlőségből az következik, hogy bármely $H \subset Z$ nyílt halmazra az $(f \circ g)^{-1}(H)$ halmaz nyílt X-ben. □

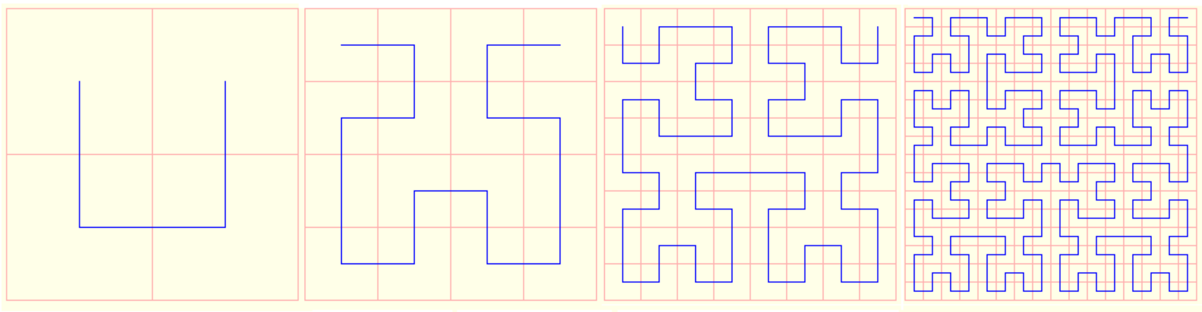
2.5. A Peano-görbe

Ennek a résznek a célja, hogy egy alapvető példát ismertessünk folytonos függvényre.

A Peano-görbe, másnéven síkkitöltő görbe folytonos leképezés zárt intervallumból négyzetre. Az ilyen megfeleltetések, amelyeket Peano 1890-ben mutatott be, fontos szerepet töltenek be a topológiában. A példánkban szereplő görbe konstrukcióját David Hilbert nevéhez köthetjük.

Legyen $I := [0,1]$ zárt intervallum és $Q := [0,1]\times[0,1]$ zárt egységnégyzet. Negyedeljük az I intervallumot, ekkor az $I_1^1, I_2^1, I_3^1, I_4^1$ négy kisebb zárt intervallumot kapjuk. Ezeket is felosztjuk további négy egyenlő részre, így kapjuk az $I_1^2, I_2^2, ..., I_{16}^2$ intervallumokat. Ezt tovább folytatva több egyre kisebb I_j^i zárt intervallumot kapunk, amelyekből minden $i \in \mathbb{N}^+$ esetén pontosan 4^i darab van, a hosszuk pedig 4^{-i}. Az intervallumokat balról jobbra számozzuk.

Ezek után vegyük Q 2×2-es típusú rácsszerű felosztását. Így Q-n belül $Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1, Q_4^1$ zárt és kisebb négyzeteket állítottunk elő. Ezen négyzetek további 2×2-es rácsszerű felosztása után már $Q_1^2, Q_2^2, ..., Q_{16}^2$ zárt négyzetek keletkeznek. Az eljárást folytatva rögzített $i \in \mathbb{N}^+$ esetén a Q_j^i $(1 \leq j \leq 4^i)$ zárt négyzetekkel rendelkezünk. Akkor még egy felosztást követően megkapjuk a kisebb, ugyancsak zárt Q_j^{i+1} négyzeteket, amelyeknek oldalhossza rendre 2^{-i-1}. Az ábrán egy lehetséges számozássorozat látható $4, 4^2, 4^3, 4^4$ lépéssel, a vonal mentén haladva számozzuk a négyzeteket.



2.1. ábra.

Fontos megjegyezni, hogy az i növelésével előállított zárt négyzeteket hogyan számozzuk. Az első lépés megtétele után csupán annyi a feltétel, hogy Q_m^1 és Q_{m+1}^1 szomszédosak legyenek minden $1 \leq m \leq 3$ indexre. A második lépésnél sorrendben az első négy négyzet Q_1^1-ben, a következő négy Q_2^1-ben stb. fekszik, úgy, hogy a szomszédos indexű

$Q^2_m, 1 \leq m \leq 15$ négyzetek továbbra is szomszédosak. Hasonlóan, az $i+1$. lépésben az első négy négyzet Q^i_1-ben, a sorrendben következő négy Q^i_2-ben, ..., az utolsó négy pedig a $Q^i_{4^i}$ négyzetben legyen.

2.5.1. Állítás. *Adott $x \in [0,1]$ esetén (j_i) legyen olyan sorozat, melyre $x \in I^i_{j_i}$, $i \in \mathbb{N}^+$. Ekkor a $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Q^i_{j_i}$ halmaz egyelemű.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $x \in I$ pont az I intervallum egy végpontja, vagy egy olyan pont, melyre $x \neq \frac{k}{2^n}$, $k, n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor minden i pozitív egészhez pontosan egy olyan j_i index van, hogy $x \in I^i_{j_i}$, hiszen feltettük, hogy x nem lehet a belső intervallumok végpontja. Mivel az intervallumok egymásba skatulyázottak, ezért a fenti konstrukció alapján a $Q^i_{j_i}$ négyzetek is egymásba vannak skatulyázva. Vetítsük ezen négyzeteket Q egyik vízszintes oldalára. Így egymásba skatulyázott zárt intervallumokat hoztunk létre. Tudjuk, hogy ezeknek van közös pontja. A vetített négyzetek oldalhossza között tetszőleges pozitív számnál kisebb is van, ezért a kapott szakaszok hossza is akármilyen kicsi lehet. A szakaszok metszete a Cantor-féle közösponttétel szerint egyelemű. Ugyanígy a függőleges vetítéssel kapott szakaszok metszete is egyelemű. Ebből következik, hogy a négyzetek metszete is egyelemű.

Ha $x \in I$ olyan pont, amely k lépést követően már osztópont lesz, akkor $i \geq k$ esetén az x pont pontosan két intervallumban fekszik, méghozzá a szomszédos $I^i_{j_i}$ és $I^i_{j_i+1}$ intervallum határán. Ekkor a $Q^i_{j_i}$ négyzetek egymásba skatulyázottak, ahogy a $Q^i_{j_i+1}$ négyzetek is. A $Q^i_{j_i}$ és a $Q^i_{j_i+1}$ négyzetek a feltétel szerint szomszédosak. Így $Q^i_{j_i}$ és $Q^i_{j_i+1}$ négyzetek rendelkeznek közös oldallal, ráadásul ezek a közös oldalak egymásba skatulyázott zárt szakaszok, ezért van közös pontjuk. Mivel a szakaszok hossza tetszőlegesen kicsi lehet, ezért a metszet is egyelemű.

□

2.5.2. Definíció. *Legyen $f : I \to Q$ az a görbe, amelyre minden $x \in I$ pont esetén $f(x)$ az x pontot tartalmazó intervallumoknak megfelelő négyzetek közös pontja, azaz ha $x = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} I^i_{j_i}$, akkor $f(x) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Q^i_{j_i}$.*

2.5.3. Állítás. *A most értelmezett f folytonos leképezés az I zárt intervallum és a Q zárt négyzet között, tehát f Peano-görbe.*

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in I$ nem osztópont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik $k \in \mathbb{N}^+$, hogy $\sqrt{2} \cdot 2^{-k} < \varepsilon$. Tudjuk, hogy van olyan $1 \leq j_k \leq 2^{k-1}$ egész, melyre $x_0 \in \mathrm{int} I^k_{j_k}$. A fenti f leképezés definíciója miatt $f(I^k_{j_k}) \subset Q^k_{j_k}$, így

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2^{-k} \cdot \sqrt{2} < \varepsilon, \qquad x \in I^k_{j_k}.$$

Hasonlóan látjuk be f folytonosságát az $x_0 \in I$ osztópontban. Adott $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik $k \in \mathbb{N}^+$, hogy $\sqrt{2} \cdot 2^{-k} < \varepsilon$. Vegyük az x_0-t tartalmazó $I^k_{j_k}$ és $I^k_{j_k+1}$ intervallumot, melyeknek x_0 pontosan a határán van. Ekkor $f(I^k_{j_k}) \subseteq Q^k_{j_k}$ és $f(I^k_{j_k+1}) \subseteq Q^k_{j_k+1}$, így

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2^{-k} \cdot \sqrt{2} < \varepsilon, \qquad x \in I^k_{j_k},$$
$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2^{-k} \cdot \sqrt{2} < \varepsilon, \qquad x \in I^k_{j_k+1}.$$

$I^k_{j_k} \cup I^k_{j_k+1}$ környezete x_0-nak, és minden $x \in I^k_{j_k} \cup I^k_{j_k+1}$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ezért f folytonos x_0-ban.

□

2.6. Homeomorfizmus

A következőkben legyen (X, τ) és (Y, ξ) tetszőleges topologikus tér.

2.6.1. Definíció. *Az $f : X \to Y$ függvényt nyílt leképezésnek nevezzük, ha minden X-beli nyílt halmaz f-képe nyílt halmaz az Y térben.*

Az $f : X \to Y$ függvényt zárt leképezésnek nevezzük, ha bármely X-beli zárt halmaz f-képe zárt halmaz az Y térben.

2.6.2. Lemma. *Ha az $f : X \to Y$ függvény bijekció az (X, τ) és (Y, ξ) topologikus terek között, akkor f pontosan abban az esetben nyílt leképezés, ha zárt leképezés.*

Bizonyítás. Legyen f egy nyílt leképezés. Mivel f bijekció X és Y között, azért bármely $A \subset X$ esetén $f(A^c) = (f(A))^c$.

Ha $A \subset X$ egy tetszőleges zárt halmaz, akkor A^c nyílt, és mivel az f nyílt leképezés, ezért az $f(A^c)$ halmaz is nyílt. Ekkor az azonosság miatt az $(f(A))^c$ halmaz nyílt Y-ban, ebből pedig az következik, hogy $f(A)$ zárt halmaz, tehát f zárt leképezés.

Megfordítva, f legyen egy zárt leképezés. Ha $A \subset X$ egy tetszőleges nyílt halmaz, akkor A^c zárt, és mivel az f zárt leképezés, ezért az $f(A^c)$ halmaz is zárt. Ekkor az azonosság miatt $(f(A))^c$ halmaz zárt Y-ban, ebből pedig az következik, hogy $f(A)$ nyílt halmaz, tehát f nyílt leképezés.

□

2.6.3. Tétel. *Ha az $f : X \to Y$ függvény bijekció az (X, τ) és (Y, ξ) topologikus terek között, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. *f folytonos,*
2. *f^{-1} nyílt leképezés,*
3. *f^{-1} zárt leképezés.*

Bizonyítás. Mivel f bijekció az X és Y halmaz között, azért minden Y-beli halmaz ősképe megegyezik az f^{-1} képével, amiből már következik, hogy 1. és 2. állítások ekvivalensek. A 2. és 3. állítás ekvivalenciája pedig az előző lemmából következik.

□

2.6.4. Tétel. *Ha az $f : X \to Y$ függvény bijekció az (X, τ) és (Y, ξ) topologikus terek között, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. *f^{-1} folytonos,*
2. *f nyílt leképezés,*
3. *f zárt leképezés.*

Bizonyítás. Az f függvény bijekció X és Y között, ezért f^{-1} bijekció Y és X között. A tétel az előző bizonyításból következik, ha azt f helyett f^{-1}-re alkalmazzuk, hiszen $(f^{-1})^{-1} = f$. □

2.6.5. Definíció. *Az $f : X \to Y$ függvényt az X és Y terek közötti homeomorfizmusnak nevezzük, ha f bijekció X és Y között, valamint az f és f^{-1} függvények folytonosak.*

2.6.6. Definíció. *Az (X, τ) és (Y, ξ) topologikus terek egymással homeomorfak, ha létezik a két tér között $f : X \to Y$ homeomorfizmus.*

Az egymással homeomorf terek ugyanolyan topológiai tulajdonságokkal rendelkeznek, így ezeket topológiailag azonosnak tekintjük. A homeomorfizmus szoros kapcsolatban áll a nyílt, illetve zárt leképezésekkel, amint a fenti két tétel alábbi következménye mutatja.

2.6.7. Tétel. *Ha az $f : X \to Y$ függvény bijekció az (X, τ) és (Y, ξ) topologikus terek között, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. *f homeomorfizmus az X és Y terek között,*

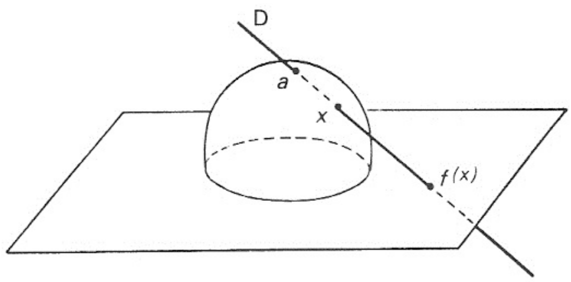
2. *f és f^{-1} nyílt leképezések,*

3. *f és f^{-1} zárt leképezések.*

2.6.8. Állítás. *Ha X, Y, Z topologikus terek, és $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$ homeomorfizmus, akkor az $f \circ g : X \to Z$ kompozíciófüggvény is homeomorfizmus.*

2.7. Példa homeomorfizmusra

Adott egy n dimenziós gömbfelület, rajta egy a pont, valamint egy hipersík, amely párhuzamos a gömbfelület a-beli érintőhipersíkjával. Egy a gömbfelületről a hipersíkra képező függvényt adunk meg a következőképpen. A gömbfelület a-tól különböző x pontjainak képét az a és az x pontokra illeszkedő D egyenes döfi ki a hipersíkból. Az a pontban nem értelmezzük a függvényt. Megmutatjuk, hogy ez a leképezés homeomorfizmus a gömbfelület a-tól különböző pontjai és a hipersík pontjai között. Az ilyen kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést *sztereografikus projekció*nak nevezzük.



2.2. ábra.

Legyen S_n az $\mathbb{R}^{n+1}$ tér egységgömbjének felülete, azaz

$$S_n := \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Továbbá legyen $a := (0, 0, ..., 0, 1) \in S_n$, valamint

$$R_0^{n+1} := \{(x_1, x_2, ..., x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Jelölje $x \in S_n \setminus \{a\}$ esetén $f(x)$ az x-hez a sztereografikus projekcióval rendelt R_0^{n+1}-beli pontot.

Tudjuk, hogy

$$x - a = (x_1, x_2, ..., x_{n+1} - 1) \quad \text{és} \quad f(x) = a + \lambda(x - a),$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ alkalmas szám. A képpontok akkor lesznek $\mathbb{R}_0^{n+1}$-beliek, ha $1 + \lambda(x_{n+1} - 1) = 0$. Ez akkor lesz igaz, ha $\lambda = \frac{1}{1-x_{n+1}}$. Mivel $x \neq a$, ezért $x_{n+1} \neq 1$. Így megkapjuk a D egyenes és az $\mathbb{R}_0^{n+1}$ hipersík $f(x)$ metszéspontjának koordinátáit:

$$y_1 = \frac{x_1}{1-x_{n+1}},\ y_2 = \frac{x_2}{1-x_{n+1}},\ ...,\ y_n = \frac{x_n}{1-x_{n+1}},\ y_{n+1} = 0. \qquad (1)$$

Mivel az $f : S_n \setminus \{a\} \to \mathbb{R}_0^{n+1}$ leképezés minden koordinátafüggvénye folytonos, ha $\mathbb{R}_0^{n+1}$-t az euklideszi topológiával látjuk el, ezért f is folytonos. Emellett f bijekció, mert ha $y = (y_1, y_2, ..., y_n, 0) \in \mathbb{R}_0^{n+1}$, akkor az alábbiak szerint pontosan egy olyan $x = (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in S_n \setminus \{a\}$ pont létezik, amelyre $f(x) = y$.

Az f folytonos leképezés (1) koordinátáira az alábbi feltételek teljesülnek:

$$\begin{gathered} x_i = y_i(1 - x_{n+1}), \quad 1 \leq i \leq n, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 (1 - x_{n+1})^2 + (x_{n+1})^2 = 1, \end{gathered}$$

és ha osztunk az $1 - x_{n+1}$ nullától különböző elemmel, akkor

$$(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2)(1 - x_{n+1}) - 1 - x_{n+1} = 0.$$

Ekkor

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{y_1^2+y_2^2+...+y_n^2-1}{y_1^2+y_2^2+...+y_n^2+1}, \\ \\ x_i = \frac{2y_i}{y_1^2+y_2^2+...+y_n^2+1} \qquad (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

Tehát

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{2y_1}{y_1^2+y_2^2+...+y_n^2+1}, \frac{2y_2}{y_1^2+y_2^2+...+y_n^2+1}, ..., \frac{y_1^2+y_2^2+...+y_n^2-1}{y_1^2+y_2^2+...+y_n^2+1}\right),\ y \in \mathbb{R}_0^{n+1}.$$

Az f leképezés inverzének is minden koordinátafüggvénye folytonos, ezért f^{-1} folytonos.

A fentiekből következik, hogy $f : S_n \setminus \{a\} \to \mathbb{R}_0^{n+1}$ homeomorfizmus. Ezenkívül tudjuk, hogy $\mathbb{R}_0^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $(y_1, ..., y_n, 0) \to (y_1, ..., y_n)$ homeomorfizmus, ami pontosan azt eredményezi, hogy a sztereografikus projekció segítségével $S_n \setminus \{a\}$ és $\mathbb{R}^n$ között megadható homeomorfizmus.

3. fejezet

A Brouwer-féle fixponttétel

3.1. Motiváció

Számos fixponttételt fogalmaztak meg a matematikai különböző területein. Ezek közül az egyik legismertebb a következő.

3.1.1. Tétel. ***(Brouwer)*** *Ha az f folytonos leképezés az n dimenziós korlátos, zárt és konvex G halmazt önmagába képezi le, akkor létezik legalább egy fixpontja.*

Az, hogy n dimenziós korlátos, zárt és konvex tartományokat önmagukba leképező folytonos leképezésnek létezik fixpontja, a közgazdaságtanban is fontos szerepet játszik. A tétel további alkalmazási lehetőségeit Neumann János látta meg a játékelmélet területén. A fixpont létezése az általános egyensúlyelmélet alapja, az egyensúly létezésére meghatározott alapvető tételek bizonyítása is többek között a Brouwer-tételen alapul.

A legalapvetőbb ezek közül Neumann tétele (1928), amelyet szokás minimax-elvnek is nevezni. Ez az elv egy olyan döntési szabályt határoz meg, ami szerint azt a lehetőséget kell választani, ami minimalizálja a maximális veszteséget. Ez felfogható a minimális nyereség maximalizálásaként is.

Az elmúlt évtizedekben a Brouwer-féle fixponttételre számos bizonyítás született, felhasználva az algebrai topológiában és a fokszámelméletben foglaltakat. Célunk az, hogy nem közismert módon lássuk be a tételt kétdimenzióban. Az ehhez szükséges segédtételekkel alábbi két alfejezetben ismerkedünk meg.

3.2. Halmazok távolsága

3.2.1. Definíció. *Az (M_1, d_1), és az (M_2, d_2) metrikus terek szorzata az $(M_1 \times M_2, d)$ metrikus tér, ahol $d((x, y), (s, t)) := \max\{d_1(x, s), d_2(y, t)\}$, $(x, y), (s, t) \in M_1 \times M_2$.*

3.2.2. Állítás. *Ha (M, d) egy metrikus tér, akkor a $d : M \times M \to \mathbb{R}$ távolságfüggvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $x_0, y_0, x, y \in M$, ekkor

$$|d(x, y) - d(x_0, y_0| = |d(x, y) - d(x, y_0) + d(x, y_0) - d(x_0, y_0)| \leq$$
$$\leq |d(x, y) - d(x, y_0)| + |d(x, y_0) - d(x_0, y_0)|.$$

Tudjuk, hogy $d(x, y) \leq d(x, y_0) + d(y_0, y)$ és $d(x, y_0) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y_0)$, ezért

$$|d(x, y) - d(x, y_0)| + |d(x, y_0) - d(x_0, y_0)| \leq d(y, y_0) + d(x, x_0) \leq 2d_{M\times M}((x, y), (x_0, y_0)).$$

Eképpen látható, hogy d Lipschitz-tulajdonságú, tehát folytonos.

□

3.2.3. Definíció. *Az (M, d) metrikus tér F és G halmazának távolsága legyen*

$$d(F, G) := \inf\{d(x, y) : x \in F, y \in G\}.$$

3.2.4. Állítás. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és lássuk el az $\mathbb{R}^n$ halmazt az euklideszi topológiával. Ha $F, G \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges nemüres, korlátos és zárt halmazok, akkor ezek távolsága felvétetik, tehát létezik olyan $x \in F$ és $y \in G$, amelyre $d(F, G) = d(x, y)$.*

Bizonyítás. Az infimum definíciójából következik, hogy van olyan $(x_n) \subset F$ és $(y_n) \subset G$, amelyre $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(F, G)$.

Mivel az F és a G nemüres halmaz a feltétel szerint korlátos és zárt, azért létezik olyan (x_{n_k}) konvergens részsorozat, amelyre $(x_{n_k}) \longrightarrow x_0 \in F$, és létezik olyan $(y_{n_{k_l}})$ konvergens részsorozat, amelyre $(y_{n_{k_l}}) \longrightarrow y_0 \in G$. Ekkor $d(F, G) = d(x_0, y_0)$. Ugyanis, ha $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(F, G)$, abból következik, hogy $d(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) \longrightarrow d(F, G)$. Mivel d folytonos, ezért az átviteli elv miatt $d(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) \longrightarrow d(x_0, y_0)$, végül a határérték egyértelműsége bizonyítja az állítást.

□

3.3. Sakk-lemma

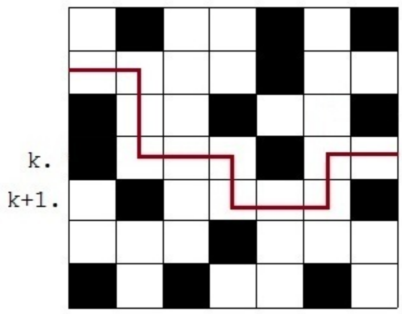
3.3.1. Definíció. *Legyen Q egy tetszőleges zárt négyzet. Vegyük Q egy $n \times n \quad (n \in \mathbb{N}^+)$ típusú rácsszerű felosztását. Zárt rácsnégyzetek egy olyan sorozatát, melyben a szomszédos zárt rácsnégyzetek éllel csatlakoznak egymáshoz, bástyaútnak nevezzük.*

Zárt rácsnégyzetek egy olyan sorozatát, melyben a szomszédos zárt rácsnégyzetek csatlakoznak egymáshoz, vezérútnak nevezzük.

3.3.2. Lemma. *(**Sakk-lemma**) Legyen Q egy tetszőleges zárt négyzet. Vegyük Q egy $n \times n \quad (n \in \mathbb{N}^+)$ típusú rácsszerű felosztását. Tetszőleges sok zárt négyzetet színezünk feketére, a többit fehéren hagyjuk. Ekkor létezik bástyaút az első oszlopból az n. oszlopba fehér négyzeteken, vagy vezérút az első sorból az n. sorba feketére színezett négyzeteken.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nem létezik fehér négyzetekből álló bástyaút az első oszloptól az utolsóig. Így a legfelső sorban van feketére színezett négyzet, különben az első sor rácsnégyzetei a feltevéssel ellentétben vízszintes bástyautat alkotnának.

Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy létezik az első sorból induló k. sorig leérő fekete vezérút. $k = 1$-re az előzőek szerint létezik. Tegyük fel, hogy k esetén van ilyen. Ekkor indirekt módon tegyük fel, hogy $k + 1$-re már nem igaz a feltevés.



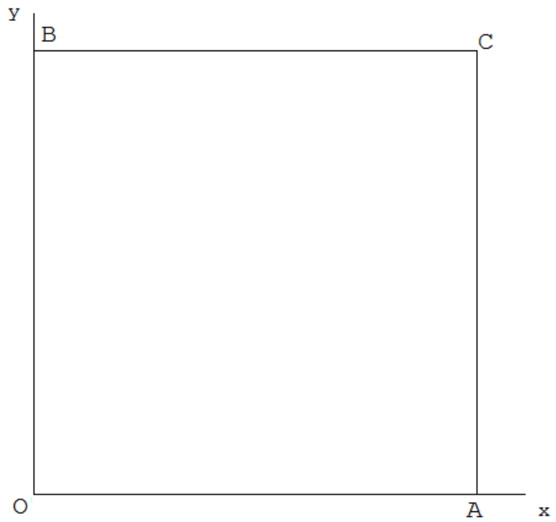
3.1. ábra.

Jelölje H az első sorbeli fekete négyzetből fekete négyzetek alkotta vezérúton elérhető zárt fekete négyzetek unióját, K pedig a többi zárt fekete négyzet unióját. E két halmaz a definíciója miatt még csúcsban sem érintkezhet egymással. Ebből az következik, hogy $d(H, K) \geq 1$. Így közöttük halad bástyaút az 1. oszlopból az n. oszlopig fehér rácsnégyzeteken, hiszen a fekete négyzeteket mindig el tudjuk kerülni. Ezzel ellentmondásra jutottunk. $\square$

3.4. Brouwer tétele

3.4.1. Tétel. *Legyen* $Q := [0,1]\times[0,1]$ *a zárt egységnégyzet. Bármely* $\varphi : Q \to Q$ *folytonos leképezésnek van legalább egy fixpontja.*

Bizonyítás. Az ábrán a $Q := [0,1] \times [0,1]$ négyzet látható, a csúcsai O, A, C, B.



3.2. ábra.

Legyen $\varphi : Q \to Q$ egy tetszőleges folytonos függvény. Azt kell belátnunk, hogy van olyan $z = (x, y) \in Q$, amelyre $\varphi(z) = z$.

Legyenek f és $g : Q \to \mathbb{R}$ függvények a φ függvény koordinátafüggvényei. Tehát f és g folytonos, valamint minden $(x, y) \in Q$ esetén $\varphi(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$.

A Brouwer-tétel így ekvivalens azzal, hogy létezik olyan $(a, b) \in Q$ pont, amelyre $f(a, b) = a$ és $g(a, b) = b$.

Vezessünk be további két függvényt:

$$\mathcal{F}(x, y) := f(x, y) - x \quad \text{és} \quad \mathcal{G}(x, y) := g(x, y) - y, \quad D(\mathcal{F}) := D(\mathcal{G}) := Q.$$

Tudjuk, hogy $|\mathcal{F}| \leq 1$ és $|\mathcal{G}| \leq 1$. A fenti $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ függvények ismeretében a tétel ekvivalens azzal, hogy a $\Phi : Q \to \mathbb{R}^2$, $\Phi := (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ függvénynek létezik zérushelye Q-ban.

Tekintsük az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ függvények alábbi leszűkítéseit:

$\mathcal{F}|_{\overline{OB}} \geq 0$ és $\mathcal{F}|_{\overline{AC}} \leq 0$, azaz $\mathcal{F}(0, y) \geq 0$ és $\mathcal{F}(1, y) \leq 0 \;\; \forall y \in [0, 1]$ esetén.

$\mathcal{G}|_{\overline{OA}} \geq 0$ és $\mathcal{G}|_{\overline{BC}} \leq 0$, azaz $\mathcal{G}(x, 0) \geq 0$ és $\mathcal{G}(x, 1) \leq 0 \;\; \forall x \in [0, 1]$ esetén.

Jelölje F az $\mathcal{F}$ függvény, G a $\mathcal{G}$ függvény zérushelyeinek halmazát, azaz

$$F := \{(x, y) \in Q : \ \mathcal{F}(x, y) = 0\} \quad \text{és} \quad G := \{(x, y) \in Q : \ \mathcal{G}(x, y) = 0\}.$$

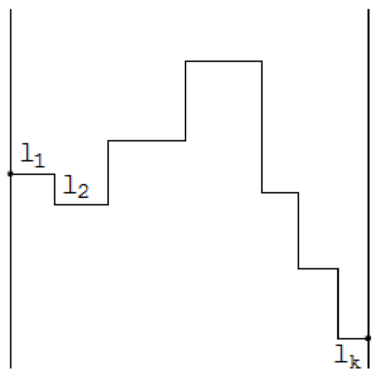
F és G nemüres halmazok, ugyanis az $\mathcal{F}_{\overline{OA}}$ és $\mathcal{G}_{\overline{OB}}$ folytonos függvények nempozitív és nemnegatív értéket egyaránt felvesznek, ezért a Bolzano-tétel miatt van zérushelyük. A Brouwer-tételt igazoltuk, ha megmutatjuk, hogy $F \cap G \neq \emptyset$.

Legyen $d := d(F, G)$. Mivel F és G korlátos és zárt halmazok, azért létezik $z_1 := (x_1, y_1) \in F$ és $z_2 := (x_2, y_2) \in G$, hogy $d = d(z_1, z_2)$. A fixponttétel igazolásához a továbbiakban azt kell belátnunk, hogy $d = 0$.

Ezt indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $d > 0$, és válasszuk az $n \in \mathbb{N}$ számot olyan nagyra, hogy $n > \frac{2\sqrt{2}}{d}$ legyen. Tekintsük Q $n \times n$ típusú rácsszerű felosztását. Színezzük ki a felosztás azon zárt négyzeteit pirossal, amelyek F-beli pontot tartalmaznak. A többi négyzetet fehéren hagyjuk.

Megmutatjuk, hogy az $\overline{OB}$-re támaszkodó első oszlopból bástyaúton nem juthatunk el fehéren hagyott négyzeteken az $\overline{AC}$-re támaszkodó n. oszlopba. Ugyanis, indirekt módon tegyük fel, hogy mégis eljuthatunk. Ha szakaszokkal összekötjük e fehér bástyaút éllel érintkező szomszédos négyzeteinek középpontjait, akkor egy összefüggő gráfot kapunk, amelyből kiválaszthatunk egy minimális, összefüggő gráfot, amelynek csak egy-egy négyzetközéppontja van az 1. és n. oszlopban. Az így kiválasztott gráf élei egy töröttvonalat alkotnak. A gráf két végpontjába vezető élt hosszabbítsuk meg az $\overline{OB}$, ill. $\overline{AC}$ szakaszokig. Jelölje ezt a meghosszabbított töröttvonalat L.

Az ábrán egy ilyen töröttvonal látható:



3.3. ábra.

A kapott töröttvonal egyes szakaszainak hossza legyen sorrendben $l_1, l_2, ..., l_k$. Ekkor a töröttvonalak kiegyenesítésével kapott $\psi : L \to [0, \sum_{i=1}^{k} l_i]$ függvény homeomorfizmus. Tekintsük az $\mathcal{F} \circ \psi^{-1} : [0, \sum_{i=1}^{k} l_i] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt. Tudjuk, hogy

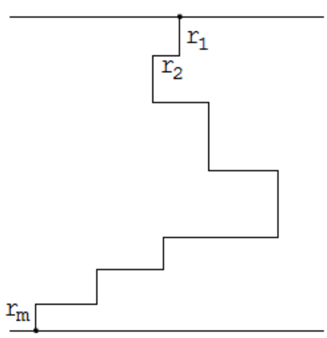
$$(\mathcal{F} \circ \psi^{-1})(0) \geq 0 \quad \text{és} \quad (\mathcal{F} \circ \psi^{-1})(\textstyle\sum_{i=1}^{k} l_i) \leq 0.$$

Ekkor az $\mathcal{F} \circ \psi^{-1}$ függvényre alkalmazható Bolzano tétele, ezért a függvénynek van legalább egy zérushelye, ami az adott színezésnél piros négyzetet jelentene, vagyis ellentmondást.

Akkor a Sakk-lemmából az következik, hogy a szóbanforgó színezésnél a $\overline{BC}$ oldalra támaszkodó első sorból eljuthatunk vezérúton az $\overline{OA}$-ra támaszkodó n. sorba piros négyzeteken. Összekötjük a pirosra színezett szomszédos négyzetek középpontjait, és a kapott összefüggő gráfból kiválasztunk egy olyan minimális, összefüggő gráfot, amelynek csak egy-egy négyzetközéppontja van az 1. és az n. sorban. Az ezen pontokba vezető törtvonalat meghosszabbítva érjük el a $\overline{BC}$ és az $\overline{OA}$ szakaszokat.

Hasonlóan az előző meggondoláshoz, ismét tekintsük Q $n \times n$ típusú rácsszerű felosztását. Színezzük ki zölddel a felosztás azon zárt négyzeteit, amelyekben van G-beli pont, a többit hagyjuk fehéren.

Megmutatjuk, hogy a $\overline{BC}$-re támaszkodó első sorból bástyaúton nem juthatunk el az $\overline{OA}$-ra támaszkodó n. sorba fehér négyzeteken. Ugyanis, indirekt módon tegyük fel az ellenkezőjét. Ha szakaszokkal összekötjük e fehér bástyaút éllel érintkező szomszédos négyzeteinek középpontjait, akkor egy összefüggő gráfot kapunk, amelyből kiválaszthatunk egy minimális, összefüggő gráfot, amelynek csak egy-egy négyzetközéppontja van az 1. és n. sorban. Az így kiválasztott gráf élei egy töröttvonalat alkotnak. A gráf két végpontjába vezető élt hosszabbítsuk meg a $\overline{BC}$, ill. $\overline{OA}$ szakaszokig. Jelölje ezt a meghosszabbított töröttvonalat R. Az ábrán egy ilyen töröttvonal látható:



3.4. ábra.

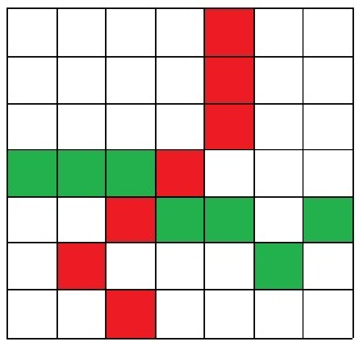
A kapott töröttvonal egyes szakaszainak hossza legyen sorrendben $r_1, r_2, ..., r_m$. Ekkor a töröttvonalak kiegyenesítésével kapott $\xi : R \to [0, \sum_{i=1}^{m} r_i]$ függvény homeomorfizmus. Tekintsük a $\mathcal{G} \circ \xi^{-1} : [0, \sum_{i=1}^{m} r_i] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt. Tudjuk, hogy

$$(\mathcal{G} \circ \xi^{-1})(\textstyle\sum_{i=1}^{m} r_i) \geq 0 \quad \text{és} \quad (\mathcal{G} \circ \xi^{-1})(0) \leq 0.$$

Ekkor a $\mathcal{G} \circ \xi^{-1}$ függvényre alkalmazható Bolzano tétele, ezért a kompozíciófüggvénynek van legalább egy zérushelye, ami azt jelenti, hogy a kiválasztott bástyaúton zöld négyzetre is léptünk, tehát ellentmondásra jutottunk.

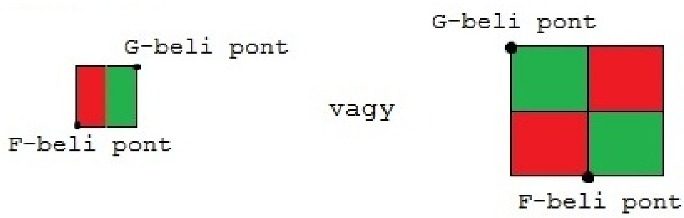
Akkor a Sakk-lemmából az következik, hogy ezen színezésnél a $\overline{OB}$-re támaszkodó első oszlopból eljuthatunk vezérúton az $\overline{AC}$-re támaszkodó n. oszlopba zöld színű négyzeteken. Összekötjük a szomszédos zöld négyzetek középpontjait, ekkor összefüggő gráfot kapunk, amiből kiválasztunk egy minimális, összefüggő gráfot, amelynek csak egy-egy pontja van az 1. és az n. oszlopban. Az ezen pontokba vezető törtvonalat meghosszabbítva érjük el az $\overline{OB}$ és az $\overline{AC}$ szakaszokat.

A 3.5. ábrán a piros és a zöld színű vezérútvonal egy részlete látható.



3.5. ábra.

Tudjuk, hogy létezik olyan négyzet, amit zöldre és pirosra is színeztünk, vagy létezik olyan 2×2-es négyzet, amelyben mindkét szín előfordul.



3.6. ábra.

A pirosra színezett négyzetekben van F-beli pont, a zöld négyzetekben van G-beli pont. F és G távolságát így a következőképpen tudjuk felülről becsülni: $d(F,G) < 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{n}$. Ebből azt kapjuk, hogy $n < \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{d}$, ami ellentmondás. Tehát $d = 0$, a tételt beláttuk.

□

3.4.2. Tétel. *Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ egy zárt négyzettel homeomorf tartomány. Ekkor bármely $f : T \to T$ folytonos leképezésnek van legalább egy fixpontja.*

Bizonyítás. Adott egy tetszőleges $f : T \to T$ folytonos függvény és a $t : T \to Q$ homeomorfizmus. Ekkor a $h := t \circ f \circ t^{-1}$ függvény folytonos Q-n, $R(h) \subset Q$, ezért alkalmazhatjuk a zárt egységnégyzeten igazolt fixponttételt. □

3.4.3. Következmény. *Ha $T \subset \mathbb{R}^2$ konvex, korlátos és zárt halmaz, és e halmaz belseje nem üres, akkor bármely $f : T \to T$ folytonos leképezésnek van legalább egy fixpontja.*

3.5. A fixponttétel egy alkalmazása

3.5.1. Tétel. ***(Perron)*** *Jelöljön A egy olyan $n \times n$-es mátrixot, amelynek minden a_{ij} eleme pozitív. Ekkor A-nak van legalább egy pozitív sajátértéke, amelyhez megadható csak nemnegatív elemekből álló sajátvektor.*

Bizonyítás. Legyen

$$G := \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, ..., n \text{ és } \textstyle\sum_{i=1}^n x_i = 1\}.$$

G konvex, korlátos és zárt halmaza $\mathbb{R}^n$-nek.

Ezenkívül legyen $f : G \to G$ az a függvény, amelyre $f(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1}$, $x \in G$.

Ekkor f folytonos függvény, mivel minden norma folytonos és a $G \to G$, $x \mapsto Ax$ függvény is folytonos leképezés. Ezért a Brouwer-tétel szerint f-nek létezik legalább egy fixpontja G-ben, jelölje ezt $w \in G$. Tehát w-re $\frac{Aw}{\|Aw\|_1} = w$, azaz $Aw = \|Aw\|_1 w$. Ekkor $\lambda := \|Aw\|_1$ sajátértéke az A mátrixnak a w sajátvektorral.

□

Köszönetnyilvánítás

Hálásan köszönöm témavezetőmnek, Pfeil Tamásnak, hogy odaadó, precíz munkájával, hasznos tanácsaival és ötleteivel hozzájárult a szakdolgozatom elkészítéséhez. Köszönettel tartozom Czách László tanár úrnak a sok segítségért és a rám fordított időért, figyelemért. Végül szeretném még megköszönni a támogatást, amelyet a családomtól és a szeretteimtől kaptam.

Irodalomjegyzék

[1] Czách László, *Topológia (kézirat)*, 1988.

[2] Jacques Dixmier, *General Topology*, Springer-Verlag, 1984.

[3] Ryszard Engelking, *General Topology*, Heldermann-Verlag, 1989.

[4] Robert B. Reisel, *Elementary Theory of Metric Spaces*, Springer-Verlag, 1982.

[5] Besenyei Ádám, *A Peano-görbe*, KöMaL, 2003/4, 196-202.

[6] Gelbaum-Olmsted, *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day, Inc., 1964.

[7] Simonovits András, *Mikroökonómiai vázlat*, `http://www.math.bme.hu/diffe/mikro.pdf`

[8] Internetes forrás, Győri István, Hartung Ferenc, Fixpont tételek, `http://math.uni-pannon.hu/ hartung/okt/ma6116a/jegyzet7.pdf`