Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Laplace-transzformáció és alkalmazásai

Szakdolgozat

Kiss Eszter

MATEMATIKA Bsc

Témavezető

Bátkai András, egyetemi docens

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest

2011

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozat a Laplace-transzformációval és annak alkalmazásával foglalkozik. Pierre-Simon de Laplace, francia matematikus (1749-1827) nevéhez kapcsolódik ez a módszer. A transzformációval algebrailag egyszerűbb kifejezéseket kapunk. Így például függvények konvolúciójából függvények szorzatát, a deriválásból számmal való szorzást képezhetünk. A dolgozatban először definiáljuk a transzformációt majd alkalmazzuk néhány függvényre. Ezek után a transzformáltra vonatkozó tulajdonságokat vesszük sorra. A következő fejezetben a Laplace-transzformált és a generátor függvény alakulását nézzük meg deriválásra és integrálra vonatkozóan. Ezek után a transzformáció inverzét és a parciális törtekre bontás módszerét tárgyaljuk. A dolgozat a transzformáció legfontosabb alkalmazásával, a közönséges differenciálegyenletek és egyenletrendszerek valamint az integrálegyenletek tárgyalásával zárul.

2. fejezet

Laplace-transzformáció

2.1. Definíció és alkalmazása

Definíció: Az $f : [0, \infty[\to \mathbf{C}, t \to f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja az

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$$

függvény, melynek értelmezési tartománya a $]0, \infty[$ intervallum azon pontjaiból áll, ahol a fenti improprius integrál konvergens.

Jelölés: $L[f(t)] = F(s)$

Definíció alapján számítsuk ki néhány függvény Laplace-transzformáltját!

Az értelmezési tartományt a továbbiakban nem jelöljük külön.

1. Legyen $f(t) = 1$

   Ekkor

   $$F(s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}.$$

   Tehát $L[1] = \frac{1}{s}$ és az integrál linearitása miatt tetszőleges $c \in \mathbf{R}$ esetén $L[c] = \frac{c}{s}$.

2. Legyen$f(t) = t$

Ekkor parciálisan integrálva:

$$F(s) = \int_0^\infty t \cdot e^{-st} dt = \left[t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s} dt = \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

Tehát $L[t] = \frac{1}{s^2}$, illetve bármely $c \in \mathbf{R}$ esetén $L[c \cdot t] = \frac{c}{s^2}$.

3. Legyen $f(t) = t^n, n \in \mathbf{N}^+, n \geqslant 2$.

a) Először legyen $n = 2$. Ekkor parciálisan integrálunk majd felhasználjuk a 2. feladatban kapott eredményt, így

$$F(s) = \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-st} dt = [t^2 \cdot \frac{e^{-st}}{-s}]_0^\infty - \int_0^\infty 2t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt =$$
$$= 0 + \frac{2}{s} \int_0^\infty t \cdot e^{-st} dt = \frac{2}{s} \cdot L[t] = \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3} = L[t^2].$$

b) Ha $n = 3$, akkor:

$$F(s) = \int_0^\infty t^3 \cdot e^{-st} dt = \left[t^3 \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty 3t^2 \frac{e^{-st}}{-s} dt =$$
$$= 0 + \frac{3}{s} \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-st} dt = \frac{3}{s} L[t^2] = \frac{3 \cdot 2}{s^4} = \frac{3!}{s^4} = L[t^3].$$

c) Teljes indukcióval megkapható a $L[t^n]$:

$$L[t^n] = \int_0^\infty t^n \cdot e^{-st} dt = \left[t^n \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty n \cdot t^{n-1} \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt =$$
$$= 0 - \int_0^\infty \frac{n}{-s} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-st} dt = \frac{n}{s} \cdot \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{n}{s}\left(\left[t^{n-1}\cdot\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (n-1)t^{n-2}\cdot\frac{e^{-st}}{-s}dt\right)$$

$$= \frac{n}{s}\left(0 - \int_0^\infty \frac{n-1}{-s}\cdot t^{n-2}\cdot e^{-st}dt\right) = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\int_0^\infty t^{n-2}\cdot e^{-st}dt =$$

$$= \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\left(\left[t^{n-2}\cdot\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (n-2)t^{n-3}\cdot\frac{e^{-st}}{-s}dt\right) =$$

$$= \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}(0-\int_0^\infty \frac{n-2}{-s}\cdot t^{n-3}\cdot e^{st}dt) = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\frac{n-2}{s}\cdot\int_0^\infty t^{n-3}e^{-st}dt = \cdots =$$

$$= \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\frac{n-2}{s}\cdots\frac{4}{s}\int_0^\infty t^3\cdot e^{-st}dt = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\frac{n-2}{s}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{s}L[t^3] =$$

$$= \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\frac{n-2}{s}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{s}\cdot\frac{3!}{s^4} = \frac{n!}{s^{n+1}} = L[t^n].$$

- Exponenciális és trigonometrikus függvények:

1. Legyen $f(t) = e^{at}$

   Ekkor

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at}\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt =$$

$$\left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^\infty = 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}.$$

   Ez alapján:

$$L[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}.$$

2. Legyen $f(t) = \cos(at)$

   Ekkor, használva az Euler formulát ($e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$) kapjuk, hogy a $\cos(at) = \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$, ez alapján:

$$F(s) = \int_0^\infty \cos(at) \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2} \cdot e^{-st} dt =$$
$$= \int_0^\infty \frac{e^{(ia-s)t} + e^{(-ia-s)t}}{2} = \int_0^\infty \frac{e^{(ia-s)t}}{2} + \int_0^\infty \frac{e^{(-ia-s)t}}{2} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{ia-s} - \frac{1}{-ia-s}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{-a^2-s^2} = \frac{s}{a^2+s^2}.$$

3. Legyen f(t)=$t \cdot e^{at}$, ahol a tetszőleges valós vagy komplex állandó.

   Parciálisan integrálva:

$$F(s) = \int_0^\infty t \cdot e^{at} dt = \int_0^\infty t \cdot e^{-(s-a)t} dt =$$
$$= \left[t \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} dt =$$
$$= 0 + \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)^2} \right]_0^\infty = -\left(-\frac{1}{-(s-a)^2} \right) = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

4. Legyen $f(t) = t^n \cdot e^{at}$

   n=1-re már láttuk:

$$L[t \cdot e^{at}] = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

   n=2 esetben parciálisan integrálunk:

$$F(s) = \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-(s-a)t} dt =$$
$$-\left[t^2 \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^\infty - \int_0^\infty 2 \cdot t \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} dt =$$

$$0 + \frac{2}{s-a}\int_0^{\infty} t \cdot e^{at} \cdot e^{-st} dt = \frac{2}{s-a} \cdot \frac{1}{(s-a)^2} = \frac{2}{(s-a)^3}.$$

Folytatható az eljárás $n \geq 3$ esetén is. Teljes indukcióval pedig megkaphatjuk $L[t^n e^{at}]$ képletét.

Tehát:

$$L[t^n \cdot e^{at}] = \int_0^{\infty} t^n \cdot e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} t^n e^{-(s-a)t} =$$

$$\left[t^n \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} n \cdot t^{n-1} \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} dt =$$

$$= 0 - \int_0^{\infty} \frac{n}{-(s-a)} t^{n-1} \cdot e^{(s-a)t} dt = \frac{n}{s-a}\int_0^{\infty} t^{n-1} \cdot e^{-(s-a)t} dt =$$

$$= \frac{n}{s-a}\left(\left[t^{n-1} \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (n-1) \cdot t^{n-2} \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} dt\right) =$$

$$= \frac{n}{s-a} \cdot \left(0 - \int_0^{\infty} \frac{n-1}{-(s-a)} \cdot t^{n-2} \cdot e^{-(s-a)t} dt\right) = \frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \int_0^{\infty} t^{n-2} \cdot e^{-(s-a)t} dt =$$

$$= \frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \left(\left[t^{n-2} \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (n-2) t^{n-3} \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)dt}\right) =$$

$$= \frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \left(0 - \int_0^{\infty} \frac{n-2}{-(s-a)} \cdot t^{n-3} \cdot e^{-(s-a)t} dt =\right.$$

$$\frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \frac{n-2}{s-a} \cdot \int_0^{\infty} t^{n-3} \cdot e^{-(s-a)t} dt =$$

$$\cdots = \frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{s-a}\int_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-(s-a)t} dt =$$

$$= \frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \frac{n-2}{s-a} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{s-a} L[t^2 e^{at}] =$$

$$= \frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \frac{n-2}{s-a} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{s-a} \cdot \frac{2!}{(s-a)^3} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} = L[t^n e^{at}].$$

- Hiperbolikus függvények:

5. Legyen $f(t) = \cosh(at), a \in \mathbf{C}$ tetszőleges.

   Mivel $\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ és így hivatkozva a 3 példára kapjuk:

$$F(s) = \int_0^\infty \frac{e^{at}+e^{-at}}{2} \cdot e^{-st} dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st} + e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}.$$

6. Legyen $f(t) = \sinh(at)$

   ekkor

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

   tehát

$$F(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{at} \cdot e^{-st} - e^{-at} \cdot e^{-st}) = \frac{a}{s^2-a^2}.$$

7. Legyen $f(t) = t \cdot \sinh(at)$

$$F(s) = \int_0^\infty t \cdot \sinh(at) \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty t \cdot \frac{e^{at}-e^{-at}}{2} \cdot e^{-st} dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty t \cdot e^{at} \cdot e^{-st} - \frac{1}{2}\int_0^\infty t e^{-at} e^{-st} = \frac{1}{2}\frac{1}{(s-a)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+a)^2} = \frac{2as}{(s^2-a^2)^2}.$$

Összefoglalva, néhány fontosabb függvény Laplace-transzformáltja:

	f(t)	L[t]
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$
3.	t^2	$\frac{2}{s^3}$
4.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6.	$\ln(t)$	$-\frac{1}{s}\cdot(C+\ln(s))$
7.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
8.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
9.	$\cos^2(at)$	$\frac{s^2+2a^2}{s(s^2+4a^2)}$
10.	$\sin^2(at)$	$\frac{2(a^2)}{s(s^2+4a^2)}$
11.	$t\cdot\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
12.	$t\cdot\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
13.	$\frac{\sin(at)}{t}$	$\arctan(\frac{a}{s})$
14.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
15.	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
16.	$\cosh^2 at$	$\frac{s^2-2a^2}{s(s^2-4a^2)}$
17.	$\sinh^2 at$	$\frac{2a^2}{s(s^2-4a^2)}$

2.2. Fontosabb alkalmazási szabályok

1. **Linearitás:**

   - Adott $f(t)$, amelynek Laplace transzformáltja $L[f(t)] = F(s)$ akkor $L[Kf(t)] = KL[f(t)] = KF(s)$, valamely K valós vagy komplex számra.

Ugyanis a konstans kiemelhetősége miatt

$$L[Kf(t)] = \int_0^\infty Kf(t)e^{-st}dt = K\int_0^\infty f(t)e^{-st} = KL[f(t)].$$

- Adott $f_1(t), f_2(t)$, amelyeknek Laplace transzformáltja $F_1(s); F_2(s)$, akkor

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s).$$

Ugyanis az integrál additivitása és disztributívitása miatt

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = \int_0^\infty (f_1(t) + f_2(t))e^{-st}dt =$$

$$\int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt = L[f_1(t)] + L[f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s).$$

2. Eltolási tétel

Adott $f(t)$, amelynek Laplace transzformáltja L[f(t)]=F(s), ekkor $f(t-\tau)$ estén a Laplace transzformált eredménye a $t-\tau = z$,$t = z+\tau$,$dt = dz$ helyettesítéssel

$$L[f(t-\tau)] = \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(z)e^{-(z+\tau)s}dz =$$

$$\int_0^\infty f(z)e^{-zs}e^{-\tau s}dz = e^{-\tau s}\int_0^\infty f(z)e^{-zs}dz = e^{-\tau s}F(s).$$

3. Csillapítási tétel

Most megviszgáljuk az előző kérdés fordítottját. Ha F az f függvény transzformáltja, akkor az $s \to F(s+a)$ függvény mely generátorfüggvényhez tartozik?

Mivel

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

ezért:

$$F(s+a) = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-at}e^{-st} = L[f(t)e^{-at}].$$

Tehát a Laplace-transzformált eltolása a generátorfüggvény e^{-at} exponenciális tényezővel való szorzásával egyenértékű.

A csillapítási tétel segítségével számítsuk ki a következő függvény transzformáltját!

Legyen $f(t) = e^{-at}\cosh(bt)$ Korábban már láttuk hogy $L[\cosh(bt)] = \frac{s^2}{s^2-b^2}$

Ebből következöen $s \to s+a$ helyettesítésel adódik:

$$L[e^{-at}\cosh(bt)] = \frac{(s+a)^2}{(s+a)^2-b^2}$$

4. **Hasonlósági tétel**

Adott $f(t)$, amelynek Laplace transzformáltja $L[f(t)] = F(s)$ ekkor $f(at)$ esetén a Laplace transzformáció eredménye:

Legyen $at = z$, ekkor $t = \frac{z}{a}$ és $dt = \frac{1}{a}dz$ így,

$$L[f(at)] = \int_0^\infty f(at)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-s\frac{z}{a}}\frac{1}{a}dz = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(z)e^{-\frac{s}{a}z}dz = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

- Hasonlósági tétellel számoljuk ki a $L[\ln(at)]$-t!

  Laplace-transzformáltakat tartalmazó táblázatból tudjuk hogy:

  $L[\ln t] = -\frac{1}{s}(C + \ln s)$, ahol C egy állandó.

  Innen a hasonlósági tétellel adódik:

$$L[\ln at] = \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{\frac{s}{a}}\left(C + \ln\frac{s}{a}\right)\right) = -\frac{1}{s}\left(C + \ln\frac{s}{a}\right).$$

- Számoljuk ki a $L[(at)^2\cosh(at)]$-t!

  Szintén a táblázatból tudjuk hogy:

$$L[t^2\cosh(t)] = \frac{2s(s^2+3)}{(s^2-1)^3}$$

  Ahonnan a hasonlósági tétellel adódik:

$$L[(at)^2\cosh(bt)] = \frac{1}{a}\cdot\frac{2\cdot\frac{s}{a}\left(\left(\frac{s}{a}\right)^2+3\right)}{\left(\left(\frac{s}{a}\right)^2-1\right)} = a^2\cdot\frac{2s(s^2+3a^2)}{(s^2-a^2)^3}.$$

5. Konvolúció

Az $f_1(t)$ és $f_2(t)$ függvények konvolúcióját a

$$g(t) = \int_0^t f_1(t)f_2(t-\tau)d\tau$$

összefüggéssel értelmezzük. Most tekintsük a $g(t)$ Laplace-transzformáltját. Cseréljük meg az integrálás sorrendjét, és vezessük be a $t' = t-\tau$ változót:

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \\ &= \int_0^\infty f_1(\tau)d\tau\int_0^t e^{-st}f_2(t-\tau)dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-st}f_1(\tau)d\tau\int_0^\infty e^{-st}f_2(t')dt' = F_1(s)F_2(s). \end{aligned}$$

Így a konvolúció transzformáltja egyszerűen az egyes transzformáltak szorzata.

3. fejezet

Deriválhatóság és integrálhatóság

3.1. A generátor függvény deriválása

Eddig a definíció alapján határoztuk meg egy függvény Laplace-transzformáltját. A most következő részben a gyakorlati szempontból fontos eljárást fogalmazunk meg. Melynek segítségével könnyebben előállítható a transzformált. Először egy függvény deriváltjának Laplace-transzformáltjával foglalkozunk.
A definíció alapján adódik:

$$L[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \Big[f(t) \cdot e^{-st}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st}dt =$$

$$-f(0) + s \cdot \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = s \cdot L[f(t)] - f(0) = sF(s) - f(0).$$

ahol F az f függvény Laplace-transzformáltja.
Tehát:

$$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0)$$

Ennek a formulának az ismételt alkalmazásával előállíthatjuk magasabb rendű deriváltak transzformáltját is:

$$L[f''(t)] = sL[f'(t)] - f'(0) = s \cdot (sL[f(t)] - f(0)) - f'(0) = s^2 L[f(t)] - sf(0) - f'(0).$$

Így ha tovább folytatjuk adódik az n-edrendű deriváltakra vonatkozó formula:

$$L[f^{(n)(t)}] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f' 0 - ... - f^{(n-1)}(0).$$

Számítsunk ki példákat!

1. Legyen:$f(t) = t$

akkor:

$$L[f'(t)] = s \cdot \frac{1}{s^2} - f(0) = \frac{1}{s}.$$

2. Legyen:

$f(t) = \cos(at)$

A táblázatból láthatjuk hogy

$$L[\cos(at)] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

akkor:

$$L[f'(t)] = L[-a \cdot \sin(at)] = s \cdot L[\cos(at)] - f(0) = s \cdot \frac{s}{s^2 + a^2} - f(0).$$

3. Legyen:$f(t) = \cos^2 at$

$$f'(t) = 2\cos(at)(-\sin(at))a = -a2\sin(at)\cos(at) = -a\sin 2(at)$$

ekkor:

$$L[f'(t)] = -aL[\sin 2at] = -a\frac{2a}{s^2+4a^2} = L[f(t)]s - f(0) = sL[f(t)] - 1,$$

tehát:

$$L[f(t)] = \frac{1}{s}\cdot\left(1 - \frac{2a^2}{s^2+4a^2}\right) = \frac{1}{s}\cdot\frac{s^2+4a^2-2a^2}{s^2+4a^2} = \frac{s^2+2a^2}{s(s^2+4a^2)}.$$

4. Legyen $f(t) = \sin^2 at$

Mivel

$$f'(t) = 2\sin(at)\cos(at)\cdot a = a2\sin(at)\cos(at) = a\sin 2a,$$

ezért:

$$L[a\sin 2a] = a\cdot L[\sin 2a] = a\cdot\frac{2a}{s^2+4a^2}$$

tehát:

$$L[f(t)] = \frac{a\cdot\frac{2a}{s^2+4a^2}+0}{s} = \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}.$$

3.2. Laplace-transzformált deriválása

Ebben a részben megvizsgáljuk hogy milyen eredmény adódik a Laplace-transzformált deriválásakor. A transzformált deriválása során a deriválás és integrálás sorrendje felcserélhető.

Ezért:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)\frac{d}{ds}\cdot e^{-st}dt =$$
$$\int_0^\infty f(t)(-t)\cdot e^{-st} = -\int_0^\infty t\cdot f(t)\cdot e^{-st}dt$$

így

$$\frac{d}{ds}F(s) = -L[t \cdot f(t)].$$

Általánosan n-edrendű deriváltra a következőt kapjuk:

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = \frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} = \int_0^\infty (-t)^n \cdot f(t) \cdot e^{-st}dt =$$
$$(-1)^n \int_0^\infty t^n \cdot f(t) \cdot e^{-st}dt = (-1)^n L[t^n f(t)].$$

Vagyis:

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n L[t^n f(t)].$$

- Néhány példa:

Legyen:

1. $f(t) = t \cdot \sin(at)$

Felhasználva:

$L[\sin(at)] = \frac{a}{s^2+a^2} = F(s)$, valamint alkalmazva $\frac{d}{ds} \cdot F(s) = -L[t \cdot f(t)]$ formulát kapjuk, hogy

$$L[t \cdot \sin(at)] = -\frac{d}{ds} \cdot \frac{a}{s^2+a^2} = -\left(-\frac{a \cdot 2s}{(s^2+a^2)^2}\right) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}.$$

2. Legyen: $f(t) = t^2 \cdot \cosh(at)$

Tudjuk a hiperbolikus függvény transzformáltját:

$$F(s) = L[\cosh(at)] = \frac{s}{s^2 - a^2}.$$

Erre alkalmazzuk a

$$\frac{d^2}{ds^2} \cdot F(s) = (-1)^2 \cdot L[t^2 \cosh(at)]$$

képletet így,

$$L[t^2\cosh(at)] = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2-a^2}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{(s^2-a^2)-s2s}{(s^2-a^2)^2}\right) =$$
$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{-s^2-a^2}{(s^2-a^2)^2}\right) = \frac{2s(s^2+3a^2)}{(s^2-a^2)^3}.$$

3. Legyen

$f(t) = t^n e^{at}$

Induljunk ki az e^{at} Laplace transzformáltjából:

$$L[e^{at}] = \frac{1}{s} = F(s).$$

Alkalmazzuk erre az F-re a $\frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n L[t^n f(t)]$ formulát.

$$L[t^n e^{at}] = \frac{1}{(-1)^n}\cdot\frac{d^n}{ds^n}\cdot\frac{1}{s-a} = \frac{1}{(-1)^n}\cdot\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\cdot\frac{-1}{(s-a)^2} =$$
$$\frac{1}{(-1)^n}\cdot\frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}}\cdot\frac{(-1)(-2)}{(s-a)^3} = \ldots = \frac{1}{(-1)^n}(-1)^n\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}},$$

ahol $Re(s-a) > 0$.

3.3. A generátor függvény primitív függvényének transzformáltja

A deriváltra vonatkozó formula alkamazásával könnyen levezethetünk egy összefüggést,egy f függvény integrálfüggvényének Laplace transzformáltjára vonatkozóan.

Legyen

$$\phi(t) = \int_0^t f(t)dt$$

Ekkor $\frac{d}{dt}\phi(t) = f(t)$ összefüggés miatt egyrészt

$$L\left[\frac{d}{dt}\phi(t)\right] = L[f(t)].$$

Másrészt a deriváltra vonatkozó szabály szerint:

$$L\left[\frac{d}{dt}\phi(t)\right] = sL[\phi(t)] - \phi(0) = sL[\phi(t)].$$

Hiszen

$$\phi(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0.$$

Átrendezve az egyenletet, kapjuk a keresett összefüggést:

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}L[f(t)] = \frac{F(s)}{s},$$

ahol F szokás szerint f Laplace transzformáltja. Eszerint a generátorfüggvény integrálása a Laplace transzformált s-sel való osztásával egyenértékű.

1. Számítsuk ki a $\phi(t) = \int_0^t t\sin(at)dt$ függvény Laplace transzformáltját! Az előző megállapítás alapján az integrandusnak a Laplace-transzformáltját kell osztani s-sel, így

$$L[\phi(t)] = \frac{1}{s} \cdot L[t \cdot \sin(at)] = \frac{1}{s} \cdot \frac{2as}{(s^2+a^2)^2} = \frac{2a}{(s^2+a^2)^2}.$$

2. Számítsuk ki $\phi(t) = \int_0^t t^2e^{-t}dt$ függvény transzformáltját.

Induljunk ki abból hogy ismerjük a t^ne^{at} transzformáltját, most ezt az $n = 2, a = -1$ helyettesítéssel kapjuk:

$$L[\phi(t)] = \frac{1}{s} \cdot L[t^2e^{-t}] = \frac{1}{s} \cdot \frac{2!}{(s-(-1))^3} = \frac{s^2+2a^2}{s^2(s^2+4a^2)}.$$

3.4. Laplace transzformált integrálása

A Laplace transzformáltnak az integrálfüggvényét ha megviszgáljuk hasznos összefüggést kapunk. Ehhez állítsuk elő $t \to \frac{f(t)}{t}$ függvény transzformáltját

$$L[f(t)] = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) dt \int_s^\infty e^{-st} dt =$$
$$= \int_s^\infty \left(\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \right) ds = \int_s^\infty F(s) ds,$$

ahol felhasználtuk a $\frac{d}{ds}(\frac{e^{-st}}{t}) = -e^{-st}$ összefüggést.

1. Számítsuk ki az $f(t) = \frac{\sin(at)}{t}$ függvény transzformáltját!

Az előbb levezetett összefüggést alkalmazva:

$$L\left[\frac{\sin(at)}{t}\right] = \int_s^\infty L[\sin(at)] ds = \int_s^\infty \frac{a}{s^2 + a^2} ds =$$
$$= \frac{1}{a} \int_s^\infty \frac{1}{(\frac{s}{a})^2 + 1} ds = \left[\frac{1}{a} \left(\arctan\left(\frac{s}{a}\right)\right) a \right]_s^\infty =$$
$$= \left[\arctan\left(\frac{s}{a}\right)\right]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s}{a}\right) = \arctan\left(\frac{a}{s}\right).$$

2. Számítsuk ki az $f(t) = \frac{\sin^2 at}{t}$ függvény transzformáltját.

Itt felhasználjuk hogy $L[\sin^2 at] = \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$, amit már kiszámoltunk korábban.

Innen következik:

$$L[f(t)] = \int_s^\infty L[sin^2 at] ds = \int_s^\infty \frac{2a^2}{s(s^2 + 4a^2)} ds.$$

Az integrál kiszámításához parciális törtekre bontunk:

$$\frac{2a^2}{s(s^2 + 4a^2)} = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 4a^2},$$

ennek primitív függvénye:

$$\int \left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{4} \frac{2s}{s^2 + 4a^2} \right) ds = \frac{1}{2} \ln |s| - \frac{1}{4} \ln |s^2 + 4a^2| = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{s^2}{s^2 + 4a^2} \right|$$

ahonnan:

$$L \left[\frac{\sin^2 at}{t} \right] = \int_s^\infty \frac{2a^2}{s(s^2 + 4a^2)} ds = \frac{1}{4} \left[\ln \left| \frac{s^2}{s^2 + 4a^2} \right| \right]_s^\infty =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| 1 + \frac{4a^2}{s^2} \right|.$$

4. fejezet

Inverz Laplace-transzformáció

Definíció: Legyen az F egy, komplex szám független változójú függvény, és létezzen egy $f(t)$ egyváltozós valós szám értekű függvény,amelyre teljesül,hogy $L[f(t)] = F$. Az $f(t)$ függvényt az F függvény inverz Laplace transzformáltjának nevezzük. Az inverz Laplace traszformált jelölése: $L^{-1}[F] = f(t)$.

A gyakorlati alkalmazás szempontjából egyik legfontosabb tulajdonságot az alábbi állításban adjuk meg.

Állítás: Ha létezik $f_1(t)$=$L^{-1}[F_1]$; $f_2(t) = L^{-1}[F_2]$; ... ; $f_k(t) = L^{-1}[F_k]$ inverz Laplace transzformált függvények, és c_1;c_2; ... ; c_k tetszőleges adott valós vagy komplex számok akkor

$$L^{-1}[c_1F_1 + c_2F_2 + \ldots + c_kF_k] =$$

$$= c_1L^{-1}[F_1] + c_2L^{-1}[F_2] + \ldots + c_kL^{-1}[F_k] =$$

$$= c_1f_1(t) + c_2f_2(t) + \ldots + c_kf_k(t)$$

azaz az inverz Laplace transzformáció lineáris tulajdonságú.

Fontos még a konvolúciós tételként ismert állítás

Állítás: Egy ismeretlen $f(t)$ függvény F Laplace transzformáltja legyen szorzat alakú: $F = F_1 F_2$,de legyenek ismertek az $f_1(t)$ és $f_2(t)$ függvények, mint a tényezők inverz Laplace-transzformáltjai: $f_1(t) = L^{-1}[F_1]$ és $f_2(t) = L^{-1}[F_2]$

Ekkor

$$f(t) = L^{-1}[F] = L^{-1}[F_1 F_2] = \int_t^0 f_1(x) f_2(t-x) dx.$$

- Néhány példa

1. Számítsuk ki az

$$F(s) = \frac{3s-1}{s^2+4s+13}$$

függvény inverz Laplace-transzformáltját!

A tört nevezőjét teljes négyzetté alakítjuk

$$F(s) = \frac{3s-1}{s^2+4s+13} = \frac{3s-1}{(s+2)^2+9} = \frac{3(s+2)-7}{(s+2)^2+9} = 3\frac{s+2}{(s+2)^2+9} - \frac{7}{3}\frac{3}{(s+2)^2+9}$$

ezért az inverz Laplace-transzormált linearitását,a csillapitási tételt és a koszinusz és szinusz függvényekre vonatkozó azonosságokat alkalmazva:

$$L^{-1}[F(s)] = 3L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right] - \frac{7}{3}L^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right] = 3e^{-2t}\cos(3t) - \frac{7}{3}e^{-2t}\sin(3t).$$

2. Számítsuk ki az

$$F(s) = \frac{19-2s}{s^2+s-6}$$

függvény inverz Laplace-transzformáltját!

$$\frac{19-2s}{s^2+s-6} = \frac{19-2s}{(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3}$$

$$19 - 2s = A(s+3) + B(s-2) = As + 3A + Bs - 2B$$

$$A + B = -2 \to A = -2 - B$$

$$3A - 2B = 19$$

$$3(-2 - B) - 2B = 19$$

$$-6 - 3B - 2B = 19$$

$$-6 - 5B = 19$$

$$-5B = 25$$

$$B = -5 \to A = -2 + 5 = 3$$

tehát:

$$F(s) = \frac{3}{s-2} - \frac{5}{s+3}.$$

Inverz Laplace-transzformáció linearitását alkalmazva:

$$L^{-1}[F(s)] = 3L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - 5L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = 3e^{2t} - 5e^{-3t}.$$

5. fejezet

Parciális törtekre bontás módszere

Legyen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ alakú, ahol $p(x)$ egy m-edfokú, $q(x)$ pedig n-ed fokú polinom. A nevezőnek csak egyszeres, valós gyökei vannak. Ekkor $q(x)$ felírható gyöktényezős alakban. Ekkor pedig $\frac{p(x)}{q(x)}$ felírható:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

alakban. Itt az $A_1, A_2, \dots, A_n$ számokat az egyenlő együtthatók módszerével kapjuk meg. Tehát

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

azonosságban a jobb oldalt közös nevezőre hozzuk, majd az így kapott számláló együtthatóit összevetjük $p(x)$ megfelelő együtthatóival, így egy egyenletrendszert kapunk A_i-kre, amelyet megoldva megkapjuk a kívánt együtthatókat.

PÉLDA

1. Legyen:

$$F(s) = \frac{19 - 2s}{s^2 + s - 6}$$

A nevező szorzattá alakítása utána kapjuk

$$F(s) = \frac{19 - 2s}{(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3}$$

ebből

$$19s - 2s = A(s+3) + B(s-2) = As + 3A + Bs - 2B$$

ahonnan:

$$A + B = -2 \to A = -2 - B \to A = -2 - (-5) = 3$$

$$3A - 2B = 19$$

$$3(-2 - B) - 2B = 19$$

$$-6 - 3B - 2B = 19$$

$$-5B = 25$$

$$B = -5$$

így

$$F(s) = \frac{19 - 2s}{s^2 + s - 6} = \frac{3}{s-2} - \frac{5}{s+3}.$$

6. fejezet

Egyenletek és egyenletrendszerek

A Laplace transzformáció egyik legfontosabb alkalmazása az álladó együtthatós lineáris differenciálegyenletek és differenciálegyenletrendszerek megoldása. Ehhez tekintsünk egy másodrendű differenciálegyenletet:

$$ax'' + bx' + cx = f(t)$$

ahol a, b, c adott konstansok, $x = x(t)$ az ismeretlen függvény,f szintén adott függvény. A megoldási módszer lényege abban áll, hogy képezzük az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját. Ha bevezetjük az ismeretlen $t \to x(t)$ függvény transzformáltjának jelölésére az $s \to X(s)$ jelet, és felhasználjuk a korábban bizonyított

$L[x'(t)] = sX(s) - x(0)$

$L[x''(t)] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$

összefüggéseket,akkor a transzformáció eredménye az

$a(s^2X(s) - sx(0) - x'(0)) + b(sX(s) - x(0)) + cX(0) = F(s)$

algebrai egyenlet.

A transzformáció elvégzése után tehát az ismeretlen x függvény transzformáltjára egy közönséges algebrai egyenletet kapunk.

6.1. Példák közönséges differenciálegyenletekre

1. Tekintsük az

$$x'' - 4x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

kezdeti érték feladatot.

Vegyük az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját

$$L[x''] - 4L[x] = 0.$$

Használva az $X(s) = L[x]$ jelölést valamint a második derivált Laplace-transzformáltjára vonatkozó azonosságot, kapjuk

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) - 4X(s) = 0$$

A kezdeti értéket használva

$$(s^2 - 4)X(s) = s$$

azaz

$$X(s) = \frac{s}{s^2 - 4}.$$

Bontsuk parciális törtekre $X(s)$-t,

$$\frac{s}{s^2-4} = \frac{s}{(s+2)(s-2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-2}$$

amiből átszorozva kapjuk, hogy

$$s = A(s-2) + B(s+2)$$

$$A + B = 1 \to A = 1 - B$$

$$-2A + 2B = 0$$

$$-(1-B) + B = 0$$

$$2B = 1 \to B = \frac{1}{2}$$

$$A = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ezért

$$\frac{s}{s^2-4} = \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}.$$

Inverz Laplace-transzformáltat használva megkapjuk a kezdeti érték feladat megoldását

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-4}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}\right] = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{2t}.$$

2. Tekintsük az

$$\begin{cases} x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = 1 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Vegyük az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 4sX(s) - x(0) + 3X(s) = \frac{1}{s}$$

ekkor

$$X(s) = \frac{1}{s^2+4s+3} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^3+4s^2+3s}.$$

A nevezőt szozattá alakítjuk és használjuk a parciális törtekre bontás módszerét:

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3}$$

átszorozva kapjuk

$$1 = A(s^2+4s)+3) + Bs^2 + 3Bs + Cs^2 + Cs$$

ebből

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 4A+3B+C=0 \\ 3A=1 \to A=\frac{1}{3} \end{cases}$$

A-t behelyettesítve a másik két egyenletbe

$$\begin{cases} \frac{1}{3}+B+C=0 \\ \frac{4}{3}+3B+C=0 \end{cases}$$

Kivonjuk egymásból a két egyenletet

$$-1-2B=0 \to B=-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+C=0 \to C=\frac{1}{6}$$

így

$$X(s) = \frac{1}{3}s - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{s+3}.$$

Inverz Laplace-transzformáltat használva megkapjuk az egyenlet megoldását:

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}[\frac{1}{3}s - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{s+3}] = \frac{1}{3}1(t) - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}.$$

6.2. Differenciálegyenletrendszerek

Differenciálegyenletek esetén felhasználva az összefüggéseket, algebrai lineáris egyenletrendszert kapunk az ismeretlenfüggvények transzformáltjára vonatkozólag. Az egyenletrendszer megoldása után ismét a visszatranszformálás a feladat.

1. Számítsuk ki a következő egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y + e^t \\ y' = x + 6y - e^t \\ x(0) = 2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

vegyük mindkét egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = 3X(s) - 2Y(s) + \frac{1}{s-1} \\ sY(s) - y(0) = X(s) + 6Y(s) - \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

a kezdeti feltételeket használva:

$$(s-3)X(s) + 2Y(s) = 2 + \frac{1}{s-1}$$
$$-X(s) + (s-6)Y(s) = -1 - \frac{1}{s-1}$$

az egyenletrendszert rendezve kapjuk:

$$\begin{cases} X(s) = \frac{2s^2-11s+6}{(s-4)(s-5)(s-1)} \\ Y(s) = -\frac{s^2-5s+1}{(s-4)(s-5)(s-1)} \end{cases}$$

és így parciális törtekre bontva $X(s)$-t:

$$\frac{2s^2-11s+6}{(s-4)(s-5)(s-1)} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s-5} + \frac{C}{s-1}$$

$$2s^2-11s+6 = A(s^2-6s+5) + B(s^2-5s+4) + C(s^2-9s+20)$$

$$2s^2-11s+6 = As^2 - A6s + 5A + Bs^2 - 5Bs + 4B + Cs^2 - 9Cs + 20C$$

$$A+B+C = 2 \rightarrow A = 2-B-C$$

$$-6A-5B-9C = -11 \rightarrow -6(2-B-C)-5B-9C = -11 \rightarrow B = 1+3C$$

$$5A+4B+20C = 6$$

$$5(1-4C)+4(1+3C)+20C = 6$$

$$9+12C = 6$$

$$C = -\frac{1}{4}$$

$$B = 1+3(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$$

$$A = 2-\frac{1}{4}-(-\frac{1}{4}) = 2$$

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{2}{s-4} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-5} - \frac{1}{4}\frac{1}{s-1}\right]$$

$$x(t) = 2e^{4t} + \frac{1}{4}e^{5t} - \frac{1}{4}e^{t}$$

majd ismét a parciális törtekre bontás módszerével megkapjuk $y(t)$ is:

$$A+B+C = -1 \rightarrow A = -1-B-C$$

$$-6A - 5B - 9C = 5 \to -6(-1 - B - C) - 5B - 9C = 5 \to B = -1 + 3C$$

$$5A + 4B + 20C = -1 \to 5(-4C) + 4(-1 + 3C) + 20C = -1$$

$$-4 + 12C = -1$$

$$C = \frac{1}{4}$$

$$B = -1 + 3C = -\frac{1}{4}$$

$$A = -1 - \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = -1$$

$$y(t) = L^{-1}\left[-\frac{1}{s-4} - \frac{1}{4}\frac{1}{s-5} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-1}\right]$$

$$y(t) = -e^{4t} - \frac{1}{4}e^{5t} + \frac{1}{4}e^{t}.$$

2. Legyen:

$x' = -7x + y + 5 \qquad x(0) = 0$

$y' = -2x - 5y - 37 \qquad y(0) = 0$

Mindkét egyenletnek vesszük a Laplace-transzformáltját.

Ekkor:

$$\begin{cases} sX(s) = -7X(s) + Y(s) + \frac{5}{s} \\ sY(s) = -2X(s) - 5Y(s) + \frac{37}{s^2} \end{cases}$$

Az első egyenletet megszorozzuk $s + 5$tel majd összeadjuk a két egyenletet így megkapjuk az X(s)-t:

$$\begin{cases} X(s)(s+7) - Y(s) - \frac{5}{p} = 0 \quad /(s+5) \\ Y(s)(s+5) + 2X(s) - \frac{37}{p^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s)(s+5)(s+7) - Y(s)(s+5) = 0 \\ Y(s)(s+5) + 2X(s) - \frac{37}{s^2} = 0 \end{cases}$$

$$X(s)(s^2 + 12s + 35 + 2) - \frac{37}{s^2} - \frac{5s+25}{s} = 0$$

$$X(s) = \frac{37 + 5s^2 + 25s}{s^2(s^2 + 12s + 37)}$$

Parciális törtekre bontjuk X(s)-t:

$$X(s) = \frac{37 + 5s^2 + 25s}{s^2(s^2 + 12s + 37)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 12s + 37}$$

$$37 + 5s^2 + 25s = A(s(s^2 + 12s + 37)) + B(s^2 + 12s + 37) + Cs(s^2) + Ds^2$$

$$37 + 5s^2 + 25s$$

$$A + C = 0 \longrightarrow C = -1$$

$$12A + B + D = 5 \longrightarrow D = -6$$

$$37A + 12B = 25 \longrightarrow 37A - 12 = 25 \rightarrow A = 1$$

$$37B = -37 \longrightarrow B = -1$$

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{s + 6}{(s + 6)^2 + 1}\right] = 1 - t - e^{-6t}cos(t).$$

Majd az egyenletrendszerből megkapjuk az Y(s)-t ha az első egyenletet megszorozzuk 2vel a másodikat pedig $s + 7$tel és kivonjuk egymásból:

$$\begin{cases} 2X(s)(s + 7) - 2Y(s) - \frac{10}{p} = 0 \\ Y(s)(s + 5)(s + 7) + 2(s + 7)X(s) - \frac{37s+259}{s^2} = 0 \end{cases}$$

$$Y(s)(s^2 + 12s + 37) - \frac{37s - 259}{s^2} - \frac{10}{p} = 0$$

$$Y(s) = \frac{-10s - 37s - 259}{s^2(s^2 + 12s + 37)} = \frac{-47s - 259}{s^2 + 12s + 37}.$$

Parciális törtekre bontjuk Y(s)-t:

$$\frac{-47s - 259}{s^2 + 12s + 37} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 12s + 37}$$

$$-47s - 259 = A(s(s^2 + 12s + 37)) + B(s^2 + 12s + 37) + Cs(s^2) + Ds^2$$

$$-47s - 259 = As^3 + A12s^2 + A37s) + Bs^2 + B12s + 37B + Cs(s^2) + Ds^2$$

$$A + C = 0 \rightarrow C = 1$$

$$12A + B + D = 0 \rightarrow 12 - 7 = -D \rightarrow D = 5$$

$$37A + 12B = -47 \rightarrow 37A + 84 = -47 \rightarrow A = 1$$

$$37B = -259 \rightarrow B = -7.$$

Megkaptuk hogy:

$$\frac{1}{s} + \frac{-7}{s^2} + \frac{s+5}{s^2 + 12s + 37}.$$

Vesszük az előző egyenlet inverz Laplace-transzformáltját:

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{7}{s^2} - \frac{s+5}{s+6}^2 + 1\right]$$

$$y(t) = 1 - 7t + e^{-6t}\cos(t) + e^{-6t}\sin(t).$$

6.3. Integrálegyenletek

Néhány esetben előfordulnak olyan integrálegyenletek,amelyekben az ismeretlen függvény egy konvolúcióban szerepel. A

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x-y)g(y)dy$$

egyenlet, ahol $f(x)$ és $k(x)$ megadott függvények és a λ adott állandó. Ha az előző egyenletben a $x' = x - a, y' = y - a$ változó cserével a következőt kapjuk

$$g(x') = f(x') + \lambda \int_0^{x'} k(x'-y')g(y')dy'$$

Az általános megoldási módszer: alkalmazzuk a Laplace transzformációt az egyenletre,

$$G(s) = F(s) + \lambda K(s)G(s)$$

algebrai egyenletre jutunk, amelyből következik, hogy

$$G(s) = \frac{F(s)}{1 - \lambda K(s)}.$$

Az egyenlet átírható a

$$G(s) = F(s) + \frac{\lambda K(s)}{1 - \lambda K(s)} F(s)$$

alakra.

1. Példa

   Tekintsük az

   $$s = \int_0^s e^{s-t} g(t) dt$$

   egyenletet. A Laplace transzformáltja a következő

   $$\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s-1} G(s)$$

   Innen

   $$G(s) = \frac{s-1}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2},$$
   $$g(t) = 1 - t.$$

2. Példa

   Tekintsük a

   $$g(x) = 1 - \int_0^x (x - y) g(y) dy$$

egyenletet. Ekkor

$$G(s) = s^{-1} - s^{-2}G(s),$$

ami a következö megoldást adja:

$$G(s) = \frac{s}{1+s^2}$$
$$g(x) = cosx.$$

Irodalomjegyzék

[1] Hanka László, Zalay Miklós *Komplex függvénytan* Műszaki könyvkiadó(2010)

[2] Brain Davies *Integráltranszformációk és alkalmazásaik* Műszaki könyvkiadó(1983)

[3] Simon L. Péter, Tóth János *Differenciálegyenletek*, Typotex (2005)