A matematika nagy pillanatai

Matematikatörténeti feladatok

Szakdolgozat

Készítette:

Rózsa Bianka

Matematika Bsc

Elemző szakirány

Témavezető:

Szabó Csaba

egyetemi docens

Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Budapest

2011

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Szakdolgozatom témájául matematikatörténeti feladatokat választottam. Mindig érdekelt a matematika eredete, a felfedezések háttere. Dolgozatomban olyan feladatokat és fontos felfedezéseket próbáltam összefoglalni, amelyek nagy hatással voltak korunk matematikájára is, és aminek megismerésével az elmúlt néhány évben foglalkoztam. A feladatokat szerzőik szerint csoportosítottam, és röviden összefoglaltam életüket. A bemutatott matematikusok listája természetesen nem teljes, hiszen ilyen terjedelemben lehetetlen lenne mindenkit felsorolni, aki érdemben hozzájárult ahhoz, hogy a matematika arra a szintre fejlődhessen, ahol most tart.

A dolgozatom elején ókori görög matematikával foglakozom, kiváló matematikusok által megfogalmazott példákon keresztül mutatom be fejlődését. Ebben a fejezetben komolyabban foglalkozom *Eukleidész*, *Arkhimédész* és *Diophantosz* munkásságával. A folytatásban azon középkorban élt matematikusok munkáját részletezem, akik a legnagyobb hatással voltak korunk matematikájára is. Itt *Fibonacci*tól és *Cardano*tól fennmaradt feladatokkal foglalkozom. Végül a legutolsó fejezetben a XVI.-XIX. századi matematika fejlődését mutatom be, néhány példafeladaton keresztül, amelyek *Viéte*től, *Descartes*től, *Newton*tól és *Euler*től származnak. *Fibonacci* és *Diophantosz* esetében kitérek röviden a feladatok mellett az általános elméletre, ami önálló munkám, de teljes részletezést sajnos nem enged a dolgozat terjedelemi korlátja.

2. fejezet

Feladatok az ókori görög matematikából

Az első görög matematikus akinek nevét és eredményeit *Eudémosz* (i. e. 320.) matematikatörténete említi, milétoszi *Thalész* (i. e. 624-547) volt. Az ő felfedezései, és azok megfogalmazásai is annyira fejlettek, hogy jogosan gondolhatunk előzményekre, amelyeket sajnálatosan nem ismerünk. Az biztosan látszik, hogy a görögök sok matematikai ismeretet vettek át az egyiptomiaktól és a babiloniaktól, de amit idegenben tanultak azt továbbfejlesztették, a maguk sajátosan görög gondolkodásukhoz igazították. Bizonyítási igényük kifejlesztésével nagyrészt felülmúlták a környezetükben élők matematikáját. A másik görög matematikai sajátosság *Püthagorasz* (i. e. VI. sz), és az irracionális viszony felfedezése után jelentkezett, ami a matematika teljes átgeometrizálásában nyilvánult meg. Az algebrának korukban már meglévő gyökereit nem fejlesztették tovább egészen *Diophantosz*ig (III. sz), a geometria területén viszont ragyogó sikereket értek el. Ezek között elsősorban az *Eukleidész* (i. e. 300 körül) által mintaszerűen megalapozott axiomatikus felépítést kell kiemelnünk, amely mind a mai napig befolyásolja a tudományos gondolkodást. Az algebrai szimbólumoknak teljes hiánya, a csupán szavakkal leíró, bár rajzokkal is illusztráló geometriai irányzat végül saját maga állított korlátot a görög matematika fejlődése elé. Ebben a fejezetben Eukleidész, Arkhimédész, majd Diophantosz munkásságán megyek végig. Megpróbálom bemutatni legjelentősebb felfezéseiket példák formájában.

2.1. Eukleidész

A görög matematika legragyogóbb alakjai közé tartozik *Eukleidész*(élt: Kr. e 430-360). *Sztoikheia (Elemek)* című művében nem csupán összefoglalta, kiegészítette a korabeli matematikai ismeretanyagot, hanem mindezt olyan felépítésben adta, amely mind e mai napig például szolgál. Szemlélet alapján fogadott el magától értetődő állításokat, az axiómákat. Ezekre a bizonyításra nem szoruló igazságokra vezette vissza a többi matematikai állítást, a tételeket. A matematikának ez az axiomatikus megalapozása és felépítése évszázadokon át biztosította a matematikai törvények hitelét. Ez a fő oka annak, hogy az axiomatikus módszer más tudományok területén is utánzásra talált. A 13 kötetes *Sztoikheia* első hat és utolsó négy kötete geometriával, a többi pedig az arányelmélettel, a racionális számokkal és bizonyos irracionális kifejezésekkel foglalkozik. Ebből a műből következik egy tétel feladat formájában.

1. példa: *Számítsuk ki a* 4719 *és* 4235 *számok legnagyobb közös osztóját!*

Megoldás: *Eukleidész* a legnagyobb közös osztót a róla elnevezett eljárással, idegen szóval algoritmussal a következőképpen határozta meg:

$$4719 : 4235 = 1, \text{ maradék } 484;$$

$$4235 : 484 = 8, \text{ maradék } 363;$$

$$484 : 363 = 1, \text{ maradék } 121;$$

$$363 : 121 = 3, \text{ maradék } 0.$$

Az osztássorozat legutolsó osztója, az adott két szám legnagyobb közös osztója, jelen esetben 121.

2.2. Arkhimédész

Arkhimédész (élt: i. e. 287 - i.e. 212) természettudós, ókori szicíliai matematikus, mérnök, fizikus, csillagász, filozófus. Arról vált széleskörűen ismertté, hogy Egyiptomban a földek öntözésére megszerkesztette vízemelő gépezetét, az arkhimédeszi csavart. Kreativitása és éleselméjűsége minden reneszánsz előtti európai matematikusét felülmúlta. Bebizonyította, hogy a kör kerületének és átmérőjének aránya ugyanannyi, mint területének és sugara négyzetének az aránya. Ezt nem hívta π-nek, de megadott egy módszert e számérték tetszőleges közelítésére, és adott rá egy olyan becslést, ami π értékét $3 + \frac{10}{71} = \frac{223}{71}$ ($\approx 3{,}1408$) és $3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ ($\approx 3{,}1429$) közé teszi. A felső határként megadott $\frac{22}{7}$-et még a középkorban is általánosan használták a π közelítő értékeként. *Arkhimédész* barátjának, *Eratoszthenész* (i. e. 276–194) alexandriai csillagásznak adta fel az alábbi, *problema bovinum* (a marhák problémája) néven ismert tréfás feladatot.

Héliosz naipisten csordája Szicília szigetén legelt. A csordában négyféle színű marha volt: fehér, fekete, barna és tarka. A fehér bikák száma (x') a fekete bikák számának (y'-nek) felével meg harmadával több volt, mint a barna bikáké (z'-é). A fekete bikák száma a tarka bikák számának (t'-nek) negyedével meg ötödével múlta felül a barnákét. A tarka bikák száma pedig a fehérek számának hatodával meg hetedével volt több a barnákénál. A fehér tehenek száma (x) a fekete marhák (bika+tehén) számának harmada meg negyede volt. A fekete tehenek száma (y) a tarka marhák számának negyede meg ötöde, a tarka tehenek száma (t) a barna marhák számának ötöde meg hatoda, végül a barna tehenek száma (z) a fehér marhák számának hatoda meg hetede volt. Hány különböző színű bika, illetve tehén volt a csordában?

A megoldáshoz vezető egyenletek:

$$x' = \frac{y'}{2} + \frac{y'}{3} + z', \quad y' = \frac{t'}{4} + \frac{t'}{5} + z', \quad t' = \frac{x'}{6} + \frac{x'}{7} + z'$$

$$x = \frac{y + y'}{3} + \frac{y + y'}{4}, \quad y = \frac{t + t'}{4} + \frac{t + t'}{5}, \quad t = \frac{z + z'}{5} + \frac{x + x'}{7}$$

illetve:

$$x' = \frac{5}{6}y' + z', \quad y' = \frac{9}{20}t' + z', \quad t' = \frac{13}{42}x' + z'$$

$$x = \frac{7}{12}(y + y'), \quad y = \frac{9}{20}(t + t'), \quad t = \frac{11}{30}(z + z'), \quad z = \frac{13}{42}(x + x')$$

Ennek a határozatlan egyenletrendszernek (7 egyenlet, 8 ismeretlennel) az első három egyenletéből fejezzük ki x'-t, y'-t és t'-t.

$$x' = \frac{742}{297}z', \qquad y' = \frac{178}{99}z', \qquad t' = \frac{1580}{891}z'$$

Mivel x', y', t' természetes számok és minden együtthatójában a számláló és a nevező relatív prímszámok, ezért z' osztható kell legyen 297-tel, 99-cel és 891-gyel. Ez teljesül, ha z' osztható 891-gyel, mert a 99 és a 297 osztója a 891-nek. Így tehát $z' = 891 \cdot k$, ahol k természetes szám. Ezt figyelembe véve egyenleteink:

$$x' = 2226k, \qquad y' = 1602k, \qquad t' = 1580k.$$

Helyettesítsük be ezeket az eredeti egyenletrendszer utolsó négy egyenletébe:

$$x = \frac{7}{12}y + \frac{1896}{2}k, \quad y = \frac{9}{20}t + 711k, \quad t = \frac{11}{30}z + \frac{3267}{10}k, \quad z = \frac{13}{42}x + 689k$$

E négy egyenletből fejezzük ki x-et, y-t, z-t és t-t:

$$x = \frac{7206360}{4657}k, \quad y = \frac{4893246}{4657}k, \quad z = \frac{5439213}{4657}k, \quad t = \frac{3515820}{4657}k.$$

Tekintve, hogy x, y, z és t természetes számok, és a 4657 prímszám, kell, hogy a k szám $4657n$ alakú legyen, ahol n tetszőleges természetes szám. A megoldás:

$$x = 7206360n, \qquad x' = 10366482n, y = 4893246n, \qquad y' = 7460514n$$

$$z = 5439213n, \qquad z' = 4149387n, t = 3515820n, \qquad t' = 7358060n,$$

ahol x, y, z és t rendre a fehér, fekete, barna és tarka tehenek számát, és x', y',z', t' ugyanilyen színsorrendben a bikák számát jelentik. A végtelen sok megoldás között a legkisebb $n = 1$ esetén adódik. Ez a feladat a témája egy másik idei szakdolgozatnak, így én már ezzel részletesebben nem foglalkozom.

2.3. Diophantosz

Diophantosz (i. sz. 3.sz) visszatért a babiloni algebrához, ám lényegesen továbbfejlesztette. Tárgya szerint első és másodfokú, határozott és határozatlan egyenletekkel foglalkozott, viszont babiloni elődeivel szemben bevezetett algebrai jelöléseket, szimbólumokat, és görög elődeivel szemben nemcsak a természetes számokat tekintette számnak, hanem a törteket is. Az *Arithmetika* című 13 kötetes művéből 6 kötet maradt ránk, ebben 189 feladatot találunk a megoldásaikkal együtt. Az általa művelt algebrának, amely nem adja az egyenletek általános elméletét, hanem sokszor ügyes fogásokkal jut el a megoldáshoz, bizonyára voltak hagyományai a görög matematikában már *Diophantosz* előtt is. Ezeket azonban nem ismerjük, és ezért *Diophantoszt* tekintjük a szimbólumokat használó algebra úttörőjének. *Diophantoszi egyenlet*nek nevezzük az olyan egész együtthatós algebrai egyenletet, amelynek csak egész megoldásait keressük. A következő néhány példa Diophantosztól maradt ránk:

1.példa: *A 13-at, amely két négyzet összege, bontsuk fel két másik, racionális szám négyzetének összegére!*

Megoldás: *Diophantosz* úgy ügyeskedett, hogy a megoldást szolgáltató másodfokú egyenlet konstans tagjai kiessenek, tehát a konstansok összegének 13-nak kell lennie. Az ügyesség az ismeretlen megváltoztatásában rejlik. A meghatározandó két négyzet közül az egyiknek alapja (oldala) legyen $x + 2$. Ennek a négyzete:

$$x^2 + 4x + 4$$

A másik négyzet alapja legyen x valamely többszörösének és 3-nak a különbsége, pl.: $2x - 3$. Ennek négyzete:

$$4x^2 - 12x + 9$$

A két négyzet összege 13 kell, hogy legyen:

$$5x^2 - 8x + 13 = 13$$

$$5x^2 - 8x = 0$$

ahonnan

$$x = \frac{8}{5}$$

(az $x = 0$ megoldást nem vette figyelembe). A két négyzetlap tehát

$$x + 2 = \frac{18}{5}$$

és

$$2x - 3 = \frac{1}{5}$$

Általánosítva tehát $X^2 + Y^2 = 13$ alakban keressük a megoldást a racionális számok között, így az

$$(ax - 2)^2 + (bx + 3)^2 = 13$$

$$(ax+2)^2+(bx-3)^2=13$$

$$(ax-2)^2+(bx-3)^2=13$$

$$(ax+2)^2+(bx+3)^2=13$$

alakú egyenletek jöhetnek szóba, mivel ezen esetekben lesz a bal oldalon a konstans tag 13. Egy lehetőség van a 13-at két négyzetszám összegére bontani, ez pedig a 4 és a 9. Ezeket az egyenleteket megoldva kapjuk, hogy x lehet:

$$\frac{4a-6b}{a^2+b^2},\quad \frac{-(4a-6b)}{a^2+b^2},\quad \frac{4a+6b}{a^2+b^2},\quad \frac{-(4a+6b)}{a^2+b^2}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ilyen módon az egyenlet összes megoldása előáll.

2.példa: *Két szám aránya 3. A két szám négyzetösszegének és összegének aránya 5. Melyik ez a két szám?*

Megoldás: Ha két szám aránya 3, akkor az egyiket x-szel, a másikat $3x$-szel jelölöm. A négyzetösszegük:

$$10x^2,$$

az összegük pedig:

$$4x.$$

Az arányukra tehát:

$$\frac{10x^2}{4x}=5$$

$$10x=20$$

$$x=2$$

Tehát a két szám a 2 és a 6.

3. példa: *Bontsuk az egységet két részre és adjunk mindegyikhez egy-egy adott számot úgy, hogy az összegek szorzata egy racionális szám négyzete legyen!*

Megoldás: A feladatot *Diophantosz* ügyes találgatással oldotta meg a következőképpen:

Legyen a két adott szám 3 és 5, az egység két része pedig x és $1-x$. A feltételek szerint az $(x+3)$ és a $(6-x)$ szorzata:

$$(x+3)\cdot(6-x) = 3x+18-x^2$$

egy racionális szám négyzete kell, hogy legyen. Ezt a négyzetet *Diophantosz* találgatással $4x^2$-nek választotta.

Ekkor

$$3x+18-x^2 = 4x^2$$

lenne, azaz teljesülni kellene az

$$5x^2 = 3x+18$$

másodfokú egyenletnek.

Diophantosz azonban már tudta, hogy az

$$ax^2 = 2bx + c$$

alakú másodfokú egyenletet olyan eljárással lehet megoldani, amelyet a mi jelöléseinkkel az

$$x = \frac{b+\sqrt{b^2+ac}}{a}$$

képlet fejez ki (negatív gyököt nem vett figyelembe), és csak akkor remélhet racionális megoldást, ha a b^2+ac (diszkrimináns) racionális szám négyzete. A $4x^2$ választás tehát nem volt szerencsés, mert az egyenletrendezésnél az x^2 együtthatója $4+1=5$ lett, és így a

$$b^2+ac = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (4+1)\cdot 18$$

nem racionális szám négyzete. A $4x^2$-ben tehát a 4 együttható helyett olyan y^2-et kell választani, hogy

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (y^2+1)\cdot 18 = 18y^2 + \frac{81}{4}$$

egy racionális szám négyzete legyen.

Ez természetesen akkor is teljesül, ha ennek a kifejezésnek a négyszerese, tehát $72y^2+81$ valamilyen racionális szám négyzete. Ezt a négyzetet *Diophantosz* $(8y+9)^2$-nel jelölte, mert így a

$$72y^2 + 81 = (8y+9)^2$$

egyenletben a konstans tag 0. Az egyenlet tehát:

$$72y^2 = 64y^2 + 144y,$$

ahonnan

$$y = 18$$

(az $y = 0$ a feltételeknek nem felel meg), és

$$y^2 = 324.$$

A sorozat értékének helyes megválasztása tehát nem a $4x^2$, hanem a $324x^2$. Így a megoldandó egyenlet:

$$3x + 18 - x^2 = 324x^2$$

vagy

$$325x^2 = 3x + 18.$$

Így

$$b^2 + ac = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 325 \cdot 18 = \left(\frac{153}{2}\right)^2$$

és a fenti eljárás szerint:

$$x = \frac{6}{25}.$$

A keresett számok tehát $\frac{6}{25}$ és $\frac{19}{25}$. Ezeket az ellenőrzés:

$$\left(\frac{6}{25} + 3\right) \cdot \left(\frac{19}{25} + 5\right) = \frac{81}{25} \cdot \frac{144}{25} = 9 \cdot \left(\frac{12}{25}\right)^2$$

helyesnek találja.

3. fejezet

Európa matematikája a középkorban és a reneszánszban

3.1. Leonard Pisano (Fibonacci)

Fibonnacci (élt: 1170 - 1250) néven vált ismertté *Leonardo Pisano*, olasz matematikus. Apja a gazdag itáliai városnak, Pisának volt kereskedelmi ügyvivője Algírban. *Leonardo* itt tanulta a matematika alapjait üzleti útjain pedig megismerte Kelet műveltségét és ezen belül matematikáját. Az összegyűjtött és az általa kiegészített aritmetikai és algebrai ismereteket a *Liber Abaci* (Könyv az abakuszról) című művében foglalta össze. *Leonardo* nevét leginkább a róla elnevezett *Fibonacci-sorozat* őrizte meg. Ez a sorozat a következő feladatból született:

Feladat: *Hány pár nyúl származik egy évben egyetlen pártól, ha minden pár havonta egy új párt szül, és minden új pár kéthónapos korától kezdve válik tenyészképessé, és közben egyetlen nyúl sem pusztul el?*

A megoldást szemlélteti a következő kis táblázat. Ennek első sorában n a hónapok számát, a második sorban pedig f_n az n-edik hónaphoz tartozó nyúlpárok számát tűnteti fel.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Ha a sorozatot nem zárjuk le a 12. elemével, hanem elemeit vég nélkül képezzük, akkor nyerjük a *Fibonacci-féle sorozat*ot, amely képzési szabálya:

$$f_1 = f_2 = 1 \text{ és } f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

Ebben az alakban egy tag kiszámításához szükség van az őt megelőző két tag ismeretéhez. Felmerült tehát az igény a *Fibonacci számok* explicit módon való előállítására. Ez *Jacques Philippe Marie Binet* francia matematikusnak sikerült, aki jelentős eredményeket ért el a számelméletben. Az ő nevéhez fűződik a *Binet-formula.*

Tétel: $\forall n \in N$ természetes számra

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Ez a formula a Fibonacci sorozat zárt alakja és Binet-formulának nevezzük.

Bizonyítás: Adott a Fibonacci-sorozat:

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \qquad f_0 = 0, \qquad f_1 = 1.$$

Határozzuk meg a sorozat $\mathrm{r}^n(\mathrm{r} \neq 0)$ alakú megoldásait. Legyen

$$f_{n+2} = r^{n+2}, \quad f_{n+1} = r^{n+1}, \quad f_n = r^n, \quad r \neq 0.$$

Ekkor, behelyettesítve az egyenletbe, a következőt kapjuk:

$$r^{n+2} - r^{n+1} - r^n = 0.$$

r^n-nel egyszerűsítve az $r^2 - r - 1 = 0$ karakterisztikus egyenletet kapjuk, amelynek a megoldásai:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Az $r_1^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ és $r_2^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ megoldások lineáris kombinációja is megoldása az egyenletnek, vagyis $f_n = Ar_1^n + Br_2^n$.

A kezdeti feltételekből $(f_0 = 0, f_1 = 1)$ meghatározhatjuk A-t és B-t:

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 0 \\ A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} A = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ B = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{array}$$

Ebből következik a Binet-formula:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Adott az alábbi rekurzió:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

valamint kezdeti feltételek:

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 2$$

A megoldást $a_n = x^n$ alakban keressük, de itt a megoldás nem áll elő mértani sorok kombinációjaként, mivel $a_n = n \cdot 2^n$. Ezen esetekben segít a lineáris algebrai módszer.

A rekurzió mátrixa könnyen kiszámítható a rekurzió együtthatóiból. Ebben az esetben ez a mátrix:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

E mátrix egyetlen sajátértéke a 2.

Az áttérés mátrixa legyen:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ezután kiszámítható a mátrix Jordan-féle normálalakja:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Innen az eredeti mátrix hatványa kiszámítható:

$$\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} 2^n - 2n2^{n-1} & -4n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & 2^n + 2n2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Az $\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}^T$ sorvektorra igaz, hogy:

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}^T \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}^T$$

Ezért:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}^T \cdot \mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}^T$$

Így kapjuk, hogy $a_n = 2 \cdot n \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^n$.

3.2. Gerolamo Cardano

Cardano (élt: 1501 - 1576) a 16. században élő olasz matematikus, fizikus, valamint korának leghíresebb orvosa volt. Nevét a matematikában két könyvével örökítette meg. Fő munkája az 1545-ben megjelent *Ars magna sive de regulis algebraicis* (A nagy tudomány, vagyis az algebrai szabályokról). E művében összefoglalta korának algebrai ismereteit, de található benne néhány önálló eredmény is. Könyvében szerepel a róla elnevezett képlet, a harmadfokú egyenlet megoldó formulája. E körül azonban kellemetlen, sok félreértésre okot adó vita fejlődött ki. Történt, hogy *Scipione del Ferro*, a bolognai egyetem professzora megtalálta az $x^3 + bx = c$ alakú harmadfokú egyenlet megoldóképletét. A képletet csak vejével és egyik barátjával, a szintén matematikus *Antonio Maria Fiore*val közölte. *Fiore* versenyre hívta ki *Tartaglia* brescai számolómestert, aki értesülvén arról, hogy kihívója harmadfokú egyenleteket is szándékozik neki feladni, erős fejtörés árán szintén rájött a fenti egyenlet megoldóképletére, sőt még az $x^3 = bx + c$ alakú egyenlet megoldására is. Az 1535-ben megtartott matematikai párbaj *Tartaglia* teljes győzelmével végződött. *Cardano*, értesülve *Tartaglia* eredményeiről, igyekezett titkát megtudni. Többszöri unszolásra *Tartaglia* el is árulta a képletet, de *Cardano* az *Ars magna*ban nyilvánosságra hozta a megoldást.

Cardano érdeme a felfedezésben az, hogy *Tartaglia* képletét általánosította, illetve megmutatta, hogy minden általános harmadfokú algebrai egyenlet megoldása visszavezethető az $x^3 + bx = c$ alakúéra. Ő sem boldogult azonban az úgynevezett reducibilis esettel, amelynél a megoldóképlet négyzetgyökjelei alatt negatív számok jelentkeznek. E rejtély megfejtésére való törekvése néhány értékes megfigyelést eredményezett a gyökök és az együtthatók összefüggésére. Különösen a másodfokú egyenlet gyökeire vonatkozó vizsgálatai segítették elő a komplex számok fogalmának a kialakulását.

Cardano érdeme az is, hogy megmutatta, hogy minden $ax^3+bx+cx+d = 0$ harmadfokú egyenlet olyan alakra hozható, amelyben a másodfokú tag már nem szerepel. A következő feladatban ezt a módszert, majd pedig az általános harmadfokú egyenlet megoldóképletét vezetjük le.

1. feladat: *Alakítsuk át az új ismeretlen bevezetésével az* $x^3 - 3x^2 - 3x + 11 = 0$ *egyenletet úgy, hogy ne lépjen fel benne másodfokú tag!*

Megoldás: Legyen $x = y + h$, ahol y az új ismeretlen és h értékét majd úgy fogjuk megválasztani, hogy az egyenletben y^2-es tag ne legyen. A helyettesítés után:

$$(y+h)^3 - 3(y+h)^2 - 3(y+h) + 11 = 0.$$

A műveletek elvégzése után rendezzünk y fogyó hatványai szerint:

$$y^3 + (3h-3)y^2 + (3h^2 - 6h - 3)y + (h^3 - 3h^2 - 3h + 11) = 0.$$

Azért, hogy az y^2 együtthatója 0-vá váljék, a h értékét 1-nek kell választani, ekkor az

$$y^3 - 6y + 6 = 0$$

egyenlethez jutottunk, amely

$$y^3 + py + q = 0$$

alakú.

Cardano-képlet: A harmadfokú egyenlet általános alakja:

$$ay^3 + by^2 + cy + d = 0 \quad (a \neq 0).$$

Megoldóképletének levezetéséhez legyen $y := x - \frac{a}{3}$, ekkor az általános egyenlet a következő alakban írható fel:

$$x^3 - \frac{a^3}{27} - ax^2 + \frac{xa^2}{3} + ax^2 + \frac{a^3}{9} - \frac{2xa^2}{3} + bx - \frac{ab}{3} + c = 0.$$

Ezt átalakítva kapjuk:

$$x^3 + px + q = 0.$$

x_0 jelölje ennek egy gyökét a komplex számok halmazán. Most nézzük az $u^2 - x_0u - \frac{p}{3}$ másodfokú egyenletet, melynek gyökei legyenek α és β. A másodfokú egyenlet gyökeire és együtthatóira vonatkozó összefüggések szerint:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta=x_0 \\ \alpha\beta=-\frac{p}{3} \end{array}\right\}$$

A második egyenletből következik, hogy $3\alpha\beta+p=0$. Helyettesítsük be az első egyenletben x_0-ra kapott összefüggést az $x^3+px+q=0$ egyenletbe:

$$\alpha^3+\beta^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+p\alpha+p\beta+q=0$$

$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\beta+p)\beta+q=0$$

$$\alpha^3+\beta^3=-q$$

Tehát $\alpha^3+\beta^3=-q$, és az $\alpha\beta=-\frac{p}{3}$ egyenletet harmadik hatványra emelve $\alpha^3\beta^3=-\frac{p^3}{27}$. Ez éppen azt jelenti, hogy α^3 és β^3 gyökei a $z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$ egyenletnek. A másodfokú egyenlet megoldóképlete szerint megoldásai:

$$z_{1,2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

ahol $z_1=\alpha^3, z_2=\beta^3$, így tehát (komplex) köbgyököt vonva:

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\qquad \beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Ekkor

$$x_0=\alpha+\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

a *Cardano-képlet*. Ezek után x_0 ismeretében $ay^3+by^2+cy+d=0$ gyökei már könnyen meghatározhatóak.

A következőkben bemutatok egy példát a képlet alkalmazására.

2. feladat:

Oldjuk meg a

$$z^3-6z+4=0$$

egyenletet!

Megoldás: A *Cardano-képlet alapján*:

$$z_0 = \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} =$$

$$\sqrt[3]{-2 + \sqrt{4 + (-8)}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{4 + (-8)}} = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-4}}$$

A $\sqrt{-4}$-nek azonban a valós számok körében nincs értelme. A XVI. század matematikusai értelmetlenül álltak e megdöbbentő jelenség előtt: a megoldóképlet időnként "csődöt mond", pedig az egyenletnek van gyöke. Ezt az esetet nevezték el *casus irreducibilis*nek. A rejtély kidolgozásához *Raffaelo Bombelli* olasz matematikus kezdett hozzá 1572-ben. *Bombelli* azt javasolta, hogy próbáljuk meg a $-2+\sqrt{4}$-et, azaz a $-2+2\sqrt{-1}$-et, és általában az $a+b\sqrt{-1}$ alakú kifejezéseket is számnak tekinteni. Ezek persze nem valós számok, itt az a valós szám, a $b\sqrt{-1}$ azonban nem valódi, hanem képzetes, vagy imaginárius szám, az $a+b\sqrt{-1}$ pedig együtt komplex szám. Az imaginárius szó kezdőbetűjéből származik a $\sqrt{-1} = i$ jelölés.

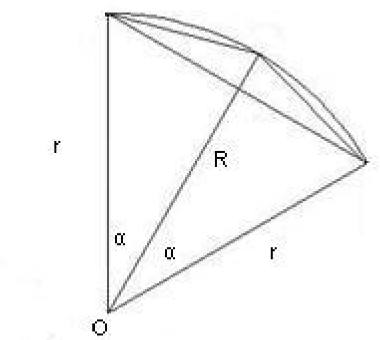
4. fejezet

Feladatok a XVI.-XIX. századból

4.1. Francois Viéte

Viéte (élt: 1540 - 1603) kiváló francia matematikus volt, végzettségét tekintve jogász. Fiatal korában támadt egy ötlete új csillagászati elmélethez, amely a kopernikuszi rendszert fejlesztette volna tovább. Ezért kezdett el a matematikával foglalkozni. Igyekezett szimbólumokat használni, az együtthatókat is betűkkel helyettesítette. Igen jelentős eredménye a végtelen sorozatok felfedezése, melynek segítségével sikerült meghatároznia a π értékét 10 tizedes pontosságig. A következőekben bemutatom, hogyan határozta meg ezt a végtelen sorozatot:

Az következő ábra mutatja az r sugarú körbe rajzolt n oldalú és $2n$ oldalú szabályos sokszög egy-egy központi háromszögét.



Az n oldalú sokszög területe legyen t_n, a $2n$ oldalúé t_{2n}. Az n oldalú sokszög beírt körének sugara R. A két sokszög területe:

$$t_n = n \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \sin \frac{360°}{n}$$

$$t_{2n} = 2n \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \sin \frac{180°}{n}.$$

A kettő aránya:

$$\frac{t_n}{t_{2n}} = \frac{\sin \frac{360°}{n}}{2 \sin \frac{180°}{n}} = \frac{2 \sin \frac{180°}{n} \cdot \cos \frac{180°}{n}}{2 \sin \frac{180°}{n}} = \cos \frac{180°}{n}.$$

Írjunk fel ilyen területarányokat, kezdve az $n = 4$ esettel, vagyis a négyzettel, és folytatva a rendre megduplázott oldalszámú sokszögekkel.

$$\frac{t_4}{t_8} = \cos \frac{90°}{2}$$

$$\frac{t_8}{t_{16}} = \cos \frac{90°}{4}$$

$$\frac{t_{16}}{t_{32}} = \cos \frac{90°}{8}$$

$$\vdots$$

$$\frac{t_{2^{n+1}}}{t_{2^{n+2}}} = \cos \frac{90°}{2^n}.$$

Az első n sor szorzata:

$$\frac{t_4}{t_{2^{n+2}}} = \cos \frac{90°}{2} \cdot \cos \frac{90°}{4} \cdot \cos \frac{90°}{8} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{90°}{2^n}.$$

Ekkor *Viéte* így gondolkozott: $t_4 = 2r^2, t_{2^{n+2}}$ pedig már majdnem az r sugarú kör területe. Minél nagyobbra növelem n értékét, annál inkább írható $t_{2^{n+2}}$ helyett az $r^2\pi$ érték. Ha végtelen sok arányt veszek figyelembe, akkor

$$\frac{2r^2}{r^2\pi} = \cos \frac{90°}{2} \cdot \cos \frac{90°}{4} \cdot \cos \frac{90°}{8} \cdot \ldots.$$

Egyszerűsítve:

$$\frac{2}{\pi} = \cos \frac{90°}{2} \cdot \cos \frac{90°}{4} \cdot \cos \frac{90°}{8} \cdot \ldots.$$

A gondolatmenet nyilvánvalóan hiányos, hiszen a végtelen szorzat konvergenciájának a fogalmát *Viéte* még nem ismerte, de végülis ezzel a képlettel a π értékét 10 tizedesjegy pontossággal helyesen határozta meg.

Tétel (Viéte-formulák):

Az $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ alakban felírt másodfokú egyenlet gyökeire a következő összefüggések állnak fent:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Bizonyítás:

A két gyök összege:

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

A két gyök szorzata:

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{4ac}{4a^2} = -\frac{c}{a}$$

4.2. René Descartes

Descartes(élt: 1596 - 1650) nyolc éves korától a IV.Henrik által alapított La Fleche-i jezsuita líceumban tanult, amely egyike volt Európa legkiválóbb iskoláinak. Kitűnően beszélt latinul, megismerhette a kor legújabb tudományos felfedezéseit és nézeteit (például *Galilei*nek a Föld forgásáról alkotott elképzeléseit). A matematikában elsősorban a geometriai munkássága miatt ismert, amit az *Értekezés a módszerről* mű függelékeként közölt *Geometria* nevű munkában ír le. A síkbeli Descartes-féle koordináta-rendszerben egy P pont helyzetét az xy síkon az (x, y) koordináta-kettőssel adhatjuk meg. X jelenti a P pont előjeles távolságát az y-tengelytől, y pedig a P pont előjeles távolságát az x-tengelytől. A két tengely metszéspontja a koordináta-rendszer kezdőpontja vagy origója. Térbeli Descartes-koordináta-rendszerben egy P pont helyzetét az xyz térben az (x, y, z) koordináta-hármassal adhatjuk meg. X a P pont előjeles távolsága az yz síktól, y a P pont előjeles távolsága az xz síktól, és z a P pont előjeles távolsága az xy síktól. A descartes-i koordináta-rendszernek köszönhetően egy görbe algebrai egyenlettel leírható. *Descartes Geometria* című könyve három részre oszlik: az első kettő témája az analitikus geometria, a harmadik könyv algebrai fejtegetéseket tartalmaz. Az alábbi feladatokon keresztül bemutatom *Descartes* speciális magasabb fokú egyenletekre vonatkozó megoldását, a Descartes-féle előjelszabályt, valamint egy koordinátageomteria témájú feladatot.

1. feladat: *Oldjuk meg az* $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ *egyenletet!*

Az egyenlet ügyes átalakításokkal szorzattá írható:

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

$$x^3(x-4) - 19x(x-4) + 30(x-4) = 0$$

$$(x-4)(x^3 - 19x + 30) = 0$$

Innen

$$x_1 = 4 \qquad \text{és} \qquad x^3 + 19x + 30 = 0.$$

Az utóbbi egyenletből:

$$x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x - 10x + 30 = 0$$

$$x^2(x-3) + 3x(x-3) - 10(x-3) = 0$$

$$(x-3)(x^2 + 3x - 10) = 0$$

Ezért

$$x_2 = 3 \qquad \text{és} \qquad x^2 + 3x - 10 = 0.$$

A szorzattá alakítást tovább folytatva:

$$x^2 + 5x - 2x - 10 = 0$$

$$x(x+5) - 2(x+5) = 0$$

$$(x+5)(x-2)=0.$$

Eszerint

$$x_3=-5 \quad \text{és} \quad x_4=2.$$

A megoldásokból felírható a negyedfokú egyenlet gyöktényezős alakja:

$$(x-4)(x-3)(x+5)(x-2)=0.$$

Tétel: Descartes-féle előjelszabály

A csupán valós gyökökkel rendelkező algebrai egyenletnek annyi pozitív gyöke van, ahány jelváltás van a zérusra és az ismeretlen hatvńykitevői szerint rendezett egyenletben, és annyi negatív gyök, amennyi az azonos előjelkövetkezések száma.

Ezt alkalmazva az előbbi példára:

Az egyenletből felírható előjelsorozat:

$$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0 \Longrightarrow + - - + -$$

Tehát jelváltás 3-szor történik, azonos előjelkövetkezés pedig 1-szer. Ebből következik, hogy az egyenletnek 3 pozitív, és 1 negatív gyöke van.

2. feladat: *Mi a sík azon pontjainak a mértani helye, amelyek a* $(0;1)$ *ponttól kétszer olyan távol vannak, mint a* $(2;0)$ *ponttól?*

A mértani hely pontjainak koordinátáit (változók) jelöljük x és y betűkkel. Ekkor a $P(x;y)$ pontoknak ki kell elégíteniük az

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

feltételt. Ennek négyzetre emelése és rendezése után nyerjük az

$$\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$$

egyenletet, amely felismerhetően a $C\left(\frac{8}{3};-\frac{1}{3}\right)$ középpontú, $r=\frac{2\sqrt{5}}{3}$ sugarú körnek az egyenlete.

4.3. Isaac Newton

Newton (élt: 1643 - 1727) kiváló angol matematikus, fizikus és csillagász volt. 19 évesen került a cambridgei Trinity-college-ba, ekkor kezdett komolyabban foglalkozni matematikával és természettudományokkal. *Kepler Opticá*ján, *Eukleidész* angol nyelvű *Elemek* című könyvén, *Descartes Geometriá*ján, *Viéte*, *Wallis* művein nevelkedett természettudossá. Ezek olvasása közben nem csupán jegyzeteket készített, hanem kutatott az olvasottaknál egyszerűbb gondolatmenetek és új tételek után. A binomiális tételt és a "fluxiók" módszerét 1665 előtt, még 23 éves korában találta fel. 1666-ban eshetett meg a "Newton almája" címen elhíresült történet. Eszerint *Newton* egy almafa alatt ült, és egy leeső alma indította el benne azt a gondolatsort, amely az általános nehézkedés törvényének felfedezéséhez vezetett. 1669-ben az a megtiszteltetés érte, hogy kiváló professzora *Barrow* lemondott, és a tanszéket a 27 éves *Newton*nak adta át. Ő 30 éven keresztül látta el nagy buzgalommal professzori teendőit. Fő műve, a *Philosophiae naturalis principia mathematica* (A természettudomány matematikai alapjai), melynek nagy tudományos tekintélyét köszönhette, 1687-ben jelent meg Londonban. Bár *Newton*t a fizika sorolja legnagyobbjai közé, a matematikus *Newton* is nagyot alkotott. *Leibnitz*-cel együtt a differenciál- és integrálszámítás feltalálója volt. A binomiális tétel tört- és negatív kitevők esetére való általánosítása nyomán felfedezte a binomiális sorokat.

A következő feladat *Newton* egy játékos feladványa, majd bemutatom egy polinom Newton-féle felbontását egy példán keresztül:

1. feladat: *Három legelőn mindig egyformán gazdagon és gyorsan nő a fű. Az egyik mező területe* $3\frac{1}{3}$*, a másiké* 10*, a harmadiké pedig* 24 *hektár. Az elsőt* 12 *tehén lelegeli* 4 *hét alatt, a másodikat* 21 *tehén* 9 *hét alatt. Hány tehén legeli le a harmadik legelőt* 18 *hét alatt?*

Feltételezzük, hogy minden tehén ugyanannyi idő alatt ugyanannyi füvet fogyaszt el, éspedig 1 tehén 1 hét alatt z mennyiségűt. Jelöljük továbbá az 1 hektáron meglévő fű mennyiségét x betűvel, és az 1 hektáron 1 hét alatt nőtt fű mennyiségét y betűvel.

Egy heti legelés után az első legelőn megmaradt fű mennyisége:

$$3\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}y - 12z$$

A második hét utáni maradék:

$$3\frac{1}{3}x + 2\cdot 3\frac{1}{3}y - 2\cdot 12z$$

A harmadik hét után maradt:

$$3\frac{1}{3}x + 3\cdot 3\frac{1}{3}y - 3\cdot 12z$$

A negyedik hét után:

$$3\frac{1}{3}x + 4\cdot 3\frac{1}{3}y - 4\cdot 12z$$

A feladat szerint az utolsó maradék nulla, tehát

$$3\frac{1}{3}x + 4\cdot 3\frac{1}{3}y - 4\cdot 12z = 0.$$

Ugyanilyen gondolatmenettel, mivel a második legelőn 9 hét múlva nem maradt fű:

$$10x + 9\cdot 10y - 9\cdot 21z = 0.$$

A harmadik legelő füvét fogyassza el t tehén 18 hét alatt, akkor

$$24x + 18\cdot 24y - 18tz = 0.$$

A megoldást kezdjük azzal, hogy mindhárom egyenletet elosztjuk z-vel, ekkor

$$\left.\begin{array}{l}\frac{10}{3}\cdot\frac{x}{z} + \frac{40}{3}\cdot\frac{y}{z} = 48,\\ 10\cdot\frac{x}{z} + 90\cdot\frac{y}{z} = 189,\\ 24\cdot\frac{x}{z} + 432\cdot\frac{y}{z} = 18t.\end{array}\right\}$$

Legyen most

$$\frac{x}{z} = u \quad \text{és} \quad \frac{y}{z} = v$$

ekkor

$$\left.\begin{array}{l}10u + 40v = 144\\ 10u + 90v = 189\\ 24u + 432v = 18t\end{array}\right\}$$

A második egyenletből az elsőt kivonva kapjuk:

$$50v = 45$$

$$v = 0.9$$

Ezt az első egyenletbe behelyettesítve:

$$10u + 40 \cdot 0,9 = 144$$

$$10u + 36 = 144$$

$$10u = 108$$

$$u = 10,8$$

Így már a harmadik egyenletben is csak egy ismeretlen marad:

$$24 \cdot 10,8 + 432 \cdot 0,9 = 18t$$

$$259,2 + 388,8 = 18t$$

$$648 = 18t$$

$$t = 36$$

A harmadik legelőt tehát 18 hét alatt 36 tehén legeli le.

2. feladat: *Legyen adott az* $f_3(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$ *harmadfokú polinom és a fokszámának megfelelően* 3 *különböző x érték, például:* $x_0 = 1$, $x_1 = 3$ *és* $x_2 = 4$, *amelyeket alappontoknak szokás nevezni. Bontsuk fel az* $f_3(x)$ *polinomot olyan összegre, amelyben a konstans tagon kívül szerepel valamilyen együtthatóval egy* $(x-1)$*-es, egy* $(x-1)(x-3)$*-as és egy* $(x-1)(x-3)(x-4)$*-es tag!*

Megoldás:

A megoldáshoz hozzásegít a következő osztássorozat:

$$(2x^3 + 3x^2 + 4x - 5) : (x - 1) = 2x^2 + 5x + 9$$

maradék: 4.

$$(2x^2 + 5x + 9) : (x - 3) = 2x + 11$$

maradék: 42.

$$(2x + 11) : (x - 4) = 2$$

maradék: 19.

Helyettsítsünk most visszafelé a következő módon:

Az utolsó osztás szerint:

$$2x + 11 = 2(x - 4) + 19.$$

A második osztás alapján:

$$2x^2 + 5x + 9 = (2x + 11)(x - 3) + 42 = 2(x - 3)(x - 4) + 19(x - 3) + 42.$$

az első osztásból:

$$f_3(x) = 2x^3+3x^2+4x-5 = (2x^2+5x+9)(x-1)+4 = 2(x-1)(x-3)(x-4)+19(x-1)(x-3)+42(x-1)+4.$$

Így éppen a kívánt felbontást kaptuk.

4.4. Leonhard Euler

Euler apja kálvinista lelkész volt, aki fiát is papnak szánta. Az ifjú azonban nagy igyekezettel látogatta *Johann Bernoulli* matematikaóráit, akinek fiaival is összebarátkozott. *Bernoulli* hamar felismerte a rendkívüli tehetséget, és külön foglalkozott vele. Amikor fiai, *Nicolaus* és *Daniel* elfogadták Oroszország első tudományos intézetének, a szentpétervári akadémiának meghívását, kieszközölték, hogy *Euler* is velük mehessen. Itt lehetősége nyílt fizikával és matematikával foglalkozni. 1741-ben Berlinbe költözött, ahol az egyetem matematikai osztályának vezetőjeként dolgozott 25 éven keresztül. Ezután Katalin cárnő hívására visszaköltözött Oroszországba, ahol élete végéig élt. Ekkor már majdnem teljesen vak volt, azonban munkalendülete még töretlen maradt. Káprázatos memóriával és belső látással diktálta műveit inasának és tanítványainak. Életében 530 könyve és értekezése jelent meg. Az alábbiakban bemutatok néhány feladatot, amelyek tőle származnak:

1. feladat: *Az $x^2 = 2$ egyenlet pozitív gyökét, tehát a $\sqrt{2}$-t fejezzük ki lánctört segítségével!*

Az egyenlet így írható:

$$x^2 + x = x + 2.$$

Ebből:

$$x(x+1) = x + 2$$

$$x(x+1) = x + 1 + 1.$$

Végül

$$x = 1 + \frac{1}{1+x}.$$

A nevezőben az egyenlet állítása szerint x helyébe $1 + \frac{1}{1+x}$ írható. Ekkor

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+x}}.$$

Ebbe az egyenletbe és a következőkbe is az $x = 1 + \frac{1}{1+x}$ helyettesítés vég nélkül folytatható. Így nyerjük a következő végtelen, periódikus lánctörtet:

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Tehát $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\ddots}}}}$

Alkalmazva az alapvető ismétlődésképletet könnyen kiszámíthatjuk ennek a láncörtnek a közelítő tötjeit: $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \ldots$, ahol mindegyik egymásutáni tört alakja úgy adódik, hogy vesszük a számlálót meg a nevezőt az előző időszakból, a következő időszakba való nevezőként, azután hozzáadjuk az előző nevezőjéhez az új számlálót.

Szemléletesen:

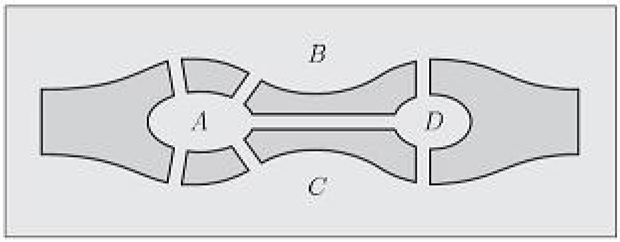
$$1, \quad 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, \quad 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}, \quad 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{17}{12}, \quad 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=\frac{41}{29}, \quad \dots$$

Ezen közelítő törtek a $\sqrt{2}$-höz konvergálnak, és egyre kisebb hibával közelítik. Például ha a $\sqrt{2}$ közelítő értéke $\frac{41}{29}$, akkor az elkövetett hiba:

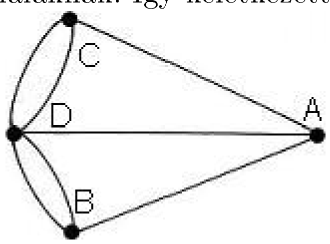
$$\left|\sqrt{2}-\frac{41}{29}\right| < \frac{1}{29^2} \approx 0,001189.$$

2. feladat: *Lehet-e a Königsberg városán átfolyó Pregel folyócska hídjain keresztül olyan sétát tenni, hogy ennek során minden hídon pontosan egyszer haladjunk át?*

Euler korában Königsberg városának A, B, C és D részeit 7 híd kötötte össze, az alábbi térképvázlat szerint:



Az egyes részeket feleltessük meg négy pontnak és a hidakat a pontokat összekapcsoló vonalaknak. Így keletkezett az alábbi ábra:



A feladat szerint, ha egy pontból elindulunk, akkor oda, egy másik úton vissza is kell térnünk. Közben minden ponton át kell haladnunk, tehát az előbbi megállapítás minden pontra vonatkozik. Csak olyan pontokból és pontokat összekötő vonalakból álló hálózaton tudunk a kívánalmaknak megfelelő módon végigmenni, amelyeknek minden pontjához páros számú vonal vezet. A königsbergi hidakat jelképező rajzon viszont minden pontból páratlan út indul ki, tehát a séta a megkövetelt módon nem hajtható végre.

Felhasznált irodalom

[1.] Dr. Lévárdi László – Sain Márton: *Matematikatörténeti feladatok*, Tankönyvkiadó, Bp., 1982

[2.] Sain Márton:*Nincs királyi út*,Gondolat, Bp., 1986

[3.] B. L. Van Der Waerden: *Egy tudomány ébredése*, Gondolat, Bp., 1977

[4.] Bizám György, Császár Ákos, Freud Róbert, Gyarmati Edit, surányi János, Turán Pál, Vincze István:*Nagy pillanatok a matematika történetében*, Gondolat, Bp., 1981.

[5.] Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC*, Nemzeti tankönyvkiadó, Bp., 1993

[5.] I. N. Bronstejn, K. A. Szemengyajev, G. Musiol, H. Mühlig: *Matematikai kézikönyv*, Typotex, Bp., 2006

[5.] Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös kiadó, Bp., 2007

[6.] http://www.tankonyvtar.hu/konyvek/uj-matematikai-mozaik

[7.] http://hu.wikipedia.org/wiki/Kezdőlap

[7.] http://www.cs.elte.hu