Hatványsorok és alkalmazásaik

Szakdolgozat

Készítette: Vass Lajos
Matematika B.Sc szak, matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Bátkai András, egyetemi docens
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2011

Tartalomjegyzék

1. Sorozatok **4**

1.1. Valós számsorozatok definíciója 4

1.2. Valós számsorozatok konvergenciája 4

2. Végtelen sorok **7**

2.1. A végtelen sor definíciója 7

2.2. A végtelen sorok konvergenciája 7

2.3. Műveletek végtelen sorokkal 11

3. Hatványsorok Taylor-polinomok, Taylor-sorok **14**

3.1. Függvénysorozatok 14

3.2. Hatványsorok 14

3.3. Műveletek hatványsorokkal 19

3.4. Taylor-polinomok, Taylor-sorok 21

3.5. Maradéktagok 22

3.6. Néhány egyszerűbb függvény hatványsora 23

4. A hatványsorok alkalmazási területei **28**

4.1. Közelítő számítások elvégzése 28

4.2. Differenciálegyenletek megoldása 29

4.3. Műveletek trigonometrikus függvényekkel 32

4.4. Műveletetek hiperbolikus függvényekkel 33

4.5. Fizikai mennyiségek becslése 34

5. Összegzés **37**

Bevezetés

A hatványsorok kiemelkedően fontos szerepet töltenek be a matematikai analízisben. A szakdolgozat betekintést nyújt a hatványsorok elméletébe, felhasználva a valós számsorozatok és a végtelen sorok tulajdonságait. Bemutatja a hatványsorok alapvető tulajdonságait, a hatványsorokra vonatkozó tételeket. Ismerteti néhány egyszerűbb függvény hatványsorát. A hatványsorok a matematika számos területén alkamazhatóak. A szakdolgozat példákon át világít rá néhányra ezek közül. Ezek a közelítő számítások elvégzése, a differeenciálegyenletek megoldása, számolás trigonometrikus és hiperbolikus függvényekkel. Hatványsorok segítségével ki lehet számolni fizikai mennyiségeket, illetve azoakat közelíteni. A szakdolgazat erre is mutat egy példát.

1. fejezet

Sorozatok

1.1. Valós számsorozatok definíciója

1.1.1. Definíció. *Valós számsorozatnak nevezünk egy olyan függvényt, melynek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza, értékkészlete pedig a valós számok halmaza. A sorozatot* (a_n)*-nel jelöljük. Az* (a_n) *sorozat* n*-edik tagja (a függvény* n*-ben felvett értéke)* a_n*.*

A számsorozatot akkor tekintjük adottnak, ha bármely n természetes szám esetén ismerjük az a_n értékét. Az (a_n) sorozat megadására több mód is van. Az (a_n) sorozat megadható

1. képlettel. Például: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
2. rekurzióval. Például: $a_1 := 4$,$a_2 := 9$,$a_3 := 6$ $a_n := 8a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3}$
3. egyéb szöveges utasítással. Például: a_n az n-edik pramszám.

1.2. Valós számsorozatok konvergenciája

1.2.1. Definíció (Konvegencia). *Ha* (a_n) *sorozatnak létezik határértéke (jelölje* a*), továbbá bármely* $\varepsilon > 0$ *valós számhoz létezik olyan* $N_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$ *küszöbindex, hogy ha* $n \geq N_\varepsilon$*, akkor* $|a_n - a| < \varepsilon$*, akkor a számsorozat konvergens, vagyis* $a_n \to a$ *(*a_n *tart* a*-hoz).*

1.2.2. Példa. *Az* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *konvergens sorozat, határértéke* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$*.*

1.2.3. Megjegyzés. *Ha* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *a sorozatot nullasorozatnak nevezzük.*

1.2.4. Definíció (Divergencia). *Az (a_n) sorozatra azt mondjuk, hogy divergens, ha nem konvergens.*

1.2.5. Példa. *Az $a_n = (-2)^n$ sorozat divergens.*

1.2.6. Definíció. *Egy (a_n) valós számsorrozat korlátos, ha létezik olyan $K > 0$ valós szám, melyre $|a_n| < K$ bármely n esetén.*

1.2.7. Tétel. *Minden monoton korlátos sorozat konvergens.*

1.2.8. Tétel (Műveletek konvergens sorozatokkal). *Legyenek (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok. Ekkor a velük végzett műveletek eredménye a következő:*

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

1.2.9. Tétel (Bolzano–Weierstrass-tétel). *Minden korlátos sorozatnak létezik konvergens részsorozata.*

1.2.10. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakrtérium). *Az (a_n) sorozat konvergens akkor, és csak akkor, ha bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $N_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$ köszöbindex, hogy bármely $n, m \geq N_\varepsilon$ számpárra $|a_n - a_m| < \varepsilon$.*

Bizonyítás:

1. Ha (a_n) sorozat konvergens, akkor definíció létezik határétéke (jelölje a), továbbá bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $N_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$ köszöbindex, hogy ha $n \geq N_\varepsilon$, akkor $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ugyanez elmondható az $m \geq N_\varepsilon$ indexről is. Ez alapján fölírható az alábbi egyenlőtlenség:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. Ha bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $N_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$ köszöbindex, hogy bármely $n, m \geq N_\varepsilon$ számpárra $|a_n - a_m| < \varepsilon$, akkor az (a_n) sorozat konvergens. Legyen $\varepsilon = 1$. Ekkor a feltétel szerint létezik olyan, N_1 küszöbindex, melyre ha $n, m \geq N_1$, akkor $|a_n - a_m| < 1$. Mivel $N_1 + 1 > N_1$, az m-et választhatjuk speciálisan $N_1 + 1$-nek.

Erre adódik az alábbi egyenlőtlenség: $|a_n - a_{N_1} + 1| < 1$. Ez átírható $a_{N_1+1} - 1 < a_n < a_{N_1+1} + 1$ alakra. Ebből látható, hogy

$$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_{N_1+1} - 1\} < a_n < \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{N_1+1} + 1\}$$

Ez azt jelent, hogy az (a_n) sorozat korlátos. Tudjuk, hogy minden korlátos sorozatnak létezik konvergens részsozata. Legyen ez az (a_{n_k}), és legyen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$. A feltétel szerint tetszőleges $\frac{\varepsilon}{2} > 0$-hoz található megfelelő N_ε. Ekkor az $|a_n - a|$ különbségre igaz, hogy

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} = a$.

□

1.2.11. Megjegyzés. *Az ilyen sorozatokat Cauchy-sorozatoknak is nevezik.*

2. fejezet

Végtelen sorok

2.1. A végtelen sor definíciója

2.1.1. Definíció (Végtelen sor). *Legyen* (a_n) *egy valós számsorozat. Jelölje* S_n *az* a_n *sorozat* n*-edik részletösszegét.* ($S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$)*. Ekkor a* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$*-t végtelen sornak nevezzük. Jelölés:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*. A végtelen sorra azt mondjuk, hogy konvergens, ha az* S_n *sorozat konvergens. Ellenkező esetben a végtelen sor divergens.*

2.1.2. Megjegyzés. *Egy* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *végtelen sor abszolút konvergens, ha a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *végtelen sor is konvergens.*

2.1.3. Következmény. *Minden abszolút konvergens végtelen sor egyben konvergens is.*

2.2. A végtelen sorok konvergenciája

A következő kritériumok segítségével eldönthetjük, hogy konvergens vagy divergens sorral álluk szemben:

2.2.1. Tétel (Majoráns kritérium). *Legyen* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *nemnegatív tagú konvergens sor. Ha bármely* n*-re teljesül, hogy* $0 \leq a_n \leq b_n$*, akkor a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor is konvergens.*

Bizonyítás: Legyen s_n a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor n-edig részletösszege illetve t_n a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor n-edik részletösszege. A feltételek alapján s_n és t_n monoton növő és bármely n esetén $s_n \leq t_n$. Emellett $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$-ről tudjuk, hogy konvergens sor, melynek összege t, azaz bármely $t_n \leq t$. Így $s_n \leq t$. Tehát az s_n sorozat monoton növő és felülről korlátos, tehát konvergens is. □

2.2.2. Példa. *Tudjuk, hogy a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *végtelen sor konvergens. Ennek ismeretében döntsük el a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n}{n^6+2n^3}$ *végtelen sorról, hogy az konvergens-e!*

Megoldás. Az $a_n = \frac{n^2+3n+8}{n^4+2n^3}$ törtet n^2-tel egyszerűsítve

$$a_n = \frac{1+\frac{3}{n}}{n^3+2n} \leq \frac{4}{n^2+2n} \leq \frac{4}{n^2} = 4b_n$$

, ami a feltétel szerint konvergens. Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor is konvergens. ♣

2.2.3. Tétel (Minoráns kritérium). *Legyen* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *nemnegatív tagú divergens sor. Ha bármely n-re teljesül, hogy* $0 \leq a_n \leq b_n$*, akkor a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sor is divergens.*

Bizonyítás: Legyen s_n a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor n-edig részletösszege illetve t_n a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ sor n-edik részletösszege. A feltételek alapján s_n és t_n monoton növő és bármely n esetén $s_n \leq t_n$. Emellett $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$-ről tudjuk, hogy divergens sor, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$, vagyis a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor is divergens. □

2.2.4. Példa. *Tudjuk, hogy a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *végtelen sor divergens. Ennek ismeretében állapítsuk meg a, hogy a* $\sum\limits_{n=1}^{n} b_n = \sum\limits_{n=1}^{n} \frac{n^6+2n^2+1}{n^7}$ *végtelen sor konvergens-e.*

Megoldás. A $b_n = \frac{n^6+2n^2+1}{n^7}$ törtet n^6-nal egyszerűsítve $b_n = \frac{1+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^6}}{n} \geq \frac{1}{n} \geq a_n$, ami a feltétel szerint divergens. Tehát $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{n^6+2n^2+1}{n^7}$. ♣

2.2.5. Tétel (Hányadoskritérium). *A* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *egy végtelen sor. Ennek tagjaira*

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \alpha$$

.

Ha $\alpha < 1$, akkor a sor abszolút konvergens.

Ha $\alpha > 1$, akkor a sor divergens.

Bizonyítás:

Konvergencia:

Legyen q egy α és 1 közötti szám, például $q = \dfrac{1+\alpha}{2}$! Mivel $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \to \alpha < q$, létezik olyan N küszöbindex, hogy ha $n \leq N$, akkor $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$, azaz $|a_{n+1}| < |a_n|q$. Az így kapott egyenlőtlenséget alkalmazva $n = N, N+1, \ldots$ esetekre:

$$\begin{gathered}
|a_{N+1}| < |a_N|q \\
|a_{N+2}| < |a_{N+1}|q < |a_N|q^2 \\
\vdots \\
|a_{N+k}| < |a_N|q^k \\
\vdots
\end{gathered}$$

Azaz $\sum\limits_{n=1}^{N-1} |a_n| + \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_N|q^k$ sor majorálja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sort. A $\sum\limits_{n=1}^{N-1} |a_n| + \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_N|q^k$ sor konvergens, hiszen első tagja konstans, második tagja pedig egy $0 < q < 1$ kvóciensű mértani sor. Így $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ abszolút konvergens.

Divergencia:

A konvergencia szükséges feltétele, hogy $|a_n| \to 0$. Ha ez nem teljesül, a sor divergens. Tehát $|a_{n+1}| \geq |a_n|$. Az előző egyenletet alkalmazva $|a_{N+k}| \geq |a_n| > 0$ bármely k esetén. Így $a_n \to 0$ szükséges feltétel nem teljesül, így a sor divergens.

□

2.2.6. Példa. *Döntsük el a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$ *végtelen sorról, hogy konvergens-e.*

Megoldás. A hányadoskritérium szerint

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

tehát a sor konvergens. ♣

2.2.7. Tétel (Gyökkritérium). *A* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *egy végtelen sor. Ennek tagjaira*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$$

Ha $\alpha < 1$, *akkor a sor abszolút konvergens.*

Ha $\alpha > 1$, *akkor a sor divergens.*

Bizonyítás:

Konvergencia

Legyen $\alpha < q < 1$. Ekkor a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha < q$ miatt létezik olyan N küszöbindex, hogy $\forall n \geq N$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} < q$, vagyis $|a_n| < q^n$. Így a sor összege felírható a következő alakban:

$$\sum_{n=1}^{N-1} |a_n| + \sum_{n=N}^{\infty} q^n$$

Ez a sor konvergens, hiszen az összeg első tagja egy véges szám, második tagja pedig a q kvóciensű konvergens mértani sor részösszege. Viszont ez az összeg nagyobb, mint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ abszolút konvergens.

Divergencia

Ha nem létezik ilyen N, akkor végtelen sok $n \geq 1$ tag van a sorban. Ezzel sérül a konvergencia azon szükséges feltétele, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens.

□

2.2.8. Példa. *Döntsük el az alábbi végtelen sorról, hogy konvergens-e:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+6}{3^n}$$

Megoldás. A gyökkritérium szerint $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{4n+6}{3^n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{4n+6}}{3} = \frac{1}{3} < 1$, tehát a végtelen sor konvergens. ♣

2.2.9. Tétel (Cauchy-kritérium). *A* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *akkor és csak akkor konvergens, ha bármely* $\varepsilon > 0$*-hoz létezik olyan* $N_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$*, hogy ha* $n > N_\varepsilon$*, akkor* $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ *számra:* $\left|\sum\limits_{l=1}^{k} a_{n+l}\right| \leq \varepsilon$

Bizonyítás: A sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor n-edig részletösszegeinek sorozata kizárólag akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $N_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$ küszöbindex, hogy ha $n > N_\varepsilon$, akkor $|s_{n+k} - s_n| = \left|\sum\limits_{l=1}^{k} a_{n+l}\right| \leq \varepsilon$ □

2.2.10. Tétel (Leibniz-kritérium). *A* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ *alakú végtelen sor konvergens, ha ahol* (a_n) *egy pozitívtagú nullsorozat.*

Bizonyítás: Tekintsük először a páratlan indexű részletösszegeket! Nyílvánvaló, hogy az S_{2n+1} sorozat monoton fogyó. Ekkor $S_{2n+1} - S_{2n-1} = a_{2n+1} - a_{2n}$. Ez az érték a_n monoton csökkenése miatt ≤ 0. Hasonló összefüggés igaz a páros indexű részletösszegekre is. Ezesetben az S_{2n} sorozat monoton növő. Az $S_{2n+2} - S_{2n} = -a_{2n+2} + a_{2n+1} \geq 0$, hiszen az a_n monoton fogyó. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} = 0$, azaz mindkét sorozat konvergens egyazon határértékkel, az $(S_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens. □

2.2.11. Megjegyzés. *Az ilyen sorokat Leibniz-típusú soroknak nevezik.*

2.2.12. Példa. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$

2.3. Műveletek végtelen sorokkal

2.3.1. Tétel. *Két abszolút konvergens végtelen sor összege:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

Bizonyítás:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$$

A tagok sorrendjét fölcserélve:

$$a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

□

2.3.2. Lemma. *Legyen* $\sum\limits_{k=0}^{n} a_n$ *egy abszolút konvergens sor,* (b_n) *nullasorozat. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n \cdot b_{n-k} = 0.$$

Bizonyítás: Legyen ε egy tetszőleges pozitív valós szám, K pedig egy olyan pozitív valós szám, mely nagyobb, mint $\max\{\sum\limits_{k=0}^{n}, b_n\}$ bármely n esetén. A Cauchy-féle konvergenciakritéumnak megfelelően válasszunk egy megfelelően nagy m egész számot, melyre

$|b_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$, $|x_{m+1}| + |x_{m+2}| + \ldots + |x_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$, hacsak $n > m$. Ezenkívül fennál, hogy ha $n > 2m$, akkor $(n - m) > m$. Tehát fölírható az alábbi becslés:

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_k b_{n-k} + \sum_{k=m+1}^{n} a_k b_{n-k}\right| \leq \sum_{k=0}^{m} |a_k||b_{n-k}| + \sum_{k=m+1}^{n} |a_k||b_{n-k}| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2K} \sum_{k=0}^{m} |a_k| + K \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

2.3.3. Következmény. *Tetszőleges pozitív ε-hoz található olyan N_ε pozitív egész szám, hogy ha $n > N_\varepsilon$, akkor a* $\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} a_n \cdot b_n < \varepsilon$

2.3.4. Definíció. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *és* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *Cauchy szorzata* $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

2.3.5. Tétel (Mertens tétele). *Legyen* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *egy abszolút konvergens végtelen sor, összege A,* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *egy konvergens végtelen sor, összege B. Ekkor a két sor Cauchy-szorzata konvergens, összege AB.*

Bizonyítás: Jelölje A_n a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ n-edik részletösszét, B_n a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ n-edik részletösszét. Ekkor a Cauchy szorzat n-edik részletösszege

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) \ldots + (a_0b_n + \ldots + a_nb_0) =$$
$$= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_{n-1}B_1 + a_nB_0 =$$
$$= A_nB + a_0(B_n - B) + a_1(B_{n-1} - B) + \ldots + a_n(B_0 - B).$$

Ez azt jelenti, hogy a részletösszeg-sorozat az $(A \cdot B)$-hez tartó és egy az előző lemma szerint 0-hoz tartó sorozat összegeként. A Cauchy-szorzatsor n-edik részletösszeg-sorozatát jelölje (s_n) Ekkor bármely ε pozitív valós számhoz létezik olyan N_ε küszöbindex, hogy ha $k \geq N_\varepsilon$, akkor

1. $|A_kB - AB| < \frac{\varepsilon}{3}$
2. $\left|\sum_{i=0}^{k} a_i(B_{k-i} - B)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$
3. $\sum_{i=0}^{k} |a_i||a_{k-1}| < \frac{\varepsilon}{3}$

Utóbbi két állítás az előző lemma és annak következménye miatt teljesül. Az 1. állítás igazolásához legyen $j \geq \dfrac{(N_\varepsilon+1)(N_\varepsilon+1)}{2}$, tovább n legyen az a pozitív egész szám, melyre $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2} \leq j < \dfrac{(n+2)(n+3)}{2}$. Ekkor $n \geq N_\varepsilon$. Jelölje $m := \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$. Ekkor s_m épp a Cauchy-szorzat n-edik részletösszege.

Az 1. és 2. állítás szerint $k := n$ választás mellett $|s_m - A_nB| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, továbbá $|A_nB - AB| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. A 3. állítás $k := n+1$ választás mellett $|s_j - s_m| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Tehát

$$|s_j - AB| = |s_j - s_m| + |s_m - A_nB| + |A_nB - AB| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

3. fejezet

Hatványsorok Taylor-polinomok, Taylor-sorok

3.1. Függvénysorozatok

3.1.1. Definíció. *Függvénysorozatnak nevezünk egy olyan hozzárendelést, mely minden természetes számhoz egy valós függvényt rendel. A függvénysorozatot* $(f_n(x))$*-szel jelöljük. Az* $(f_n(x))$ *sorozat* n*-edik tagja* $f_n(x)$*.*

3.1.2. Megjegyzés. *Az* x *az adott* f_n *függvény értelmezési tartományából származó valós szám.*

3.1.3. Példa. $f_n(x) := \sin(nx)$

3.1.4. Definíció. *Egy* $(f_n(x))$ *függvénysorozatra azt mondjuk, hogy konvergens és tart egy* $f(x)$ *függvényhez, ha bármely* x *esetén, amikor tetszőleges pozítív* ε *valós számhoz létezik olyan* $N_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$ *küszöbindex, hogy ha* $n \geq N_\varepsilon$*, akkor* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$*. Az* $f(x)$ *függvényt határfüggvénynek nevezzük.*

3.1.5. Megjegyzés. *A megfelelő* N_ε *értéke általában az* ε*-on kívül az adott* x *értékétől is függ, mivel a konvergencia sebessége általában minden* x *esetén más és más.*

3.2. Hatványsorok

3.2.1. Definíció (Hatványsor). *Legyen* (a_n) *egy tetszőleges sorozat. A* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ *alakú végtelen sort* x_0 *középpontú hatványsornak nevezzük.*

3.2.2. Definíció. *Egy* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ *hatványsorra azt mondjuk, hogy konvergens, ha* $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n\right| < \infty$ *valamely* x *számokra.*

3.2.3. Definíció. *Egy* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ *hatványsorra azt mondjuk, hogy divvergens, ha* $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n\right| = \infty$ *valamely* x *számokra.*

3.2.4. Definíció. *Egy* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ *hatványsorra azt mondjuk, hogy abszolút konvergens, ha* $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot (x - x_0)^n|\right| < \infty$ *valamely* x *számokra.*

3.2.5. Definíció. *Egy hatványsor konvergenciatartománya alatt értjük azt az* $I \in \mathbb{R}$ *intervellumot, ahol a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ *hatványsor konvergens minden* $x \in I$ *esetén.*

3.2.6. Megjegyzés. *Az* I *intervallum mindig egy az* x_0 *középpontra szimmetrikus tartomány, azaz* $I = (x_0 - r, x_0 + r)$. *Emiatt az* $r \in \mathbb{R}$ *számot konvergenciasugárnak szoktuk nevezni.*

3.2.7. Tétel (Cauchy-Hadamard). *Tekintsük az* $r := \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ *értéket. Amennyiben*

1. $|x - x_0| < r$, *a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ *hatványsor abszolút konvergens.*

2. $|x - x_0| > r$, *a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ *hatványsor divergens.*

Bizonyítás:

1. Vizsgáljuk meg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ hatványsort gyökkritériummal. Szükséges, hogy

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n \cdot (x - x_0)|} < 1$$

ezt átalakítva:

$$|x - x_0| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

$$|x - x_0| < \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = r$$

2. Vizsgáljuk meg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ hatványsort gyökkritériummal. Szükséges, hogy

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n \cdot (x-x_0)|} > 1$$

ezt átalakítva:

$$|x-x_0| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$
$$|x-x_0| > \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = r$$

□

3.2.8. Következmény. *Az r konvergenciasugarat a hányadoskritérium segítségével is megtalálhatjuk. Ezesetben a konvergenciasugár a következőképp számolható ki:*

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

3.2.9. Tétel (Transzformációs tétel). *Legyen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ egy pozitív konvergenciasugarú hatványsor, $x_1 \in (x_0 - r; x_0 + r)$ tetszőleges szám. Ekkor bármely $x \in (x_0 - r; x_0 + r)$-re, amelyre $|x - x_1| < r - |x_1 - x_0|$, teljesül, hogy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (x-x_1)^i,$$

ahol

$$b_i = \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} a_n (x_1 - x_0)^{n-i}$$

Bizonyítás: Az $(x-x_0)$ fölírható $(x - x_1 + x_1 - x_0) = (x-x_1) + (x_1 - x_0)$ alakban is. Ennek n-edik hatványa a binomiális tétel szerint

$$((x-x_1)+(x_1-x_0))^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x-x_1)^i (x_1-x_0)^{n-i}$$

Ezt behelyettesítve a hatványsor képletébe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x-x_1)^i (x_1-x_0)^{n-i} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_n \binom{n}{i} (x-x_1)^i (x_1-x_0)^{n-i} := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} u_{ni}$$

Mivel ez egy abszolút konvergens sor, átírható a következő alakra:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} u_{ni} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} u_{ni} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} a_n \binom{n}{i} (x-x_1)^i (x_1-x_0)^{n-i} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (x-x_1)^i$$

□

3.2.10. Definíció. *Egy $f(x)$ függvényre azt mondjuk, hogy folytonos egy x_0 pontban, ha bármely pozitív ε valós számhoz található olyan δ pozitív valós szám, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

3.2.11. Tétel. *A hatványsor összegfüggvénye folytonos*

Bizonyítás: Vegyük a konvergenciatartomány egy tetszőleges x_1 pontját. Belátandó, hogy az f függvény ebben a tetszőleges x_1-ben folytonos. A transzformációs tétel szerint f függvény ferírható x_1 középpontú hatványsorként x_1 egy megfelelő δ környezetében: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_1)^n$

Tehát a bizanyítandó állítás mindössze $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = a_0$

Legyen $0 < \rho < \delta$ tetszőleges szám. Ekkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ konvergens. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \rho^{n-1}$ összeget jelölje K. Tehát $|x - x_1| < \rho$ esetén

$$|f(x) - b_0| = \left|(x - x_1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x1)^{n-1}\right| \leq |x - x_1| \cdot K,$$

így a hatványsor összegfüggvénye folytonos. $\square$

3.2.12. Következmény. *Folytonos függvény lévén a hatványsor integrálható. Az $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ hatványsor összegfüggvényének primítv függvénye:*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + c,$$

ahol c egy tetszőleges valós szám.

3.2.13. Tétel (Abel tétele). *Tekintsük a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)$ hatványsort, melynek konvergenciasugara $0 < r < \infty$. Amennyiben a hatványsor valamely végpontjában konvergens, azaz*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-r - x_0)^n\right| < \infty \textit{ vagy } \left|\sum_{n=0}^{\infty}(r - x_0)^n\right| < \infty,$$

akkor az $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ összegfüggvény folytononosan kiterjed az adott végpontra is, formálisan:

$$\lim_{x \to (-r-x_0)+} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-r - x_0)^n \textit{ illetve } \lim_{x \to (r-x_0)-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r - x_0)^n$$

Bizonyítás: Az egyszerűség és a könnyebb átláthatóság érdekében tegyünk néhány, a bizonyítás menetét nem befolyásoló kikötést. Legyen a hatványsor középpontja $x_0 := 0$, a konvergenciasugár $r := 1$. Ezenkívül a tételt csak a jobb oldali végpontra bizonyítjuk, de a bal oldalira is ugyanígy látható be.

Jelölje $s := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ és $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n}$ számokat. Mivel $|x| < 1$ teljesül, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

Tehát

$$s-f(x) = s-(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \left((1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) s-(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s-s_n)x^n.$$

Erre fölírható, hogy

$$|s-f(x)| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} |s-s_n| x^n.$$

A $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, így bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $N_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$ küszöbindex, hogy bármely $n \geq N_\varepsilon$ egész szám esetén $|s_n - s| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Tehát az előző összefüggés fölülről becsülhető, lévén $|x| < 1$, az alábbiak szerint:

$$|s-f(x)| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} |s-s_n| x^n \leq \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |s-s_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2}(1-x) \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} x^n \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |s_n - s| + \frac{\varepsilon}{2},$$

ami egy lineáris függvény, ami folytonos. Ebből az következik, hogy bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz található olyan $\delta > 0$ valós szám, hogy ha $x \in (1-\delta, 1)$, akkor

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tehát $x \in (1-\delta, \delta)$ esetén

$$|s-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

épp amit be akartunk látni. $\square$

3.2.14. Tétel. *A pozitív konvergenciasugarú* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)$ *hatványsor végtelen sokszor differenciálható. A deriváltak a következők:*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1}(x-x_0)^n$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2}(x-x_0)^n$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+k)\cdot(n+k-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)a_{n+k}(x-x_0)^n$$

Bizonyítás: Legyen x_1 a konvergenciatartomány egy tetszőleges pontja. Az $f(x)$ függvény deriváltja az alábbi hányados:

$$\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = \lim_{x\to x_1} b_1 + b_2(x-x_1) + b_3(x-x_1)^2\ldots = b_1$$

A traszformációs tétel szerint tehát

$$f'(x_1) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{1}a_n(x_0-x_1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot(x_1-x_0)^k,$$

ami szintén egy hatványsor, mely ugyanígy differenciálható. Ez a művelet végtelen sokszor megismételhető, így a hatványsor végtelen sokszor differenciálható. □

3.3. Műveletek hatványsorokkal

3.3.1. Tétel (Hatványsorok összege). *Adottak* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *és* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ *hatványsorok* $0 < r_a$ *illetve* $0 < r_b$ *konvergenciasugarakkal. Ekkor a két hatványsor összege:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$$

Az így kapott hatványsor konvergenciasugara $r = min\{r_a, r_b\}$.

Bizonyítás:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2\ldots+b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2\ldots$$

A tagokat fölcserélve, a megfelelő tagokat összevonva:

$$(a_0+b_0)+(a_1+b_1)(x-x_0)+(a_2+b_2)(x-x_0)^2+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$$

Tegyük fel, hogy r_a és r_b. Legyen például $r_a < r_b$. Mind a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, mind a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ divergens bármely $x \notin (x-r_b, x+r_b)$ esetén. Az $x \in ((x_0-r_b, x_0+r_a)\cup(x_0-r_a, x_0+r_b))$ esetben a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ véges, de a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ nem, így az összegük sem. Ha $x \in (x_0-r_a, x_0+r_b)$, mindkét sor konvergens, így az összegük is az. □

3.3.2. Tétel (Hatványsorok szorzata). *Adottak* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *és* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ *hatványsorok,* $r_a > 0$ *illetve* $r_b > 0$ *konvergenciasugarakkal. Ekkor a két hatványsor Cauchy-szorzata*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n,$$

ahol $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$*. A szorzat hatványsor konvergeciasugara* $r = min\{r_a, r_b\}$*.*

Bizonyítás: A két hatványsor Cauchy-szorzata a Mertens-tétel szerint

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n.$$

Mivel a Mertens-tétel szerint a szorzat hatványsor csak akkor konvergens, ha mind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, mind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ konvergens volt. Tehát szorzat hatványsor konvergenciatartománya a két hatványsor konvergenciatartományának közös része, vagyis $r = min\{r_a, r_b\}$.
$\square$

3.3.3. Tétel (Hatványsor reciproka). *Tekintsük az* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *pozitív konvergenciasugarú hatványsort, ahol* $a_0 \neq 0$*. Ehhez létezik olyan* δ *pozitív szám és olyan* (c_n) *valós számsorozat, hogy*

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0),$$

bármely $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ *esetén.*

Bizonyítás: Az egyszerűség és a könnyebb átláthatóság érdekében legyen $x_0 := 0$, továbbá $a_0 := 1$. Mivel a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n$ az $x = 0$ helyen folytonos, létezik olyan δ pozitív valós szám, melyre $|a_1||x| + |a_2||x|^2 + \ldots < 1$, feltéve, hogy $|x| < \delta$.

Ezért $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1-(-a_1x-a_2x^2-\ldots)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-a_1x--a_2x^2\ldots)^n$. A tényezők Cauchy-szorzata

$$(-a_1x--a_2x^2\ldots)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}x^k.$$

Tehát $\frac{1}{f(x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{nk}x^k\right)$, feltéve, hogy $|x| < \delta$. Az abszolút konvergens sorok átrendezhetősége miatt $\frac{1}{f(x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{nk}\right)x^k = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nx^n$, feltéve, hogy $|x| < \delta$. $\square$

3.3.4. Következmény. *$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ pozitív konvergenciasugarú hatványsorok hányadosa előáll $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ szorzatként, tehát*

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \ (b_0 = g(0) \neq 0)$$

A c_n együtthatók ezesetben a következőképp számíthatók ki:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0 c_n + \ldots + a_n c_0) x^n$$

Ekkor

$$a_0 = b_0 c_0$$

$$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0$$

$$\vdots$$

ahonnan

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}$$

$$c_1 = \frac{a_0 - \frac{a_0 b_1}{b_0}}{b_0}$$

$$\vdots$$

3.4. Taylor-polinomok, Taylor-sorok

3.4.1. Definíció (Az $f(x)$ függvény n-edfokú Taylor-polinomja). *Legyen az f függvény értelmezési tartománya egy $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum! Legyen x_0 az I belső pontja, ahol az függvény n-szer differenciálható! Ezenkívül $t_n(x)$ legyen olyan n-ed fokú polinom, hogy $t^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, ahol $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Ekkor $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$, az $f(x)$ függvény x_0 középpontú n-edfokú Taylor-polinomja.*

3.4.2. Definíció (Az $f(x)$ függvény Taylor-sora). *Legyen az f függvény értelmezési tartománya egy $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum! Legyen x_0 az I belső pontja, ahol az függvény végtelenszer differenciálható! Ezenkívül $t_n(x)$ legyen olyan polinom, hogy $t^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, ahol $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ekkor $T(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$ az $f(x)$ függvény x_0 középpontú Taylor-sora.*

3.4.3. Megjegyzés. *Az $x_0 = 0$ középpontű speciális Taylor-sort Maclaurin-sornak nevezzük, és $M(x)$-szel jelöljük.*

3.4.4. Észrevétel. *Minden hatványsor az összegfüggvényének a Taylor-sora.*

3.5. Maradéktagok

3.5.1. Definíció. *A függvény és az őt approximáló n-edfokú Taylor-polinom különbségét megadó függvényt függvényt maradéktagnak nevezzük.*

$$r_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

3.5.2. Megjegyzés. *A Taylor-sor és a függvény eltérése épp az r_n függvénysorozat határfüggvénye.*

3.5.3. Definíció (Lagrange-féle maradéktag). $r_n^{(L)} = f^{(n+1)}(\xi)\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

3.5.4. Definíció (Cauchy-féle maradéktag). $r_n^{(C)} = f^{(n+1)}(\xi)\dfrac{(x-x_0)\cdot(x-\xi)^n}{n!}$

3.5.5. Definíció (Schlömlich-féle maradéktag). $r_n^{(S)} = f^{(n+1)}(\xi)\dfrac{(x-x_0)^k\cdot(x-\xi)^{n-k+1}}{k\cdot n!}$

3.5.6. Megjegyzés. *A Lagrenge-féle maradéktag és a Cauchy-féle maradéktag egyaránt a Schlömlich-féle maradéktag speciális esete. A bennük található $\xi = x_0 + \vartheta\cdot(x-x_0)$, ahol $0 < \vartheta < 1$.*

3.5.7. Definíció (A maradéktag integrálalakja). $r_n^{(i)}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\dfrac{(n-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$

3.5.8. Megjegyzés. *A Lagrange-féle maradéktag alapján az approximációs hibára a következő korlát adódik. Az $f^{(n+1)}(\xi)$ felülről becsülhető az $(n+1)$-edik derivált abszolútértékének maximumával. Ezt az értéket jelölje M. Az $\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ pedig majorálható a $\dfrac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$-sal. Tehát az n-edfokú Taylor-polinom maximális eltérése az f függvénytől az x helyen:*

$$|r_n| = |f(x) - T_n(x)| \leq M\cdot\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

3.5.9. Következmény. *Ha $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, akkor a $T_n(x)$ függvény konvergens, és $T_n(x) \to f(x)$, így a Taylor-sor előállítja az $f(x)$ függvényt.*

3.6. Néhány egyszerűbb függvény hatványsora

3.6.1. Feladat. *Határozzuk meg az* e^x *függvény hatványsorát és annak konvergenciatartományát!*

Megoldás. Először határozzuk meg a az e^x függvény deriváltjait:

$$(e^x)' = (e^x)'' = \ldots = (e^x)^{(n)} = e^x$$

Ezeket az $M(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$ képletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$M(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Ezután meg kell vizsgálni, hogy az így kapott sor konvergál-e az adott függvényhez. A Lagrange-féle maradéktag szerint az e^x függvény és a most kapott hatványsor eltérése egy rögzített x helyen:

$$r_n(x) \le e^x \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Itt a rögzített x miatt e^x egy végés szám, az $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ pedig tart 0-hoz, midőn n tart végtelenhez. Ez bármely x valós szám esetén teljesül, tehát a hatványsor az egész számegyenesen konvergál az e^x függvényhez. ♣

3.6.2. Feladat. *Határozzuk meg az* $\ln(1+x)$ *függvény hatványsorát és annak konvergenciatartományát!*

Megoldás. Először határozzuk meg az $\ln(1+x)$ függvény deriváltjait!

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$(\ln(1+x))'' = \left((1+x)^{-1}\right)' = -(1+x)^{-2}$$

$$(\ln(1+x))''' = 2(1+x)^{-3}$$

$$\vdots$$

$$(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n+1} n!(1+x)^{-n} = (-1)^{n+1} \frac{n!}{(1+x)^n}$$

$$\vdots$$

Ezeket az $M(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$ képletbe behelyettesítve kapjuk a $M(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ sort. A gyökkritérium segítségével megállapítjuk a konvergenciatartományt. A sor n-edik tagja $(-1)^n\frac{x^n}{n}$. A sor konvergens, ha $\sqrt[n]{\left|(-1)^n\frac{x^n}{n}\right|} < 1$. Ezt átalakítva $|x| \sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1$. A $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ a végtelenben 1-hez tart, tehát a feltétel akkor teljesül, ha $|x| < 1$. Meg kell még ezen kívül vizsgálni a konvergenciát a határokon is. Legyen $x = -1$. Helyettesítsük be a hatványsorba:

$$M(-1) = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots\right)$$

Ez a harmónikus sor -1-szerese, amiről tudjuk, hogy divergens. Tehát -1 nem része a konvergeniatartománynak. Legyen $x = 1$. Helyettesítsük be a hatványsorba:

$$M(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Ez egy Leibniz-típusú sor, amiről tudjuk, hogy konvergens. Tehát az $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, amennyiben $-1 < x \leq 1$ ♣

3.6.3. Feladat. *Határozzuk meg a* $\sin x$ *függvény hatványsorát és annak konvergeciatartományát!*

Megoldás. Ezt a feladatot is a deriváltak meghatározásával kezdjük.

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\sin x)'' = -\sin x$$

$$(\sin x)''' = -\cos x$$

$$(\sin x)^{(4)} = \sin x$$

$$\vdots$$

Behelyettesítve ezeket a deriváltakat a hatványsor képletébe:

$$M(x) = \frac{0}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

A Lagrange-féle maradéktagból az approximációs hiba egy rögzített x esetén:

$$r_{2n+1}(x) \leq M \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$M = \max\left\{\left|(\sin x)^{(2n+1)}\right|\right\} = 1$. Így $r_n \to 0$, midőn $n \to \infty$. Tehát a $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ bármely x valós szám esetén. ♣

3.6.4. Feladat. *Határozzuk meg a* $\cos x$ *függvény hatványsorát és annak konvergeciatartományát!*

Megoldás. A $\cos x$ függvény deriváltjai:

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cos x)'' = -\cos x$$

$$(\cos x)''' = \sin x$$

$$(\cos x)^{(4)} = \cos x$$

$$\vdots$$

Behelyettesítve ezeket a deriváltakat a hatványsor képletébe:

$$M(x) = \frac{0}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

A Lagrange-féle maradéktagból az approximációs hiba egy rögzített x esetén:

$$r_{2n}(x) \leq M \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$M = \max\left\{\left|(\cos x)^{(2n)}\right|\right\} = 1$. Így $r_n \to 0$, midőn $n \to \infty$. Tehát a $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ bármely x valós szám esetén.

Meg lehet közelíteni a feladatot más irányból is közelíteni. Tudjuk, hogy $\cos x = (\sin x)'$. Szóval $\cos x$ hatványsorához deriváljuk a $\sin x$ hatványsorát!

$$M(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)(2n)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

♣

3.6.5. Feladat. *Határozzuk meg a* sh x *függvény hatványsorát és annak konvergeciatartományát!*

Megoldás. Az $\operatorname{sh} x$ deriváltjai:

- $(\operatorname{sh} x)^{(n)} = \operatorname{ch} x$, ha n páratlan, tehát $(\operatorname{sh} 0)^{(2k+1)} = 1$
- $(\operatorname{sh} x)^{(n)} = \operatorname{sh} x$, ha n páros, tehát $(\operatorname{sh} 0)^{(2k)} = 0$

Így a hatványsor $\operatorname{sh} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

A Lagrange-féle maradéktagból az approximációs hiba egy rögzített x esetén:

$$r_{2n+1}(x) \leq M \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$M = \max\left\{\left|(\operatorname{sh} x)^{(2n+1)}\right|\right\} = \operatorname{ch} x = const.$ Így $r_n \to 0$, midőn $n \to \infty$. Tehát a $\operatorname{sh} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ bármely x valós szám esetén. ♣

3.6.6. Feladat. *Határozzuk meg a* $\operatorname{ch} x$ *függvény hatványsorát és annak konvergenciatartományát!*

Megoldás. A $\operatorname{ch} x$ deriváltjai:

- $(\operatorname{ch} x)^{(n)} = \operatorname{sh} x$, ha n páratlan, tehát $(\operatorname{ch} 0)^{(2k+1)} = 0$
- $(\operatorname{ch} x)^{(n)} = \operatorname{ch} x$, ha n páros, tehát $(\operatorname{ch} 0)^{(2k)} = 1$

Így a hatványsor $\operatorname{ch} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

A Lagrange-féle maradéktagból az approximációs hiba egy rögzített x esetén:

$$r_{2n}(x) \leq M \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$M = \max\left\{\left|(\operatorname{ch} x)^{(2n)}\right|\right\} = \operatorname{sh} x = const.$ Így $r_n \to 0$, midőn $n \to \infty$. Tehát a $\operatorname{ch} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ bármely x valós szám esetén. ♣

3.6.7. Feladat. *Határozzuk meg a* $\operatorname{tg} x$ *függvény hatványsorát és annak konvergenciatartományát!*

Megoldás. A $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, tehát hatványsora a $\sin x$ és a $\cos x$ függvények hatványsorainak hányadosaként számolható ki. A hatványsorok hányadosának jelöléseivel:

- $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$
- $\operatorname{tg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0} = 0$$

$$c_1 = \frac{a_0 - \frac{a_0 b_1}{b_0}}{b_0} = 1$$

$$c_2 = \frac{a_2 - b_1 \left(\frac{a_1 - \frac{b_1 a_0}{b_0}}{b_0} \right) - \frac{b_2 a_0}{b_0}}{b_0} = 0$$

$$c_3 = \frac{a_3 - b_1 c_2 - b_2 c_1 - b_3 c_0}{b_0} = \frac{a_3 - 0 - b_2 \cdot 1 - 0}{b_0} = \frac{-\frac{1}{6} + 0 - (-\frac{1}{2}) - 0}{1} = \frac{1}{3}$$

$$c_4 = 0$$

$$c_5 = \frac{a_5 - b_1 c_4 - b_2 c_3 - b_3 c_2 - b_4 c_1 - b_5 c_0}{b_0} = \frac{1}{120} - 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - 0 - \frac{1}{24} \cdot 1 - 0 = \frac{2}{15}$$

$$\vdots$$

Az eljárást folytatva megkapható az összes c_n, melynek általános alakja: $c_0 = 1,\ c_{n+1} = \dfrac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}$, ahol B_i az i-edik Bernuolli számot jelöli.

Tehát a $\operatorname{tg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1}$, feltéve, hogy $|x| < \dfrac{\pi}{2}$. ♣

4. fejezet

A hatványsorok alkalmazási területei

4.1. Közelítő számítások elvégzése

A függvények egy adott pontbeli értékének kiszámítása általában nagy műveletigényű, bonyolult számítások elvégzésével jár. Ezzel ellentétben egy hatványsor kezdőszeletének kiszámítása egy polinomba való behelyettesítést jelent, mely gyorsan és könnyen kiszámítható.

4.1.1. Feladat. *Számítsuk ki a* $\ln 1,1$ *értékét* 3 *tizedesjegy pontosan!*

Megoldás. Az $\ln 1,1$ értékét az $\ln(1+x)$-hatványsorából kaphatjuk meg $0,1$-es helyettesítési értékkel. Az $\ln(1+x)$ hatványsora $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$. Ezen alternáló sor a $x = 0,1$ érték mellett az első tagól kezdve monoton csökken. A hiba tehát fölülről becsülhető az első elhagyott tag felével. Tehát az alábbi egyenlőtlenség megoldásával megkaphatjuk a szükséges polinom fokszámát:

$$5 \cdot 10^{-4} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^n}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{-n}}{n}.$$

A legkisebb pozitív egész szám, amely kielégíti ezt az egyenlőtlenséget az $n = 3$. Tehát a kívánt pontosság eléréséhez a harmadfokú Maclaurin-polinomot használjuk.

$$\ln 1,1 \approx 0,1 - \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{3} \approx 0,095$$

♣

4.1.2. Feladat. *Számítsuk ki a* $\sqrt[3]{30}$ *értékét* 4 *tizedes jegy pontosan!*

Megoldás. A $\sqrt[3]{30}$ felírható $\sqrt[3]{27+3} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}$ alakokban is. Tehát a megoldáshoz a $\sqrt[3]{1+x}$ 0 középpontú hatványsorát kell megtalálnunk.

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$$
$$f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{2\cdot\prod_{k=1}^{n-2}(2+3k)}{3^n}(1+x)^{\frac{1-3n}{3}}$$

Tehát a Maclaurin-polinom a következő:

$$M_n(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{2\cdot\prod_{k=1}^{n-2}(2+3k)}{3^n}\frac{x^n}{n!}$$

Mivel a feladat 4 tizedes jegy pontosságot követel meg, a hibafüggvény értéke nem haladhatja meg a 10^{-5}-t. A Lagrange-féle maradéktag szerint ezesetben a hiba legfeljebb

$$\left((-1)^n\frac{2\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(2+3k)}{3^{n+1}}\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1-3(n+1)}{3}}\right)\cdot\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Az egyenlőtlenséget minden $n \geq 4$ szám kielégíti. Tehát

$$\sqrt[3]{30} \approx 3\cdot M_4\left(\frac{1}{9}\right) = 3\cdot\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} - \frac{2}{9\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{10}{27\cdot 6}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3 - \frac{80}{81\cdot 24}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^4\right) \approx 3,1072$$

♣

4.2. Differenciálegyenletek megoldása

A hatványsorok segítségével differenciálegyenleteket is meg lehet oldani. Elsősorban olyan egyenletek megoldása esetén hasznos, ahol a primitív függvény nagyon nehéz vagy lehetetlen megtalálni. Az első példa az egyik legegyszerűbb típus, a homogén elsőrendű differenciálegyenlet.

4.2.1. Feladat.

$$y'(x) = a\cdot y(x)$$

Megoldás. Először oldjuk meg hatványsorok nélkül! Az $y(x) = 0$ kontans függvény nyílván megoldás. Egyébként el lehet osztani az egyenletet $y(x)$-szel. Az így kapott $\frac{y'(x)}{y(x)} = a$ egyenlet mindkét oldalát integrálva adódik az $\ln|y(x)| = ax + c$ összefüggés, ahol c egy tetszőleges valós szám. Mindkét oldalt behelyettesítve az e^x függvénybe kapjuk az $|y(x)| = e^{ax+c}$ egyenlőséget. Az abszolútértékjel elhagyható, mivel az exponenciális függvény értelmezési tartományának minden pontjában pozitív. Tehát az egyenlet megoldása $y(x) = e^{ax+c} = e^{ax} \cdot e^c = a_0 e^{ax}$

Az egyenlet megoldható hatványsor segítségével is. Az $y(x)$ hatványsora $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alakú. A deriváltja:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^n.$$

Behelyettesítve az adott összefüggésbe:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot a_n x^n$$

A közös tagogat elhagyva adódik $(n+1)a_{n+1} = a \cdot a_n$, amit átrendezve

$$a_{n+1} = \frac{a}{n+1}a_n = \frac{a^2}{(n+1)n}a_{n-1} = \ldots = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}a_0,$$

azaz $a_n = \frac{a^n}{n!}a_0$. Behelyettesítve a hatványsor képletébe:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}a_0 x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ax)^n}{n!} = a_0 e^{ax}$$

Mindkét megoldási módszerrel ugyanarra az eredményre jutottunk. ♣

4.2.2. Feladat. *Határozzuk meg az $f(x) = e^{-x^2}$ primitív függvényét!*

Megoldás. Köztudott, hogy az $f(x) = e^{-x^2}$ függvénynek nem lehet meghatározni a primitív függvényét. Viszont a primítív függvény hatványsor alakban megadható. Az exponenciális függvény hatványsorába behelyettesítve a $(-x^2)$-t:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$$

Ezt integrálva adódik a primitív függvény hatványsora:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + c,$$

ahol c egy tetszőleges valós szám. ♣

4.2.3. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi másodrendű differenciálegyenletet!*

$$y''(x) = -cy(x),$$

ahol c egy tetszőleges pozitív valós szám.

Megoldás. Az $y(x)$ hatványsora $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. A hatványsor második deriváltja a következő hatványsor:

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

A feltétel szerint tehát:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = -c\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Tehát bármely n esetén fennáll az alábbi összefüggés:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -ca_n, \text{ azaz } a_{n+2} = \frac{-c}{(n+2)(n+1)}a_n$$

Ekkor különböztessük meg a páros illetve a páratlan n-ek esetét!

Ha $n = 2k$ alakú:

$$\begin{aligned} a_{2k+2} =& a_{2(k+1)} = \frac{-c}{(2k+2)(2k+1)}a_{2k} = \frac{(-c)^2}{(2k+2)(2k+1)(2k)(2k-1)}a_{2k-2} = \\ &= \ldots = \frac{(-c)^{k+1}}{(2k+1)!}a_0 \end{aligned}$$

azaz $a_{2k} = (-1)^k \dfrac{c^k}{(2k)!}a_0$

Ha $n = 2k+1$ alakú:

$$\begin{aligned} a_{2k+3} = a_{2(k+1)+1} =& \frac{-c}{(2k+3)(2k+2)}a_{2k+1} = \frac{(-c)^2}{(2k+3)(2k+2)(2k+1)(2k)}a_{2k-1} = \\ =& \ldots = \frac{(-c)^{k+1}}{(2(k+1)+1)!}a_1 \end{aligned}$$

azaz $a_{2k+1} = (-1)^k \dfrac{c^k}{(2k+1)!}a_1$.

Összesítve tehát

$$\begin{aligned} y(x) =& \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} & + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1} = \\ =& a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{c}x)^{2k}}{(2k)!} & + \frac{a_1}{\sqrt{c}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{c}x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ez épp az $y(x) = a_0 \cos(\sqrt{c}x) + \dfrac{a_1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c}x)$ hatványsora. ♣

4.3. Műveletek trigonometrikus függvényekkel

4.3.1. Feladat. *Bizonyítsuk be az alábbi összefüggést!*

$$2\sin x \cos x = \sin 2x$$

Megoldás. Írjuk fel a $\sin x \cos x$ függvényt hatványsor alakban.

$$\sin x \cos x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n\right),$$

ahol

- $a_n = 0$, ha $n = 2k$ bármely k természetes szám esetén.
- $a_n = (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, ha $n = 2k+1$ bármely k természetes szám esetén.
- $b_n = (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$, ha $n = 2k$ bármely k természetes szám esetén.
- $b_n = 0$, ha $n = 2k+1$ bármely k természetes szám esetén.

Ekkor $c_n = c_{2k} = a_0 \cdot b_{2k} + a_1 b2k - 1 + \ldots + a_{2k} b_0$. Minden tag valamelyik tényezője 0, tehát az összeg 0. A $c_n = c_{2k+1} a_0 \cdot b_{2k+1} + a_1 b_{2k} + \ldots + a_{2k+1} b_0$. Az összeg tagjai közül 0-k azok, amelyekben az a_i indexe páros. Tehát

$$\begin{aligned}
c_{2k+1} =& a_1 b_{2k} + a_3 b_{2k-2} \ldots + a_{2k+1} b_0 = \\
=& (-1)^0 \frac{x^1}{1!} \cdot (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k!)} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot (-1)^0 \frac{x^0}{0!} = \\
=& (-1)^k x^{2k+1} \left(\frac{1}{1!(2k!)} + \frac{1}{3!(2k-2)!} + \ldots + \frac{1}{(2k+1)!0!}\right) = \\
=& (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \left(\frac{2k+1}{1!} + \frac{(2k+1)(2k)(2k-1)}{3!} + \ldots + \frac{(2k+1)(2k) \cdot \ldots \cdot 1}{(2k+1)!}\right) = \\
=& (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \left(\binom{2k+1}{1} + \binom{2k+1}{3} + \ldots + \binom{2k+1}{2k+1}\right) = \\
=& (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot 2^{2k} = \frac{1}{2}\left((-1)^k \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)
\end{aligned}$$

Tehát a szorzat $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \dfrac{1}{2} \sin 2x$ ♣

4.4. Műveletetek hiperbolikus függvényekkel

4.4.1. Feladat. *Bizonyítsuk be az alábbi összefüggést hatványsorok segítségével!*

$$ch^2\, x - sh^2\, x = 1$$

Megoldás. Az összefüggés hatványsor alakban a következő:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)^2 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)^2 = 1,$$

ahol

- $a_n = 0$, ha $n = 2k+1$ bármely k természetes szám esetén.
- $a_n = \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, ha $n = 2k$ bármely k természetes szám esetén.
- $b_n = \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,ha $n = 2k+1$ bármely k természetes szám esetén.
- $b_n = 0$, ha $n = 2k$ bármely k természetes szám esetén.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

ahol $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. A páratlan indexű tagok mindegyike 0, tehát a elég csak a páros indexű tagokat beleszámolni.

$$\begin{aligned}
c_n = c_{2k} =& a_0 a_{2k} + a_2 a_{2k-2} + \ldots + a_{2k} a_0 = \\
=& \frac{x^0}{0!} \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{2k!} \cdot \frac{x^0}{0!} = \\
=& x^{2k} \left(\frac{1}{0! \cdot (2k!)} + \frac{1}{2! \cdot (2k-2)!} + \ldots + \frac{1}{(2k)! \cdot 0!} \right) = \\
=& \frac{x^{2k}}{(2k)!} \left(\binom{2k}{0} + \binom{2k}{2} + \binom{2k}{4} + \ldots + \binom{2k}{2k} \right) = \\
=& \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot 2^{2k-1}
\end{aligned}$$

Tehát $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot 2^{2k-1}$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n,$$

ahol $d_n = \sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k}$. A tagok közül csak azok különböznek 0-tól, melyeknek mindkét tényezője páratlan indexű.

$$\begin{aligned}
d_n = d_{2k} =& b_1 b_{2k-1} + b_3 b_{2k-3} + \ldots + b_{2k-1} b_1 = \\
=& \frac{x^1}{1!} \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{x^{2k-3}}{(2k-3)!} + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \cdot \frac{x^1}{1!} = \\
=& x^{2k} \left(\frac{1}{1! \cdot (2k-1)!} + \frac{1}{3! \cdot (2k-3)!} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)! \cdot 1!} \right) = \\
=& \frac{x^{2k}}{(2k)!} \left(\binom{2k}{1} + \binom{2k}{3} + \binom{2k}{5} + \ldots + \binom{2k}{2k-1} \right) = \\
=& \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot 2^{2k-1}
\end{aligned}$$

Tehát $\sum_{n=0}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot 2^{2k-1}$. Így $\sum_{n=0}^{\infty} c_n - \sum_{n=0}^{\infty} d_n = 1$. ♣

4.5. Fizikai mennyiségek becslése

4.5.1. Feladat. *Két egyforma villanyoszlop távolsága* 100 *m. A közöttük lévő huzal hossza* 104 *m. Becsüljük meg a belógás nagyságát, a feszítőerőt, valamint adjunk becslést a hibára.*

Megoldás. Illesszük az adatokat derékszögű koordináta-rendszerbe a következőképpen:

- x tengely legyen a láncgörbe mentén belógó huzal legmélyebb pontjában húzott érintővel párhuzamos
- y tengely haladjon át a legmélyebb ponton.

A metszéspontot jelölje a. A fizikából ismert képlet szerint

$$a = \frac{H}{p},$$

ahol H a feszítőerő vízszintes komponense, amely a vezeték minden pontjában állandó, p pedig a vezeték egységnyi darabjának súlya, mely egy ismert állandó.

Tehát a huzal egyensúlyi alakja a következő függvénynek felel meg:

$$y(x) = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

A belógás nagysága ezen függvény $x = 50$ és $x = 0$-beli értékének különbsége, jelölje h. A vezeték felének ívhossza 52. Tehát

$$52 = \int_0^{50} \sqrt{1 + (y'(x))^2} = \int_0^{50} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \int_0^{50} \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \operatorname{sh} \frac{50}{a}$$

Azaz a az alábbi egyenlet megoldásából adódik. Ez egy transzcendens egyenlet, amit elemi módszerekkel nem lehet megoldani.

Legyen $u := \frac{50}{a}$. Ezen jelölés mellett az egyenlet

$$\frac{52}{50}u = \operatorname{sh} u$$

Az $\operatorname{sh} u$ függvényt közelítsük az ötödfokú Taylor-plonimjával, azaz $\operatorname{sh} u \approx u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!}$-val. Tehát megoldandó az alábbi egyenlet: $\frac{52}{50}u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!}$. Ennek egyetlen pozitív gyöke: $u_1 \approx 0,487019$.

De ez az eredmény mennyire tükrözi a valóságot??

- Az u_1 értéke biztosan nagyobb a valódi u-nál, mivel egy, az $\operatorname{sh} u$ hatványsoránál kisebb értékű függvénnyel heéyettesítettünk.

- Keressünk egy olyan u_2 közelítő megoldást, amely biztosan kisebb, mint u. Ehhez becsüljük fölül a hatványsor elhagyott tagjainak összegét a $0 \leq u \leq 0,487019 \approx \frac{1}{2}$. Így $\operatorname{sh} u$-nál minden u esetén nagyobb értékű függvényt kapunk. Így a kapott u_2 gyök kisebb a pontos u-nál.

  Becsüljük fölül a $\sum\limits_{2=3}^{\infty} u^{2n+1}$-t!

$$\begin{aligned}
\frac{u^5}{5!} + \frac{u^7}{7!} + \frac{u^9}{9!} + \ldots =& \frac{u^5}{5!}\left(1 + \frac{u^2}{6\cdot 7} + \frac{u^4}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} + \ldots\right) \leq \\
\leq& \frac{u^5}{5!}\left(\frac{u^2}{6\cdot 7} + \left(1 + \frac{u^2}{6\cdot 7}\right)^2 + \ldots\right) \leq \\
\leq& \frac{u^5}{5!} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{u^2}{6\cdot 7}\right)} \leq \frac{u^5}{5!} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{0,25}{6\cdot 7}\right)} = \frac{u^5}{5!} \cdot \frac{42}{41,75}
\end{aligned}$$

  Tehát a megoldandó egyenlet $\frac{52}{50} = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{42}{41,75} \cdot \frac{u^5}{5!}$. Az egyenlet egyetlen poziítv gyöke $u_2 \approx 0,487002$.

Ekkor u_1 és u_2 számtani közepe kisebb hibát produkál kettejük különbségének felénél. Így $u = \frac{u_1 + u_2}{2} \approx 0,487011$.

A maximális hiba $e = \frac{0,487019 - 0,487002 = 0,000017}{2} \approx 10^{-5}$.

$$a = \frac{50}{u} = \frac{50}{0,487011} = 102,667086$$

$$y(x) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = 102,667086 \operatorname{ch} \frac{x}{102,667086}$$

Tehát a belógás mértéke $h = y(50) - y(0) = 115.084916 - 102.667086 = 12.4178295$ (m), lehetséges hiba $h \cdot e \approx 10^{-4}$ (m).

A feszítő erő mértéke $H = a \cdot p = 102.667086p$ (N), a lehetséges hiba $H \cdot e \approx 10^3 p$ (N)

♣

5. fejezet

Összegzés

A szakdolgozat segítségével megismerkedhettünk a hatványsorokkal és alkalmazási területeikkel. Felidéztük a hatványsorok megismeréséhez szükséges fogalmakat, tételeket a valós számsorozatok témaköréből, bemutatva azok tulajdonságait, ismertetve a rájuk vonatkozó tételeket. Ezen ismereteket felhasználva definiáltuk a végtelen sorokat, azok konvergenciáját és egyéb fontos tulajdonságokat. Említétésre kerültek a függvénysorozatok. Az eddigieket felhasználva jutottunk el a hatványsoroho. Bemutattuk a Taylor-polinomokat és Taylor sorokat. Megtaláltuk néhány ismert függvény hatványsorát. Az itt kapott eredmények és tételek segítségével ismertettünk néhány gyakorlati alkalmazást. Láttunk példát nem elemi kifejezések viszonylag pontos közelítésére, megoldottunk első- illetve másodrendű differenciálegyenletet, beláttunk trigonometrikus és hiperbolikus összefüggéseket. Láttuk, hogy a hatványsorok segítségével milyen pontosan kiszámíthatóak egyes fizikai mennyiségek.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Bátkai Andrásnak, aki jó tanácsaival segített szakdolgozatom megírásában.

Irodalomjegyzék

[1] Urbán János: *Határérték-számítás*, Műszaki Könyvkiadó (2004)

[2] Frey Tamás: *Műszaki matematikai gyakorlatok – A. VIII. Taylor-sorok*, Tankönyvkiadó (1965)

[3] Bátkai András: *Hatványsorok* ELTE kézirat

[4] Szilágyi Tivadar: *Végtelen sorok, hatványsorok* ELTE kézirat

[5] Bárczy Barnabás: *Differenciálszámítás* Műszaki Könyvkiadó (2004)

NYILATKOZAT

Név: Vass Lajos

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika B.Sc

ETR azonosító: VALPABT.ELTE

Szakdolgozat címe:

Hatványsorok és alkalmazásaik

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2011. május 30.

____

a hallgató aláírása