Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Fehér Elza

elemző matematikus szak

Szélsőérték-problémák

Diplomamunka

témavezető:
Mezei István, egyetemi adjunktus
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Alkalmazott Analízis Tanszék

Budapest, 2012.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. Módszertani áttekintés **4**

2.1. Másodfokú függvények 4

2.2. A differenciálható függvények szélsőértékeinek meghatározása 4

2.3. Többváltozós szélsőérték-számítás 7

2.4. Közepek közti összefüggés 9

3. Feladatok **10**

3.1. Egyváltozós függvények deriválásával megoldható problémák 10

3.2. Többváltozós függvények deriválásával megoldható problémák 13

3.3. Közepek közti összefüggéssel megoldható feladatok 15

3.4. Trigonometriai szélsőérték-feladatok 17

3.5. Vegyes feladatok 18

4. Köszönetnyilvánítás **24**

1. Bevezetés

A szélsőérték-feladatok már évszázadok, sőt évezredek óta fogalkoztatják a matematikusokat. Az egyik legismertebb és egyben legérdekesebb geometriai szélsőérték-probléma az izoperimetrikus probléma: adott kerületű síkidomok közül keressük azt, aminek a legnagyobb a területe. Ezzel ekvivalens, ha adott területű síkidomok közül keressük a legkisebb kerületűt. A probléma térbeli változatában adott térfogatú testek közül kell meghatároznunk a minimális felszínűt. Fizikából tudjuk, hogy ideális körülmények között a minimális felszínre törekvő vízcsepp gömb alakot vesz fel, vagyis - tapasztalati úton - az utóbbi kérdésre a gömb a válasz. Precízen ezt csak Weierstrass munkásságának köszönhetően látták be a 19. században. Az ehhez és más szélsőérték-feladatokhoz felhasznált módszerek - deriválás, többváltozós deriválás, egyenlőtlenségek, stb. - többek között Newton, Leibniz, Lagrange, Cauchy és Swartz nevéhez fűződnek.

A témakör gyakorlati felhasználhatósága is jelentős. A gazdasági életben gyakori, hogy egy adott vállalkozás bevétele, vagy éppen költsége egy elemi függvénnyel jól közelíthető. Emiatt mindig is nagy szükség volt egy olyan módszerre, amivel elemi függvények maximuma illetve minimuma meghatározható. Ezt a problémát oldotta meg Newton és Leibniz a differenciálszámítás elméletének megalkotásával. A gyakorlatban azonban nem ritka, hogy a bevételfüggvény vagy a költségfüggvény több paramétertől is függ. Ilyen paraméterek lehetnek például a reklámra fordított összeg nagysága, a felvett alkalmazottak száma, vagy a kutatás-fejlesztésre szánt összeg. Ekkor egy többváltozós függvény szélsőértékét kell meghatároznunk. A 2.3. fejezetben megmutatjuk annak a módszernek egy speciális esetét, ami többváltozós differenciálható függvények szélsőérték-keresésére alkalmas.

A fenti konkrét alkalmazások mellett persze a témakör elvi jelentősége is igen nagy. A kidolgozott módszerek (diferenciálszámítás, Cauchy-Swartz-egyenlőtlenség, közepek közti összefüggések) a középiskolai matematikában és a felsőbb matematika több ágában is nagyon fontosak.

2. Módszertani áttekintés

2.1. Másodfokú függvények

Egyes szélsőérték-feladatokat megoldhatunk másodfokú függvények minimum- és maximumhelyének vizsgálatával. Ez a módszer a következő tételen alapszik.

1. Tétel. *Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény globális szélsőértékhelye az $x_0 = -\frac{b}{2a}$. A szélsőérték*

- *minimum, ha $a > 0$,*
- *maximum, ha $a < 0$.*

Bizonyítás:

Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény hozzárendelési szabályát teljes négyzetté alakítással átírhatjuk a következő alakba: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$. Mivel minden valós szám négyzete nemnegatív, és csak a 0-nak a négyzete 0, így pozitív a esetén $f(x) \geq -\frac{b^2-4ac}{4a}$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, ha pedig az a negatív, akkor $f(x) \leq -\frac{b^2-4ac}{4a}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Egyenlőség pontosan az $x_0 = -\frac{b}{2a}$-ra áll fenn. Az átalakításból azt is leolvashatjuk, hogy az f függvény képét a normálparabolából milyen geometriai transzformációkkal kaphatjuk meg. □

A szélsőértékhelyben a függvényérték $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. Az f függvény zérushelyei az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei.

2.2. A differenciálható függvények szélsőértékeinek meghatározása

2. Tétel. *Legyen f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon és differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon. Ha f-nek lokális szélsőértéke van az $x_0 \in [a, b]$ pontban, akkor:*

- *vagy $x_0 \in (a, b)$ és $f'(x_0) = 0$*
- *vagy x_0 az intervallum egyik végpontja.*

1. Definíció. *Az f függvénynek a c pontban*

- *lokális maximuma van, ha c-nek van olyan B környezete, amelyben f értelmezve van és minden $x \in B - re$ $f(x) \leq f(c)$. Ekkor a c pontot az f függvény lokális maximumhelyének nevezzük.*
- *lokális minimuma van, ha c-nek van olyan B környezete, amelyben f értelmezve van és minden $x \in B - re$ $f(x) \geq f(c)$. Ekkor a c pontot az f függvény lokális minimumhelyének nevezzük.*

2. Definíció. *Legyen az f függvény az A halmazon értelmezve. Ha az A halmazhoz tartozó $f(A)$ értékkészletnek van legnagyobb eleme, akkor ezt az f függvény A-n felvett abszolút maximumának nevzzük és* $\max f(A)$*-val jelöljük. Ha $a \in A$ és $f(a) = \max f(A)$, akkor azt mondjuk, hogy a az f függvény A-hoz tartozó abszolút maximumhelye.*

Ugyanígy abszolút minimumra is, ha $b \in A$ és $f(b) = \min f(A)$, akkor azt mondjuk, hogy b az f függvény A-hoz tartozó abszolút minimumhelye.

Egy A halmazon egy függvénynek több abszolút maximum- illetve minimumhelye is lehet. De az is lehet, hogy egy függvénynek egyáltalán nincs abszolút maximuma vagy minimuma.

3. Tétel (Weierstrass tétele, 157. olodal [2]-ban)**.** *Ha $f \in C[a, b]$, akkor van olyan $\alpha \in [a, b]$ és $\beta \in [a, b]$, amelyekre teljesül, hogy $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ minden $x-re \in$ $\in [a, b]$-re. Vagyis egy korlátos és zárt intervallumon folytonos függgvénynek mindig van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye.*

`Megjegyzés`: Különbség van az abszolút szélsőértékhely és a lokális szélsőértékhely fogalma között, mivel egy abszolút szélsőértékhely nem feltétlenül lokális szélsőértékhely, mert a lokális szélsőértékhelynek feltétele, hogy a függvény értelmezve legyen c pont egy környezetében. Így például a [0,1] intervallumon értelmezett x függvénynek a 0 pontban abszolút minimuma van, de ez nem lokális minimum. Azonban, ha az $f : A \to \mathbb{R}$ függvénynek a $c \in A$ pontban abszolút szélsőértéke van és A tartalmazza c egy környezetét, akkor c lokális szélsőértékhely. [5]

4. Tétel (264. olodal [2]-ban)**.** *Legyen az f függvény folytonos az $[a, b]$-ben és differenciálható (a, b)-ben.*

(1) Az f függvény akkor és csak akkor monoton növekedő (illetve monoton csökkenő) $[a, b]$-ben, ha $f'(x) \geq 0$ (illetve $f'(x) \leq 0$) minden $x \in (a, b)$-re.

(2) Az f függvény akkor és csak akkor szigorúan monoton növő (illetve szigorúan monoton csökkenő) $[a, b]$-ben, ha $f'(x) \geq 0$ (illetve $f'(x) \leq 0$) minden $x \in$ $\in (a, b)$-re, és ha $[a, b]$-nak nincs olyan részintervalluma, mely f' azonosan nulla.

Attól, hogy f lokálisan növekedő a-ban, nem következik, hogy $f'(a) > 0$. Például az $f(x) = x^3$ függvény lokálisan növekedő 0-ban, de $f'(0) = 0$.

Egy tetszőleges differenciálható függvény abszolút és lokális szélsőértékeit megkereshetjük, akkor is, ha a függvény nem egy korlátos és zárt intervallumon van értelmezve. A derivált előjeléből megállapíthatjuk, hogy a függvény melyik intervallumon nő és melyik intervallumon csökken, ez elegendő információt ad a szélsőértékek megkereséséhez.

Nézzük például az $f(x) = x \cdot e^{-x}$ függvényt.

$f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x}$, az $f'(x) > 0$, ha $x < 1$ és $f'(x) < 0$, ha $x > 1$. Így f szigorúan monoton nő a $(-\infty,1]$ intervallumon és szigorúan monoton csökken az $[1, -\infty)$ intervallumon. Ebből következik, hogy f-nek 1-ben abszolút maximuma van és hogy f-nek nincs sem lokális, sem abszolút minimumhelye.

A következő tételek elégséges feltételt adnak a lokális szélsőértékhely létezésére.

5. Tétel. *[265. olodal [2]-ban]*

Legyen az f függvény differenciálható az a pont egy környezetében.

(1) Ha $f'(a) = 0$, és f' monoton növekedő (illetve monoton csökkenő) az a egy környezetében, akkor az a pont f-nek lokális minimumhelye (illetve lokális maximumhelye).

(2) Ha $f'(a) = 0$, és f' szigorúan monoton növekedő (illetve szigorúan monoton csökkenő) a-ban, akkor az a pont f-nek szigorú lokális minimumhelye (illetve szigorú lokális maximumhelye).

A Tétel 5 következménye az alábbi állítás.

6. Tétel. *Legyen az f függvény kétszer differenciálható az a pontban.*

(1) Ha $f'(a)$ =0 és $f''(a) > 0$, akkor f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van.

(2) Ha $f'(a)$ =0 és $f''(a)<$ 0, akkor f-nek a-ban szigorú lokális maximuma van. (Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) = 0$, abból még nem következik, hogy f-nek lokális szélsőértékhelye van a-ban. Egy ellenpélda az $f(x) = x^3$.)

Következzenek a konvexitásra vonatkozó feltételek.

3. Definíció. *Az f függvény akkor és csak akkor konvex az I intervallumon, ha bármely $a, b \in I$ és $0 < t < 1$ számokra*

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

7. Tétel. *Legyen az f függvény differenciálható az I intervallumban.*

– *Az f függvény akkor és csak akkor konvex (illetve konkáv) I-ben, ha f' monoton növekedő (illetve csökkenő) I-ben.*

– *Az f függvény akkor és csak akkor szigorúan konvex (illetve szigorúan konkáv) I-ben, ha f' szigorúan monoton növekedő (illetve szigorúan monoton csökkenő) I-ben.*

8. Tétel. *Legyen az f függvény differenciálható az I intervallumban. Az f függvény akkor és csak akkor konvex I -ben, ha bármely $a, b \in I - re$ az f függvény grafikonja az a és b pont között húzott szakasz felett halad.*

9. Tétel. *Legyen az f függvény kétszer differenciálható az I intervallumban. Az f függvény akkor és csak akkor konvex I-ben,*

– *ha $f"(x) \geq 0$ minden $x \in I - re$,*

– *ha $f"(x) \leq 0$ minden $x \in I - re$.*

10. Tétel (Jensen-egyenlőtlenség, [2] 118. oldal)**.** *Egy tetszőleges I intervallumon adott egy konvex f függvény, $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$, melyekre $\lambda_1 + + \dots + \lambda_n = 1$. Ekkor*

$$\lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \ldots + \lambda_n f(a_n) \geq f(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \ldots + a_n\lambda_n).$$

Szigorúan konvex f esetén egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = \dots = a_n$. Ha f konkáv akkor a fordított írányú egyenlőtlenség teljesül:
$\lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \ldots + \lambda_n f(a_n) \leq f(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \ldots + a_n\lambda_n)$.

A szélsőérték meghatározása: Meg kell határoznunk a függvény értelmezési tartományát, a differenciálható függvény szélsőértékeit, majd ellenőrizni kell az értelmezési tartomány határpontjaiban a függvényt vagy határértékét.

2.3. Többváltozós szélsőérték-számítás

Az ebben a fejezetben található definíciók és tételek megtalálhatók [3]-ben.

4. Definíció. *Egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényt többváltozós függvénynek nevezünk.*

5. Definíció (19.54-es definíció [3]-ben)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ egy többváltozós függvény. Legyen az f függvény értelmezve az $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ pont egy környezetében. Rögzítsük az $a = (a_1, \dots, a_p)$ pont koordinátáit az i-edik kivételével, és tekintsük a megfelelő*

$$t \mapsto f_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p)$$

szekciófüggvényt. Az így kapott egyváltozós f_i függvény a_i pontban vett deriváltja (amennyiben létezik) az f függvény a pontban vett i-edik parciális deriváltjának nevezzük, és a

$$\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(a), f'_{x_i}(a), f_{x_i}(a), D_{x_i} f(a), D_i f(a)$$

szimbólumok bármelyikével jelölhetjük.

6. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ egy többváltozós függvény, és legyen $a \in \mathbb{R}^p$ egy olyan pontja f értelmezési tartományának, amiben f minden iránymenti deriváltja 0. Ekkor a-t az f stacionárius pontjának nevezzük.*

11. Tétel (19.59-es tétel [3]-ben)**.** *Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ korlátos és zárt, legyen $f : A \to \mathbb{R}$ folytonos, és tegyük fel, hogy f-nek léteznek a parciális deriváltjai A belsejének minden pontsában. Ekkor f a legnagyobb (legkisebb) értékét vagy A határán veszi fel, vagy pedig egy olyan a belső pontban, ahol $\frac{\partial}{\partial_i} f(a) = 0$ minden $i = 1, \ldots, p$-re.*

7. Definíció (19.61-es definíció [3]-ben)**.** *Legyen az f függvény értelmezve az $a \in$ $\in \mathbb{R}^p$ pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy f differencálható az a pontban, ha van olyan $l(x)$ lineáris függvény, hogy*

$$f(x) = f(a) + l(x - a) + \epsilon(x) \cdot |x - a|$$

minden $x \in D(f)$-re, ahol $\epsilon(x) \to 0$ ha $x \to a$.

12. Tétel (Young-tétel (19.80-as tétel [3]-ben))**.** *Ha a kétváltozós $f(x, y)$ függvény $\frac{\partial}{\partial_1} f(x, y)$ és $\frac{\partial}{\partial_2} f(x, y)$ parciális deriváltjai léteznek az $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pont egy környezetében és differencálhatóak az (a, b) pontban, akkor $\frac{\partial}{\partial_{12}} f(a, b) = \frac{\partial}{\partial_{21}} f(a, b)$.*

8. Definíció (19.82-es definíció [3]-ben)**.** *Legyen f differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pont egy környezetében. Ha f parciálisderivált-függvényei differenciálhatóak az a potban, akkor azt mondjuk, hogy f kétszer differenciálható az a pontban.*

A Young-tétel következménye az alábbi állítás.

13. Tétel (19.84-es tétel [3]-ben)**.** *Ha f kétszer differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban, akkor $\frac{\partial}{\partial_{ij}} f(a, b) = \frac{\partial}{\partial_{ji}} f(a, b)$ teljesül minden $i, j = 1, \ldots, p$-re.*

9. Definíció (19.94-es definíció [3]-ben)**.** *Legyen az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ az a pontban kétszer differenciálható. Ekkor a*

$$d^2 f(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$$

$$b \mapsto \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_i} \partial_{x_j}}(a) \cdot b_i \cdot b_j$$

p-változós polinomot az f függvény a-beli második differenciáljának nevezzük.

`Megjegyzés` : Ha f kétváltozós függvény, akkor az f a-beli második differenciálja $\frac{\partial^2 f}{\partial^2_{x_1}}(a) \cdot b_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial^2_{x_2}}(a) \cdot b_2^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_1} \partial_{x_2}}(a) \cdot b_1 b_2$.

14. Tétel (19.99-es tétel [3]-ben)**.** *Legyen az f föggvény kétszer differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban, és tegyük fel, hogy $\frac{\partial}{\partial_i} f(a) = 0$ minden $i = 1, \ldots, p$-re.*

(1) Ha f-nek az a pontban lokális minimuma (maximuma) van, akkor a $d^2f(a)$ kvadratikus alak pozitív (negatív) szemidefinit.

(2) Ha a $d^2f(a)$ kvadratikus alak pozitív (negatív) definit, akkor az f-nek az a pontban szigorú lokális minimuma (maximuma) van.

Ha f kétváltozós függvény, akkor a Tétel 14 a következőképpen is megfogalmazható.

15. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható a-ban, és tegyük fel, hogy a egy stacionárius pontja f-nek. Legyen $D = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(a)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}(a) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)\right)^2$. Ekkor*

(1) Ha $D < 0$, akkor a nem lokális szélsőértékhely (úgynevezett nyeregpont);

(2) Ha $D > 0$, akkor a lokális szélsőértékhely, éspedig

- *ha $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(a) > 0$, akkor lokális minimumhely,*
- *ha $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(a) < 0$, akkor lokális maximumhely.*

Bizonyos speciális esetekben a lokális szélsőértékhely egy ekvivalens megfogalmazásához is eljuthatunk Tétel 14-ből.

16. Tétel (19.103-as tétel [3]-ben)**.** *Legyen f kétszer differenciálható a konvex és nyílt $G \subset \mathbb{R}^p$ halmazon. Az f függvény akkor és csak akkor konvex $G - n$, ha a $d^2f(a)$ kvadratikus alak pozitív szemidefinit minden $a \in G - re$.*

2.4. Közepek közti összefüggés

10. Definíció. *Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok.*

Az $A(a_1;...;a_n) = \frac{a_1+...+a_n}{n}$ kifejezés értékét az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok számtani közepének nevezzük.

11. Definíció. *Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok.*

A $G(a_1;...;a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n}$ kifejezést az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok mértani vagy geometriai közepének nevezzük.

12. Definíció. *Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok.*

A $H(a_1;...;a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n}}$ kifejezést az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok harmonikus közepének nevezzük.

13. Definíció. *Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok.*

Az $N(a_1;...;a_n) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$ kifejezést az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok négyzetes közepének nevezzük.

17. Tétel. *Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok. Ekkor*

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq G(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq Q(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

és bármely kettő között egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Bizonyítás:

Az $f(x) = x^2$ szigorúan konvex, így felírhatjuk rá a Jensen-egyenlőtlenséget, amit a Tétel 10 -ben mondtunk ki.

$\frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)}{n} \geq f(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})$. Tehát

$\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n} \geq (\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})^2$. Mindkét oldalból négyzetgyököt vonunk, és azt kapjuk, hogy

$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

Mivel f szigorúan konvex, így egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = \cdots = a_n$. Ezzel beláttuk a számtani- és a négyzetes közepek közti összefüggést.

Az ln függvény szigorúan konkáv, így erre is felírhatjuk a Jensen-egyenlőtlenséget.

$\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n} \leq ln(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})$. Az

$ln\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq ln(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n})$. Így

$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. Tehát ezzel beláttuk a számtani- és a mértani közepek közti összefüggést.

Ha felírjuk az előbb igazolt számtani-mértani közepek közti összefüggést az alábbi számokra:

$b_1 = \frac{1}{a_1}, b_2 = \frac{1}{a_2}, \cdots, b_n = \frac{1}{a_n}$, akkor

$\sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} \leq \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$ teljesül. Átalakítva:

$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}$. Véve mindkét oldal reciprokát azt kapjuk, hogy

$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$. Ezzel beláttuk a mértani- és harmonikus közepek közti összefüggést.

3. Feladatok

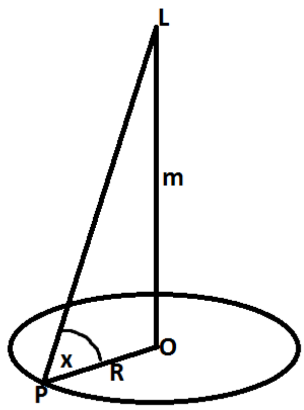
3.1. Egyváltozós függvények deriválásával megoldható problémák

1. Feladat. *Legyen $f : [-\frac{1}{2}, 4] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$. Határozzuk meg f globális szélsőértékeit.*

Megoldás:

A függvény differenciálható a $(-\frac{1}{2}, 4)$ intervallumon, és folytonos a teljes $[-\frac{1}{2}, 4]$ zárt intervallumon. Így a Tétel 2 alapján, ha x_0 lokális szélsőértéke az f-nek, akkor x_0 vagy az intervallum egyik végpontja, vagy olyan belső pontja, amire $f'(x_0) = 0$. A végpontokban $f(-\frac{1}{2}) = \frac{9}{8}$ és $f(4) = 18$ értékeket vesz fel a függvény. Deriválás után $f'(x) = 3x^2 - 6x$ adódik, vagyis f' zérushelyei a 0 és a 2. Mivel $f(0) = 2$ és $f(2) = -2$, így globális minimum csak 2-ben, globális maximum csak 4-ben lehet. Weierstass tétele alapján f-nek van globális minimuma és globális maximuma is, tehát a 2 valóban globális minimumhely, a 4 pedig globális maximumhely. Az f függvény globális minimuma (-2), globális maximuma pedig 18. □

2. Feladat. *Milyen magasan kell elhelyezni valamely R sugarú kör alakú futópálya közepén a lámpát, ha azt akarjuk, hogy a futópálya megvilágítása a lehető legerősebb legyen?(A megvilágítás erőssége tetszőleges P pontban egyenesen arányos a beeső fénysugár és a pálya síkja hajlásszögének szinuszával, és fordítottan arányos a fényforrás és P pont távolságának négyzetével.)*



Megoldás:

Legyen O a kör középpontja, P a kör egy pontja, L a pontszerű fényfoprrás helye, m pegid az a magasság, ahova a lámpát elhelyeztök, vagyis az OL távolság. Legyen x a beeső fénysugár és a pálya síkjának a szöge. Ekkor a keresett magasság: $LO = m = R \cdot \tan x$;

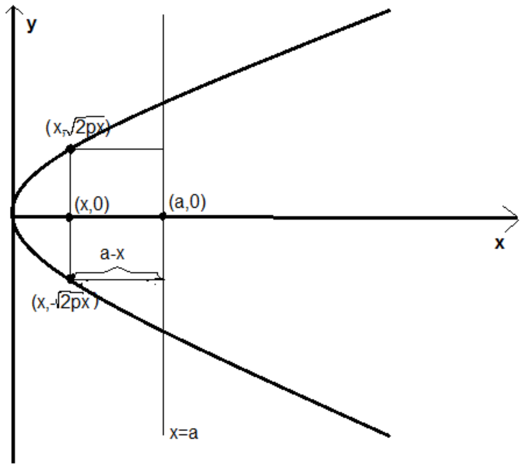
A megvilágítás erőssége a P pontban:

$g(x) = C \cdot \frac{\sin x}{PL^2} = C \cdot \frac{\sin x}{(\frac{R}{\cos x})^2} = \frac{C}{R^2} \cdot \sin x \cos^2 x = \frac{C}{R^2}(\sin x - \sin^3 x)$, ahol C konstans, arányossági tényező. Deriválás után $g'(x) = \frac{C}{R^2}(cosx - 3sin^2x \cdot cosx) = 0$, ha $sin^2x = \frac{1}{3}$, mivel x hegyeszög.

	$o < \alpha < 35°$	$\alpha = 35°$	$35° < \alpha < 90°$
f’	+	0	-
f	↗	glob.max. hely	↘

A jelváltás ellenőrzése megmutatja, hogy ezen a helyen $g(x)$ maximális.
Ekkor $\cos^2 x = \frac{2}{3}$, $tg^2 x = \frac{1}{2}$, $\tan x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a keresett magasság pedig
$m = R \cdot \tan x = R\frac{\sqrt{2}}{2}$ □

3. Feladat. *Az $y^2 = 2px$ parabolából az $x = a$ egyenes levág egy szeletet. Ebbe a parabolaszeletbe írjunk olyan téglalapokat, amelyeknek középvonala a parabola tengelye. Melyik téglalap lesz maximális területű?*



Megoldás:

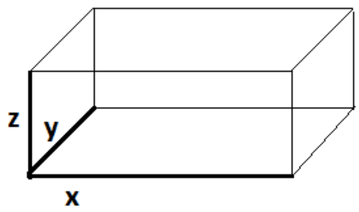
Legyen x az a pont, ahol a téglalap éle metszi az x tengelyt, $T(x)$ a téglalap területe. Így $T(x) = 2(a - x)\sqrt{2px}$, amit lederiválva azt kapjuk, hogy
$T'(x) = 2(-1)\sqrt{2px} + 2(a - x)\sqrt{2p} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -2\sqrt{2px} + \sqrt{2p} \cdot \frac{a-x}{\sqrt{x}}$.
Keressük meg a $T'(x) = 0$ megoldásait.
$-2\sqrt{2px} + \sqrt{2p} \cdot \frac{a-x}{\sqrt{x}} = 0$, ezt megszorozva $\sqrt{x}$ -szel,
$-2\sqrt{2p} \cdot x + \sqrt{2p} \cdot (a - x) = 0$. Átrendezve
$(-2\sqrt{2p} - \sqrt{2p}) \cdot x + \sqrt{2p} \cdot a = 0$, majd összevonva
$-3\sqrt{2p} \cdot x + \sqrt{2p} \cdot a = 0$. Ezt elosztva $\sqrt{2p}$ -vel
$-3x + a = 0$, így $x = \frac{a}{3}$ adódik.

	$x = 0$	$o < x < \frac{a}{3}$	$x = a$	$\frac{a}{3} < x < a$	$x = a$
f'	+	+	0	-	-
f	0	$\nearrow$	glob.max. hely	$\searrow$	0

Vagyis $x_0 = \frac{a}{3}$ globális maximumhelye a T-nek.
$T(\frac{a}{3}) = 2 \cdot \frac{2}{3}a \cdot \sqrt{2p \cdot \frac{2}{3}} = \frac{4\sqrt{2p}}{3\sqrt{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$ □

3.2. Többváltozós függvények deriválásával megoldható problémák

4. Feladat. *Egy medencét szeretnénk építeni az udvarra. Legyen $4m^3$ a térfogata, de a lehető legkevesebb csempét kelljen felhasználni. Hogyan kell megválasztani a medence paramétereit?*



Első megoldás:

A medence alját és négy oldalát kell csak kicsempézni, így csak ezeknek a lapoknak az összterülete számít.

A medence élei $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. Az $A = xy + 2xz + 2yz$ minimumát keressük az $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ és $xyz = 4$ feltételek mellett.

Az $a = xy, b = 2xz, c = 2yz$ számokra írjuk fel a számtani- mértani közepek közti összefüggést.

$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$. Behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$\frac{xy+2xz+2yz}{3} \geqslant \sqrt[3]{xy2zx2yz}$, a felszínnel kifejezve

$\frac{A}{3} \geqslant \sqrt[3]{4(xyz)^2}$ adódik.

$A \geqslant 3\sqrt[3]{4(4)^2} = 3\sqrt[3]{64} = 12$. Tehát $A \geqslant 12$.

A felszín akkor és csak akkor lesz pontosan $12m^2$, ha a számtani- mértani közepek közti egyenlőtlenség éles, vagyis $a = b = c$.

Tehát $xy = 2yz = 2zx$, $xyz = 4$, $xy = 2yz$, amiből

$z = \frac{x}{2}xy = 2zx$, és $y = 2z = x$ következik.

Ezt visszahelyettesítve $x \cdot x\frac{x}{2} = 4$, vagyis

$x^3 = 8$ adódik.

A becslés tehát $x = 2, y = 2, z = 2$ esetén éles, ekkor a legkisebb a felszín, vagyis így használhatjunk fel a legkevesebb csempét. □

Második megoldás:(többváltozós szélsőérték-számítás segítségével)

A= xy+2yz+2zx minimumát keressük az x, y, z $\in \mathbb{R}$, xyz=4 feltételek mellett. $z = \frac{4}{xy} \Rightarrow A(x,y) = xy + 2y\frac{4}{xy} + 2x\frac{4}{xy} = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$, kétváltozós függvény amely megmutatja a felszínt, az x és y függvényében. Szélsőérték (lokális szélsőérték) csak ott van, ahol a parciális deriváltak 0-k.

$\frac{\partial}{\partial x}A(x,y) = y - \frac{8}{x^2} = 0$

$y = \frac{8}{x^2}$, és

$\frac{\partial}{\partial x}A(x,y) = x - \frac{8}{y^2} = 0$

$x = \frac{8}{y^2}$

$x = \frac{8}{(\frac{8}{x^2})^2} = \frac{8}{\frac{64}{x^4}} = \frac{x^4}{8}$

$8 = x^3$

$x = 2$

Visszahelyetesítve $y = \frac{8}{x^2} = \frac{8}{4} = 2$.

Egyetlen stacionárius pont van:(2,2).

A $D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}A(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}A(x_0, y_0) - (\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}A(x_0, y_0))^2$.

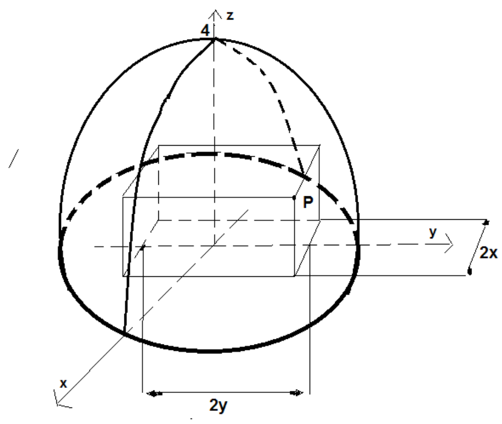
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}A(x,y) = \frac{16}{x^3}$ és

$\frac{\partial^2}{\partial y^2}A(x,y) = \frac{16}{y^3} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}A(x,y) = 1$.

$D(2{,}2) = \frac{256}{2^3 \cdot 2^3} - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$, vagyis a (2,2) lokális szélsőérték hely. $\frac{\partial^2}{\partial x^2}A(2{,}2) = \frac{16}{8} = 2 > 0 \Rightarrow$ a (2,2) egy lokális minimumhely. □

5. Feladat ([4]). *Határozzuk meg a $4 - x^2 - 2y^2 = z$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2, z \geq 0$ egyenletű felület és az xy-sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest lapjai a koordinátasíkokkal párhuzamosak.*

Megoldás: Téglatest élei: $2x; 2y; z$, $x, y, z > 0$



(Az ábrából láthatóan)

$$V = 4xyz$$

ezt kell maximalizálni a $z = 4 - x^2 - 2y^2$ feltétel mellett.

$V(x,y) = 4xy(4 - x^2 - 2y^2) = 16xy - 4x^3y - 8xy^3$

$D_v = \ (x,y)|x, y \geq 0, x^2 + 2y^2 \leq 4$ (ellipszis egyenlete)

ennek a kétváltozós függvénynek az abszolút szélsőértékét keressük. A függvény értéke nullát vesz fel a határokon, belül pozitív, így a maximumhely csak lokális szélsőértékhely lehet.

Az elsőrendű parciális deriváltak:

$V(x,y) = 16xy - 4x^3y - 8xy^3$,

$\frac{\partial}{\partial x}V = 16y - 12x^2y - 8y^3$,

$\frac{\partial}{\partial y}V = 16x - 4x^3 - 24xy^2$.

Azok a stacionárius pontok, ahol $\frac{\partial}{\partial x}V = \frac{\partial}{\partial y}V = 0$.

Tehát $16y - 12x^2y - 8y^3 = 0 = 4y(4 - 3x^2 - 2y^2)$ és

$16x - 4y^3 - 24xy^2 = 0 = 4x(4 - x^2 - 6y^2)$.

Ha $x = 0$ vagy $y = 0$, akkor a téglatest 0 térfogatú lenne, nyilván nem ott van a maximuma. Tehát az $x, y \neq 0$ feltehető.

$4 - 3x^2 - 2y^2 = 0$ és

$4 - x^2 - 6y^2 = 0$, ebből következik, hogy $x^2 = 4 - 6y^2$.

Ezt behelyetesítve azt kapjuk, hogy $4 - 3(4 - 6y^2) - 2y^2 = 0$, tehát

$4 - 12 + 18y^2 - 2y^2 = 0$, azaz $8 - 16y^2 = 0$.

$8 = 16y^2$

$\frac{8}{16} = \frac{1}{2} = y^2$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = y$

Feltehető ($x, y > 0$ miatt) $x^2 = 4 - \frac{6}{2} = 1$, tehát $x = 1$. Így az egyetlen lehetséges pont: $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Tehát

$z = 4 - x^2 - 2y^2$

$z = 4 - (1^2 - 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2$

$z = 4 - 1 - 2(\frac{2}{4}) = 2$.

Weierstrass tétele miatt $V(x,y)$-nak van maximuma (a fél ellipszoid kompakt, a V pedig folytonos), így csak $V(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ lehet a maximum. (Tétel 15 alapján is meggyőződhetünk arról, hogy ez a stacionárius pont valóban maximumhelyhez tartozik.) $\square$

3.3. Közepek közti összefüggéssel megoldható feladatok

6. Feladat ([6] 92. oldal)**.** *Az $a = 8$ számot bontsuk két pozitív összeadandóra úgy, hogy a tagok*

a) szorzata,

b) négyzetösszege,

c) négyzetének különbsége,

d) köbeinek összege,

(amennyiben ez lehetséges) szélsőértéket vegyen fel.

Megoldás:

Legyen az egyik szám x, a másik $y = 8 - x$.

a) Felírva a számtani– és a mértani közepek közti összefüggést (Tétel 17), azt kapjuk, hogy $4 = \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$. Így $xy \leq 16$. Tétel 17 alapján ez a becslés éles, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = y = 4$. Vagyis a szorzat maximuma 16. Mivel $x(8 - x)$ határértéke 0-ban 0, így a szorzatnak nincs minimiuma.

b)Felírva a azámtani- és négyzetes közepek közti összefüggést a Tétel 17 alapján, azt kapjuk, hogy $4 = \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, akkor $x^2+y^2 \geqslant 32$. Egyenlőség pontosan akkor áll fent ha, $x = y = 4$.

c) Az $x^2 - y^2 = x^2 - (8 - x)^2 = 16(x - 4)$. Ez egy lineáris függvény, így nincs szélsőértéke a (0,8)-on.

d) Az $x^3 + y^3 = x^3 + (8 - x)^3 = 8(64 - 24x - 3x^2)$. Ez egy másodfokú függvény, így Tétel 1 alapján szélsőértéke $x = 4$ -nél van, ez a minimumhelye.

7. Feladat. *Határozzuk meg az adott T területű téglalapok közül a legkisebb kerületűt.*

Megoldás:

Legyen a téglalap két oldala x és y. Mivel a kerület negyede az oldalak átlaga, így $\frac{K}{4} = \frac{x+y}{2}$. Alkalmazzuk a számtani-mértani közepek közti összefüggést. Azt kapjuk, hogy $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, tehát $\frac{K}{4} \geq \sqrt{T}$ adódik.

Egyenlőség pedig akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = y = \sqrt{T}$. Tehát a legkisebb ilyen területű téglalap a négyzet. □

8. Feladat. *Egy adott fajtájú drágakő értéke arányos a tömege négyzetével, azaz egy m tömegű drágakő értéke $e(m) = km^2$, $k \in \mathbb{R}$. Egy ilyen drágakő két darabra tört. Ha eredetileg M volt a tömege, akkor milyen elosztás esetén lesz legkisebb a két darab összértéke? Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is tört ketté a drágakő, ezzel veszített az értékéből.*

Megoldás:

Jelöljük a két darab tömegét m_1 -gyel és m_2 -vel. Mivel a két darab együttesen az eredeti drágakövet adja ki, így $m_1+m_2 = M$. A két darab összértéke $e(m_1)+e(m_2) = km_1^2+km_2^2$. Az eredeti drágakő értéke $e(M) = kM^2 = k(m_1+m_2)^2 = k(m_1^2+m_2^2+ 2m_1m_2)$ a nevezetes azonosság alapján. Mivel k, m_1 és m_2 is pozitív, így $2km_1m_2$ is pozitív, vagyis $e(M) = k(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2) > k(m_1^2 + m_2^2) = e(m_1) + e(m_2)$. Így a drágakő valóban veszített az értékéből.

A két darab összértéke tehát $e(m_1) + e(m_2) = k(m_1^2 + m_2^2)$. A számtani- és a négyzetes közepek közti összefüggésalapján $2k\sqrt{\frac{m_1^2+m_2^2}{2}}^2 \geqslant 2k(\frac{m_1+m_2}{2})^2$. Tehát

$e(m_1) + e(m_2) \geqslant 2k(\frac{M}{2})^2 = 2k\frac{M^2}{4} = \frac{kM^2}{2} = \frac{e(M)}{2}$. A közepek közti egyenlőség pontosan akkor éles, ha minden szám egyenlő, amiknek az adott közepeit vettük. Tehát az $\frac{e(M)}{2}$ értéket valóban felveszi az $e(m_1)+e(m_2)$ függvény, és pontosan akkor, ha $m_1 = m_2$, vagyis $m_1 = m_2 = \frac{M}{2}$. □

3.4. Trigonometriai szélsőérték-feladatok

9. Feladat. *Legyenek α, β, γ egy háromszög szögei. Határozzuk meg a $\sin\alpha + \sin\beta +$ $+ \sin\gamma$ kifejezés maximumát.*

Megoldás:

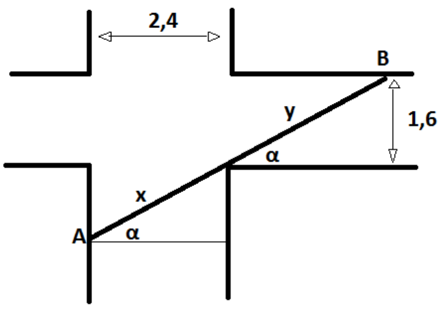
Mivel α, β, γ egy háromszög szögei, így $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, és $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$. A $\sin : (0, \pi) \to (0{,}1)$ függvény szigorúan konkáv, így felírhatjuk rá a Jensen-egyenlőtlenséget (Tétel 10):

$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3} \leq \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Átszorzás után azt kapjuk, hogy

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

A Tétel 10 alapján egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\alpha = \beta = \gamma$, vagyis ha a háromszög szabályos. Tehát a kifejezés maximuma $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. □

10. Feladat. *Két egymást merőlegesen metsző folyosó szélessége 2,4 m, illetve 1,6 m. Mekkora az a leghosszabb létra, amelyet az egyik folyosóról a másikra át lehet vinni?*



Megoldás:

Adott irányban álló létrát szeretnénk átvinni a fordulón, annál hosszabbat tudunk, minél távolabb vagyunk a létrával a szemközti csúcstól. Legfeljebb a létra felé eső sarokig távolodhatunk. Tehát bármilyen α szögben is álljon a létra, hosszára felső korlátot ad a sarkon keresztül húzott, falakat érintő szakasz hossza. Az α-ra vonatkozó korlát az, hogy 0 és 90 fok közötti értéket vegyen fel. Az α szögben álló, sarkon átmenő szakasz hosszát két derékszögű háromszög átfogójának összegeként kaphatjuk meg.

Jelölje AB a létrát, az AB szakasz x és y része α -val kifejezhető:

$AB = \frac{2{,}4}{cos\alpha} + \frac{1{,}6}{sin\alpha} = f(\alpha)$.

Egy létra akkor fordítható be, ha egyik $f(\alpha)$ korlátnál sem hosszabb, ahol α tetszőleges 0 és 90 fok közötti szög. Ezért a leghosszabb befordítható létra min $f(\alpha)$ méteres (mely minimum nyilván létezik).

Hogy megkapjuk a szélsőértéket, deriváljuk: $f(\alpha)$-t:

$f'(\alpha) = \frac{2{,}4sin\alpha}{cos^2\alpha} - \frac{1{,}6cos\alpha}{sin^2\alpha} = \frac{0{,}8}{sin^2\alpha cos^2\alpha}(3sin^3\alpha - 2cos^3\alpha)$

$f'(\alpha)$=0, ha $3sin^3\alpha = 2cos^3\alpha$

$tg\alpha = \sqrt[3]{2/3}$

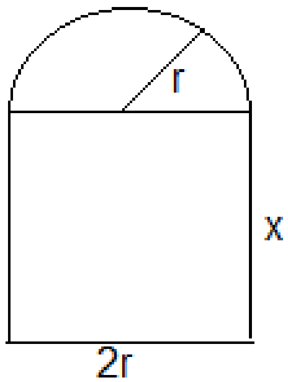
$\alpha = 41°$

	$o < \alpha < 41°$	$\alpha = 41°$	$41° < \alpha < 90°$
f'	-	0	+
f	↘	lok.min. hely	↗

Tehát $\alpha = 41°$ tényleg lokális minimumhely, ezért legfeljebb $AB = 3{,}2+2{,}4 = 5{,}6$ (m), hosszú létrát lehet befordítani. □

3.5. Vegyes feladatok

11. Feladat. *Egy 25 cm hosszú alagút keresztmetszete téglalapra helyezett félkör alakú. A keresztmetszet kerülete 18 cm. Hogyan kell megválasztani a félkör sugarát , hogy az alagút térfogata a lehető legnagyobb legyen?*



Megoldás:

Az alagút hosszától függetlenül akkor lesz maximális a térfogata, ha a keresztmetszet területe maximális. A téglalap egyik oldala $2r$, a másik legyen x. A területet fel tudjuk írni ebben az alakban:

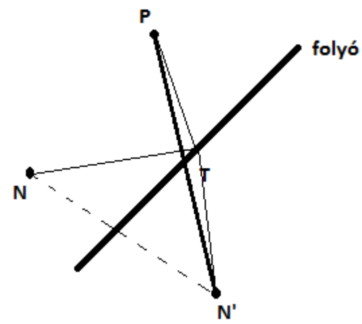
$$T = 2rx + \frac{r^2\pi}{2}$$

Felírhatjuk, hogy: $18 = 2x + 2r + r\pi = (2+\pi)r + 2x$, amiből x-et kifejezve
$2x = 18 - (2+\pi)r$,
$x = 9 - \frac{2+\pi}{2}r$ adódik.

Ha ezt behelyettesítjük a területképletbe, akkor a következőt kapjuk:
$T(r) = 2r \cdot (9 - \frac{2+\pi}{2}r) + \frac{r^2\pi}{2} = 18r - (2+\pi)r^2 + \frac{\pi}{2}r^2 = (-2 - \frac{\pi}{2})r^2 + 18r.$

A Tétel 1 alapján ennek a függvénynek abszolút maximuma van, mégpedig az $r_0 = -\frac{18}{-4-\pi} = \frac{18}{4+\pi}$ helyen. Vagyis a félkör sugarát $r_0 = \frac{18}{4+\pi}$ cm-nek kell megválasztani, hogy az alagút térfogata maximális legyen. □

12. Feladat. *Piroska ebédet visz a nagymamájának. Előtte azonban meg akarja tölteni a kulacsát a folyónál, mert eszébe jutott, hogy vizet nem hozott.Milyen úton menjen Piroska a nagymamájához ha érintenie kell a folyót?*

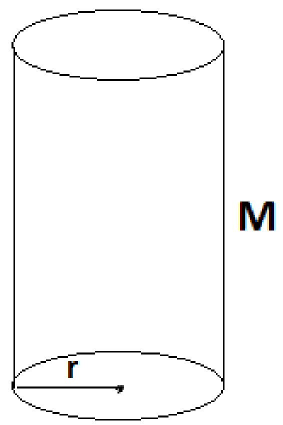


Megoldás:

Legyen a T az a pontja a folyónak, ahol Piroska felveszi a vizet. A P ponttól a T pontig egyenesen kell menni, mert az a legrövidebb út két pont között. A T ponttól az N-ig szintén egyenesen kell menni. Legyen N' az N pont f-re vett tükörképe. Ekkor $NT = N'T$. Feladatunk tehát a $PT + NT$ kifejezés minimumát megkeresni T függvényében. A háromszög-egyenlőtlenség miatt $PT + NT = PT + N'T \geq PN$, így a kifejezés $T = PN' \cap f$ választás melett minimális.

A minimum tehát ott áll elő, ahol PT és NT ugyanakkora szöget zár be az f-fel.

13. Feladat. *Adott térfogatú hegerek közül melyeknek legkisebb a felszíne?*



Megoldás:

Tudjuk a henger térfogatát, ami V = $r^2\pi M$. Azt szeretnénk, hogy minél kisebb legyen a henger térfogata, így a felszínt, azaz $A = 2r^2\pi + 2r\pi M$ kifejezést kell minimalizálnunk.

V adott állandó. Kifejezve a térfogatból a magasságot kapjuk: $M = \frac{V}{r^2\pi}$. Ezt a képletet behelyettesítve a felszín képletébe kapjuk, hogy

$A = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{V}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{2V}{r}$.

A Tétel 5 segítségével meghatározhatjuk a felszín minimumát, így

$f(r) = 2r^2\pi + \frac{2V}{r}$ képletet kapjuk, ahol $v \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}^+$

Szélsőértéket meghatározhatjuk az első deriváltból, vagyis

$f'(r) = 4r\pi - \frac{2V}{r^2}$.

Tehát minimuma csak ott lehet, ahol $f'(r) = 0$, vagyis

$4r\pi = \frac{2V}{r^2}$, ezt az egyenletet beszorozva r^2-el és elosztva 4π-vel megkajuk

$r^3 = \frac{V}{2\pi}$, azaz $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

$f'(r)$ előjele:

	$o < r < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$
f'	-	0	+
f	$\searrow$	lok.min. hely	$\nearrow$

A táblázatból jól látható, hogy valóban lokális minimumhelye van az r-nek a $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ pontban.

Az $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ képletet behelyettesítve az $M = \frac{V}{r^2\pi}$ képletbe kapjuk, hogy

$M = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{V^3 \cdot 4\pi^3}{\pi^3 \cdot V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

Majd ugyanígy behelyettesítve a felszín képletébe is megkajuk, hogy:

$A = 2\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}} \cdot \pi + \frac{2V}{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} = \sqrt[3]{2\pi \cdot V^2} + 2\sqrt[3]{2\pi \cdot V^2} = 3\sqrt[3]{2\pi \cdot V^2}$.

Az $A = 3\sqrt[3]{2\pi \cdot V^2}$ esetben lesz minimális a felszin.

Második megoldás:

Az $A = 2r^2\pi + \frac{2V}{r}$ minimumát keressük. Amit a következő alakban felírva

$A = 2r^2\pi + \frac{V}{r} + \frac{V}{r}$ könnyen látható is, hogy alkalmazhatjuk rá a számtani - mértani közepek közti összefüggést, azaz:

$\frac{A}{3} = \frac{2r^2\pi + \frac{V}{r} + \frac{V}{r}}{3} \geqslant \sqrt[3]{2r^2\pi \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r}} = \sqrt[3]{2\pi \cdot V^2}$

Az $A = 3\sqrt[3]{2\pi \cdot V^2}$ esetében ez ott éles, ahol a közepek közti összefüggés éles, vagyis, ha $2r^2\pi = \frac{V}{r}$. Ebből kifejezve V-t kapjuk

$V = 2r^3\pi$

$r^3 = \frac{V}{r\pi}$

$r = \sqrt[3]{\frac{V}{r\pi}}$ esetén áll fent egyenlőség.

Tehát a minimum: $A = 3\sqrt[3]{2\pi \cdot V^2}$. Ugyanazt kaptuk, mint az előző megoldás esetében. $\square$

14. Feladat ([4]). *Határozzuk meg* $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$, *ahol* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, *minimumát az* $x+y+z=12$ *feltétel mellett.*

Megoldás:

Megoldhatjuk ezt a feladatot közepek közti összefüggés alapján is. Az $f(x,y,z)$-t felírhatjuk ebben az alakban $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} + \frac{3}{z} + \frac{3}{z}$. Alkalmazva a számtani- és harmonikus közepek közti összefüggést az $\frac{1}{x}, \frac{2}{y}, \frac{2}{y}, \frac{3}{z}, \frac{3}{z}, \frac{3}{z}$ számokra kapjuk, hogy

$A = \frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}+\frac{3}{z}+\frac{3}{z}}{6} = \frac{f(x,y,z)}{6}$

$H = \frac{6}{x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}} = \frac{6}{x+y+z} = \frac{6}{12}$

A Tétel 17 alapján $\frac{6}{12} \leq \frac{f(x,y,z)}{6}$

$\frac{1}{2} \leq f(x,y,z)$ és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$\frac{1}{x} = \frac{2}{y} = \frac{3}{z}$, melyből reciprokot vonva kapjuk

$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, azaz

$y = 2x, z = 3x$, ezt behelyettesítve

$x + y + z = x + 2x + 3x = 6x = 12$, így

$x = 2, y = 4, z = 6$

Valóban: $f(x,y,z) = \frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{6} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2}$

Tehát $f(x,y,z)$ minimuma 3 és ezt csak az $x = 2, y = 4, z = 6$ helyen veszi fel. $\square$

Második megoldás: Mivel a z-t kifejezhetjük x és y függvényeként ezért az $f(x,y,z)$ függvény felírható két változó függvényeként.

Vagyis $z = 12 - x - y$, $x, y \in \mathbb{R}^+$, ahol $x + y < 12$.

Így az eredeti felírás alapján a $g(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{12-x-y}$ képletet kajuk. Csak az a pont lehet szélsőérték, ahol mindkét parciális deriváltt 0.

$\frac{\partial}{\partial_x} g(x,y) = -\frac{1}{x^2} + \frac{9}{(12-x-y)^2} = 0$

$\frac{\partial}{\partial_y} g(x,y) = -\frac{4}{y^2} + \frac{9}{(12-x-y)^2} = 0$

Ebből látjuk, hogy $\frac{1}{x^2} = \frac{4}{y^2}$,vagyis $y^2 = 4x^2$, tehát $y = 2x$

$-\frac{1}{x^2} + \frac{9}{(12-3x)^2} = 0$

$-\frac{1}{x^2} + \frac{9}{9(4-x)^2} = 0$

$\frac{1}{(4-x)^2} = \frac{1}{(x)^2}$

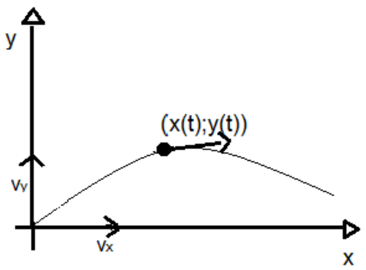
$(4-x)^2 = x^2$

$x^2 - 8x + 16 = x^2$, azaz $16 = 8x$, így $x = 2$, $y = 4$ megoldást kapjuk. Tehát a (2,4) pont az egyetlen stacionárius pontja a függvénynek. Tétel 15 alapján ez egy lokális minimumhely, hiszen $D(2{,}4) = \frac{1}{48} > 0$ és $\frac{\partial^2}{\partial_{x^2}} g(2{,}4) = \frac{1}{6} > 0$. A függvény értéke a stacionárius pontban $g(2{,}4) = 3$, és egyszerű becslések alapján világos, hogy $g(x,y) > 3$ ha $x < \frac{1}{3}$, vagy $y < \frac{1}{12}$, vagy $x + y > 9$. Megszorítva g értelmezési tartományát az $x \geq \frac{1}{3}$, $y \geq \frac{1}{12}$, $x + y \leq 9$ kompakt tartományra, kapunk egy kompakt halmazon értelmezett folytonos függvényt, aminek Weierstrass tétele miatt van globális minimuma. Ez csak a (2,4) pontban lehet. Mivel az eredeti értelmezési tartomány elhagyott részein a függvény nagyobb értéket vesz fel $g(2{,}4) = 3$-nál, így g abszolút minimuma is 3, ami pontosan az $x = 2, y = 4$ esetén áll fenn. Ekkor $z = 6$.

$\square$

`Megjegyzés:` Az előző feladat jól mutatja, hogy a közepek közti összefüggést alkalmazva a bizonyítás rövidebb és frappánsabb. A második bizonyítás előnye viszont az, hogy gépies, és nem igényel ötletes átalakításokat.

15. Feladat. *Egy ferdén hajított testet h magasságból dobtunk el. Mi a legnagyobb távolság, ahova földetéréskor elrepülhet?*



Megoldás: Legyen t az eltelt idő, $(x(t); y((t))$ a test helye t idő múlva. Legyen v_0 a kezdeti sebességvektor. Az energiamegmaradás törvénye alapján: $mgh + \frac{1}{2}mv^2 =$ állandó.

Kezdetben a helyzeti energia 0, a mozgási energia $\frac{1}{2}m\,|v_0|^2$. A test energiája tehát a teljes repülési idő alatt $\frac{1}{2}m\,|v_0|^2$, így $E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$. Mivel vízszintes irányba nem hat erő a testre, ezért a vízszintes irányú sebessége végig v_x. A függőleges irányú sebesség függ t–től: $v_y(t)$. Mivel vízszintes irányban semmi nem történik, ezért a függőleges irányú mozgása a testnek épp olyan, mintha függőlegesen hajítottuk volna el v_y sebességgel.

$E(t) = mg \cdot y(t) + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$

$mg \cdot y(t) + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y(t)^2) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$

$mg \cdot y(t) = \frac{1}{2}m(v_y^2 + v_y(t)^2$

Legmagasabb pozíció: $v_y(t) = 0$ esetén $mg \cdot y(t) = \frac{1}{2}m \cdot v_y^2$

$y(t) = \frac{v_y^2}{2g}$

A sebesség az idő függvényében lineárisan csökken $v_y(t) = v_y - gt$

A legamgasabb ponton: $0 = v_y - gt \quad t = \frac{v_y}{g}$ a félidő

Teljes idő: $T = \frac{2v_y}{g}$

Távolság: $v_x \cdot T = \frac{2v_x \cdot v_y}{g}$ – ennek kell a maximuma $|\bar{v}| = v_x^2 + v_y^2$ – adott

$\sqrt{v_x v_y} \leq \sqrt{\frac{v_x^2+v_y^2}{2}}$

$v_x v_y \leq \frac{v_x^2+v_y^2}{2} = \frac{|\bar{v}|^2}{2}$ – ezt megszorozva $\frac{2}{g}$ –vel kapjuk, hogy

$\frac{2v_x v_y}{g} \leq \frac{|\bar{v}|^2}{g}$, ami akkor és csak akkor lehetséges, ha $v_x = v_y$ vagyis 45–os szögben érdemes eldobni.

$s = \frac{2v_x v_y}{g} = \frac{2\frac{|\bar{v}|^2}{2}}{g} = \frac{|\bar{v}|^2}{g}$ – ez lesz a maximális távolság. $\square$

4. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném köszönetemet kifejezni Mezei Istvánnak, témavezetőmnek, érdekes feladatjavaslataiért, illetve a szakdolgozatommal kapcsolatos minden tartalmi és formai tanácsáért, megjegyzéséért. Köszönettel tartozom még családomnak a támogatásukért, és Pongrácz Andrásnak a módszerekhez fűzött magyarázataiért.

Hivatkozások

[1] Dr.Gerőcs László -Orosz Gyula -Paróczay József -Szászné Simon Judit: *Matematika és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. (Középszint, Emelet szint)*, (2005), 181. oldal

[2] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, Simonovits Miklós: *Analízis I. (Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.)*, (2005)

[3] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, Simonovits Miklós: *Analízis II. (Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.)*, (2005)

[4] Fekete Zoltán -Zalay Miklós: *Többváltozós Függvények Analízise (Műszaki Könyvkiadó)*, (2000)

[5] George B. Thomas -Maurice D. Weir -Joel Hass -Frank R. Giorda: *Thomas -féle Kalkulus I. (Typotex Könyvkiadó)*, (2006)

[6] Bartha Gábor -Bogdán Zoltán - Duró Lajosné dr. -Gyapjas Ferencné -Hack Frigyes -dr.Kántor Sándorné -dr.Korányi Erzsébet: *Matematika feladatgyűjtemény II. (Tankönyvkiadó)*, (1987)