Elemi becslések a prímszámok számára

Szakdolgozat

Készítette: **Koplányi Barbara**

Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető: **Gyarmati Katalin** adjunktus

Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest

2012

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A matematika területén prímszámnak nevezzük azokat a természetes számokat, amelyeknek pontosan két osztójuk van a természetes számok között (maga a szám és az 1). Végtelen sok prímszám van. Ennek az állításnak a legrégebbi bizonyítását *Euklidész* adta meg *Elemek* című munkájában. A prímszámok végtelenségére számos más bizonyítás is született számelméleti, absztrakt algebrai, analitikus, sőt topológiai eszközök felhasználásával is. A prímszámok keresésének legegyszerűbb módja a „rosta”, avagy *Eratoszthenész szitája*: felírjuk a számokat 1-től n-ig. Kihúzzuk az 1-et, hiszen az nem prímszám. Az első nem kihúzott számot bekarikázzuk, ez prímszám lesz (2), ezután kihúzzuk a 2 többszöröseit, majd a számok sorozatában az első ki nem húzott és be nem karikázott számot bekarikázzuk, ez lesz a következő prímszám (3). Ennek a többszöröseit is kihúzzuk, és így tovább. A bekarikázott számok lesznek n-ig a prímszámok. A prímszámokkal kapcsolatban rengetek megoldatlan probléma van. Ilyen például az Ikerprím-sejtés, az n^2+1 alakú prímek számának végtelensége és a Mersenne-prímek számának végtelensége. Máig ne tudjuk, hogy létezik-e végtelen sok $2^{2^n}+1$ (*Fermat szám*) alakú prímszám, sőt azt sem, hogy létezik-e végtelen sok ilyen alakú összetett szám.

A szakdolgozatban bizonyításokat mutatunk be a prímszámok végtelenségére, elemi becsléseket adunk a prímszámok számára, megismerkedünk néhány, a prímszámok reciprokösszegéről szóló tétel bizonyításával és ismertetjük a prímszámok számának meghatározására vonatkozó modernebb eredményeket.

2. fejezet

Hat bizonyítás a prímszámok végtelenségére

Euklidész óta ismert, hogy végtelen sok prímszám létezik. [1] alapján 6 különböző bizonyítást ismertetek.

Bevezetünk néhány jelölést: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ a természetes számok halmaza, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ az egész számok halmaza, $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ a prímszámok halmaza.

2.1. Euklidész bizonyítása

Legyen $\{p_1, \dots, p_r\}$ prímek egy tetszőleges véges halmaza. Vegyük az $n = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ számot és legyen p az n szám prímosztója. Ekkor p nem lehet egyenlő semelyik p_i-vel, különben ugyanis p osztaná n-et és a $p_1 p_2 \dots p_r$ szorzatot, és így az $n - p_1 p_2 \dots p_r = 1$ különbséget is, ami lehetetlen. Tehát egy véges $\{p_1, \dots, p_r\}$ halmaz nem tartalmazhatja az összes prímszámot.

A következő három bizonyítás szájhagyomány útján terjedt, az ötödik Hillél Fürstenberg nevéhez fűződik, az utolsó pedig Erdős Pál bizonyítása.

2.2. Második bizonyítás

Nézzük először az $F_n = 2^{2^n} + 1$ *Fermat számokat* $n = 0, 1, 2, \ldots$-re.
(Az első néhány *Fermat szám*: $F_0 = 3$; $F_1 = 5$; $F_2 = 17$; $F_3 = 257$; $F_4 = 65\,537$; $F_5 = 641 \cdot 6\,700\,417$)
Megmutatjuk, hogy bármely két *Fermat szám* relatív prím, így végtelen sok prímszámnak kell lennie. Ezért belátjuk a

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2 \qquad (n \geq 1)$$

rekurziót, amiből állításunk azonnal következik. Valóban, ha m osztja például F_k-t és F_n-et ($k < n$), akkor m osztja $2 = F_n - \prod_{k=0}^{n-1} F_k$-t is, tehát $m = 1$ vagy $m = 2$. De $m = 2$ nem lehet, mert minden *Fermat szám* páratlan.
A rekurziót n szerinti indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, akkor $F_0 = 3$ és $F_1 - 2 = 3$. Feltesszük, hogy az állítás igaz $n = m$-ig. Bebizonyítjuk, hogy ekkor $n = m + 1$-re is igaz. Az indukciós feltevésből következik, hogy

$$\prod_{k=0}^{m} F_k = \left(\prod_{k=0}^{m-1} F_k\right) F_m = (F_m - 2)F_m = (2^{2^m} - 1)(2^{2^m} + 1) = 2^{2^{m+1}} - 1 =$$
$$= F_{m+1} - 2.$$

2.3. Harmadik bizonyítás

2.3.1. Definíció. A *Mersenne-számok* az $M_p = 2^p - 1$ alakú számok, ahol p prím.

2.3.2. Tétel (Lagrange-tétel). *Ha G egy véges (multiplikatív) csoport és U egy részcsoportja, akkor $|U|$ osztja $|G|$-t.*

Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}$ véges és p a legnagyobb prím. Megmutatjuk, hogy $2^p - 1$ bármely q prímosztója nagyobb mint p. Ebből következik a prímszámok végtelensége. Legyen q a $2^p - 1$ valamely prímosztója, azaz $2^p \equiv 1 \pmod q$. Mivel p prím, ez azt jelenti, hogy $\mathbb{Z}_q$ test $\mathbb{Z}_q \backslash \{0\}$ multiplikatív csoportjában a 2 elem rendje p. Ennek a csoportnak $q - 1$

eleme van. A 2.3.2. Tételből tudjuk, hogy minden elem rendje osztja a csoport rendjét, így $p \mid q-1$, tehát $p < q$.

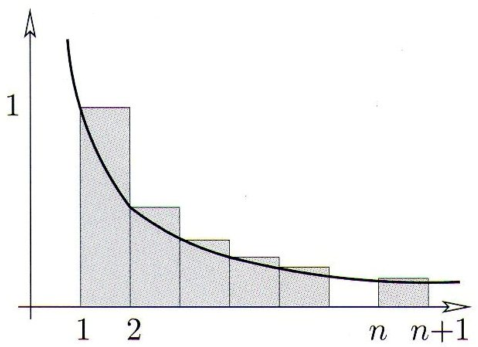
2.4. Negyedik bizonyítás

Ez a bizonyítás elemi analízist használ.

2.4.1. Definíció. $\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ az x természetes logaritmusa.

Legyen $\pi(x) := \#\{p \leq x : p \in \mathbb{P}\}$ az x valós számnál kisebb vagy egyenlő prímszámok száma. ($\#A$ az A halmaz elemszámát jelöli.) Számozzuk meg a prímszámokat növekvő sorrendben: $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3 \ldots\}$ és vegyük x természetes logaritmusát.

Hasonlítsuk össze az $f(t) = \frac{1}{t}$ függvény grafikonja alatti területet egy a függvény grafikonját felülről közelítő lépcsős függvénnyel.



Lépcsős függvény az $f(t) = \frac{1}{t}$ függvény grafikonja felett

Így $n \leq x \leq n+1$-re

$$\log x \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \leq \sum \frac{1}{m}\text{-et}$$

kapunk, ahol az összegzést minden olyan $m \in \mathbb{N}$-re kiterjesztjük, aminek csak $p \leq x$ prímosztója van. Minden ilyen m egyértelműen felírható $\prod_{p \leq x} p^{k_p}$ alakban, ezért

$$\sum \frac{1}{m} = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^k} \right)$$

A belső összeg egy $\frac{1}{p}$ kvóciensű mértani sor, azaz

$$\log x \leq \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \frac{p}{p-1} = \prod_{k=1}^{\pi(x)} \frac{p_k}{p_k - 1}.$$

$p_k \geq k+1$, így

$$\frac{p_k}{p_k-1} = 1 + \frac{1}{p_k - 1} \leq 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k},$$

tehát

$$\log x \leq \prod_{k=1}^{\pi(x)} \frac{k+1}{k} = \pi(x) + 1.$$

Tudjuk, hogy $\log x$ nem korlátos, tehát $\pi(x)$ sem az, azaz végtelen sok prímszám van.

2.5. Ötödik bizonyítás

Ez a bizonyítás topológiát használ.

Nézzük az alábbi topológiát az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán: az $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$ számokra legyen

$$N_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Minden $N_{a,b}$ halmaz egy kétirányú végtelen számtani sorozat.

2.5.1. Definíció. Egy $O \subseteq \mathbb{Z}$ halmaz *nyílt*, ha vagy O üres, vagy minden $a \in O$-hoz van olyan $b \in \mathbb{Z}$, amelyre $N_{a,b} \subseteq O$.

Nyilvánvaló, hogy nyílt halmazok uniója is nyílt. Belátjuk, hogy véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt. Ehhez elég, hogy két nyílt halmaz metszete is nyílt. Legyen O_1 és O_2 két nyílt halmaz, ekkor tetszőleges $a \in O_1 \cap O_2$-hez létezik $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, hogy $N_{a,b_1} \subseteq O_1$ illetve $N_{a,b_2} \subseteq O_2$, de ekkor $a \in N_{a,b_1 \cdot b_2} \subseteq O_1 \cap O_2$. Ez a halmazcsalád tehát egy valódi topológiát generál $\mathbb{Z}$-n.

Állítás

(A) Bármely nemüres nyílt halmaz végtelen.

(B) Minden $N_{a,b}$ halmaz zárt is.

(A) következik a definícióból. (B)-hez vegyük észre, hogy

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b},$$

ami bizonyítja, hogy $N_{a,b}$ egy nyílt halmaz komplementere, tehát zárt is. Mivel minden $n \neq 1, -1$ számnak van p prímosztója, ezért benne van $N_{0,p}$-ben, amiből következik, hogy

$$\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}.$$

Ha $\mathbb{P}$ véges lenne, akkor $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$ (B) alapján előállna zárt halmazok véges uniójaként, és így ő maga is zárt lenne. Tehát az $\{1, -1\}$ nyílt halmaz lenne, ami viszont ellentmond (A)-nak.

2.6. Hatodik bizonyítás

Ez a bizonyítás a prímszámok végtelenségén túl azt is megmutatja, hogy $\sum\limits_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ sor divergens. *Euler* adta az első bizonyítást erre a fontos eredményre (4. fejezet).
Legyen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ a prímszámok növekvő sorozata, és tegyük fel, hogy $\sum\limits_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ konvergens. Ekkor kell lennie olyan k természetes számnak, melyre $\sum\limits_{i \geq k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$. Nevezzük $p_1, \ldots, p_k$-t *kis* prímeknek, és $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots$-t *nagy* prímeknek. Tetszőleges x természetes számra tehát

$$\sum_{i \geq k+1} \frac{x}{p_i} < \frac{x}{2} \tag{2.1}$$

adódik.
Legyen N_x azon $m \leq x$ pozitív egészek száma, amelyeknek legalább egy *nagy* prímosztójuk van, K_x pedig azoké, amelyeknek minden prímosztójuk *kicsi*. Megmutatjuk, hogy alkalmas x-re

$$N_x + K_x < x,$$

ami a várt ellentmondást adja, mert definíció szerint $N_x + K_x = x$.
$\left\lfloor \frac{x}{p_i} \right\rfloor$ azokat a $m \leq x$ pozitív egészeket számolja, amelyek p_i többszörösei. Vagyis (1) alapján

$$N_x \leq \sum_{i \geq k+1} \left\lfloor \frac{x}{p_i} \right\rfloor < \frac{x}{2}. \tag{2.2}$$

Vizsgáljuk most K_x-et! A csak *kis* prímosztókkal rendelkező $m \leq x$-eket átírjuk $m = a_m b_m^2$ alakba, ahol a_m a négyzetmentes rész. Minden a_m tehát különböző kis prímeknek a szorzata, azaz legfeljebb 2^k féle négyzetmentes rész van. Továbbá, mivel $b_m \leq \sqrt{m} \leq \sqrt{x}$, azt kapjuk, hogy legfeljebb $\sqrt{x}$ féle négyzetes rész van, és ezért

$$K_x \leq 2^k \sqrt{x}.$$

Ha $2^k\sqrt{x} \leq \frac{x}{2}$, akkor $K_x \leq 2^k\sqrt{x} \leq \frac{x}{2}$, és ekkor (2) alapján $K_x + N_x < x$. Végül megjegyezzük, hogy $x > 2^{2k+2}$ esetén $2^k\sqrt{x} < \frac{x}{2}$ valóban teljesül.

3. fejezet

A prímszámok eloszlásáról

Ebben a fejezetben [2] alapján adok elemi becsléseket a prímszámok számára.

3.1. A prímszámok számának vizsgálata

3.1.1. Definíció. Tetszőleges $x \geq 2$ valós szám esetére jelölje $\pi(x)$ az x-et meg nem haladó pozitív prímszámok számát, azaz $\pi(x) = \sum\limits_{\substack{p \leq x \\ p \text{ prim}}} 1$.

(A továbbiakban prímeken futó szummákat és produktumokat $\sum\limits_{p \leq x}$ és $\prod\limits_{p \leq x}$ képlettel írjuk.)

A következő tétel a $[2; n]$ intervallumba eső prímszámok szorzatára ad felső becslést.

3.1.2. Tétel. *Tetszőleges $n \geq 2$ egész szám esetén $\prod\limits_{p \leq n} p < 4^n$.*

Bizonyítás. (*Erdős Pál* és *Kalmár László* bizonyítása) A bizonyítást n szerinti teljes indukcióval végezzük. $n = 2$ esetén $2 < 4^2$; $n = 3$ estén $2 \cdot 3 < 4^3$. Tegyük fel, hogy a tétel $n-1$-ig igaz. Bebizonyítjuk, hogy ekkor n-re is igaz, amennyiben $n \geq 4$.
I. eset: n páros: $n = 2k \geq 4$, ekkor

$$\prod_{p \leq 2k} p = \prod_{p \leq 2k-1} p < 4^{2k-1} < 4^{2k}$$

II. eset: n páratlan: $n = 2k+1 > 4$, akkor a szorzat

$$\prod_{p \le 2k+1} p = \left(\prod_{p \le k+1} p \right) \left(\prod_{k+2 \le p \le 2k+1} p \right),$$

ahol az indukciós feltétel miatt $\prod\limits_{p \le k+1} p < 4^{k+1}$, hiszen $2 < k+1 < n$. Továbbá $\prod\limits_{k+2 \le p \le 2k+1} p \mid (k+2)(k+3)\cdots(2k+1) = \frac{(2k+1)!}{(k+1)!} = k!\binom{2k+1}{k}$ kifejezést, és mivel ez a szorzat $k!$-hoz relatív prím, ezért osztója a $\binom{2k+1}{k}$ egész számnak, tehát

$$\prod_{k+2 \le p \le 2k+1} p \le \binom{2k+1}{k} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2k+1) \cdot 2^k}{(k+1)!} <$$

$$< \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (2k+2) \cdot 2^k}{(k+1)!} = 2^{2k} = 4^k;$$

így végül

$$\prod_{p \le 2k+1} p < 4^{k+1} 4^k = 4^{2k+1}.$$

□

Megjegyzés: A 3.1.2. Tétel $x \in \mathbb{R}$ esetén is igaz.

3.1.3. Tétel. *Tetszőleges $x \ge 2$ valós szám esetén*

$$\pi(x) < \left(4 + \frac{3}{4}\right) \frac{x}{\log_2 x}.$$

Bizonyítás. A $\prod\limits_{p \le x} p$ szorzatot becsüljük alulról. A szorat $\sqrt{x}$ alatti tényezőit 2-vel, a többit $\sqrt{x}$-szel becsüljük alulról: $x \ge 4$-re

$$4^x > \prod_{p \le x} p = \left(\prod_{p \le \sqrt{x}} p \right) \left(\prod_{\sqrt{x} < p \le x} p \right) \ge \left(\prod_{p \le \sqrt{x}} 2 \right) \left(\prod_{\sqrt{x} < p \le x} \sqrt{x} \right) =$$
$$= 2^{\pi(\sqrt{x})} (\sqrt{x})^{\pi(\sqrt{x})},$$

tehát

$$2^{2x} > 2^{\pi(\sqrt{x})} (\sqrt{x})^{\pi(x) - \pi(\sqrt{x})}.$$

Áttérve kettes alapú logaritmusra azt kapjuk, hogy

$$2x > \pi(\sqrt{x}) + (\pi(x) - \pi(\sqrt{x})) \log_2 \sqrt{x},$$

$x \geq 4$ miatt $\log_2 x \geq 0$ és $\pi(\sqrt{x}) < \sqrt{x}$, ezért

$$\pi(x) < \frac{4x - 2\pi(\sqrt{x})}{\log_2 x} + \pi(\sqrt{x}) = \frac{x}{\log_2 x}\left(4 + \frac{\pi(\sqrt{x})}{x}(\log_2 x - 2)\right) \leq$$

$$\leq \frac{x}{\log_2 x}\left(4 + \frac{1}{\sqrt{x}}(\log_2 x - 2)\right),$$

Mivel $x \geq 4$, ezért van olyan $k \geq 2$ egész, amelyre $2^k \leq x < 2^{k+1}$, így

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}}(\log_2 x - 2) < \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}}(k + 1 - 2) \leq \frac{3}{4},$$

ahol $\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}}(k+1-2) \leq \frac{3}{4}$ egyenlőtlenség $k = 2$; $k = 3$ és $k = 4$ esetén fennáll, és $k \geq 4$-re

$$\frac{k-1}{2^{\frac{k}{2}}} = \frac{(k+1)-1}{2^{\frac{k+1}{2}}}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\sqrt{2} > \frac{(k+1)-1}{2^{\frac{k+1}{2}}}.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $x \geq 4$-re

$$\pi(x) < \left(4 + \frac{3}{4}\right)\frac{x}{\log_2 x};$$

és $2 \leq x < 4$ esetén

$$\pi(x) \leq 2 < 4 + \frac{3}{4} = \left(4 + \frac{3}{4}\right)\frac{2}{\log_2 4} < \left(4 + \frac{3}{4}\right)\frac{x}{\log_2 x}.$$

□

3.1.4. Tétel. *Tetszőleges $x \geq 2$ valós szám esetén*

$$\pi(x) > \left(1 - \frac{3}{4}\right)\frac{x}{\log_2 x}.$$

Bizonyítás. A bizonyításnál felhasználjuk a következő tételt:

3.1.5. Tétel (Legendre féle formula). *Legyenek n és k pozitív egész számok, p pozitív prímszám, továbbá $p^k \leq n < p^{k+1}$. Ekkor az $n!$ kanonikus felbontásában a p kitevője:*

$$\alpha_{p,n!} = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

A tétel egyszerűen következik abból, hogy az $1, 2, \dots, n$ számok között $\left[\frac{n}{p}\right]$ darab p-vel, $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ darab p^2-tel és általában $\left[\frac{n}{p^j}\right]$ darab p^j-nel osztható szám van.
Ezután rátérünk a 3.1.4. Tétel bizonyítására:
Legyen n pozitív egész. A 3.1.5. Tétel alapján

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \prod_{p \le 2n} p^{\beta_p}, \quad \text{ahol} \quad \beta_p = \sum_{j=1}^{\gamma_p} \left(\left[\frac{2n}{p^j}\right] - 2\left[\frac{n}{p^j}\right] \right)$$

és

$$p^{\gamma_p} \le 2n < p^{\gamma_p + 1}.$$

$y \in \mathbb{R}$ esetén $2[y] \le 2y < 2[y] + 2$ miatt $2[y] \le [2y] \le 2[y] + 1$, azaz $0 \le [2y] - 2[y] \le 1$, tehát $0 \le \beta_p \le \gamma_p$, ezért

$$\binom{2n}{n} \le \prod_{p \le 2n} p^{\gamma_p} \le (2n)^{\pi(2n)}.$$

Másrészt $n \ge 2$-re

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1)2^n}{n!} > \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2)2^n}{n!} = \\ &= \frac{2^{2n-1}}{n} = \frac{2^{2n}}{2n}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Tehát pozitív egész n-re ($n = 1$-re egyenlőséggel)

$$2^{2n} \le (2n)^{\pi(2n)+1}, \quad \text{azaz} \quad \pi(2n) \ge \frac{2n}{\log_2(2n)} - 1.$$

Ezt $x \in \mathbb{R}; x \ge 2$ esetén alkalmazhatjuk $n = \left[\frac{x}{2}\right]$-szel:

$$\begin{aligned} \pi(x) \ge \pi\left(2\left[\frac{x}{2}\right]\right) \ge \frac{2\left[\frac{x}{2}\right]}{\log_2\left(2\left[\frac{x}{2}\right]\right)} - 1 > \frac{x-2}{\log_2 x} - 1 = \\ = \frac{x}{\log_2 x}\left(1 - \frac{1}{x}(2 + \log_2 x)\right). \end{aligned}$$

Ha $x \ge 8$, akkor van olyan $k \ge 3$ egész, amelyre $2^k \le x < 2^{k+1}$, így

$$\frac{1}{x}(2 + \log_2 x) \le \frac{1}{2^k}(k+3) \le \frac{3}{4},$$

ami $k = 3$-ra nyilvánvaló, míg $k \geq 4$-re

$$\frac{k+3}{2^k} \leq \frac{2k-1}{2^k} \leq \frac{3}{4}.$$

(Az utolsó egyenlőtlenséget a 3.1.3. Tétel bizonyításában már láttuk $2k$ helyén k-val) Tehát $x \geq 8$ esetén $\pi(x) > \left(1 - \frac{3}{4}\right) \frac{x}{\log_2 x}$, ami $2 \leq x < 4$-re: $\frac{x}{\log_2 x} < \frac{4}{1} = 4$ és $4 \leq x < 8$-ra: $\frac{x}{\log_2 x} < \frac{8}{2} = 4$ is teljesül, tehát minden $x \geq 2$-re igaz a tétel. □

3.2. Csebisev-tétel

3.2.1. Tétel (Csebisev tétele). *Tetszőleges n pozitív egészhez létezik olyan p prímszám, amelyre $n < p \leq 2n$.*

Bizonyítás. (*Erdős Pál* bizonyítása) Nézzük $n \geq 5$ egész esetére a $\binom{2n}{n} = \prod\limits_{p \leq 2n} p^{\beta_p}$ felső becslését úgy, hogy szétvágjuk a szorzatot $\sqrt{2n}$-nél, $\frac{2n}{3}$-nál és n-nél! A 3.1.4. Tétel bizonyításában láttuk, hogy

$$\prod_{p < \sqrt{2n}} p^{\beta_p} \leq \prod_{p < \sqrt{2n}} p^{\gamma_p} \leq (2n)^{\pi(\sqrt{2n})} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1}.$$

Ha $\sqrt{2n} < p \leq \frac{2n}{3}$, akkor $\beta_p \leq \gamma_p = 1$, és a 3.1.2. Tétel alapján

$$\prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2n}{3}} p^{\beta_p} \leq \prod_{p \leq \frac{2n}{3}} p < 4^{\frac{2n}{3}}.$$

Definiáljuk az üres szorzatot 1-nek! Így az eredmény akkor is érvényes lesz, ha $\sqrt{2n}$ és $\frac{2n}{3}$ között nincs prímszám (például $n = 5$; $n = 6$; $n = 7$). Ha $\frac{2n}{3} < p \leq n$, akkor $\gamma_p = 1$ és $1 \leq \frac{n}{p} < \frac{3}{2}$; $2 \leq \frac{2n}{p} < 3$ révén $\beta_p = \left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] = 2 - 2 \cdot 1 = 0$. Ha $n < p \leq 2n$, akkor $\gamma_p = 1$ és $\beta_p = 1 - 2 \cdot 0 = 1$.

Összegyűjtve a becsléseketés és a 3.1-et felhasználva: $n \geq 5$-re

$$\frac{2^{2n}}{2n} < \binom{2n}{n} < (2n)^{\sqrt{2n}-1} 4^{\frac{2n}{3}} \prod_{n < p \leq 2n} p,$$

ha van prímszám az $]n; 2n]$ intervallumban. Ha nem volna, akkor

$$\frac{2^{2n}}{2n} < (2n)^{\sqrt{2n}-1} 4^{\frac{2n}{3}}$$

adódik, azaz

$$\left(\frac{2^{\sqrt{2n}}}{(\sqrt{2n})^6}\right)^{\frac{\sqrt{2n}}{3}} < 1.$$

De $k = [\sqrt{2n}] \geq 30$ esetén

$$\frac{2^{\sqrt{2n}}}{(\sqrt{2n})^6} > \frac{2^k}{(k+1)^6} > 1, \quad \text{mivel} \quad \frac{2^{30}}{31^6} = \left(\frac{32}{31}\right)^6 > 1,$$

és $k \geq 30$-ra

$$\frac{2^{k+1}}{(k+2)^6} = \frac{2^k}{(k+1)^6} \cdot \frac{2}{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^6} \geq \frac{2^k}{(k+1)^6} \cdot \frac{2}{\left(1+\frac{1}{31}\right)^6} > \frac{2^k}{(k+1)^6},$$

hiszen

$$\left(1+\frac{1}{31}\right)^6 < 1,1^6 < 1,34^2 < 2.$$

Tehát $[\sqrt{2n}] \geq 30$, azaz $n \geq 450$ esetén biztos, hogy van prímszám az $]n; 2n]$ intervallumban. Ellenőrizhető, hogy az $]n; 2n]$ intervallumban $1 \leq n < 450$ esetén is van prímszám, biztosan jó a következő prímszámok valamelyike:

$$2; 3; 5; 7; 13; 23; 43; 83; 163; 317; 631$$

(mindegyik kisebb, mint az előtte lévő kétszerese). $\square$

Csebisev tétele úgy is megfogalmazható, hogy tetszőleges n pozitív egészre $\pi(2n) > \pi(n)$. Ez *Csebisev* 1850-es eredménye. Közvetlen előzménye *Joseph Louis Francois Bertrand* (1822-1900) francia matematikus 1845-ben megfogalmazott sejtése volt, miszerint ha $n > 3$ egész, akkor van olyan p prímszám, hogy $n < p < 2n - 2$. *Bertrandnak* a sejtését nem sikerült általában igazolnia ($n < 3 \cdot 10^6$-ra ellenőrizte). Ezt *Bertrand-féle posztulátumként* is szokták emlegetni. 1850-ben *Csebisev* bebizonyította ezt a sejtést: minden $n > 3$ egészre teljesül, hogy $\pi(2n - 3) > \pi(n)$. A 3.2.1. Tétel ennek egy gyengébb változata.

3.3. Az n-edik pozitív prímszám becslése

Jelölje $p_1, p_2, p_3, \dots$ a pozitív prímszámok növekvő sorozatát: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$, stb., általában p_n az n-edik pozitív prímszám.

Megjegyzés: Ha a 3.2.1. Tételt n helyett p_n-re alkalmazzuk, a $p_{n+1} < 2p_n$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami minden n pozitív egészre teljesül.

3.3.1. Tétel. *Ha p_n az n-edik pozitív prímszám és $n \geq 2$, akkor*

$$\frac{1}{5} n \log_2 n < p_n < \frac{8}{3} n \log_2 n.$$

Bizonyítás. A $\pi(x)$-re nyert becslésekből meghatározhatjuk p_n nagyságrendjét. Mivel tetszőleges n pozitív egészre $\pi(p_n) = n$ és $p_n > n$, a 3.1.3. Tétel alapján $n \geq 2$-re

$$n = \pi(p_n) < 5 \frac{p_n}{\log_2 p_n} < 5 \frac{p_n}{\log_2 n},$$

tehát $p_n > \frac{1}{5} n \log_2 n$. A 3.1.4. Tétel szerint pedig

$$n = \pi(p_n) > \frac{1}{4} \cdot \frac{p_n}{\log_2 p_n},$$

de ebből csupán $p_n < 4n \log_2 p_n$ adódik.

Érdemes a 3.1.4. Tétel helyett annak bizonyításából az $x \in \mathbb{R}$; $x \geq 2$-re nyert $\pi(x) > \frac{x-2}{\log_2 x} - 1$ becslést használni nagyobb x-ekre. Ha $n \geq 8$ egész, akkor $\frac{1}{n} \log_2 n \leq \frac{3}{8}$. ($\frac{1}{8} \log_2 8 = \frac{3}{8}$; $\frac{1}{9} \log_2 9 = \frac{2}{27} \log_2 27 < \frac{2}{27} \log_2 32 = \frac{10}{27} < \frac{3}{8}$; $\frac{1}{10} \log_2 10 = \frac{1}{20} \log_2 100 < \frac{1}{20} \log_2 128 = \frac{7}{20} < \frac{3}{8}$; továbbá, ha $11 \leq n \leq 16$, akkor $\frac{1}{n} \log_2 n \leq \frac{4}{11} < \frac{3}{8}$, ezután pedig $2^k \leq n < 2^{k+1}$ ($k \in \mathbb{Z}$) esetén teljesül $\frac{1}{n} \log_2 n < \frac{k+1}{2^k} \leq \frac{5}{16} < \frac{3}{8}$, mivel

$$\frac{k+2}{2^{k+1}} = \frac{k+1}{2^k} \cdot \frac{1 + (k+1)^{-1}}{2} < \frac{k+1}{2^k}.)$$

Nézzük a becslést $x = \frac{8}{3} n \log_2 n$ esetére, ahol $n \geq 8$ egész. Eszerint

$$\pi\left(\frac{8}{3} n \log_2 n\right) > \frac{\frac{8}{3} n \log_2 n - 2}{\log_2\left(\frac{8}{3} n \log_2 n\right)} - 1 \geq \frac{\frac{8}{3} n \log_2 n - 2}{\log_2(n^2)} - 1 =$$

$$= \frac{4}{3} n - \frac{1}{\log_2 n} - 1 \geq n + \frac{n-4}{3} > n = \pi(p_n),$$

így $p_n < \frac{8}{3}n\log_2 n$ teljesül $n \geq 8$-ra, és érvényes $2 \leq n \leq 7$ esetén is, mivel ha $2 \leq n \leq 3$, akkor

$$\frac{p_n}{n\log_2 n} \leq \frac{5}{2\log_2 2} = \frac{5}{2},$$

$4 \leq n \leq 7$ esetén pedig

$$\frac{p_n}{n\log_2 n} \leq \frac{17}{4\log_2 4} = \frac{17}{8}$$

és $\frac{17}{8} < \frac{5}{2} < \frac{8}{3}$. $\square$

Ezt az eredményt alkalmazhatjuk például prímszámok reciprokösszegeinek becslésére: Ha k nemnegatív egész, akkor a 3.3.1. Tétel szerint

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{p_n} > \frac{3}{8}\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n\log_2 n} \geq \frac{3}{8}\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^{k+1}(k+1)} = \frac{3}{16(k+1)},$$

így tetszőleges N pozitív egészre

$$\sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{p_n} > \frac{3}{16}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k+1} = \frac{3}{16}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}.$$

Mivel tetszőleges K pozitív egészre

$$\sum_{j=1}^{2^K}\frac{1}{j} = 1 + \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{j} > \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{K}{2};$$

a következő tételt kapjuk:

3.3.2. Tétel. *Ha p_n az n-edik pozitív prímszám és K pozitív egész, akkor*

$$\sum_{n=1}^{2^{2^K}}\frac{1}{p_n} > \frac{3}{32}K.$$

A 3.3.2. Tételből leolvasható, hogy $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{p\leq x}\frac{1}{p} = +\infty$.

A 4. fejezetben további eredményeket ismertetek a a prímszámok reciprokösszegéről.

4. fejezet

Prímszámok reciprokösszege

[3] alapján ismertetek a prímszámok reciprokösszegéről szóló tételek közül néhányat.

4.1. A prímszámok reciprokösszegének divergenciája

4.1.1. Tétel. *A* $\sum\limits_{p} \frac{1}{p}$ *végtelen sor divergens.*

Bizonyítás. (*Euler* bizonyítása) A bizonyítás a divergencia tényén kívül azt is megmutatja, hogy

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} > \log \log n - 2. \tag{4.1}$$

A bizonyításnál a következő analízisbeli tételelet használjuk fel:

4.1.2. Tétel. $\sum\limits_{k=1}^{x} \frac{1}{k} > \log x$, *ha* $x \geq 2$.

(A 2.4. fejezetben már használtuk ezt a tételt.)

4.1.3. Tétel. $\log \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \leq x + x^2$, *ha* $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

4.1.4. Tétel. $\sum\limits_{k=1}^{l} \frac{1}{k^2} < 2$, *minden* $l > 0$*-ra.*

$x \geq 3$ esetén nézzük a következő szorzatot:

$$A_x = \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^{\nu_p}} \right), \tag{4.2}$$

ahol

$$p^{\nu_p - 1} \le x < p^{\nu_p}. \tag{4.3}$$

Megmutatjuk, hogy

$$A_x > \sum_{k=1}^{x} \frac{1}{k}. \tag{4.4}$$

Például $x = 10$-re:

$$A_{10} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right)\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3}\right)\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}\right)\left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2}\right)$$

Ha $k \le 10$, akkor k kanonikus előállításában csak a $2, 3, 5, 7$ prímek szerepelhetnek, és legfeljebb akkora hatványon, mint amilyenen az A_{10} egyes tényezőiben. Tehát tetszőleges $k \le 10$ szám egyértelműen előáll ezen prímhatványok szorzataként.

A_{10}-ben a szorzást végrehajtva minden tag $\frac{1}{k}$ alakú, és tetszőleges $k \le 10$ esetén az $\frac{1}{k}$ tag tényleg fellép. Tehát a $\sum\limits_{k=1}^{10} \frac{1}{k}$ minden tagja megjelenik A_{10}-ben, azaz

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} < A_{10}.$$

Ugyanilyen gondolatmenettel A_x-nél, azt kapjuk, hogy

$$A_x > \sum_{k=1}^{x} \frac{1}{k}. \tag{4.5}$$

A 4.1.2. Tétel és (4.5) alapján

$$A_x > \log x. \tag{4.6}$$

Mivel A_x minden tényezője egy-egy mértani sor, összegezve az egyes tényezőkben, és növelve

$$A_x = \prod_{p \le x} \frac{1 - \left(\frac{1}{p}\right)^{\nu_p + 1}}{1 - \frac{1}{p}} < \prod_{p \le x} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}. \tag{4.7}$$

(4.6)-ot és (4.7)-et felhasználva

$$\log x < \prod_{p \le x} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}. \tag{4.8}$$

$x \geq 3$, így (4.8) mindkét oldala pozitív, ezért áttérhetünk logaritmusra:

$$\log\log x < \sum_{p \leq x} \log \frac{1}{1-\frac{1}{p}}. \tag{4.9}$$

Alkalmazva a 4.1.3. Tételt és (4.9)-et

$$\log\log x < \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} + \sum_{p \leq x} \frac{1}{p^2}. \tag{4.10}$$

A 4.1.4. Tétel alapján

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p^2} < \sum_{k=1}^{x} \frac{1}{k^2} < 2. \tag{4.11}$$

Végül (4.10) és (4.11) miatt

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} > \log\log x - 2.$$

□

Megjegyzés: A $\sum \frac{1}{p}$ sor divergenciája, - vagyis az a tény, hogy a sor összege a tagok számának növelésével minden határon túl nő, - azt jelenti, hogy a prímszámok reciprok értékei „lassan” fogynak, tehát a prímszámok „viszonylag lassan” nőnek, vagyis elég „gyakran” helyezkednek el a természetes számok között.

4.2. A prímszámok reciprokösszegével kapcsolatos tételek

4.2.1. Tétel.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sum\limits_{p \leq x} \frac{\log p}{p}}{\log x} = 1$$

vagyis a $\sum\limits_{p \leq x} \frac{\log p}{p}$ *sor aszimptotikusan egyenlő* $\log x$*-szel.*

Bizonyítás. Az alábbi segédtételeket használjuk fel:

4.2.2. Tétel. $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \log\nu = \sum\limits_{p\le n} \log p \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots \right)$.

Ez az $n!$ kanonikus előállítására vonatkozó Legendre féle formula logaritmizált alakja. (3.1.5. Tétel: Legendre féle formula)

4.2.3. Tétel. $n\log n - n < \sum\limits_{\nu=1}^{n} \log\nu < (n+1)\log(n+1) - n$.

4.2.4. Tétel. $\log(1+x) \le x$.

4.2.5. Tétel. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{k(k-1)} < 4$.

4.2.6. Tétel. $\sum\limits_{p\le n} \log p < n\log 4$.

Ez a $\prod\limits_{p\le n} p < 4^n$ (minden $n > 0$-ra) logaritmizált alakja.

Becsüljük a $\sum\limits_{p\le n} \frac{\log p}{p}$ sort alulról és felülről a 4.2.2 és a 4.2.3. Tételek felhasználásával!

Felső becslés:

$$\sum_{p\le n} \log \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots \right) = \sum_{\nu=1}^{n} \log\nu < (n+1)\log(n+1) - n, \tag{4.12}$$

de

$$\begin{aligned}(n+1)\log(n+1) - n &= n\log(n+1) + \log(n+1) - n = \\ &= n\log\frac{n+1}{n} + n\log n + \log(n+1) - n = \\ &= n\log(1+\frac{1}{n}) + n\log n + \log(n+1) - n.\end{aligned} \tag{4.13}$$

$x = \frac{1}{n}$-re a 4.2.4. Tételt alkalmazva

$$n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \le n\cdot\frac{1}{n} = 1 \tag{4.14}$$

eredményre jutunk. Tehát (4.13) és (4.14) miatt

$$(n+1)\log(n+1) - n \leq 1 + n\log n - n + \log(n+1). \tag{4.15}$$

Így (4.12) és (4.15) alapján

$$\sum_{p\leq n} \log p \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots \right) < 1 + n\log n - n + \log(n+1). \tag{4.16}$$

Ha a (4.16) bal oldalát alulról becsüljük, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{p\leq n} \log p \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots \right) \geq \sum_{p\leq n} \log p \left[\frac{n}{p}\right] \geq$$

$$\geq \sum_{p\leq n} \log p \left(\frac{n}{p} - 1\right) = n\sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p} - \sum_{p\leq n} \log p. \tag{4.17}$$

Így a 4.2.6. Tétel és (4.17) felhasználásával

$$\sum_{p\leq n} \log p \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots \right) \geq n\sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p} - n\log 4. \tag{4.18}$$

Végül (4.16) és (4.18) miatt n-nel végigosztva és rendezve

$$\sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p} < \log n + \log 4 - 1 + \frac{\log(n+1)}{n} + \frac{1}{n} \tag{4.19}$$

adódik, vagyis ha n elég nagy, akkor (4.19) alapján arra jutunk, hogy

$$\sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p} < \log n + 2. \tag{4.20}$$

<u>Alsó becslés:</u>

$$\sum_{p\leq n} \log p \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots \right) = \sum_{\nu=1}^{n} \log \nu > n\log n - n, \tag{4.21}$$

másrészt

$$\sum_{p\leq n} \log p \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots \right) < \sum_{p\leq n} \log p \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \dots \right) =$$

$$= n\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p} + n\sum_{p\le n}\log p\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\dots\right), \tag{4.22}$$

de

$$\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\dots$$

konvergens mértani sor, és így

$$\sum_{p\le n}\log p\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\dots\right) = \sum_{p\le n}\log p\cdot\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p}} =$$

$$= \sum_{p\le n}\log p\frac{1}{p(p-1)}. \tag{4.23}$$

A 4.2.5. Tételt felhasználva

$$\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p(p-1)} < \sum_{k=2}^{n}\frac{\log k}{k(k-1)} < \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\log k}{k(k-1)} < 4. \tag{4.24}$$

(4.22), (4.23) és (4.24) miatt

$$\sum_{p\le n}\log p\left(\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\dots\right) < n\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p} + 4n \tag{4.25}$$

adódik. Ha a (4.21) és (4.25) egyenlőtlenségeket felhasználjuk és n-nel végigosztunk, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p} > \log n - 5. \tag{4.26}$$

Végül a (4.20) és (4.26) alapján a következő eredményre jutunk

$$\left|\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p} - \log n\right| \le 5. \tag{4.27}$$

Ebből pedig következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{p\le n}\frac{\log p}{p}}{\log n} = 1. \tag{4.28}$$

□

4.2.7. Tétel. *Létezik olyan c konstans, hogy elég nagy n-re*

$$\left|\sum_{p\le n}\frac{1}{p} - \log\log n\right| < c.$$

Bizonyítás. A bizonyítás során felhasznált analízis tételek:

4.2.8. Tétel. $x - \log(1+x) < x^2$ *ha* $0 < x \leq \frac{1}{2}$.

4.2.9. Tétel. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \log k}$ *konvergens.*

4.2.10. Tétel. $\left| \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k \log(k+1)} - \log\log n \right| < c.$

A tételt a parciális szummálás (Ábel-átrendezés) segítségével bizonyítjuk.

4.2.11. Tétel (Ábel-átrendezés). *Legyenek* c_k, d_k, $k = 1, \ldots, n$ *valós számok és jelölje* s_k *a* $\sum\limits_{i=1}^{k} d_i$ *összeget bármely* $k = 1, \ldots, n$ *esetén. Ekkor a* $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k d_k$ *összeg átrendezhető a következő módon:*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k d_k = \sum_{k=1}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) s_k + c_n s_n.$$

A $\sum\limits_{p \leq n} \frac{1}{p}$ sort rendezzük át $\sum\limits_{p \leq n} \frac{\log p}{p}$ sor szerint, melyről a 4.2.1. Tétel alapján tudjuk, hogy aszimptotikusan $\log n$.

Legyen

$$f(n) = \sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} \tag{4.29}$$

és

$$g(n) = \sum_{p \leq n} \frac{1}{p}. \tag{4.30}$$

$f(n)$ definíciója miatt

$$f(k) - f(k-1) = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \text{ nem prím} \\ \frac{\log p}{p} & \text{ha } k = p \text{ prím} \end{cases}$$

így

$$\frac{f(k) - f(k-1)}{\log k} = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \text{ nem prím} \\ \frac{1}{p} & \text{ha } k = p \text{ prím} \end{cases}$$

Tehát

$$g(n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{f(k) - f(k-1)}{\log k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k+1) - f(k)}{\log(k+1)}. \tag{4.31}$$

Most (4.31)-et átrendezzük $f(n)$ szerint. Legyen

$$f_1(n) = f(n) - \log n. \tag{4.32}$$

(4.27) egyenlőtlenség felhasználásával $n > n_0$-ra

$$|f_1(n)| \leq 5, \tag{4.33}$$

de így (4.31) és (4.32) miatt

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_1(k+1) - f_1(k)}{\log(k+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\log(k+1) - \log k}{\log(k+1)}. \tag{4.34}$$

Először megvizsgáljuk a (4.34) jobb oldalának a második tagját:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\log(k+1) - \log k}{\log(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k+1)} + \frac{\log 2}{\log 2} - \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k+1)} + 1 - \frac{\log(n+1)}{\log(n+1)} + \frac{\log n}{\log(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k+1)} + \frac{\log n}{\log(n+1)}. \tag{4.35}$$

Alkalmazzuk a 4.2.8. Tételt $x = \frac{1}{k}$-ra. Ekkor

$$\frac{1}{k} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k^2},$$

$\log(k+1) > 0$-val végigosztva

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\log(k+1)} - \sum_{k=2}^{n} \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k+1)} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2\log(k+1)} \tag{4.36}$$

eredményt kapjuk. Tehát a 4.2.9. Tételt felhasználva

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\log(k+1)} - \sum_{k=2}^{n} \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k+1)} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2\log k} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2\log k} = c_1, \tag{4.37}$$

ahol c_1 pozitív konstans.

Másrészt a 4.2.4. Tétel alapján

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\log(k+1)} - \sum_{k=2}^{n} \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k+1)} > 0, \tag{4.38}$$

vagyis

$$\left|\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\log(k+1)} - \sum_{k=2}^{n} \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k+1)}\right| < c_1, \tag{4.39}$$

de így a 4.2.10. Tétel és (4.39) miatt

$$\left|\sum_{k=2}^{n} \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k+1)} - \log\log n\right| < c_2, \tag{4.40}$$

ahol c_2 pozitív konstans. Végül (4.35) és (4.40) alapján elég nagy n-re

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k+1)} - \log\log n\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{k=2}^{n} \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k+1)} - \log\log n\right| + \left|\frac{\log n}{\log(n+1)}\right| <$$

$$< c_2 + 1 = c_3. \tag{4.41}$$

Most megvizsgáljuk (4.34) jobb oldalának első tagját is (ez a hibatag). (4.33)-beli n_0-lal

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_1(k+1)-f_1(k)}{\log(k+1)} = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{f_1(k+1)-f_1(k)}{\log(k+1)} + \sum_{k=n_0+1}^{n-1} \frac{f_1(k+1)-f_1(k)}{\log(k+1)} =$$

$$= c_4 + \sum_{k=n_0+1}^{n-1} \frac{f_1(k+1)-f_1(k)}{\log(k+1)} = c_4 + \frac{f_1(n_0+2)-f_1(n_0+1)}{\log(n_0+2)} +$$

$$+ \frac{f_1(n_0+3)-f_1(n_0+2)}{\log(n_0+3)} + \cdots + \frac{f_1(n-1)-f_1(n-2)}{\log(n-1)} + \frac{f_1(n)-f_1(n-1)}{\log n}. \tag{4.42}$$

(4.42) parciálisan szummálva:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_1(k+1)-f_1(k)}{\log(k+1)} = c_4 + \frac{f_1(n)}{\log n} - \frac{f_1(n_0+1)}{\log(n_0+2)} +$$
$$+f_1(n_0+2)\left(\frac{1}{\log(n_0+2)} - \frac{1}{\log(n_0+3)}\right) + \cdots +$$
$$+f_1(n-1)\left(\frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log n}\right), \tag{4.43}$$

így (4.33) és (4.43) miatt

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_1(k+1)-f_1(k)}{\log(k+1)}\right| \leq c_4 + \frac{5}{\log 2} + \frac{5}{\log 2} +$$
$$+5\sum_{\nu=n_0+2}^{n-1}\left(\frac{1}{\log \nu} - \frac{1}{\log(\nu+1)}\right) = c_5 + 5\left(\frac{1}{\log(n_0+2)} - \frac{1}{\log n}\right) <$$
$$< c_5 + \frac{5}{\log(n_0+2)} = c_6, \tag{4.44}$$

ahol c_5 és c_6 pozitív konstansok. Tehát (4.34), (4.41) és (4.44) felhasználásával végül arra az eredményre jutunk, hogy elég nagy n-re:

$$|g(n) - \log\log n| < c_7, \tag{4.45}$$

ahol

$$g(n) = \sum_{p \leq n} \frac{1}{p}$$

□

Megjegyzés: A 4.2.7. Tételből azonnal következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{p\leq n} \frac{1}{p}}{\log\log n} = 1$$

azaz, hogy $\sum\limits_{p\leq n} \frac{1}{p}$ aszimptotikusan $\log\log n$.

5. fejezet

Modern eredmények

[2] alapján modern becsléseket mutatok be a prímszámok számára.

5.1. Élesebb becslések a prímszámok számára

A 3.1.3. Tétel és a 3.1.4. Tétel szerint $x \geq 2$ esetén

$$1 - \frac{3}{4} < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log_2 x}} < 4 + \frac{3}{4}.$$

Ezek a becslések gyengék ahhoz, hogy *Csebisev* tételét kiadják. A 3.1.3. Tétel és a 3.1.4. Tétel bizonyításából belátható, hogy nagy x-re az alsó és felső becslésnél is lényegesen csökkenthető a $\frac{3}{4}$, sőt még a 4 is, ha ügyesebb szétvágást alkalmazunk.

1. Feladat: Bizonyítandó, hogy adott $\epsilon > 0$-hoz létezik olyan $x_0(\epsilon)$ korlát, hogy $x \geq x_0(\epsilon)$ esetén

$$(1 - \epsilon)\frac{x}{\log_2 x} < \pi(x) < (2 + \epsilon)\frac{x}{\log_2 x}.$$

Ebből még mindig nem jön ki közvetlenül *Csebisev* tétele, de a szorzók aránya a korábbi 19-ről a 2 közelébe került.

5.1.1. Tétel. *Létezik olyan $e > 1$ alapszám, amelynél a logaritmusfüggvény $(1;0)$-beli érintőjének iránytangense* 1.

Ezt szokás természetes alapú logaritmusnak nevezni, jelölése ln vagy log (mi a log jelölést használjuk).

5.1.2. Tétel. $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *és* $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

5.1.3. Tétel. $\log x \le x - 1$.

Természetes logaritmusra átfogalmazva, a **1. Feladat** állítása szerint $\epsilon > 0$; $x \ge x_0(\epsilon)$ esetén

$$(1-\epsilon)(\log 2)\frac{x}{\log x} < \pi(x) < (2+\epsilon)(\log 2)\frac{x}{\log x}.$$

A $\log 2$ közelítő értéke $0,693$, így elég nagy x-re a $\pi(x)$ és az $\frac{x}{\log x}$ hányadosa $0,69$ és $1,39$ közé esik.

Sejtések a $\pi(x)$ közelítésére:

Gauss 1792-ben arra a sejtésre jutott, hogy $\int\limits_2^x \frac{dt}{\log t}$ lehet a jó közelítés.

Legendre 1798-ban kimondta azt a sejtését, hogy $\pi(x)$ jól közelíthető az $\frac{x}{A\log x + B}$ kifejezéssel, ahol A és B állandók, s ezt 1808-ban már $\frac{x}{\log x - 1,08366}$ alakban fogalmazta meg. Ha azonban legfeljebb $\frac{x}{\log^3 x}$ nagyságrendű eltérést engedünk meg $\pi(x)$-től, akkor *Legendre* konkrét közelítése és *Gauss* sejtése nem fér össze egymással, hiszen (sorfejtéssel, illetve parciális integrálással) a fenti hibahatáron belül az $\frac{x}{\log x} + 1,08366\frac{x}{\log^2 x}$, illetve az $\frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x}$ becslést adnák. Ha $\frac{x}{\log^2 x}$ nagyságrendű eltérést engedünk meg, akkor nincs köztük lényeges különbség, és bármelyik sejtés (ezen hibahatáron belüli) teljesüléséből következne, hogy létezik a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}$$

határérték, és értéke 1. *Csebisev* bebizonyította, hogy ha létezik a fenti határérték, akkor értéke 1. A határérték létezését nem sikerült igazolnia, de megmutatta, hogy nagy x-ekre *Legendre* becslése biztosan nem lehet túl pontos (azóta kiderült, hogy kb. 10^6-ig még *Legendre* becslése pontosabb, viszont $5\cdot 10^6$ felett már *Gauss* közelítése jobb).

Az **1. Feladat** állításánál sokkal pontosabb becslést igazolt *Csebisev*. Bebizonyította, hogy létezik olyan x_1 korlát, hogy $x \geq x_1$ esetén

$$0.92129 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < 1,10556 \frac{x}{\log x}.$$

Nézzük $s \in \mathbb{R};\ s > 1$ esetére a következő függvényt:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Euler-féle szorzatelőállítás: minden $s > 1$-re

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

Georg Friedrich Bernhardt Riemann (1826-1866) német matematikus a $\zeta(s)$ függvényt az $s = 1$ kivételével minden komplex s-re értelmezte. Ez a $\pi(x)$ becslésében döntő hatású észrevétel volt. *Riemann* 1859. november 3-án tartotta székfoglaló előadását a Berlini Akadémián, előadása 1860-ban jelent meg nyomtatásban. Ebben a 9 oldalas dolgozatban (egyetlen számelméleti munkájában) vázolt egy lehetőséget a $\pi(x)$ pontosabb becslésére, s észrevételei fantasztikus hatással voltak a matematika fejlődésére – annak ellenére, hogy dolgozatában számos bizonyítatlan feltevés szerepel. Máig sem sikerült igazolni a *Riemann* féle $\zeta(s)$ függvény komplex gyökeire vonatkozó nevezetes sejtést, hogy $0 \leq$Re $s \leq 1$ és $\zeta(s) = 0$ esetén Re $s = \frac{1}{2}$. (1986-ig ezt már ellenőrizték másfél milliárd gyökre, de végtelen sokan vannak.) Bizonyítható, hogy *Riemann* sejtése azzal ekvivalens, hogy létezik olyan $c > 0$ állandó, hogy minden $x \geq 2$-re

$$\left| \pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\log t} \right| < c x^{\frac{1}{2}} \log x.$$

Ettől a ma ismert legjobb becslések is messze vannak, s még a $\lim_{x \to +\infty} \pi(x) x^{-1} \log x$ létezésének igazolása is csupán 1896-ban sikerült.

5.2. Prímszámtétel

5.2.1. Tétel (PRÍMSZÁMTÉTEL). *Létezik a*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}$$

határérték, és értéke 1.

Ezt *Riemann* gondolatai alapján bizonyította be egymástól függetlenül *Jacques Hadamard* (1865-1963) francia matematikus és *Charles Jean de la Vallée Poussin* (1866-1962) belga matematikus. 1899-ben *de la Vallée Poussin* azt is igazolta, hogy létezik olyan c_1 és c_2 pozitív állandó, hogy minden $x \geq 2$ esetén

$$\left| \pi(x) - \int\limits_2^x \frac{dt}{\log t} \right| < c_1 x e^{-c_2 (\log x)^{\frac{1}{2}}}. \tag{5.1}$$

Az itteni hibatag tetszőleges fix K-ra kisebb $\frac{x}{\log^K x}$-nél, ha x elég nagy.

Gyengébb, de nagy konstansot nem tartalmazó becslés például a következő: 1962-ben *J. B. Rosser* és *L. Schoenfeld* amerikai matematikusok bebizonyították, hogy $n \in \mathbb{Z}$; $n \geq 67$ esetén

$$\frac{n}{\log n - \frac{1}{2}} < \pi(n) < \frac{n}{\log n - \frac{3}{2}}.$$

Az először 1896-ban bizonyított prímszámtételre még több, mint fél évszázadig csak függvénytani bizonyítások születtek; az első elemi számelméleti bizonyítást *Erdős Pál* és a norvég *Atle Selberg* adta 1948-ban. Azóta számos elemi bizonyítás született.

A prímszámok analitikus eszközökkel való vizsgálata az elemi becsléseknél sokkal élesebb eredményeket ad (például (5.1)), de ezek igazolása nagyon mély eszközöket kíván, amely túlmegy a dolgozat keretein. Megjegyezzük azonban, hogy ezekkel a módszerekkel nem csak a prímszámok számára adhatunk éles becsléseket, hanem egyéb prímekhez kapcsolódó mennyiségek is jól becsülhetőek. Ennek az elméletnek magyar vonatkozása is van, világhírűek például *Pintz János* magyar matematikus, *D. A. Goldston* és *C. Y. Yildirim* prímhézagokra vonatkozó eredményei. [4]-ben egy kitűnő összefoglalót találhatunk a legmodernebb eredményekről.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Gyarmati Katalinnak a dolgozatom elkészítésében nyújtott segítségéért és türelméért.
Köszönettel tartozom még családomnak és barátomnak a támogatásukért és a megértésükért.

Irodalomjegyzék

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler: *Bizonyítások a könyvből,* Typotex, 2004.

[2] Szalay Mihály: *Számelmélet,* Tipotex Nemzeti Tankönyvkiadó, 1998.

[3] Lánczi Ivánné: *Számelmélet,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.

[4] János Pintz: *Landau's Problems on Primes,* Journal de Théorie des Nombres

[5] http://hu.wikipedia.org/wiki/Prímszámok

Nyilatkozat

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.