EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

OPTIMÁLIS PORTFÓLIÓK KIALAKÍTÁSA

Szakdolgozat

PÉTER ZSÓFIA

Matematika BSc., Matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Csiszár Villő, adjunktus

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Szakdolgozatom témájának kiválasztásakor fontosnak tartottam, hogy a matematika olyan gyakorlati területen való alkalmazását tekintsem át, mely terület napjainkig tartogat megoldatlan feladatokat és újabb kihívásokat. A pénzügyi matematika az elmúlt egy-két évtizedben az alkalmazott matematika egyik legdinamikusabban fejlődő ága volt. Így esett a döntés a pénzügyi- és értékpapír-piacok világára, és azon belül is a portfóliókra. Nézetem szerint, az optimális portfólió megtalálása, és kialakításának folyamata egy rendkívül összetett és máig aktuális kérdés.
A probléma megoldásához a különböző matematikai modellek és azok eszközei vannak segítségünkre. A modellezés folyamán először definiálásra kerülnek a változók, majd a célfüggvény, ami a befektető elvárásait reprezentálja, valamint hozzáadódnak a különböző korlátozó feltételek, amelyek például a korlátos tőkéből vagy a befektető egyéb kritériumaiból adódnak.
A optimális portfólió kiválasztásának problémájára léteznek lineráris programozási, kvadratikus programozási és számos más nemlineáris programozási modellek. De a programozási modelleken kívül használatos még a növekedés-optimális vagy a logoptimális portfólióelmélet. Én egy hasonlóan speciális módszert választottam. Egy olyan eljárást [1] [13] , ahol az optimalizálni kívánó befektető rendelkezik a részvények várható hozamainak sorrendjével, az úgynevezett rendezési információval. Így, egy egyedi módszert kapunk az előállításra, mert megkerülünk minden kiegészítő eljárást és természetes lépéseket teszünk ezen információtól a portfólióig. Ez a portfólió pedig bizonyos jól definiált értelemben optimális lesz.

A megközelítést a pénzügyi fogalmak áttekintésével kezdem, ami könnyebbé teszi majd az eljárás megértését. Fontos kiemelni a Markowitz által lefektetett portfólióelméleti alapokat, ezen belül is a markowitzi feladatot, mely módszerünk kiindulási alapjául szolgál majd. A 3.fejezetben a választott módszer kifejtése következik, melyen belül bemutatásra kerül a hatékony portfóliók kialakítása. Fontos szerepet kap majd a preferencia fogalmának meghatározása, és a későbbiek folyamán a fogalom kiterjesztése.

A 4.fejezetben a hatékony portfóliók után az optimális portfóliók kialakítását veszem sorra, központban a centroid-optimális portfóliókkal. Az ezen portfóliók mögötti elmélet levezetése után pedig bemutatom, milyen módszerekkel konstruálhatunk ilyeneket.

A utolsó fejezetben a módszer gyakorlati tesztelése valósul meg. A markowitzi optimalizációs feladat kvadratikus programozási megoldással kapott eredményei kerülnek összevetésre a centroid-optimális portfólió-megadás becsléseivel.

Dolgozatom célja, hogy átfogó képet adjon a portfólióalkotásról és betekintést nyújtson egy speciális, a rendezési információn alapuló módszer felépítésébe, alkalmazásának előnyeibe és eredményességébe.

2. fejezet

A portfólióelmélet alapjai

A pénzügyi termékek és ügyletek világa igen sokszínű, ugyanakkor nem eléggé letisztultak a fogalmak. A számunkra lényeges jellemzőket megragadva azonban adhatunk olyan stilizált definíciókat, amelyek egyszerűek, közérthetőek és céljainknak megfelelnek.

Emellett szükséges a Markowitz-féle portfólióelmélet érdemi részeinek megismerése is, mely módszerünk alapjául szolgál majd. Ezt követi egy általános markowitzi-feladat bemutatása. Így ezek segítségével már könnyebben nyerhetünk betekintést a portfóliókialakítás ismert, illetve kevésbé ismert technikáiba.

2.1. Alapfogalmak

Értékpapír, értékpapír-piac [11]

Értékpapír alatt olyan pénzügyi terméket(pl. részvény, kötvény, befektetési jegy) értünk, amely vételár ellenében szabadon átruházható. Az értékpapírok adás-vételének színtere pedig az értékpapír-piac.

Hozam, várható hozam

Az értékpapírokkal kapcsolatban hozamról beszélünk, amely nem azonos a kamattal, annál jóval tágabb fogalom. A pénzünkkel való gazdálkodás hozadékát jelenti.
A hozam ugyanis az árfolyamnyereség, vagy éppen az árfolyamveszteség összege.
A várható hozam pedig a lehetséges hozamok valószínűségekkel súlyozott átlaga.

Kockázat

Kockázatnak tekintjük azt, ha egy befektetés tényleges hozama eltér attól a várt hozamtól, amelyet a befektető az eszköz vásárlásakor prognosztizált. Minél nagyobb annak a valószínűsége, hogy a tényleges és a várt hozam eltér egymástól, és/vagy minél nagyobb az eltérésük nagysága, annál kockázatosabb a szóban forgó befektetés.

Portfólió, portfóliókiválasztás

A portfólió, a pénzügyi szektorban tágabb értelemben pénzbefektetési kombinációt, szűkebb értelemben értékpapírtárcát jelent.

Egy portfólió megadása, a vizsgált értékpapírokba (illetve egyéb befektetési lehetőségekbe) fektetendő vagyonhányadok meghatározását jelenti. Ez matematikailag egy olyan vektor megadásával egyenértékű, amelynek megfelelő komponense a befektetett teljes tőke megfelelő értékpapírba invesztált hányada.

Maga a portfóliókiválasztás problémája a következő:

Adott az értékpapírok egy halmaza, melyek általában a tőzsdén szereplő részvények, és adott egy bizonyos mennyiségű tőke, amely rendelkezésre áll az értékpapírok megvásárlásához. A feladat az, hogy megadjuk az adott értékpapírokból előállítható portfóliók közül a *hatékonyat*.

Hatékony portfólió

A megadott feltételek mellett előállítható portfóliók közül az hatékony, mely a maximális várható hozamot biztosítja az adott kockázati szint mellett.

Optimális portfólió

Két különböző befektető szempontjából eltérő definíciót kaphatunk az optimális portfólió fogalmára. Lehet, hogy az egyik számára a minimális kockázatú portfólió jelenti az optimumot, míg a másik számára egy ennél nagyobb megtérülésű, amelyre nyilvánvalóan a kockázat is nagyobb.

A hatékony portfóliók meghatározásával elérjük az optimumot. Ebből pedig adódik, hogy ha a befektető számára megadjuk ezeket a hatékony portfóliókat, akkor ezek közül tud választani aszerint, hogy milyen várható hozamot szeretne elérni továbbá, hogy mekkora kockázatot képes elviselni.

Portfólió várható hozama, kockázata

A portfólió várható hozamán, a benne lévő értékpapírok várható hozamának súlyozott átlagát értjük.

A portfóliók kockázatának mérése már nem ilyen egyértelmű. Több módszer is létezik, ezek közül mi a portfólió hozamának szórásnégyzetét használjuk a mérésre.

2.2. A portfólióelmélet úttörői

A modern portfólióelmélet kialakulása az 1950-es évekre tehető. Alapjait *Harry M. Markowitz* amerikai közgazdász fektette le 1952-ben, a *The Journal of Finance* pénzügyi lapban megjelent *Portfolio Selection* [6] című tanulmányával. Ezért a munkájáért 1990-ben elnyerte a Közgazdasági Nobel-emlékdíjat.

Markowitz alkotta meg azt a koncepciót, amely a befektetési lehetőségek rangsorolását két mutató, a várható hozam és a hozam szórásnégyzetének segítségével végzi el. A befektetés jövőbeli hozamát valószínűségi változónak kell tekinteni. Ennek várható értéke, a várható hozam, a befektetés átlagos jövedelmezőségét, a hozam szórásnégyzete pedig a kockázatát méri. Annak, hogy a befektetési döntéshozatal során a befektetőnek kockázattal kell szembenézni, és ezt a kockázatot - amennyire lehet-, csökkenteni szeretné, az a következménye, hogy a befektető diverzifikál, azaz egyidejűleg több különböző értékpapírba fekteti likvid eszközeit.

A várható hozam-kockázat hatékony portfóliók explicit előállítására Markowitz 1956-ban írt tanulmányában [7] kidolgozta a kritikus vonal algoritmust. Kimutatta, hogy a hatékony portfóliók az n dimenziós térben egy szakaszonként lineáris halmazt alkotnak, a hatékony portfóliók szórásnégyzete pedig egy folytonos, szigorúan konvex, szakaszonként parabolikus függvénye a várható hozamuknak. A hatékony portfóliók meghatározásához egy parametrikus, kvadratikus programozási feladatot[12] kell

megoldani, ami megfelelő input adatok (az egyes értékpapírok várható hozamai, a hozamok varianciái és a hozamok közötti kovarianciák) birtokában, számítógép segítségével kivitelezhető. Ma már az algoritmusnak számos változata ismert, és a hatékony portfóliók előállításához több szoftver áll rendelkezésre.
A Markowitz-féle hozam-kockázat hatékonysági koncepció intuitív alapon nagyon könnyen elfogadható, bizonyára ennek köszönhető széles körű elterjedése a gyakorlatban.
Ezen hatékonysági koncepció gyakorlati alkalmazhatóságát magyarázó nagy előnye abban mutatkozik meg, hogy csupán a hozamok valószínűség eloszlásának első két momentumának a becslését igényli. Az egyes értékpapírpárok hozamai közötti kapcsolatot megadó kovarianciamátrix ismeretében az összes lehetséges portfólió összehasonlítása elvégezhető segítségével, tehát portfóliók összefüggésben is alkalmazható.

Markowitz az alábbi feltételeket támasztotta modelljének [9]:

- A portfólió kockázata a portfólióhozam változékonyságának függvénye.
- A befektetők kockázatkerülők.

  A befektetések biztonsága nagyobb prioritást élvez, mint a magasabb hozam lehetősége.
- A befektetők vagyongyarapodásra törekednek.
- Nincsenek tranzakciós költségek.

  Tranzakciós költségnek nevezünk minden olyan költséget, amely az értékpapírok adás-vétele során a vételi áron felül felmerül.
- Az elemzések a befektetések egy periódusára vonatkoznak.
- A befektetők racionálisak.

  Ez azt jelenti, hogy a befektetők a vizsgált időtávon a lehető legkisebb kockázat mellett a lehető legnagyobb vagyonnövekedést szeretnék elérni.

A portfólióelmélet eredményei nem keltettek feltűnően nagy érdeklődést *Tobin* 1958-ban [10] , Sharpe 1963-ban [8] és 1964-ben [9], illetve Lintner 1965-ben [5] megjelent munkái előtt. Kezdetben ugyanis nem ismerték fel gyakorlati jelentőségét. Sharpe és Lintner tanulmányukban a Markowitz modellt az értékpapírok kockázatának és várható hozamának egyensúlyi kapcsolatát leíró tőkepiaci árfolyam modell (CAPM) megalkotásában használták fel. Ez a modell egyszerű közgazdasági jóslataival a 60-as évek végén és a 70-es évek elején lázba hozta a Wall Street szinte összes spekulánsát és brókercégét. Ez fordulópontot jelentett annak elismerésében, hogy a portfólióelmélet eredményei a gyakorlatban alkalmazhatók.

2.3. A markowitzi-feladat

A következőkben a markowitzi-feladatot, a portfólió-optimalizálási modell egyik legegyszerűbb változatát ismertetjük. [2]

Adott n db befektetési lehetőség.
Jelölje R_i $(i = 1, \dots, n)$ az i-edik befektetés értékét (tőke + kamat) a következő időperiódusban. Ekkor R_i-t valószínűségi változónak tekintjük.
Portfólió alatt a nemnegatív x_i $(i = 1, \dots, n)$ számok összességét értjük, melyek összege pontosan 1. Az x_i azt mutatja, hogy egységnyi tőkének mely részéért vásárolunk az i-edik befektetésből.

Így portfóliónk egységnyi befektetésre eső értéke a következő időperiódusban:

$$R = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i.$$

A portfólió várható értéke:

$$\mathrm{E}(R) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{E}(R_i).$$

Ha ezt akarjuk maximalizálni, akkor a helyzet egyszerű, teljes tőkénket a legnagyobb várható értékű befektetésbe fektetjük.
De sajnos, a magas nyereségű befektetések magasabb kockázatúak is.
Markowitz egy portfólió kockázatát annak szórásnégyzeteként definiálta:

$$D^2(R) = \mathrm{E}(R - \mathrm{E}(R))^2 = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(R_i - \mathrm{E}(R_i))\right)^2 \;=\; \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{R}_i\right)^2\right],$$

$$\text{ahol} \qquad \tilde{R}_i \;=\; R_i - \mathrm{E}(R_i).$$

A várható értéket tehát maximalizálni, a kockázatot minimalizálni kellene. Ugyanakkor ez két ellenkező irányú cél, melyet egyszerre nem teljesíthetünk.
A Markowitz modellben arra törekszünk, hogy a várható értéket úgy maximalizáljuk, hogy közben a kockázat ne legyen túl nagy. Markowitz egy μ pozitív paramétert vezetett be, az ún. *kockázat elkerülési paramétert*, és a következő optimalizálási problémát veti fel:

$$\text{maximalizálandó} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{E}(R_i) \;-\; \mu \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{R}_i\right)^2$$

$$\text{feltéve, hogy} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \;=\; 1$$

$$x_i \;\geq\; 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

A μ kockázat elkerülési paraméter, a kockázat fontosságát jelzi a várható értékkel szemben, ha értéke nagy, akkor a kockázatot csökkentjük, a várható érték ellenében, míg kis értékénél magas kockázatot vállalunk a magas várható érték érdekében.

Az előző maximalizálási optimum problémával egyenértékű az alábbi minimalizálási optimum probléma:

$$\text{minimalizálandó} \qquad -\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{E}(R_i) \;+\; \mu \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{R}_i\right)^2$$

$$\text{feltéve, hogy} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

A szórásnégyzetet tovább alakítva kapjuk, hogy

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{R}_i \Big)^2 = \mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{R}_i \Big) \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j \tilde{R}_j \Big) = \mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \tilde{R}_i \tilde{R}_j \Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \mathrm{E}(\tilde{R}_i \tilde{R}_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij}$$

ahol

$$V_{ij} = \mathrm{E}(\tilde{R}_i \tilde{R}_j).$$

az R_i és az R_j kovarianciája. Bevezetve az $r_i = \mathrm{E}R_i$ jelölést, optimalizálási problémánk átírható:

$$\text{minimalizálandó} \qquad -\sum_{i=1}^{n} r_i x_i + \mu \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij}$$

$$\text{feltéve, hogy} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

alakba.

A feladat megoldását és összehasonlítását a rendezési információkkal történő portfóliószelekcióval az 5. fejezetben, egy valós értékpapírtáblán mutatom majd be.

3. fejezet

Hatékony portfóliók

E fejezetben a rendezési információból származó portfóliószelekció kerül bemutatásra. A modern portfólióelmélet analógiája útján kerülnek végül kialakításra a hatékony portfóliók.
Ez a szakasz a portfóliókiválasztási eljárás megismertetését szolgálja. Sorra véve a portfólió-konstruálás markowitz-i alapjait, a vizsgált módszer mikéntjeit , a hatékony portfóliókat valamint ezek kialakítási módszereit.

3.1. A modern portfólióelmélet

A rendezési információból származó portfóliószelekció során feltehető, hogy adottak egy rögzített sorrendben az eszközök, és vektorok reprezentálják ezen eszközök várható hozamát.
Ez a $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ vektor jelenti majd a várható hozamok becslését, míg a $w = (w_1, \ldots, w_n)$ vektor legyen a befektetés portfóliója, $1, \ldots, n$ eszközök esetén. Így a w portfólió várható hozama $w^{\mathrm{T}}\rho$ lesz.
Markowitz által bevezetett fogalom a *hatékony portfólió* fogalma. A optimalizáló befektetőről elmondható, hogy arra törekszik, hogy kizárólag ilyen portfólióba fektesse be a pénzét (a későbbiek folyamán a befektetőt mindig optimalizáló befektetőként értjük). Ezek alapján megállapítható, hogy a Markowitz-féle modell problémája egy optimalizációs probléma, az adott kockázati szint mellett, a legmagasabb várható hozamú portfólió megtalálására. Ezt a problémát most a preferencia relációk felől közelítjük meg.

Vezessük be a $\succeq$ szimbólumot, ami jelölje a portfóliók közti preferenciát. Tehát

$v \succeq w$ jelentse azt, hogy a befektető előnyben részesíti v portfóliót w-vel szemben. A modern portfólióelméletben adott ρ-hoz a befektető meghatározza a preferenciáit, a kockázati korlátok függvényében kialakuló várható hozamok alapján:

$$v \succeq w \textit{ akkor és csak akkor, ha } v^{\mathrm{T}}\rho \geq w^{\mathrm{T}}\rho.$$

Ezen a szemléleten annyi változás történik, hogy a befektető most nem a legmagasabb hozamot ígérő portfóliót keresi, hanem olyat keres, ami számára *maximálisan preferált* és kockázata nem magasabb az általa meghatározottnál. Ez a váltás lehetővé teszi, hogy más megközelítésbe kerüljön a modern portfólióelmélet.
A folytatáshoz szükséges két új fogalom bevezetése. Az egyik ilyen fogalom a *várható hozamkúp*, a másik *releváns portfólió irányok*.

Várható hozamkúp

Legyen

$$\overline{Q} \;=\; \{\lambda\rho \mid \lambda \geq 0\,\},$$

a legkisebb kúp, ami tartalmazza ρ-t. Itt Q, mint a vektortér részhalmaza, egy kúp, ha minden $r \in Q$ és minden $\lambda > 0$ skalárra $\lambda r \in Q$. Így az előzővel ekvivalens, hogy:

$$v \succeq w \textit{ akkor és csak akkor, ha } v^{\mathrm{T}}r \geq w^{\mathrm{T}}r, \textit{ minden } r \in \overline{Q}\text{-ra.}$$

Releváns és irreleváns portfólió irányok

Definiáljuk a portfóliók terének releváns és irreleváns irányokra való felbontását, adott ρ várható hozamvektornál:

$$R^{\perp} = \{r \in \mathbb{R}^n \mid \rho^{\mathrm{T}}r = 0\}.$$

Ezen altér a ρ-ra merőleges hozamvektorok halmaza.

Legyen

$$R = (R^{\perp})^{\perp} = \{w \in \mathbb{R}^n \mid w^{\mathrm{T}} r = 0,\ minden\ r \in R^{\perp}\}.$$

Ez az altér tartalmazza ρ-t, de bővebb, tartalmazza a negatív többszöröseit is. Ezek alapján az R és $R^{\perp}$ a portfóliók terének egy felbontásaként értelmezhetőek, a következők szerint:
Ha adott w portfólió, akkor w felírható:

$$w = w_0 + w_{\perp}\ ,\ w_0 \in R\ és\ w_{\perp} \in R^{\perp}.$$

A preferencia reláció átírható:

$$v \succeq w\ akkor\ és\ csak\ akkor,\ ha\ \ v_0^{\mathrm{T}} r \geq w_0^{\mathrm{T}} r\ ,\ minden\ r \in \overline{Q},$$

ahol w_0 és v_0 a releváns komponensek.

3.1.1. Rendezési információ és a meggyőződésvektor

Adott a befektető, aki rendelkezik az $r = (r_1, \ldots, r_n)$ várható hozamú és V kovarianciamátrixú n db részvény listájával. Tegyük fel, hogy nincs tudomása a konkrét r-ről, azonban van m darab meggyőződése r komponenseit illetően, amit m különböző egyenlet formájában fejezhetünk ki. Minden ilyen meggyőződés felírható a várható hozamok lineáris kombinációjaként. A kombináció mindig nagyobb vagy egyenlő, mint nulla.

Például:

$$5r_1 - 2r_3 + r_4 + 4r_6 \geq 0.$$

Az együtthatókat kezelhetjük együttesen egy D_1 oszlopvektorként és felírhatjuk az egyenlőtlenséget $D_1^{\mathrm{T}} r \geq 0$ alakban. Ez az előző példa szerint a következő:

$$D_1 = (5, 0, -2, 1, 0, 4, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$$

Ilyen módon mind az m darab meggyőződés beírható egy-egy oszlopvektorba. Így keletkeznek $D_1, \ldots, D_m$ meggyőződés vektorok.
Tehát $Dr \geq 0$, ahol D egy $m \times n$-es meggyőződés mátrix, aminek sorai $D_1^{\mathrm{T}}, \ldots, D_m^{\mathrm{T}}.A \geq 0$ jelölés azt jelenti, hogy minden komponense nemnegatív.
Az r várható hozamvektor konzistens D-vel, ha kielégíti az adott egyenlőtlenségek feltételeit.

Felírható:

$$\begin{gathered} Q = \{r \in \mathbb{R}^n \mid Dr \geq 0\} = \\ = \{r \in \mathbb{R}^n \mid D_j^{\mathrm{T}} r \geq 0, \text{ minden } j = 1, \ldots, m\}, \end{gathered}$$

a lehetséges várható hozamok halmaza. Ez egy kúp a lehetséges várható hozamok $\mathbb{R}^n$ terében, és egy természetes általánosítása a várható hozamkúpok definíciójának. Minden $r \in Q$ lehet az aktuális várható hozamvektor.

Példa - Teljes rendezés

Adottak a rendezett részvényeink:

$$r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n.$$

Rendelkezünk $m = n - 1$ darab meggyőződéssel az $r_j - r_{j+1} \geq 0$, *minden* $j = 1, \ldots, n-1$ formulából adódóan.
A meggyőződésvektorok $D_j = (0, \ldots, 0, 1, -1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$, míg D mátrix (az üres helyeken 0-k állnak):

$$D = \begin{pmatrix} D_1^T \\ \vdots \\ D_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.1.2. A preferencia reláció kiterjesztése

A preferencia relációt a hozamtér, és a portfóliók terének merőleges felbontásával terjesztjük ki.

Legyen

$$R^{\perp} = \{r \in \mathbb{R} \mid Dr = 0\} = Q \ \cap \ (-Q)$$
$$R = (R^{\perp})^{\perp} = \{w \in \mathbb{R}^n \mid w^{\mathrm{T}} r \ = \ 0, \text{ minden } r \in R^{\perp} - re\}.$$

Lineáris algebrából tudjuk, hogy $R = span(D_1, \ldots, D_m) = \{D^T x \mid x \in \mathbb{R}^m\}$ a D sorai által kifeszített altér.
Minden portfólióra újra felírható:

$$w = w_0 + w_{\perp}, \quad w_0 \in R \ \text{ és } \ w_{\perp} \in R^{\perp}.$$

Definiáljuk a preferenciát úgy, hogy csak a w_0 komponenst vesszük figyelembe, mert ez lesz releváns a megyőződésekre.
Vagyis, ha van v és w portfóliónk, azok felbonthatóak $v_0, \ w_0 \in R$, illetve $v_{\perp}, \ w_{\perp} \in R^{\perp}$ komponensekre.

Így:

$$v \ \succeq \ w \ \Leftrightarrow \ v_0^{\mathrm{T}} r \geq w_0^{\mathrm{T}} r \ , \ \text{minden } r \in Q\text{-ra.}$$

Mivel a hozamvektort $r = r_0 + r_{\perp}$-ként jelöltük, hasonlóképpen bontható fel a következő:

$$w^{\mathrm{T}} r \ = \ w_0^{\mathrm{T}} r_0 \ + \ w_{\perp}^{\mathrm{T}} r_{\perp}.$$

Ezzel ekvivalens felírás:

$$v \ \succeq \ w \ \Leftrightarrow \ v^{\mathrm{T}} r \geq w^{\mathrm{T}} r \ , \ \text{minden } r \in \overline{Q}\text{-ra,}$$
$$\textit{ahol } \overline{Q} \ = \ Q \ \cap \ R.$$

Definiáljuk a szigorú preferenciát, mint:

$$v \succ w \Leftrightarrow v \succeq w \text{ és } w \not\succeq v,$$

ami ekvivalens azzal az állítással, hogy

$$v \succ w \Leftrightarrow v^{\mathrm{T}}r \geq w^{\mathrm{T}}r, \text{ minden } r \in \overline{Q},$$

$$\text{és}$$

$$v^{\mathrm{T}}r > w^{\mathrm{T}}r, \text{ minimum egy } r \in \overline{Q}\text{-ra.}$$

Példa - Teljes rendezés - Folytatás

Felírható:

$$w = \sum_{i=1}^{n-1} \chi_i D_i + \chi_n (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}},$$

ahol $\chi_1, \ldots, \chi_n$ valós számok. A meggyőződéseink releváns része a D_j vektorok által meghatározott. A $D_1 = (1, -1, 0, \ldots, 0)$-beli hosszú pozíció, vagy másnéven vételi állomány, egy befektetés abba a meggyőződésbe, hogy az 1-es részvény magasabb várható hozamú, mint a 2-es részvény; n darab részvényből álló kínálat és $n-1$ darab meggyőződésvektor mellett. A fennmaradó dimenziót pedig $(1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$ vektor határozza meg. Ez a vektor egyáltalán nincs összefüggésben a rendezési információkkal.

Ez a definíció azonban nem tekinthető elégségesnek, abban az értelemben, hogy adódhatnak olyan v, w porfóliópárok, amelyek ilyen módon nem összehasonlíthatóak. Ennek megoldására tovább kellene finomítani a definíciót.

3.2. Hatékony portfóliók kialakítása

Ha a hatékony portfóliókat a preferencia relációk alapján maximálisan preferáltnak tekintjük, akkor a cél, hogy a rendelkezésre álló információink alapján felismerjük ezeket. Mindezt úgy, hogy közben szem előtt tartjuk a megszorításokat, melyek a kockázati limitekből, a teljes beruházási keretből, illetve a likviditási korlátokból adódnak.

3.2.1. A hatékony halmaz és a hatékony portfóliók

A következőkben nemcsak a hatékony porfóliók létezésének bizonyítására kerül sor, hanem azok azonosítási technikájára, és konstruálási módjára is.

Legyen $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ a kötségvetési korlátok halmaza.
Ez a megengedett portfólió-súly vektorok azon halmaza, melyek eleget tesznek a megszorításoknak.

Azt mondjuk, hogy

$$w \text{ hatékony } \mathcal{M}\text{-ben, ha nincs olyan } v \in \mathcal{M}, \text{ amire } v \succ w.$$

Azaz $\mathcal{M}$-ben nincs olyan más megengedett portfólió, amely jobb w-nél a fentiekben meghatározott értelemben. Ez nem azt jelenti, hogy $w \succeq v$ minden $v \in \mathcal{M}$ -re, hiszen lehet több olyan v, amire sem $w \succeq v$, sem $v \succeq w$ nem teljesül.

Definiáljuk az $\hat{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ hatékony halmazt, mint

$$\hat{\mathcal{M}} \ = \ \{ \ w \in \mathcal{M} \mid w \text{ hatékony } \mathcal{M} - \text{ben}\}.$$

A cél ezzel a hatékony pontok jellemzése a konzisztens Q kúp és a $\mathcal{M}$ korláthalmaz tekintetében.
A fejezet fő céljaként tételt szeretnénk kimondani arra, hogy w portfólió hatékony

$\mathcal{M}$-ben, ha $\mathcal{M}$-nek van egy w-ben állított támaszhipersíkja, ami merőleges mind Q kúpra, mind R altérre.
A tétel pontos kimondásához még néhány dolog definiálására van szükség. Először azonban végezzünk némi módosítást a merőleges alteret illetően.

Minden $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazra definiáljuk a *duális halmazt*:

$$A^* = \{ \chi \in \mathbb{R}^n \mid \chi^{\mathrm{T}} y \geq 0, \text{ minden } y \in A - \text{ra} \}.$$

Így $v \succeq w$, ha $v - w \in \overline{Q}^*$, vagy ezzel ekvivalens, ha $v_0 - w_0 \in Q^*$.
Érdemes még meghatározni a konzistens kúp belsejét:

$$Q^\circ = \{r \in \mathbb{R} \mid Dr > 0\}$$

ebből pedig:

$$\overline{Q^\circ} = Q^\circ \cap R.$$

A halmazok lineáris felépítésűek $R^\perp$ -re nézve. Felírható $Q = \overline{Q} \oplus R^\perp$, és $Q^\circ = \overline{Q^\circ} \oplus R^\perp$, ahol $\oplus$ a merőleges összeget jelenti.
Következésképpen $Q^\circ = \varnothing \Leftrightarrow \overline{Q^\circ} = \varnothing$. Az $\mathcal{M}$ w-ben állított támaszhipersíkjának normálvektora a $b \in \mathbb{R}^n$ nemnulla vektor úgy, hogy $b^{\mathrm{T}}(v-w) \leq 0$, minden $v \in \mathcal{M}$-re.
A szigorú normálvektor pedig olyan, amire $b^{\mathrm{T}}(v-w) < 0$, minden $v \in \mathcal{M},\ v \neq w$-re.
Ezek tudatában most már kimondható és bizonyítható a következő két tétel, amik a normálvektorok és a hatékonyság közti kapcsolatot írják le.

3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\mathcal{M}$-nek van egy w-ben állított támaszhipersíkja, melynek normálvektora $b \in \overline{Q}$. Ha b egy szigorú normálvektor, vagy ha $b \in \overline{Q^\circ}$, akkor w portfólió hatékony.*

Bizonyítás Először is tegyük fel, hogy $b \in \overline{Q}$ egy szigorú normálvektor. Ha lenne $v \in \mathcal{M}$, hogy $v \succ w$, akkor $v \succeq w$, azaz $(v-w)^{\mathrm{T}} r \geq 0$, minden $r \in \overline{Q}$-ra.
De ez ellentmond a feltevésünknek.

Másodszor tegyük fel, hogy $b \in \overline{Q^\circ}$ egy normálvektor, azaz $b^{\mathrm{T}}(v-w) \leq 0$, minden $v \in \mathcal{M}$-re. Tegyük fel, hogy adott $v \in \mathcal{M}$ hogy $v \succeq w$, azaz $(v-w)^{\mathrm{T}} r \geq 0$, minden $r \in \overline{Q}$-ra, ekkor $(v-w)^{\mathrm{T}} b = 0$. Mivel $b \in \overline{Q^\circ}$, minden $s \in R$, $b + \epsilon s \in \overline{Q}$, megfelelően kis $|\epsilon| - ra$. Ekkor $(v-w)^{\mathrm{T}}(b+\epsilon s) \geq 0$, ami azt jelenti, hogy $(v-w)^{\mathrm{T}} s = 0$, minden $s \in R$, és így $v - w \in R^{\perp}$. De akkor lehetelen, hogy $(v-w)^{\mathrm{T}} r > 0$, mindegyik $r \in \overline{Q} - ra$, így $v \not\succ w$.

3.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy Q° nemüres halmaz, valamint tegyük fel, hogy $\mathcal{M}$ konvex. Ha w hatékony $\mathcal{M}$-ban, van egy w-ben állított támaszhipersíkja, aminek a normálvektora $b \in \overline{Q}$.*

A tétel bizonyításához szükség lesz a következő halmazra:

$$K = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid w \succ 0 \} =$$
$$= \{ w \mid w^{\mathrm{T}} r \geq 0, \text{ minden } r \in \overline{Q}\text{-ra és } w^{\mathrm{T}} r > 0 \text{ legalább egy } r \in \overline{Q}\text{-ra} \} =$$
$$= \{ w \mid w_0^{\mathrm{T}} r \geq 0, \text{ minden } r \in Q\text{-ra és } w_0^{\mathrm{T}} > 0 \text{ legalább egy } r \in Q\text{-ra}\}.$$

Ezek alapján a $K = K_0 \oplus R^{\perp}$ alkban írható, ahol $K_0 \subset R$.

3.1. Lemma. *K konvex és $K \cup \{0\}$ egy konvex kúp.*

Bizonyítás $w_1, w_2 \in K$-ra és $\alpha, \beta \geq 0$-ra, meg kell mutatni, hogy $\overline{w} = \alpha w_1 + \beta w_2 \in K$, ahol α és β nem mindkettő nulla. Nyilvánvaló, hogy $\overline{w}^{\mathrm{T}} r \geq 0$, $r \in \overline{Q}$-ra. Ha $r_i \in \overline{Q}$ olyan, hogy $w_i^{\mathrm{T}} r_i > 0$, és amennyiben $\overline{r} = \alpha r_1 + \beta r_2$, akkor $\overline{w}^{\mathrm{T}} \overline{r} = \alpha^2 w_1^{\mathrm{T}} r_1 + \beta^2 w_2^{\mathrm{T}} r_2 + \alpha\beta(w_1^{\mathrm{T}} r_2 + w_2^{\mathrm{T}} r_1) > 0$.

3.2. Lemma. *Ha $\overline{Q^\circ}$ nemüres, akkor $\overline{Q}^* \subset K \cup R^{\perp}$.*

Bizonyítás Vegyük bármelyik $w \in \overline{Q}^*$-t, így $w^{\mathrm{T}} r \geq 0$, minden $r \in \overline{Q}$-ra. Válasszunk $r_0 \in \overline{Q^\circ}$-t; ekkor $r_0 + \epsilon s \in \overline{Q}$ minden $s \in R$-re, és minden megfelelően kicsi ϵ-ra. Ha $w \notin R^{\perp}$, akkor van olyan $s \in R$ vektor, hogy $w^{\mathrm{T}} s \neq 0$, és ezáltal ha $w^{\mathrm{T}} r_0 = 0$ lenne, akkor

$$w^{\mathrm{T}}(r_0 + \epsilon s) = \epsilon w^{\mathrm{T}} s < 0,$$

ha ϵ ellenkező jelű, mint $w^{\mathrm{T}} s$, és ahol $r \in \overline{Q}$, és $w^{\mathrm{T}} s \neq 0. r \in \overline{Q}$ lenne $w^{\mathrm{T}} r < 0$-val. Így $w^{\mathrm{T}} r_0 > 0$-nak és $w \in K$-nak kell teljesülnie.

3.3. Lemma. *Ha* $\overline{Q^{\circ}}$ *nemüres, akkor* $\overline{Q}^{*} \subset \overline{K}$*, ahol* $\overline{K}$*, a* K *lezártja.*

Bizonyítás Meg kell mutatni, hogy $R^{\perp} \subset \overline{K}$. Mivel $0 \subset \overline{K}$ nyilvánvaló a 3.1. Lemmából, így az eredmény a $K = K_0 \oplus R^{\perp}$ felbontásásból következnek.

A következő állításokat bizonyítás nélkül használhatjuk fel:

- Ha $A \subset \mathbb{R}^n$ egy zárt konvex kúp, akkor $(A^*)^* = A$
- Ha $A \subset B$, akkor $B^* \subset A^*$
- $(\overline{A})^* = A^*$

3.2. Tétel Bizonyítása Mivel w hatékony, a $w+K$ és $\mathcal{M}$ konvex halmazok diszjunktak. A támaszhipersík tétel szerint, $\mathcal{M}$-nek van a w-ben állított támaszhipersíkja, aminek b normálvektorára $b^{\mathrm{T}}(v - w) \geq 0$, minden $v - w \in K$-ra.
Azaz $b \in K^*$. Kell, hogy $b \in \overline{Q}$, ehhez elég megmutatni, hogy $K^* \subset \overline{Q}$.
Ez következik a Lemmákból: $K^* = \overline{K}^* \subset (\overline{Q}^*)^* = \overline{Q}$.

Példa - Teljes rendezés - Folytatás

Hasznos, ha van egy explicit kifejezésünk $\overline{Q}$-ra, mint a bázisvektorai által kifeszített altérre.
Azaz, keressük azt a $n \times m$-es E mátrixot, ami:

$$Q = \{Ex \mid x \geq 0 \in \mathbb{R}^m \}.$$

Ha $D_1, \ldots, D_m$ lineárisan függetlenek, amihez persze kell, hogy $m \neq n$ legyen, akkor E-t kereshetjük, mint D *Moore-Penrose pszeudoinverzét* (definíció szerint, amennyiben a mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, a pszeudoinverz zárt alakban megadható. Jelen esetben: $E = D^{\mathrm{T}}(DD^{\mathrm{T}})^{-1}$)
Tehát:

$$span(E_1, \ldots, E_m) = span(D_1, \ldots, D_m) \text{ és } E_i^T D_j \;=\; \delta_{ij}.$$

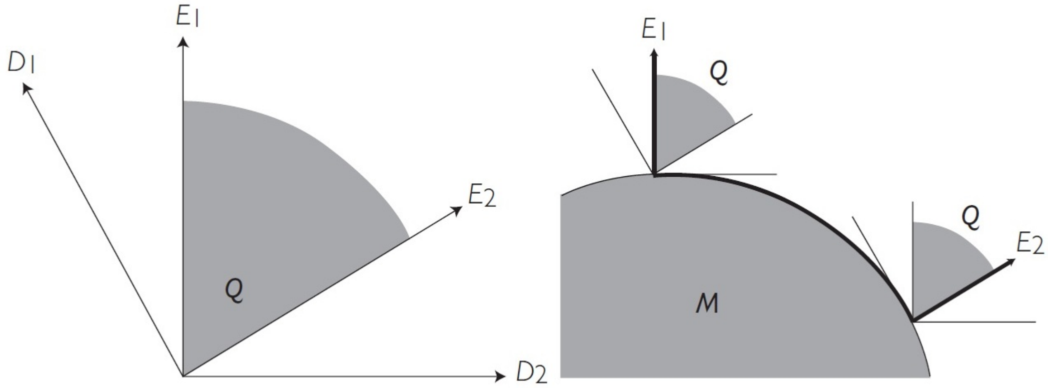
Az $(n-1) \times n$-es D mátrix pszeudoinverze a következő $n \times (n-1)$-es E mátrix:

$$E = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-1 & n-1 & n-3 & \ldots & 2 & 1 \\ -1 & n-2 & n-3 & \ldots & 2 & 1 \\ -1 & -2 & n-3 & \ldots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & -(n-2) & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & -(n-2) & -(n-1) \end{pmatrix}$$

$n = 3$-ra, a vektorok és duálisaik:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad E_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

így $D_i^{\mathrm{T}} E_j = \delta_{ij}$. A D_1 és D_2 által bezárt szög 120°-os, míg az E_1 és E_2 által bezárt szög 60°-os, és mind az R síkban fekszenek, aminek a normálvektora az $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ vektor.



1. ábra. Ábrázolás 3 eszközre, két rendezési feltétellel. Az $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ irányából nézzük, így a képsík az R. A bal oldali ábrán a várható hozamok terében vagyunk, ahol Q a konzisztens halmaz. A teljes három dimenziós alakzat egy ék alakú merőleges kiterjesztés a képsíkra. A jobb oldali ábra mutatja a w portfólióvektor egy sima $\mathcal{M}$ korláthalmazát. A hatékony halmaz a sötét rész, ahol a normálvektor az E_1, E_2 pozitív kúpba esik. Az ív mentén a normálvektornak a képsíkban kell lennie. Abban az esetben, ha $\mathcal{M}$ három dimenzióban görbül, akkor a hatékony halmaz kizárólag ez az egy dimenziós ív.

3.2.2. Példák a korláthalmazra

A következőkben a hatékony halmazok azon konstruálási eseteit vesszük, amelyek leggyakrabban merülnek fel a befektetési menedzsment gyakorlatában. Így például amikor a megszorítási halmazok a teljes kockázati vagy a maximális befektetési limiten alapulnak. Vagy amikor a további megszorítások a piaci semlegességből adódnak.

Mint már korábban láthattuk, a hatékony halmazokat két független, azonos súlyú bemeneti tényező határozza meg.

1. A D meggyőződésvektor az r várható hozamról.
2. A w portfólióra vonatkozó $\mathcal{M}$ korláthalmaz.

Az alábbiakban sorra vesszük ezen eseteket, kiemelve a piaci semlegesség esetét, amelyben olyan metódust használunk, ami a későbbiekben hasznunkra lesz.

1. **Teljes befektetési korlát**

   Ebben az esetben W dollárban limitáljuk a teljes befektetés összegét. Most negatív is lehet a befektetés.
   Ekkor az $\mathcal{M}$ halmaz:

$$\mathcal{M} = \{w \in \mathbb{R}^n \mid |w_1| + \cdots + |w_n| \leq W\}$$

   Az egyszerű rendezési listát vesszük figyelembe. Tegyük fel, hogy $w = (w_1, \ldots, w_n)$ a portfólió súlyozás.
   Ha $w_j > 0$, valamely $j = 2, \ldots, n$-re, akkor a portfolió egy másik alakja: $w' = (w_1 + w_j, \ldots, 0, \ldots, w_n)$. Erre a teljes beruházás ugyanaz, mint w, ha $w_1 \geq 0$, és szigorúan kisebb, ha $w_1 < 0$.
   Ez viszont sokkal optimálisabb, mivel a $w' - w = (w_j, 0, \ldots, 0, -w_j, 0, \ldots, 0) =$ $= w_j(D_1 + \cdots + D_{j-1})$ a meggyőződésvektorok egy pozitív kombinációja.
   Hasonlóan, ha $w_j < 0$, bármely $j = 1, \ldots, n-1$-re, akkor definiálhatunk egy optimálisabb portfóliót: $w' = (w_1, \ldots, 0, \ldots, w_n + w_j)$, amely ugyanakkora vagy kisebb befektetést igényel, és optimálisabb, mint w.
   Ebből következtethetünk arra, hogy a lehetséges hatékony portfóliók csak ilyen alakúak: $w = (w_1, 0, \ldots, 0, w_n)$, ahol $w_1 \geq 0, w_n \leq 0$ és $|w_1| + |w_n| = W$. Azt pedig nem nehéz észrevenni,hogy ezek a portfóliók már mind hatékonyak lesznek.

2. **Kockázati korlát**

   Itt az $\mathcal{M} = \{w \in \mathbb{R}^n \mid w^{\mathrm{T}} V w \leq \sigma^2\}$ halmaz lesz megengedett, ahol V az n eszköz kovarianciamátrixa és σ a legnagyobb megengedett szórás.
   Ez a halmaz egy sima ellipszoid, és minden felszíni w pontnak létezik egy egyértelmű $b = Vw$ szigorú normálvektora. Ugyanakkor bármely adott $b \in$

$\mathbb{R}^n$ vektorhoz található egy egyértelmű felszíni w pont az $\mathcal{M}$-ben, aminek a normálvektora b.

A tételek alapján, $w \in \mathcal{M}$ akkor és csak akkor hatékony, ha $b \in \overline{Q}$.
Tehát paraméterezhetjük a hatékony pontok $\hat{\mathcal{M}}$ halmazát $b = \mathrm{E}\chi$ formában, ahol $\chi \in \mathbb{R}^m$ és $\chi \geq 0$.
Ezt explicit módon felírva:

$$w \;=\; V^{-1} \sum_{j=1}^{m} x_j \mathrm{E}_j,$$

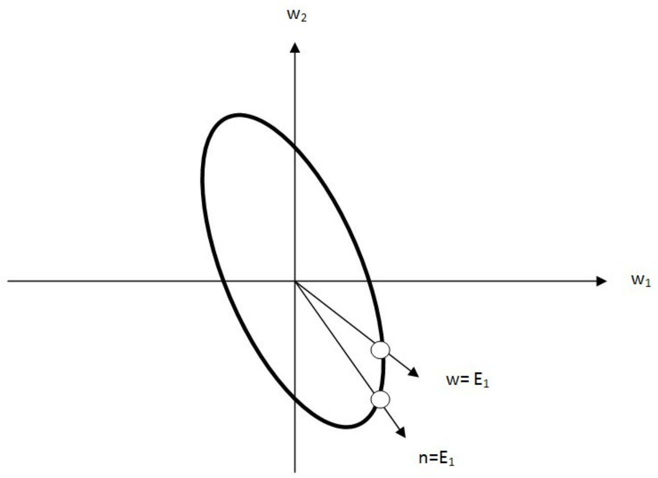
ahol w úgy van skálázva, hogy $w^{\mathrm{T}} V w = \sigma^2$ teljesüljön.
Az $\hat{\mathcal{M}}$ halmaz a kockázati ellipszoid felszín egy részének metszete a síkkal, ahol a lokális normálvektor $\overline{Q}$-ban van. Az optimális portfólió kiválasztásához ki kell jelölnünk egy pontot ezen a halmazon.
Például vesszük a $\chi = (1, \ldots, 1)$ "középpontot", amiből $b = E_1 + \cdots + E_m$.
Egyszerű rendezéses lista esetén, ez a következő lineáris normálvektort adja:

$$b_i \;=\; \sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{E}_{ij} = \frac{n+1}{2} - i.$$

A 2.ábra mutatja a hatékony portfóliót két eszközre nézve.

3. Kockázati korlát piaci semlegességgel

Tegyük fel, hogy két korlátot szabunk meg. Elvárjuk, hogy a portfóliónak legyen egy maximális szintje a teljes szórást tekintve. Emellett megköveteljük, hogy a portfólió piac-semleges legyen, ami azt jelenti, hogy $\eta^{\mathrm{T}} w = 0$, ahol η-t a piaci súlyok vektoraként értelmezzük. Feltesszük, hogy $\eta \notin span(D_1, \ldots, D_m)$.
Például egyenlő súlyozás esetén $\eta = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$.
Az $\mathcal{M}$ halmaz most egy $n-1$ dimenziós ellipszoid. A "határoló" pontokhoz, amikre $w^{\mathrm{T}} V w = \sigma^2$, egy-paraméteres normálvektor-család tartozik, ami $\mathcal{B} =$



2. ábra. Optimális portfólió 2 eszközre. Mivel 2 eszköz adott, ezért egy E vektorunk lesz. Az ábrán a felső, a piac-semleges megoldás, ahol E_1 maga a w. Míg az alsó, a piaci semlegesség megszorítása nélküli hatékony megoldás. Itt E_1 a normálvektor.

$$\{\ \alpha V w + \beta \eta \mid \alpha \geq 0,\ \ \beta \in \mathbb{R}\ \}.$$

Bizonyítás : Meg kell mutatni, hogy $b^{\mathrm{T}}(w - v) \geq 0$, minden $b \in \mathcal{B}$-re, és minden $v \in \mathcal{M}$-re. Azonban $b^{\mathrm{T}}(w-v) = \alpha(w^{\mathrm{T}}Vw - w^{\mathrm{T}}Vv) + \beta(\eta^{\mathrm{T}}w - \eta^{\mathrm{T}}v) = \frac{1}{2}\alpha(w-v)^{\mathrm{T}}V(w-v) + \frac{1}{2}\alpha(w^{\mathrm{T}}Vw - v^{\mathrm{T}}Vv) \geq 0$, mivel $\eta^{\mathrm{T}}w = \eta^{\mathrm{T}}v = 0, w^{\mathrm{T}}Vw = \sigma^2, v^{\mathrm{T}}Vv \leq \sigma^2$, és V pozitív definit. Nyilvánvaló, hogy csak ezek a normálvektorok, mivel az $\mathcal{M}$ határa $n-2$ dimenziós.
w hatékonyságához szükséges $\mathcal{B} \cap \overline{Q} \neq \varnothing$. Azaz, kell $\alpha \geq 0$ és β nem mindkettő nulla számnak, és $\chi_1, \ldots, \chi_m \geq 0$, nem mind nulla együtthatóknak, melyekre

$$\alpha V w \ + \ \beta \eta \ = \ \chi_1 E_1 + \cdots + \chi_m E_m.$$

Mivel $\eta \notin span(E_1, \ldots, E_m)$, $\alpha > 0$-nak kell lennie, és ekkor ekvivalens módon keresett a következő állítás:

$$V w \ = \ \chi_1 E_1 + \cdots + \chi_m E_m + y\eta,$$

ahol y határozza meg $\eta^{\mathrm{T}} w = 0$-t. Explicit módon paraméterezhetjük w-t:

$$w \;=\; \chi_1 V^{-1} E_1 + \cdots + \chi_m V^{-1} E_m + y V^{-1} \eta$$

ahol

$$y \;=\; \frac{\chi_1 \eta^{\mathrm{T}} V^{-1} E_1 \;+\cdots+\; \chi_m \eta^{\mathrm{T}} V^{-1} E_m}{\eta^{\mathrm{T}} V^{-1} \eta},$$

vagy

$$w \;=\; V^{-1} \sum_{j=1}^{m} \chi_j \tilde{E}_j, \qquad \tilde{E}_j \;=\; E_j - \frac{\eta^{\mathrm{T}} V^{-1} E_j}{\eta^{\mathrm{T}} V^{-1} \eta} \eta.$$

4. fejezet

Optimális portfóliók

A következőkben a célunk az, hogy a 3. fejezetben kialakított porfólió preferenciára vonatkozó preferencia relációt kiterjesszük, hogy egy egyértelmű hatékony portfóliót alakíthassunk ki az $\hat{\mathcal{M}}$ hatékony halmazból. Az előző meghatározásnál egy portfóliót jobban preferáltunk a másiknál, ha a várható hozama magasabb volt. Így a várható hozamok sorrendje megegyezett a portfólió sorrenddel. Ez az összefüggés vezet a hatékony halmazhoz, amiben azonban nem lehet különbséget tenni a portfóliók között. Ezért ebben a fejezetben finomítunk a preferencia reláció fogalmán, a hatékonyportfóliók közti különbség megállapításához. Egy portfóliót jobban preferálunk a többivel szemben, ha a várható hozama nagyobb mint a másiké, egy Q deiniált valószínűség-eloszlás szerint.

4.1. A centroid-optimális portfólió

Az eddig vizsgált preferencia reláció csak egy részben rendezést definiál a portfólióvektorok halmazán. Bizonyos esetekben ez nem ad kielégítő megoldást a portfólióválasztási feladatra. Ezért ebben a szakaszban megvizsgáljuk, hogyan terjeszthető ki ez a részben rendezés teljes rendezéssé.

Természetes ötlet, hogy a lehetséges hozamok Q kúpját lássuk el egy valószínűség-eloszlással, azaz legyen μ olyan abszolút folytonos valószínűségi mérték, melyre

$$\mu(Q) = 1.$$

Azt mondjuk, hogy a w portfólió hatékonyabb, mint v, ha a w melletti várható hozamunk nagyobb, mint a v melletti:

$$\mathrm{E}_\mu(w^\mathrm{T} r) = w^\mathrm{T}\mathrm{E}_\mu(r) > \mathrm{E}_\mu(v^\mathrm{T} r) = v^\mathrm{T}\mathrm{E}_\mu(r).$$

Jelölje a várható értéket c, ezt nevezhetjük a Q lehetséges hozamkúp *centroidjának.*

Képlettel megadva

$$c = \int_Q r\mu(dr) = \int_Q rf(r)dr,$$

ahol $f(r)$ a μ sűrűségfüggvénye.

Nyilvánvaló, hogy $c \in Q$, sőt $c \in \overline{Q}$ is igaz lesz, ha $c \in R$. Ez biztosan teljesül, ha μ tükörszimmetrikus az R altérre. Ez alatt a következőt értjük: Emlékezzünk vissza, hogy Q minden eleme egyértelműen írható fel $r = r_0 + r_\perp$ alakban, ahol $r_0 \in \overline{Q}$ és $r_\perp \in R^\perp$. A tükörszimmetria azt jelenti, hogy a sűrűségfüggvényre

$$f(r_0 + r_\perp) = f(r_0 - r_\perp).$$

Ezek után centroid-hatékonynak nevezzük azokat a w portfóliókat, melyek kielégítik az aktuális kockázati és egyéb feltételeket, és $w^\mathrm{T} c \geq v^\mathrm{T} c$ minden olyan v-re, mely szintén kielégíti a feltételeket.

Vegyük észre, hogy tükörszimmetrikus esetben ez ekvivalens a $w_0^\mathrm{T} c \geq v_0^\mathrm{T} c$ egyenlőtlenséggel. Azt is jegyezzük meg, hogy ebben az esetben a w portfóliónk maximálisan preferált a korábbi definíció értelmében, hiszen az $\mathcal{M}$ korláthalmaznak w-ben állított támaszhipersíkja $c \in \overline{Q}$ normálvektorral rendelkezik.
Új definíciónk előnye, hogy miután meghatároztuk a c centroidot, már csak egy lineáris célfüggvényt kell maximalizálni, pont úgy, mint a klasszikus markowitzi feladatban.

Felmerül a kérdés, milyen valószínűségeloszlást definiáljunk Q-n?
Mivel Q a rendezési meggyőződéseinket tartalmazza, Q-n belül már nincs semmi

információnk arról, hogy melyik lehetséges hozamvektor fog megvalósulni. Ezért a lehető legvéletlenszerűbb eloszlást szeretnénk definiálni. Mivel a Q kúp végtelen térfogatú, egyenletes eloszlás nem létezik rajta. Azonban minket egyébként is csak a hozamvektor iránya érdekel, a hossza nem releváns az optimális portfólió kialakításakor. Ezért legyen μ olyan eloszlás, melyre az r hozamvektor iránya egyenletes eloszlású a Q egységvektorain, hossza pedig ettől független.

Például feltehetjük, hogy r n-dimenziós standard normális eloszlású az $r \in Q$ feltétel mellett, vagyis

$$f(r) = Ke^{-r^{\mathrm{T}}r/2}, \quad r \in Q,$$

ahol a K normáló konstanst úgy választjuk, hogy $\int_Q f(r)dr = 1$ legyen. Ez nyilván tükörszimmetrikus, hiszen $r_0 + r_\perp$ és $r_0 - r_\perp$ egyforma hosszúak.

A legfontosabb dolog a centroid vektorokkal kapcsolatban, hogy a portfóliók - egy meglehetősen bonyolult- ekvivalencia relációját egy nagyon egyszerű, geometriai konstrukcióban ragadja meg.

5. fejezet

Összehasonlító tesztelés

Az alábbi táblázatban 8 különböző befektetésre láthatjuk az évenkénti hozamokat, az 1973-1994 időszakra 1$ befektetett összegre nézve. Így, 1$ 1980. január 1-én 3 hónapos US kincstárjegybe fektetve, ugyanezen év december 31-én 1,127$-ra nőtt.

A lehetséges befektetések a következők:

1. 3 hónapos US kincstárjegy,
2. US hosszú lejáratú kötvény,
3. S&P 500,
4. Wilshire 500 (kis cégek részvényeinek összessége),
5. NASDAQ Composite,
6. Lehman Brothers Corporate Bonds Index,
7. EAFE (index Európa, Ázsia, Távolkelet befektetéseire),
8. arany.

Year	US 3-Month T-Bills	US Gov. Long Bonds	S&P 500	Wilshire 5000	NASDAQ Comp.	Lehman Bros.	EAFE	Gold
1973	1.075	0.942	0.852	0.815	0.698	1.023	0.851	1.677
1974	1.084	1.020	0.735	0.716	0.662	1.002	0.768	1.722
1975	1.061	1.056	1.371	1.385	1.318	1.123	1.354	0.760
1976	1.052	1.175	1.236	1.266	1.280	1.156	1.025	0.960
1977	1.055	1.002	0.926	0.974	1.093	1.030	1.181	1.200
1978	1.077	0.982	1.064	1.093	1.146	1.012	1.326	1.295
1979	1.109	0.978	1.184	1.256	1.307	1.023	1.048	2.212
1980	1.127	0.947	1.323	1.337	1.367	1.031	1.226	1.296
1981	1.156	1.003	0.949	0.963	0.990	1.073	0.977	0.688
1982	1.117	1.465	1.215	1.187	1.213	1.311	0.987	1.084
1983	1.092	0.985	1.224	1.235	1.217	1.080	1.237	0.872
1984	1.103	1.159	1.061	1.030	0.903	1.150	1.074	0.825
1985	1.080	1.366	1.316	1.326	1.333	1.213	1.562	1.006
1986	1.063	1.309	1.186	1.161	1.086	1.156	1.694	1.216
1987	1.061	0.925	1.052	1.023	0.959	1.023	1.246	1.224
1988	1.071	1.087	1.165	1.179	1.165	1.076	1.283	0.861
1989	1.087	1.212	1.316	1.292	1.204	1.142	1.105	0.977
1990	1.080	1.054	0.968	0.938	0.830	1.083	0.766	0.922
1991	1.057	1.193	1.304	1.342	1.594	1.161	1.121	0.958
1992	1.036	1.079	1.076	1.090	1.174	1.076	0.878	0.926
1993	1.031	1.217	1.100	1.113	1.162	1.110	1.326	1.146
1994	1.045	0.889	1.012	0.999	0.968	0.965	1.078	0.990

4.ábra. Amerikai részvénytőzsde adatok 1973 - 1994. http://www.treasury.gov

5.1. A markowitz módszer

A 2. fejezetben tárgyalt optimalizációs feladat :

$$
\begin{aligned}
\text{minimalizálandó} \qquad & -\sum_{i=1}^{8} r_i x_i \; + \; \mu \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} \; x_i x_j V_{ij} \\
\text{feltéve, hogy} \qquad & \sum_{i=1}^{8} \; x_i \; = \; 1 \\
& x_i \; \geq \; 0 \qquad (i = 1, \ldots, 8).
\end{aligned}
$$

Látható, hogy a megoldáshoz szükségünk van minden befektetés nyereségének és a kovarianciamátrixnak a becslésére. Ezeket az adatokat nem ismerjük, viszont a múltbéli adatok alapján becsülhetők.

Legyen $R_i(t)$ $(i = 1, \ldots . n)$ a i-edik befektetés értéke az $1972 + t$ évben. Egy egyszerű becslés ennek $\mathrm{E}R_i$ várható értékére, a meglévő értékek átlaga (számtani közepe):

$$r_i = \mathrm{E}R_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \; R_i(t).$$

A várható érték ezen egyszerű felírásnak két hátránya van.

1. A régebben történt események kevésbé vannak hatással a jövőre, mint azok, amik a közelmúltban történtek.Így, ha ugyanolyan súllyal vesszük figyelembe a múltbéli éveket, akkor a régi eseményeknek túl nagy jelentőséget tulajdonítunk, a közelmúlbéli események rovására.

   Jobb becslést kaphatunk, ha a

$$\mathrm{E}R_i = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{T} \; p^{T-t} \; R_i(t)}{\displaystyle\sum_{t=1}^{T} \; p^{T-t}}$$

diszkontált összeget számoljuk, ahol p a diszkontálási faktor. A $p = 0,9$ értéket véve, a súlyozott átlag nagyobb súlyt ad a közelmúlt éveinek. Az alábbi számításokban a becslések $p = 0,9$ súllyal lettek kiszámolva.

2. Az átlag kiszámítási módja.

   Egy befektetésnek melynek értéke az első évben 1,1, a másodikban 0,9, az átlagértéke 1,0, vagyis nincs se növekedés, se veszteség. Azonban 1\$-t befektetve a második év végén $1,1 \cdot 0,9 = 0,99\$$ lesz, vagyis 1%-kal kisebb, mint az átlag. Az 1% nem nagy eltérés, de ha az érték az első évben 2, a másodikban 0,5, az átlagértéke 1,25, a második év végén $2 \cdot 0,5 = 1\$$ lesz. Itt már 25% az eltérés, azaz jelentős. A nagy különbség miatt ez egy olyan hatás amit korrigálni kell. A módosítás eszköze a súlyozott geometriai középpel képezett átlag:

$$\mathrm{E}R_i = \exp\left(\frac{\sum\limits_{t=1}^{T} p^{T-t} \ln R_i(t)}{\sum\limits_{t=1}^{T} p^{T-t}}\right) = \left(\prod_{t=1}^{T} R_i(t)^{p^{T-t}}\right)^{\frac{1}{\sum_{t=1}^{T} p^{T-t}}}.$$

Hasonlóan lehet a V kovarianciamátrix elemeit is becsülni :

$$V_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \left(R_i(t) - r_i\right)\left(R_j(t) - r_j\right) \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Így, az 1995-ös évre az r_i hozamok a következők:

Year	US 3-Month	US Gov. Long B.	S&P 500	Wilshire 5000	NASDAQ Comp.	Lehman Bros.	EAFE	Gold
1995	1.068	1.093	1.120	1.120	1.117	1.090	1.122	1.029

A V kovarianciamátrix pedig:

$$\begin{pmatrix} 0,0010 & & & & & & & \\ -0,0001 & 0,0221 & & & & & & \\ 0,0001 & 0,0108 & 0,0270 & & & & & \\ 0,0001 & 0,0101 & 0,0283 & 0,0305 & & & & \\ -0,0003 & 0,0113 & 0,0314 & 0,0354 & 0,0478 & & & \\ 0,0003 & 0,0109 & 0,0071 & 0,0068 & 0,0073 & 0,0062 & & \\ -0,0011 & 0,0106 & 0,0210 & 0,0221 & 0,0235 & 0,0043 & 0,0532 & \\ 0,0018 & -0,0133 & -0,0176 & -0,0154 & -0,0151 & -0,0107 & -0,0116 & 0,1310 \end{pmatrix}$$

Az r_i hozam és a V kovarianciamátrix ismeretében, adott μ kockázat elkerülési paraméter mellett, a feladat megoldható.

A következő táblázat az optimális portfóliókat adja meg a μ paraméter több értékénél (az 1995 évre vonatkozóan).

μ	US 3-Month	US Long	S&P 500	Wilshire 5000	NAS. Comp.	Lehman Bros.	EAFE	Gold	Hozam	Szórás^2
0.0							1.000		1.122	0.227
0.1			0.603				0.397		1.121	0.147
1.0			0.879				0.122		1.120	0.133
2.0	0.036		0.549			0.322	0.092		1.108	0.102
4.0	0.487		0.216			0.189	0.062		1.089	0.057
8.0	0.713		0.117			0.123	0.047		1.079	0.037
1024	0.933				0.016	0.022	0.022	0.008	1.070	0.028

Látható, hogy $\mu = 0$-nál a portfóliónk egyetlen befektetést tartalmaz, az EAFE-t, mert ennek a legmagasabb a várható értéke a múltbéli adatok alapján. A $\mu = 1024$

esetén pedig portfóliónk $93,3\%$-ban hosszú lejáratú US államkötvényt tartalmaz, és csak $2,2\%$-nyi EAFE-t, mert az előzőnek kicsi, utóbbinak nagy a szórása.

5.2. A centroid módszer

A centroid megoldási módban nem állnak rendelkezésünkre a fenti táblázatban megadott hozamok. Kizárólag arról van információnk, hogy a hozamok várható értéke alapján, milyen sorrend állítható fel az egyes befektetések között, továbbá adott a befektetések egymás közti kovarianciája.
A várható értékre vonatkozó becslés alapján a alábbi sorrend adódik:

1. EAFE
2. S&P 500
3. Wilshire 500
4. NASDAQ Composite
5. US Gov.
6. Lehman Brothers Corp.
7. 3 hónapos US kincstárjegy
8. arany.

A következő módszert alkalmaztuk:

Generáljuk a befektetésekhez normális eloszlású véletlen számokat:

$$y_{ij} \sim N(0,1).$$

Rendezzük ezeket:

$$y^*_{i1} > y^*_{i2} > \cdots > y^*_{ij}.$$

Majd ezt ismételten hajtsuk végre minden $j = 1, \ldots, N$-re, tetszőleges nagy N választásával. Ezután vegyük a megfelelő y^*_{ij}-k átlagát, ami a c *centroid* komponenseit adják meg:

$$c_i = \sum_{j=1}^{N} y^*_{ij}.$$

A kapott c_i komponenseket illesszük az optimalizálási feladatunkban az r_i-k helyére.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimalizálandó} & -\sum_{i=1}^{8} c_i x_i \; + \; \mu \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} x_i x_j V_{ij} \\ \text{feltéve, hogy} & \sum_{i=1}^{8} x_i \; = \; 1 \\ & x_i \; \geq \; 0 \qquad (i = 1, \ldots, 8), \end{array}$$

ahol V az előbbiekben kiszámolt kovarianciamátrix.

Megoldva az optimalizálási feladatot, a $N = 150$-re az optimális portfóliók:

μ	US 3-Month	US Long	S&P 500	Wilshire 5000	NASDAQ Comp.	Lehman Bros.	EAFE	Gold
0.0							1.0000	
0.1							1.0000	
1.0			0.3693				0.6307	
2.0			0.5453				0.4547	
4.0			0.6332				0.3668	
8.0	0.0096	0.0774	0.4671	0.0998		0.0674	0.2492	0.0294
1024	0.8453	0.0102	0.0088	0.0050	0.0044	0.1002	0.0192	0.0070

A táblázatból leolvasható, hogy az így kialakított portfóliók nagyban hasonlítanak, a valós hozamok alapján számolt optimális portfóliókhoz.

Ha N-t, a generált véletlen számok számát növeljük, például $N = 1000$-re, az optimális portfóliók:

μ	US 3-Month	US Long	S&P 500	Wilshire 5000	NASDAQ Comp.	Lehman Bros.	EAFE	Gold
0.0							1.0000	
0.1			0.7349				0.2651	
1.0			0.7794				0.2206	
2.0			0.8145				0.1855	
4.0			0.2793				0.1248	
8.0	0.6754	0.00102	0.2381	0.0026		0.00359	0.0490	0.0329
1024	0.9124	0.0098	0.0002	0.0001	0.0019	0.0241	0.0215	0.0300

A táblázatból leolvasható optimális portfóliók, már szinte megegyeznek a markowitz módszer által adott eredményekkel. A portfólió összetételében, és a befektetések arányaiban mindenképpen.

5.3. Konklúzió

A rendezési információn alapuló módszer kiindulásakor azt feltételeztük, hogy a Markowitz-modell általánosításához jutunk majd. Egy olyan általánosításhoz, ahol nincs szükségünk a hozamértékekre, mindössze a befektetések várható értékei alapján képzett sorrendre, és a befeketések közti kovarianciára.

Ebben a fejezetben a Markowitz-modell és a centroid módszer került összehasonlításra, egy 22 év hozamjait összesítő részvénytábla alapján. A centroid módszer, még egy ilyen -kevés rekordból álló- adathalmazt vizsgálva is alkalmas eljárásnak bizonyult a portfóliókialakításra, mert a hozamok információi nélkül sikerült a másik módszerével közel azonos, optimális portfóliókat kialakítanunk.

Összefoglalás

A dolgozat célja a portfólióelmélet bemutatása, és a portfólió optimalizáció egy lehetséges matemaitikai megoldásának vizsgálata volt. Kezdésnek áttekintettük az ehhez elengedhetetlenül szükséges gazdasági fogalmakat, valamint a Markowitz által lefektetett alapokat. Az általános feladat bemutatása során, a portfólióválasztás problémáját egy egyszerű, optimalizálási feladatra vezettük vissza. Ezután a bemutatni kívánt eljárás segítségével vezettük be a hatékony portfóliókat, és tettünk kísérletet ezek konstruálási módjára. Itt fontos szerepet kapott a preferencia reláció, illetve annak későbbi kiterjesztése, amely a rendezési információval együtt modellünk vezérfonalát adta. A hatékonyság bemutatása után az optimális portfóliók következtek. A centroid vektor bevezetésével egy olyan lehetséges módszert vizsgáltunk meg, ami ezt a bonyolult portfóliószelekciót egy igen egyszerű, geometriai konstrukcióba helyezi át, megkönnyítve ezzel a gyakorlati megvalósítást. A záró fejezetben a két tárgyalt módszer gyakorlati alkalmazását tekinthettük meg. A teszteléshez, egy valós részvénytáblán futtatuk le módszereinket. Az eredményeket összehasonlítva kimondható, hogy a rendezési információn alapuló portfóliókiválasztási módszer, meglehetősen jó, közel optimális megoldást hoz, a konkrét hozamok ismerete nélkül is. Tehát a módszer eredményes, a gyakorlatba is könnyen implementálható.

Hivatkozások

[1] Almgren R., Chriss N. : *Optimal Portfolios from Ordering Information*, Journal of Risk, Vol. 9, No. 1, 147, 2006.

[2] Brealey R. A. , Myers S. C. : *Modern vállalati pénzügyek*, magyar kiadás, 1996.

[3] Bugár Gyöngyi : *Portfólió elemzés*, Janus Pannonius Egyetemi Kiadó, Pécs, 1997.

[4] Freud Róbert : *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, 2005.

[5] Lintner J. : *The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets*, The Review of Economics and Statistics Vol. 47, No. 1, 13-37, 1965.

[6] Markowitz H. M. : *Portfolio selection*, The Journal of Finance, Vol. 7, 1952.

[7] Markowitz H. M. : *The Optimalization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints*, Research Memoranda, 1956.

[8] Sharpe W. F. : *A Simplified Model For Portfolio Analysis, Management Science*, Vol. 9, No. 2, 277-293, 1963.

[9] Sharpe W. F. : *Capital Asset price: A Theory of Market Equilibrium Under Condition of Risk*, The Journal of Finance, Vol. 19, No. 3, 425-442, 1964.

[10] Tobin J. : *Liquidity preference as Behavior Towards Risk* , Review of Economic Studies, Vol. 67., No. 14, 65-86, 1956.

[11] *Tőzsde Szótár*, Tőzsde Kurír üzleti hetilap, 1991.

[12] Vanderbei R. J. : *Linear Programing : Foundations and Extensions, Department of Operations Research and Financial Engineering*, Princeton University, Princeton, 2001.

[13] Xia Y., Liu B., Wang S. : *A model for portfolio selection with order of expected returns*, Computers & Operations Research 27, 409-422, 2000.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Csiszár Villőnek, aki mindig szakított rám időt. Tanácsaival, észrevételeivel és magyarázataival nélkülözhetetlen segítséget nyújtott ahhoz, hogy ez a dolgozat létrejöhessen.

Köszönöm továbbá Prőhle Tamásnak, aki tanácsaival járult hozzá a tesztelés kidolgozásához.

Köszönöm páromnak, Péternek a dolgozat elkészülése során mutatott türelmét és állandó bíztatását. Valamint szaktársamnak, Horváth Viviennek, aki mindig mellettem volt, és akinek bátorítása segített át a nehéz időkön.

Végtelen hálával tartozom családomnak, az évek folyamán belém fektetett hitükért. Az általuk nyújtott nyugodt háttér és lelki támogatás nélkül nem juthattam volna el idáig.

NYILATKOZAT

Név: Péter Zsófia

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc.

ETR azonosító: PEZQAAT.ELTE

Szakdolgozat címe: Optimális portfóliók kialakítása

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2012. május 29.

a hallgató alárírása