Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Rekurzív sorozatok

szakdolgozat

Készítette:

Szili Beáta

matematika BSc szak

matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Mezei István

Alkalmazott Analízis és

Számításmatematikai Tanszék

Budapest

2011

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A természetes számok halmazán értelmezett függvényt, vagyis sorozatot megadhatjuk explicit módon, azaz megmondjuk azt, hogy egy természetes számhoz mit rendelünk. Megadhatjuk azonban úgy is, hogy megadjuk az első (néhány) tagját, a további tagokat pedig az előttük levő(k) felhasználásával definiáljuk. A ilyen esetekben azt mondjuk, hogy a sorozatot *rekurzív módon* adtuk meg.

A sorozat fogalma nehezen túlbecsülhető jelentőséggel bír nem csupán a matematikában, hanem annak különböző, a mindennapi élet szempontjából is fontos alkalmazásaiban. A közelítő számítások algoritmusai (lásd például [2]-őt) is sorozatok. Számos biológiai, közgazdasági és társadalomtudományi folyamat modellezhető *rekurzív sorozattal* vagy más elnevezéssel *differenciaegyenlettel* (lásd például [3]-at vagy [8]-at).

A dolgozatban elsősorban rekurzív sorozatokkal foglalkozunk. Az alapvető matematikai feladat az, hogy a sorozat „viselkedését”, vagyis a tulajdonságait minél pontosabban jellemezzük.

Az 1. fejezetben felsoroljuk a valós sorozatok legfontosabb tulajdonságait leíró fogalmakat (monotonitás, korlátosság, periodicitás, határérték), valamint a vizsgálatukhoz használható alapvető tételeket.

A 2. fejezetben megadjuk a rekurzív sorozatok általános definícióját és megfogalmazzuk a létezés és egyértelműségre vonatkozó alaptételt. A 2.2. pontban ismertetünk egy-egy olyan matematikai-, közgazdasági- és biológia problémát, amelyek rekurzív sorozatokkal (differenciaegyenletekkel) modellezhetők.

A 3. fejezet néhány olyan rekurzív sorozatot tárgyal, amelynek az explicit alakját elő lehet állítani.

A 4. fejezetben példákon keresztül ismertetünk néhány olyan alapvető módszert, amelynek segítségével rekurzív sorozatok tulajdonságai vizsgálhatók.

1. Valós sorozatok

Ebben a fejezetben felsoroljuk a valós sorozatokkal kapcsolatban tanult és a későbbiekben felhasználandó fogalmakat és tételeket.

1.1. Definíciók, példák

1. definíció. A természetes számok halmazán (vagyis az $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ halmazon) értelmezett valós értékű függvényt *számsorozatnak* vagy röviden *sorozatnak* nevezzük.

Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $n \in \mathbb{N}$ helyen felvett $a(n)$ helyettesítési értékét az a sorozat *n-edik tagjának* nevezzük és az a_n szimbólummal jelöljük, ennek megfelelően gyakran az (a_n) sorozatról beszélünk. Néha a tömör (a_n) helyett az oldottabb $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ jelölést is használjuk.

Minden rögzített r egész szám esetén az $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq r\} \to \mathbb{R}$ függvényeket is sorozatoknak tekintjük. A további definíciók, tételek (az értelemszerű módosításokkal) ezekre is érvényesek lesznek, de ezt külön nem fogjuk hangsúlyozni.

Egy (a_n) sorozat megadása tehát azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén megadjuk a_n-et. Ez történhet *explicit módon.* Például:

- $a_n := 2n^2 + 3 \quad n \in \mathbb{N}$,
- $a_n := \begin{cases} \dfrac{2}{n+4}, & \text{ha } n = 1, 3, 5, \ldots \\ \sqrt{n^3+2}, & \text{ha } n = 2, 4, 6, \ldots . \end{cases}$

Sorozatot megadhatunk azonban úgy is, hogy megadjuk a sorozat első (néhány) tagját, a további tagokat pedig az előttük lévő(k) felhasználásával definiáljuk. Az ilyen esetekben azt mondjuk, hogy a sorozatot *rekurzív módon* adtuk meg. A teljes indukcióra való hivatkozással sorozatot adunk meg például az

- $a_1 := 1, \quad a_n := a_{n-1}^3 - 2 \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$

utasítással is. Ekkor a sorozat egy tagját az eggyel kisebb indexű tagjának felhasználásával számítjuk ki. Ezt akkor tehetjük meg, ha a szóban forgó index nem 1. Az a_1 kezdőtagot külön definiáltuk. Sorozat ilyen megadását *egylépéses rekurziónak* nevezzük. További példák:

Adott $\alpha, d \in \mathbb{R}$ esetén az

- $a_1 := \alpha, \quad a_n := a_{n-1} + d \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$

egylépéses rekurziót *számtani sorozatnak* nevezzük. Ennek n-edik tagját a teljes indukcióval bizonyítható

$$a_n = \alpha + (n-1)d \qquad (n \in \mathbb{N})$$

explicit képlettel is megadhatjuk.

Legyen $\alpha, q \in \mathbb{R}$. Az

- $a_1 := \alpha, \quad a_n := qa_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$

sorozat az α kezdőértékű és q hányadosú *mértani* (vagy *geometriai*) *sorozat*, amelyre szintén egyszerűen igazolható az

$$a_n = \alpha q^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

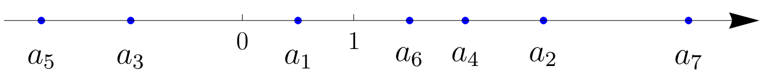
explicit formula.

Kétlépéses rekurzióról beszélünk akkor, ha a sorozat egy tagját az előtte levő két tag függvényében adjuk meg. Például:

- $a_1 := 1, \quad a_2 := 2, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \ldots)$.

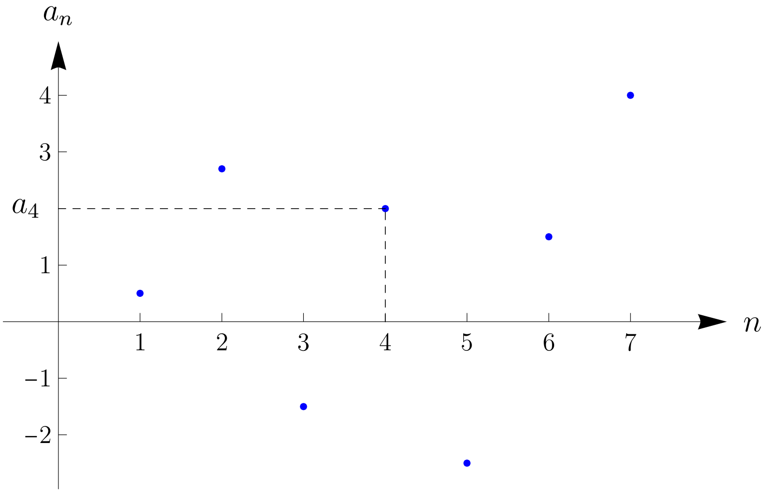
A rekurzív módon megadott sorozatok rendkívül fontosak a numerikus analízis szempontjából (is). Számos közelítő eljárás, numerikus módszer lényege egy rekurzív módon definiált sorozat bizonyos tagjainak (a „közelítő értékeknek”) a kiszámítása.

Számsorozat *szemléltetésére* két lehetőség kínálkozik. Egyrészt a számegyenesen ábrázolhatjuk az (a_n) valós sorozat néhány tagját:



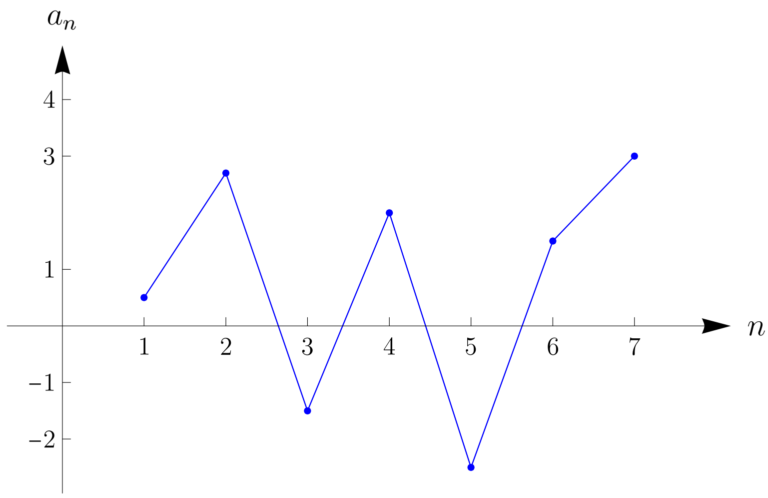
1. ábra

Mivel az (a_n) számsorozat speciális valós-valós függvény, ezért a szemléltetéshez használhatjuk a síkot is, vagyis a függvények szokásos ábrázolási módjánál alkalmazott Descates-féle koordináta-rendszert:



2. ábra

A Bevezetésben már megemlítettük azt, hogy számos biológiai és közgazdasági folyamat írható le sorozatokkal. Az ilyen folyamat szemléltetésekor a megfelelő pontokat szakaszokkal is össze szokás kötni:



3. ábra

Egy sorozatból többféleképpen gyárthatunk újabb sorozatokat. Ezek között különösen fontosak az úgynevezett *részsorozatok*.

2. definíció. Legyen $a = (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy sorozat és $i = (i_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton növekedő sorozat (az ilyen i-t *indexsorozatnak* fogjuk nevezni). Ekkor az

$$a \circ i = (a_{i_n})$$

sorozatot az a sorozat i indexsorozat által meghatározott *részsorozatnának* nevezzük.

Sorozatokból *algebrai műveletekkel* is képezhetünk újabb sorozatokat.

3. definíció. Az (a_n) és a (b_n) számsorozatok *összegének* az

$$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n),$$

szorzatának pedig az

$$(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n)$$

sorozatot nevezzük.

Ha $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor (a_n) és (b_n) *hányadosán* az

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

sorozatot értjük.

Végül kiemeljük még azt is, hogy a függvények egyenlőségére tett korábbi megállapodásunk nyilvánvaló következménye az, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és a $(b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat pontosan akkor *egyenlő*, ha bármely index esetén az azonos indexű tagok egyenlőek, azaz $a_n = b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ számra.

1.2. Sorozatok elemi tulajdonságai

Sorozatokkal kapcsolatban az egyik legfontosabb feladat a „viselkedésének” minél pontosabb leírása. Egy sorozat viselkedését különböző tulajdonságokkal jellemezhetjük. Ebben a pontban a legegyszerűbbeket (monotonitás, korlátosság, periodicitás) soroljuk fel.

1. definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat *monoton növekedő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$. Ha itt $\leq$ helyett $\geq$ áll, a sorozatot *monoton csökkenőnek*, ha $<$, illetve $>$ áll, *szigorúan monoton növekedőnek*, illetve *szigorúan monoton csökkenőnek* nevezzük. Az (a_n) sorozat *monoton*, ha a fenti esetek valamelyike áll fenn.

Deriválható valós-valós függvények monotonitásának a vizsgálatára több jól használható általános módszert is megismertünk; ezek sorozatokra nem alkalmazhatók. A sorozatot megadó explicit- vagy rekurzív képletből általában nem lehet egyszerűen látni azt, hogy az monoton-e. Gondoljunk például az

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra. Ilyen esetekben a sorozat első néhány tagjának a kiszámolásával alakíthatunk ki egy *sejtést* a monotonitással kapcsolatosan, amit aztán már teljes indukcióval be is bizonyíthatunk. Gyakran hasznos lehet, ha a monotonitás definíciójában szereplő egyenlőtlenség helyett egy vele ekvivalens egyenlőtlenséget próbálunk igazolni. Például:

$$a_{n+1} \geq a_n \ \ (n \in \mathbb{N}) \quad \iff \quad a_{n+1} - a_n \geq 0 \ \ (n \in \mathbb{N});$$

vagy ha $a_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ számra, akkor

$$a_{n+1} \geq a_n \ \ (n \in \mathbb{N}) \quad \iff \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

2. definíció. Az (a_n) sorozat *alulról korlátos*, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $k \leq a_n$; *felülről korlátos*, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $a_n \leq K$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén; *korlátos*, ha alulról is és felülről is korlátos.

Egyszerűen igazolható az, hogy az (a_n) sorozat pontosan akkor korlátos, ha létezik olyan K pozitív valós szám, hogy $|a_n| \leq K$ minden $n \in \mathbb{N}$ index esetén.

Sorozat korlátosságát, például egy *megsejtett* felső korlátot sok esetben a teljes indukció módszerével igazolhatjuk.

3. definíció. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat értékkészletének a szuprémumát [infimumát] a *sorozat szuprémumának* [*infimumának*] nevezzük:

$$\sup a := \sup \mathcal{R}_a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$\big[\inf a := \inf \mathcal{R}_a = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}\big].$$

4. definíció. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *periodikus*, ha van olyan $k \geq 1$ természetes szám, hogy

$$a_{n+k} = a_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy (a_n) *k-periodikus sorozat.*

Egyszerűen bebizonyítható az, hogy ha (a_n) egy k-periodikus sorozat, akkor az egyúttal $p \cdot k$-periodikus sorozat is minden $p \in \mathbb{N}$ esetén, tehát ha van egy periódusa, akkor végtelen sok periódusa is van; továbbá van legkisebb periódusa is.

1.3. Sorozat határértéke

A *határérték* az analízis alapvető fogalma. Sorozat határértéke a sorozatnak azt a szemléletes tulajdonságát fejezi ki, hogy a tagjai valamilyen szám körül sűrűsödnek.

1. definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat *konvergens*, ha

$$\exists\, A \in \mathbb{R},\ \text{hogy}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \text{hibakorláthoz}\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \text{küszöbindex, hogy}$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n > N\ \text{indexre}\ \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Az (a_n) sorozat *divergens*, ha nem konvergens, azaz

$$\forall\, A \in \mathbb{R}\ \text{számhoz}\ \exists\, \varepsilon > 0\ \ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \text{küszöbindex után}$$
$$\exists\, n \in \mathbb{N},\ n > N,\ \text{hogy}\ \ |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

Igazolható, hogy ha a fenti definícióban szereplő A szám létezik, akkor az egyértelmű. Ezt az A számot az (a_n) sorozat *határértékének* nevezzük, és azt is mondjuk, hogy az (a_n) sorozat az A számhoz tart. Ezt a tényt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n := A, \qquad \lim(a_n) := A, \qquad a_n \to A\ \ (n \to +\infty).$$

A definíció alapján könnyen be lehet látni például azt, hogy

- $\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$
- $\lim\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0,$
- $\lim\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1.$

Ezekben az esetekben egy adott $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz egyszerűen meg lehet határozni egy hozzá tartozó N küszöbindexet.

A definíciót felhasználva szintén egyszerűen meg lehet mutatni azt, hogy az alábbi sorozatok mindegyike divergens:

- $a_n := (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N});$
- $a_n := (-1)^n n^2 \quad (n \in \mathbb{N});$

- $a_n := \begin{cases} n, & \text{ha } n = 1, 3, 5, \dots \\ 1, & \text{ha } n = 2, 4, 6, \dots; \end{cases}$
- $a_n := (n+1)^2 \quad (n \in \mathbb{N});$
- $a_n := n + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N});$
- $a_n := \begin{cases} n, & \text{ha } n = 1, 3, 5, \dots \\ n^2, & \text{ha } n = 2, 4, 6, \dots. \end{cases}$

Az utolsó három sorozatnál megfigyelhető, hogy a divergencia mellett a sorozat tagjai azt a határozott tendenciát mutatják, hogy „nagy” n index esetén az a_n értékek „nagyok”; pontosabban: tetszőleges (nagy) P valós számra csak véges sok olyan tagja van a sorozatnak, amelyik P-nél nem nagyobb. Az ilyen divergens sorozatoknak is definiáljuk a határértékét.

2. definíció. Az (a_n) sorozat a *plusz végtelenhez tart* (vagy *plusz végtelen a határértéke*), ha

$$\forall\, P \in \mathbb{R} \text{ számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n \geq n_0 \text{ indexre } \ a_n > P.$$

Jelölés: $\lim(a_n) = +\infty$ vagy $a_n \to +\infty \ \ (n \to +\infty)$.

Hasonlóan értelmezzük a $(-\infty)$-hez tartás fogalmát.

3. definíció. Az (a_n) sorozat a *mínusz végtelenhez tart* (vagy *mínusz végtelen a határértéke*), ha

$$\forall\, P \in \mathbb{R} \text{ számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n \geq n_0 \text{ indexre } \ a_n < P.$$

Jelölés: $\lim(a_n) = -\infty$ vagy $a_n \to -\infty \ \ (n \to +\infty)$.

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozatnak *van határértéke*, ha a sorozat konvergens (azaz véges a határértéke) vagy $(+\infty)$-hez vagy $(-\infty)$-hez tart. Ha (a_n)-nek nincs határértéke, akkor az (a_n) sorozatot *oszcillálva divergens* sorozatnak nevezzük.

Egyetlen definícióban is megfogalmazhatjuk azt a tényt, hogy a sorozatnak van határértéke. Ehhez a valós számok halmazának kibővítésére van szükség. *A kibővített valós számok halmazát* így definiáltuk:

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Ezen a halmazon bizonyos algebrai műveleteket és rendezést értelmeztünk. A definíciókat itt nem soroljuk fel. Csupán azt emeljük ki, hogy az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazban bizonyos műveleteket nem értelmeztünk. Nem definiáltuk például a $(+\infty) + (-\infty)$ összeget, a $0 \cdot (+\infty)$ szorzatot vagy a $\frac{\pm\infty}{-\infty}$ hányadost.

Az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazon értelmeztük tetszőleges pont környezetét. Legyen $A \in \overline{\mathbb{R}}$ és r egy pozítiv valós szám. Az A pont r *sugarú környezetét* így definiáltuk:

$$K_r(A) := \begin{cases} (A-r, A+r), & \text{ha } A \in \mathbb{R} \\ \left(\frac{1}{r}, +\infty\right), & \text{ha } A = +\infty \\ \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right), & \text{ha } A = -\infty. \end{cases}$$

4. definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) számsorozatnak *van határértéke*, ha a sorozat konvergens vagy $(+\infty)$-hez vagy pedig $(-\infty)$-hez tart. Ez azzal egyenértékű, hogy

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ hogy } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ hibakorláthoz } \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ küszöbindex, hogy}$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n > N \text{ indexre } a_n \in K_\varepsilon(A).$$

A fenti tulajdonsággal rendelkező $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elem egyértelműen meghatározott. Ezt a sorozat *határértékének* nevezzük, és így jelöljük:

$$\lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

1.4. A határértékre vonatkozó alapvető tételek

Sorozatok határértékének a meghatározása a definíció alapján általában nem egyszerű feladat. A tanulmányaink során azonban több olyan tételt tanultunk, amelyek megkönnyítik az ilyen feladatok megoldását.

1. tétel. (A konvergencia egy szükséges feltétele.) *Ha egy valós sorozat konvergens, akkor korlátos is.*

A korlátosság a konvergenciának egy *szükséges* feltétele. Ez a feltétel azonban *nem elégséges*, vagyis a korlátosságból általában nem következik a konvergencia. Erre példa a $((-1)^n)$ sorozat, amelyik korlátos, de nem konvergens.

2. tétel. (Részsorozatok határértéke.) *Ha az (a_n) sorozatnak van határértéke, akkor minden (a_{n_k}) részsorozatának is van, és* $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Gyakran hasznos a fenti állítás alábbi átfogalmazása: Ha egy valós sorozatnak van két olyan részsorozata, amelyek határértéke különböző (vagy valamelyik nem létezik), akkor a sorozatnak nincs határértéke.

3. tétel. (A műveletek és a határérték kapcsolata.) *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) valós sorozatoknak van határértéke, és*

$$\lim(a_n) := A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) := B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1^o *az* $(a_n + b_n)$ *sorozatnak is van határértéke, és*

$$\lim(a_n + b_n) = A + B,$$

feltéve, hogy $A + B$ *értelmezve van;*

2^o *az* $(a_n \cdot b_n)$ *sorozatnak is van határértéke, és*

$$\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B,$$

feltéve, hogy $A \cdot B$ *értelmezve van;*

3^o *ha* $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, *akkor az* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *sorozatnak is van határértéke, és*

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B},$$

feltéve, hogy $\frac{A}{B}$ *értelmezve van.*

Határérték szempontjából a legegyszerűbbek a *monoton sorozatok.* Ezekre vonatkozó alapvető állítások a következők.

4. tétel. 1^o *Ha az* (a_n) *valós sorozat monoton növekedő és felülről korlátos (vagy monoton csökkenő és alulról korlátos), akkor konvergens, és*

$$\lim(a_n) = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \big(\lim(a_n) = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}\big).$$

2^o *Ha az* (a_n) *valós sorozat monoton növekedő és felülről nem korlátos (vagy monoton csökkenő és alulról nem korlátos), akkor van határértéke, és*

$$\lim(a_n) = +\infty \qquad \big(\lim(a_n) = -\infty\big).$$

5. tétel. (Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel.) *Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

6. tétel. *Ha egy sorozat felülről nem korlátos, akkor van* $(+\infty)$*-hez tartó monoton részsorozata; ha alulról nem korlátos, akkor van* $(-\infty)$*-hez tartó monoton részsorozata.*

A következő két állítás a *rendezés és a határérték* kapcsolatára vonatkozó alapvető eredményeket tartalmazza.

7. tétel. (Közrefogási elv.) *Tegyük fel, hogy az* (a_n), (b_n) *és* (c_n) *sorozatokra teljesülnek a következők:*

(i) *létezik olyan* $N \in \mathbb{N}$, *hogy*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \textit{minden } n \geq N\textit{-re;}$$

(ii) *az* (a_n) *és a* (c_n) *sorozatnak van határértéke és azok egyenlők:*

$$\lim(a_n) = \lim(c_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a (b_n) *sorozatnak is van határértéke, és* $\lim(b_n) = A$.

8. tétel. *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatnak van határértéke.*

1^o *Ha* $\lim(a_n) > \lim(b_n)$, *akkor van olyan* $N \in \mathbb{N}$, *hogy* $a_n > b_n$ *teljesül minden* $n \geq N$ *indexre.*

2^o *Ha van olyan* $N \in \mathbb{N}$, *hogy* $a_n \geq b_n$ *egyenlőtlenség fennáll minden* $n \geq N$ *index esetén, akkor* $\lim(a_n) \geq \lim(b_n)$.

Az eddig felsorolt tételek szükséges vagy elégséges feltételt adtak meg a határértékre. A Cauchy-féle konvergenciakritérium egy *szükséges és elégséges* feltételt ad sorozat konvergenciájára. Ennek megfogalmazásához szükségünk lesz a Cauchy-sorozat fogalmára.

9. definíció. Az (a_n) valós sorozatot *Cauchy-sorozatnak* nevezzük, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, N \in \mathbb{N} : \ \forall\, m, n > N \text{ indexre } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Egy (a_n) sorozat tehát akkor Cauchy-sorozat, ha az „elég nagy” indexű tagjai „tetszőlegesen közel” vannak egymáshoz.

10. tétel. (A Cauchy-féle konvergenciakritérium.) *Egy valós sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

A tétel alapvető jelentőségű, mert lehetőséget ad arra, hogy sorozat konvergenciáját kizárólag a sorozat tagjainak a segítségével eldöntsük. Nincs szükség tehát a konvergencia definíciójában szereplő határérték ismeretére.

A Cauchy-féle konvergenciakritériumban *konvergens* (tehát véges határértékű) sorozatokról van szó. Végtelen határértékekre az analóg állítás nem igaz: az (n) sorozatnak például van határértéke (ez $+\infty$), de ez nem Cauchy-sorozat.

1.5. A Banach-féle fixponttétel

Rekurzív sorozatok határértékének vizsgálatához egy sok esetben jól használható eszköz a *fixpont-iteráció*. Ennek alapja a Banach-féle fixponttétel. Itt csak a nekünk szükséges legegyszerűbb esetben fogalmazzuk meg a szóban forgó állítást.

1. tétel. (Banach-féle fixponttétel.) *Tegyük fel, hogy az* $f : [a, b] \to [a, b]$ *függvény kontrakció, azaz létezik olyan* $q \in [0, 1)$ *valós szám, amellyel teljesül az*

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y| \qquad \big(x, y \in [a, b]\big) \tag{1}$$

egyenlőtlenség.

Ekkor a következő állítások érvényesek:

1^o *Az* f *függvénynek pontosan egy fixpontja van, azaz egyértelműen létezik olyan* $x^* \in [a, b]$, *amelyre* $x^* = f(x^*)$.

2^o *Az*

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b], \\ x_{n+1} := f(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

iterációs sorozat konvergens, és x^* a határértéke.

3^o *Az (x_n) sorozatra a következő hibabecslés érvényes:*

$$|x_n - x^*| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Bizonyítás. (i) Az (1) feltételből következik, hogy az f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon.

(ii) Megmutatjuk, hogy (x_n) egy Cauchy-sorozat. Ehhez először a sorozat két egymás utáni tagjának különbségét vizsgáljuk. A sorozat definíciójának és az (1) egyenlőtlenségnek felhasználásával azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |f(x_n) - f(x_{n-1})| \le q\,|x_n - x_{n-1}| = q\,|f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \le \\ &\le q^2\,|x_{n-1} - x_{n-2}| \le \cdots \le \\ &\le q^n\,|x_1 - x_0|\,. \end{aligned}$$

Most a sorozat két tetszőleges tagjának különbségét tekintjük. Tegyük fel, hogy $m, n \in \mathbb{N}$ és $m > n$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség ismételt alkalmazásával a következő adódik:

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)| \le \\ &\le |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \le \\ &\le q^{m-1}\,|x_1 - x_0| + q^{m-2}\,|x_1 - x_0| + \cdots + q^n\,|x_1 - x_0| = \\ &= \left(q^{m-1} + q^{m-2} + \cdots + q^n\right)|x_1 - x_0| = \\ &= q^n\left(q^{m-1-n} + q^{m-2-n} + \cdots + 1\right)|x_1 - x_0|\,. \end{aligned}$$

Most felhasználjuk azt a tényt, hogy a $q \in [0, 1)$ feltételünk miatt a $\sum q^n$ geometriai sor konvergens. Ezért

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\le q^n\left(q^{m-1-n} + q^{m-2-n} + \cdots + 1\right)|x_1 - x_0| \le \\ &\le q^n \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \cdot |x_1 - x_0| = \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy (x_n) valóban Cauchy-sorozat.

(iii) A Cauchy-féle konvergenciakritériumból következik, hogy az (x_n) iterációs sorozat konvergens. Legyen $x^* := \lim(x_n)$. Az $x^* \in [a, b]$ az f leképezés fixpontja. Valóban, a folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elv szerint

$$x^* = \lim(x_n) = \lim\left(f(x_{n-1})\right) = f\left(\lim(x_{n-1})\right) = f(x^*).$$

(iv) A fixpont egyértelműségének bizonyításához tegyük fel, hogy $y^* \in [a, b]$ is olyan, hogy $f(y^*) = y^*$. Ekkor

$$|x^* - y^*| = |f(x^*) - f(y^*)| \le q\,|x^* - y^*|\,,$$

amiből az következik, hogy

$$0 \le (q - 1)\,|x^* - y^*|\,.$$

Mivel $q - 1 < 0$ és $|x^* - y^*| \ge 0$, ezért szorzatunk csak úgy lehet nemnegatív, ha $|x^* - y^*| = 0$, azaz $x^* = y^*$. Tehát egyetlen fixpont van csak.

(v) A hibabecslés bizonyításához induljunk ki a fentebb bizonyított, minden $m > n$ természetes számra fennálló

$$|x_m - x_n| \le \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|$$

egyenlőtlenségből. Ha itt n-et rögzítjük, és az $m \to +\infty$ határátmenetet vesszük, akkor az $x_m \to x^*$ miatt az

$$|x^* - x_n| \le \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami a hibabecslés bizonyítását jelenti. ■

Az (1) kontrakciós feltétel ellenőrzése általában nem egyszerű feladat. A Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával azonban egyszerűen be lehet bebizonyítani a kontrakcióra vonatkozó alábbi elégséges feltételt.

2. tétel. *Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to [a, b]$ függvény folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n, továbbá van olyan $0 \le q < 1$ szám, amellyel fennáll az*

$$|f'(x)| \le q \qquad \big(x \in (a, b)\big)$$

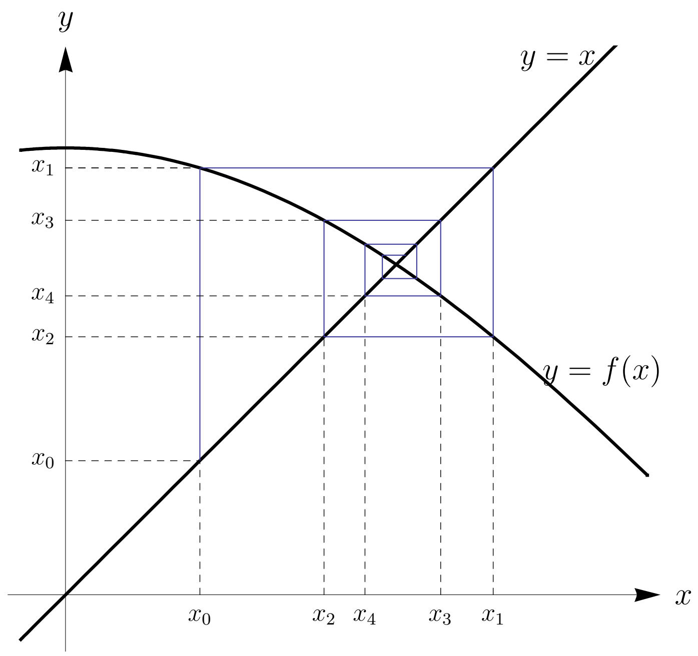
egyenlőtlenség. Ekkor f kontrakció.

Egy $f : [a, b] \to [a, b]$ függvény fixpontjának (vagyis az $f(x) = x$ egyenlet megoldásának) meghatározásához használt

$$\begin{aligned} x_0 &\in [a, b],\\ x_{n+1} &: = f(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

iterációs sorozat szemléltetéséhez rendkívül hasznos az alábbiakban leírt *pókháló diagram.*

Vegyünk egy derékszögű koordináta-rendszert a síkon, vízszintes tengelyét jelölje x, a függőlegeset pedig y. Rajzoljuk be a szokásos módon az $y = x$ egyenletű egyenest, valamint az $y = f(x)$ $(x \in [a, b])$ egyenletű görbét, vagyis az f függvény grafikonját. Az f függvény fixpontja a szóban forgó görbék metszéspontja. Mérjük fel a vízszintes tengelyre az $x_0 \in [a, b]$ kezdőértéket. Állítsunk merőlegest az $(x_0, 0)$ pontban az x-tengelyre; ez az f függvény grafikonját az $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$ pontban metszi. Húzzunk ebből a pontból vízszintest az $y = x$ egyenletű egyenesig; a metszéspont legyen (x_1, x_1). Ha ebből a pontból függőlegeset húzunk az $y = f(x)$ grafikonig, akkor az $(x_1, f(x_1)) = (x_1, x_2)$ pontot kapjuk. Ezt az eljárást folytatva, mindkét tengelyen megkapjuk az (x_n) iterációs sorozatot.



4. ábra

2. Előzetes megjegyzések a rekurzív sorozatokról

2.1. Fogalmak és elnevezések. Létezési- és egyértelműségi tétel

Rekurzív sorozatról akkor beszélünk, ha megadjuk a sorozat első m tagját, és megmondjuk azt, hogy egy tagját hogyan képezzük az előtte lévő m tag segítségével. A következő feladat fogalmazható meg.

Feladat. *Rögzítsünk egy $m(\geq 1)$ természetes számot. Tegyük fel, hogy adottak az $A_0, A_1, \ldots A_{m-1}$ valós számok, valamint az*

$$f : \mathbb{N} \times D \to \mathbb{R} \qquad (D \subset \mathbb{R}^m)$$

függvény. Keressünk olyan (x_n) valós sorozatot, amelyre a következők teljesülnek:

$$x_0 = A_0, \quad x_1 = A_1, \quad \ldots, \quad x_{m-1} = A_{m-1}, \tag{1}$$

$$x_n = f(n - m, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-m}) \quad (n = m, m + 1, m + 2, \ldots). \tag{2}$$

Ennek a feladatnak egy (x_n) megoldását *m-edrendű rekurzív sorozatnak* nevezzük. (1) a sorozat *kezdőértékei* (vagy a *kezdeti feltételek*), (2) a *rekurziós összefüggés* vagy a *differenciaegyenlet*. A feladatot *m-edrendű rekurziónak* vagy *m-edrendű differenciaegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának* nevezzük.

Először a szóhasználathoz fűzünk néhány megjegyzést. A *differenciaegyenlet* elnevezés a *differenciálegyenletre* emlékeztet bennünket. A tanulmányaink során láttuk, hogy számos gyakorlati probléma időbeli alakulását (közönséges) differenciálegyenletekkel lehet leírni. Ekkor feltételeztük, hogy az időváltozó *folytonos*, és a modell felépítéséhez és tanulmányozásához használhatjuk a differenciál- és integrálszámítás módszereit. A gyakorlat azonban felvet olyan problémákat is, amelyekben ez a kényelmes egyszerűsítés nem alkalmazható. A következő pontban majd mutatunk néhány ilyen problémát. Ezekben a közös az, hogy a folyamatról csak *diszkrét* időpontokban vannak (korábbi) információink, és később is szintén csak diszkrét időpontokban érdekel bennünket a folyamat alakulása. Ilyen jelenségeknek egy általános matematikai modellje a fenti feladat, amelyek vizsgálatához a differenciálegyenletek elméletében megismert módszerek *nem* alkalmazhatók. Kiderült azonban, hogy a problémafelvetés és az eredmények tekintetében számos hasonlóság van a differencia- és a differenciálegyenletek között.

Az imént jelzett analógia alapján a fenti feladattal kapcsolatban a következő alapvető kérdéseket lehet felvetni. Elöljáróban itt megjegyezzük azt is, hogy a felsorolandó problémák sok esetben a differenciálegyenleteknél jóval egyszerűbben kezelhetők.

• *A megoldás létezésének a problémája*
Milyen f függvény esetén lesz a (2) rekurziós összefüggésnek (vagy differencia-egyenletnek) megoldása?

• *A megoldás egyértelműségének a problémája*
Példákon keresztül majd látni fogjuk, hogy (2)-nek általában végtelen sok megoldása van (ha egyáltalán van megoldás). A kérdés tehát az, hogy (2) megoldásaiból kiválasztható-e olyan, amelyik eleget tesz az (1) kezdeti feltételnek. Ha igen, akkor az egyértelmű-e.

• *Az előállítás problémája*
Ha van megoldás, akkor azt vajon elő lehet-e állítani explicit képlettel, és ha igen, akkor hogyan. A differenciálegyenleteknél szerzett tapasztalataink azt mutatják, hogy erre csak bizonyos speciális esetekben (speciális f függvény esetén) van lehetőség. A következő fejezetben mutatunk néhány ilyen példát.

• *A megoldás jellemzésének a problémája*
Egy adott probléma esetén persze a legfontosabb kérdés az, hogy létezés és egyértelműség esetén mit mondhatunk az (x_n) sorozatról, azaz hogyan jellemezhető a megoldás. Egy (x_n) valós sorozatot a monotonitás, korlátosság, határérték és periodicitás segítségével lehet leírni. Ezt megtehetjük akkor, ha ismerjük a sorozat explicit képletét, amire csak „kevés” esetben van lehetőségünk. A rekurzív sorozatok (differenciaegyenletek) elméletében kidolgoztak azonban olyan módszereket, amelyek segítségével az explicit alak ismerete nélkül lehet következtetéseket levonni a megoldássorozat viselkedéséről.

Az első két probléma igen általános feltételek mellett viszonylag egyszerűen megoldható. A következő tétel azt állítja, hogy az f függvényre tett igen általános feltételek mellett biztosítható az m-edrenű rekurzió egyértelmű megoldhatósága.

1. tétel. (Létezés és egyértelműség.) *Rögzítsük az $m(\geq 1)$ természetes számot. Tegyük fel, hogy minden $(y_1, y_2, \dots y_m) \in D$ és minden $t \in \mathbb{R}$ esetén*

$$(f(t, y_1, y_2, \dots y_m), y_2, y_3, \dots y_m) \in D.$$

Ekkor a (2) egyenletnek tetszőleges $(A_0, A_1, \dots A_{m-1}) \in D$ kezdeti feltételek mellett pontosan egy megoldása van.

A tétel feltételei azt biztosítják, hogy ha megadjuk az (x_n) sorozat első m egymás utáni tagját, akkor az ezeket követő tagokat már egyértelműen meg lehet határozni. Az állítás teljes indukcióval bizonyítható.

A harmadik és a negyedik probléma már lényegesen nehezebben kezelhető. Ezeket csak bizonyos speciális f függvény esetén fogjuk csak tárgyalni.

Az m-edrendű rekurziót (differenciaegyenletet) *lineárisnak* nevezzük, ha az f függvény lineáris, vagyis a következő alakú:

$$f(t, u_{m-1}, u_{m-2}, \dots, u_0) := a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2} + \dots + a_m u_0 + b$$
$$((t, u_{m-1}, u_{m-2}, \dots, u_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{D}).$$

Ha itt az $a_1, a_2, \ldots a_m$ és a b együtthatók adott (rögzített) valós számok, akkor m-edrendű *állandó együtthatós lineáris rekurzióról* beszélünk. Az együtthatók azonban a $t \in \mathbb{N}$-től is függhetnek; ilyenkor a fenti feladatot *m-edrendű változó együtthatós lineáris rekurziónak* nevezzük. A $b = 0$ esetben *homogén*, az ellenkező esetben pedig *inhomogén* problémáról beszélünk.

2.2. Néhány példa

- **A Fibonacci-sorozat**

Fibonacci néven vált ismertté a pizzai születésű *Leonardo Pisano* olasz matematikus (egyes vélemények szerint a középkor legtehetségesebb matematikusa). Apja a gazdag itáliai városnak Pisának volt kereskedelmi ügyvivője Algírban. Leonardo itt tanulta a matematika alapjait. Üzleti útjain pedig megismerte a Kelet műveltségét és ezen belül a matematikáját. Egyike volt azoknak, akik a hinduktól származó, de az akkori világban arab közvetítéssel elterjedő tízes alapú, helyi értékes rendszerre épülő számítási módot Európában meghonosították. Az összegyűjtött és az általa kiegészített aritmetikai és algebrai ismereteket az 1202-ben kiadott, *Liber Abaci* (Könyv az abakuszról) című művében foglalta össze. Ebben a híres munkájában található a következő (nem túlságosan életszerű) feladat:

Leonardo Fibonacci
(1170–1250)

Egy gazda nyulakat tenyészt. Minden nyúlnak két hónapos korában születik az első kölyke, ezt követően pedig havonta egy-egy. Feltesszük, hogy a nyulak örökké élnek, a hím egyedektől pedig eltekintünk. Hány nyula lesz a gazdának n hónap elteltével, ha „állománya” kezdetben egyetlen újszülött kölyökből áll?

Nézzük a nyulak számának időbeli alakulását. Az első hónapban a gazdának 1 nyula van, és ez a helyzet a második hónapban sem változik, mert a szaporodáshoz a nyúlnak legalább két hónaposnak kell lennie. A harmadik hónapban születik egy nyúl, ezért az állomány 2 tagot számlál. A negyedik hónapban 1-gyel nő az állomány, mert az első nyúl már minden hónap végén egy-egy kölyköt hoz a világra. Az ötödik hónapban megszületik az első nyúl harmadik és a második nyúl első kölyke, ezért a gazdának az ötödik hónap végén már 5 nyula van. A nyulak szaporodásának a folyamata könnyen követhető, ha *észrevesszük* azt, hogy minden hónapban pontosan annyi nyúl születik, ahány legalább kéthónapos nyúl van, azaz olyan nyúl, amelyik már egy hónappal korábban is az állomány tagja volt. Ez azt jelenti, hogy ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy hány tagú lesz az állomány a *következő* hónapban, akkor csak össze kell adni az *előző* és a *jelen* havi létszámot. Jelöljük F_n-nel a nyulak számát az n-edik hónapban. Ekkor $F_1 = 1$ és $F_2 = 1$. Az egyszerűség kedvéért legyen $F_0 = 0$. A fenti észrevételt tehát a következőképpen fejezhetjük ki:

$$\begin{aligned} F_0 = 0, &\qquad F_1 = 1, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} &\qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned} \tag{1}$$

Az így definiált (F_n) sorozatot nevezzük *Fibonacci-sorozatnak.* Ez tehát egy másodrendű állandó együtthatós homogén lineáris rekurzió (differenciaegyenlet).

Fibonacci nem az „alkalmazott matematika” problémájaként tűzte ki a feladatot. Érdekes tulajdonságokkal rendelkező számokra bukkant, majd keresett hozzá egy „alkalmazást”.

Megjegyezzük még azt is, hogy ezt a sorozatot először 1150-ben írta le két indiai matematikus, *Gopala* és *Hemacsandra*, akik a szanszkrit költészet elméleti kérdéseit vizsgálva ütköztek a következő összegre bontási problémába: hányféleképpen lehet rövid és hosszú szótagokkal kitölteni egy adott időtartamot, ha egy hosszú szótag két rövidnek felel meg.

- **Fixpont-iteráció**

A matematikában és az alkalmazásokban is fontos probléma egyenletek megoldásainak a meghatározása. Tekintsünk egy adott g valós-valós függvényt, és keressünk olyan x^* valós számot, amelyre $g(x^*) = 0$ teljesül. Ezt a feladatot úgy is szoktuk fogalmazni, hogy *oldjuk meg* $\mathbb{R}$*-ben a* $g(x) = 0$ *egyenletet.* Az x^* számot az egyenlet *megoldásának* vagy *gyökének*, illetve a g függvény *zérushelyének* nevezzük. A tanulmányaink során láttuk, hogy a gyök(ök) *pontos* (megoldóképlettel történő) meghatározására csak „kevés” speciális esetben van lehetőségünk.

Megoldóképlet hiányában az egyetlen lehetőség az, hogy olyan sorozatot próbálunk megadni, amelyik a megoldáshoz konvergál. Több általános módszert is megismertünk ilyen sorozatok konstruálására; például az *intervallumfelezési eljárás*, a *szelőmódszer*, a *Newton-módszer* vagy a *fixpont-iteráció.*

Most csak a fixpont-iterációs eljárásról fogunk beszélni. Ennek lényege az, hogy a $g(x) = 0$ egyenletet először átírjuk a vele ekvivalens $f(x) = x$ alakba, ahol f egy, a g-ből nyert függvény. (Megjegyezzük, hogy többféle ilyen átalakítás is lehetséges.) Ha x^* a $g(x) = 0$ egyenlet egy megoldása, akkor nyilván $f(x^*) = x^*$ is fennáll, ezért x^*-ot az f függvény *fixpontjának* nevezzük. A g függvény gyökeinek a meghatározása tehát ekvivalens az f függvény fixpontjainak a meghatározásával.

A fenti átfogalmazás azért célszerű, mert ebben az új alakban a következő „természetes” módszer kínálkozik egy sorozat konstruálására:

$$\begin{aligned} &x_0 \in \mathbb{R}, \\ &x_n = f(x_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

Ezt az elsőrendű rekurziós sorozatot *fixpont-iterációs* sorozatnak nevezzük, és a konvergenciájának a vizsgálatához az 1.5. pontban bebizonyított Banach-féle fixponttételt használhatjuk.

- **Folyószámla egyenleg**

Egy család valamilyen bankban vezetett folyószámlájának a leírására (modellezésére) rekurzív sorozatokat használhatunk. Tegyük fel, hogy havi periódusokat tekintünk. Jelölje w_n, c_n és y_n az n-edik időpontban a folyószámla egyenlegét, a folyószámláról felvett összeget és a folyószámlára befizetett jövedelmet. Ha a periódusonkénti kamatláb $r_n\%$ és az $n = 0$ időpontban w_0 az egyenleg, akkor a folyószámla alakulását a

$$\begin{aligned} &w_0 \in \mathbb{R}, \\ &w_n = (1 + 0,01r_n)w_{n-1} + (y_n - c_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

rekurzív sorozat (vagy differenciaegyenlet) írja le, ami egy elsőrendű változó együtthatós inhomogén lineáris rekurzió (vagy differenciaegyenlet).

- **Samuelson gyorsítási (akcelerációs) modellje**

Ez a közgazdasági példa egy ország makrogazdaságának egy matematikai modellje. Jelölje $Y(t)$ a teljes nemzeti jövedelem értékét a t időpontban, és bizonyos periódusokban figyeljük a nemzeti jövedelem alakulását. Feltesszük, hogy a periódusok egységnyiek (például hónap, félév, év, stb.), ezért t értékei a $0, 1, 2, \ldots$ természetes számok. A feladat a következő: ha ismerjük például az $Y(0)$ és $Y(1)$ (korábbi) eredményeket, akkor hogyan lehet „megjósolni” a nemzeti jövedelmet a rákövetkező periódusokban, azaz mekkorák lesznek az $Y(2), Y(3), \ldots$ értékek. Bizonyos közgazdasági elvekből („axiómákból”) kiindulva Samuelson a következő matematikai modellt kapta (lásd [3], 118.odal)

$$Y(t) = \alpha(1 + \beta)Y(t - 1) - \alpha\beta Y(t - 2) + 1 \qquad (t = 2, 3, 4, \ldots),$$

ahol $Y(t)$ a t-edik periódusban a nemzeti jövedelem, α és β pedig pozítiv valós állandók (α az ún. *fogyasztási határhajlandóság*, β pedig a *viszonyszám*). Ez egy másodrendű állandó együtthatós inhomogén lineáris rekurzió, az $Y(0)$, $Y(1)$, valamint az α, β, pareméterekkel. A létezési és egyérteműségi tételből következik, hogy ennek a problémának pontosan egy $(Y(t), t \in \mathbb{N})$ megoldása van. Matematikai szempontból a feladat tehát az, hogy jellemezzük a megoldást a paraméterek lehetséges értékei esetén.

- **Populációk fejlődése**

Tekintsünk egy zárt populációt, és vizsgáljuk a populáció fejlődését a $t = 0, 1, \ldots$ időpontokban. Jelölje $N(t)$ a populáció nagyságának a mérőszámát a t időpontban. A Malthus-féle fejlődési törvény szerint $N(t)$ arányos $N(t - 1)$-gyel, vagyis

$$N(t) = rN(t - 1) \qquad (t = 1, 2, 3, \ldots),$$

ahol r a *szaporodási ráta*, amely azt mutatja meg, hogy a születések és halálozások összhatására növekszik ($r > 1$) vagy csökken ($r < 1$) a populáció. Ez egy egyszerű differenciaegyenlet (elsőrendű állandó együtthatós homogén lineáris rekurzió), amelynek a megoldása az

$$N(t) = r^t N(0) \qquad (t = 1, 2, 3, \ldots)$$

geometriai sorozat.

A valóságban azonban nagyon sok szaporodási folyamat nem exponenciális (például ma az európai országok lélekszámának alakulása). Ennek az az oka, hogy az r szaporodási ráta nem független a populáció nagyságától. A populációk élettere ugyanis véges, csak egy véges populációt képes eltartani, és ha a nagysága megközelíti ezt a határt, akkor a szaporodási ráta lecsökken. A modell javításához az r állandó helyett egy, a populáció számától is függő $r(t)$ arányossági tényezőt szokás venni. A legegyszerűbb eset az, amikor ez a függvény lineáris, vagyis $r(t) = \mu - \gamma N(t)$ alakú, ahol μ és γ pozitív állandók. μ a szaporodási ráta a szaporodás szempontjából ideális állapotban, vagyis akkor, amikor az élettér korlátlan; a γ állandó pedig azt adja meg, hogy milyen gyorsan csökken az élettér a populáció növekedésével. Ezekkel a jelölésekkel a modell így alakul:

$$N(t) = (\mu - \gamma N(t-1))N(t-1), \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots).$$

Azonos átalakításokkal a

$$\frac{\gamma N(t)}{\mu} = \mu \left(1 - \frac{\gamma N(t-1)}{\mu}\right) \frac{\gamma N(t-1)}{\mu}, \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots)$$

egyenlet adódik. Bevezetve az $x(t) := \gamma N(t)/\mu \quad (t = 0, 1, 2, \ldots)$ függvényt, egyenletünk az

$$x(t) = \mu x(t-1)(1 - x(t-1)) \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

alakban írható. Ezt a másodrendű nemlineáris rekurziót *logisztikus rekurziónak* szokás nevezni.

3. Rekurzív sorozatok explicit előállítása

Ebben a fejezetben néhány olyan rekurzív sorozatot mutatunk be, amelynek az n-edik tagja megadható explicit képlettel.

3.1. Elsőrendű lineáris rekurziók

Az *elsőrendű változó együtthatós lineáris rekurzió* (*differenciaegyenlet*) általános alakja:

$$\begin{aligned} &x_0 \in \mathbb{R}, \\ &x_n = a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \end{aligned} \tag{1}$$

ahol (a_n) és (b_n) adott sorozatok, a rekurzió *együtthatófüggvényei.*

A fenti (x_n) sorozatra igen egyszerűen kapunk explicit képletet. Írjuk fel ugyanis a sorozat első néhány tagját:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0x_0 + b_0, \\ x_2 &= a_1x_1 + b_1 = a_1a_0x_0 + a_1b_0 + b_1, \\ x_3 &= a_2x_2 + b_2 = a_2a_1a_0x_0 + a_2a_1b_0 + a_2b_1 + b_2, \\ x_4 &= a_3x_3 + b_3 = a_3a_2a_1a_0x_0 + a_3a_2a_1b_0 + a_3a_2b_1 + a_3b_2 + b_3. \end{aligned}$$

Ebből már megsejthető, és teljes indukcióval be is bizonyítható a következő állítás.

1. tétel. *Az* (1) *rekurzív sorozat explicit alakja:*

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} b_j \cdot \prod_{k=j+1}^{n-1} a_k \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Itt és a továbbiakban megállapodunk abban, hogy $\prod\limits_{k=i}^{j} a_k := 1$ ha $j < i$.

1. példa. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} &x_0 = 1, \\ &x_n = nx_{n-1} + 2^{n-1}n! \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

sorozat explicit alakját.

Megjegyzés. A differenciaegyenleteknél szokásos szóhasználattal élve a fenti feladatot így is fogalmazhatjuk: *Oldjuk meg az*

$$x_0 = 1, \qquad x_n = nx_{n-1} + 2^{n-1}n! \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

kezdetiérték-problémát.

Megoldás. Az együtthatósorozatok ebben az esetben a következők:

$$a_{n-1} = n \qquad \text{és} \qquad b_{n-1} = 2^{n-1}n! \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Mivel $\prod_{i=0}^{n-1} a_i = a_0 a_1 \cdots a_{n-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$ és

$$b_j \prod_{k=j+1}^{n-1} a_k = b_j a_{j+1} a_{j+2} \cdots a_{n-1} = 2^j (j+1)!(j+2)(j+3) \cdots n = 2^j n!,$$

ezért (2) alapján azt kapjuk, hogy

$$x_n = n! + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j n! = n!\Big(1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j\Big) = n! 2^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \quad \blacksquare$$

Az állandó együtthatós esetben a (2) képlet lényegesen egyszerűsödik.

2. tétel. *Az elsőrendű állandó együtthatós lineáris rekurzió általános alakja:*

$$\begin{aligned} &x_0 \in \mathbb{R}, \\ &x_n = a x_{n-1} + b \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \end{aligned} \tag{3}$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Ennek explicit megoldása:

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b\dfrac{a^n - 1}{a - 1}, & \text{ha } a \neq 1 \\ x_0 + bn, & \text{ha } a = 1 \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Bizonyítás. Mivel az együtthatósorozatok $a_n = a$ és $b_n = b$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, ezért

$$\prod_{j=0}^{n-1} a_i = a_0 a_1 \cdots a_{n-1} = a^n,$$

$$\prod_{k=j+1}^{n-1} a_k = a_{j+1} a_{j+2} \cdots a_{j+(n-j-1)} = a^{n-j-1},$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_j \prod_{k=j+1}^{n-1} a_k = b \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j-1} = b\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + 1\right).$$

Az

$$a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + 1 = \begin{cases} \dfrac{a^n - 1}{a - 1}, & \text{ha } a \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ n, & \text{ha } a = 1 \end{cases}$$

azonosság felhasználásával a (2) képletből megkapjuk a bizonyítandó (4) összefüggéseket. ■

Ha (3)-ban $a = 1$ és $b \in \mathbb{R}$, akkor

$$x_0 \in \mathbb{R}, \qquad x_n = x_{n-1} + b \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

a b differenciájú *számtani sorozat*, amelynek n-edik tagjára (4)-ből a jól ismert

$$x_n = x_0 + nb \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

képlet adódik.

Ha (3)-ban $b = 0$ és $a \in \mathbb{R}$, akkor

$$x_0 \in \mathbb{R}, \qquad x_n = a x_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

pedig az a hányadosú *geometriai sorozat*. Ennek n-edik tagjára is megkapjuk (4)-ből a jól ismert

$$x_n = x_0 a^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

összefüggést.

2. példa. Tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}$ kezdőérték esetén oldjuk meg az

$$\text{(a)} \quad x_n = \tfrac{1}{2} x_{n-1} + 3, \qquad \text{(b)} \quad x_n = -3x_{n-1} + 4$$

differenciaegyenleteket.

Megoldás. A (4) képletben az $a = \frac{1}{2}$ és $b = 3$ helyettesítéseket elvégezve az (a) esetben azt kapjuk, hogy

$$x_n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n (x_0 - 6) + 6 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A (b) egyenlet megoldásához szintén a (4) képletet használjuk az $a = -3$ és $b = 4$ értékekkel:

$$x_n = (-3)^n (x_0 - 1) + 1 \qquad (n \in \mathbb{N}). \quad ■$$

3. példa. (Lakáskölcsön visszafizetése.) Tegyük fel, hogy egy család a 0 időpontban $x_0 = A$ összegű lakáskölcsönt vesz fel a következő feltételekkel: a folyószámlájukra minden hónapban b összeget fizet be és a visszafizetés végéig az r%-os kamatláb rögzített. Mennyi lesz a b havi törlesztésük, ha N hónap alatt tervezik a visszafizetést?

Megoldás. Jelölje x_n az n-edik hónapban fennálló tartozást. Ennek a probémának az igen egyszerű matematikai modellje az

$$\begin{aligned} &x_0 = A, \\ &x_n = (1 + 0,01r)x_{n-1} - b \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

elsőrendű állandó együtthatós inhomogén lineáris rekurzió. A (4) képlet alapján

$$x_n = (1 + 0,01r)^n A - b\frac{(1 + 0,01r)^n - 1}{0,01r} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha a felvett kölcsönt az N-edik hónap végéig kell visszafizetni, akkor az

$$x_N = (1 + 0,01r)^N A - b\frac{(1 + 0,01r)^N - 1}{0,01r} = 0$$

összefüggésnek kell teljesülni. Tehát ha előre rögzítjük a kölcsön N futamidejét, akkor az egy hónapra eső részlet:

$$b = A \cdot 0,01r\frac{1}{1 - (1 + 0,01r)^{-N}}. \quad \blacksquare$$

3.2. A Fibonacci-sorozat

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy több ötlet alkalmazásával hogyan kaphatjuk meg az

$$\begin{aligned} x_0 = 0, &\qquad x_1 = 1, \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} &\quad (n = 2, 3, 4, \ldots) \end{aligned} \tag{1}$$

Fibonacci-sorozat explicit képletét.

Az első *ötlet* az, hogy először az x_0, x_1 kezdőértékek figyelembevétele nélkül csak az (1) rekurziós formulára koncentrálunk, és a jól ismert $1, q, q^2 \ldots$ alakú geometriai sorozatok között keresünk olyanokat, amelyek kielégítik ezt az összefüggést. Az azonosan 0-sorozat ($q = 0$) nyilván egy (kevésbé érdekes) megoldás. Tegyük fel, hogy $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Az $x_n = q^n \quad n = 2, 3, \ldots$ kifejezést az (1)-be beírva azt kapjuk, hogy

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2} \quad \Longleftrightarrow \quad q^2 = q + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad q^2 - q - 1 = 0.$$

Ebből

$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy a

$$q_1^n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$q_2^n = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

mértani sorozatok mindegyike kielégíti az (1) rekurziós összefüggést.

A másik ötlet egy (egyszerű) *észrevétel*: ha két sorozat kielégíti (1)-et, akkor tetszőleges lineáris kombinációjukra is teljesül (1). Ezért minden α és β valós szám esetén az

$$x_n := \alpha q_1^n + \beta q_2^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

sorozatra is fennáll az (1) egyenlőség.

A (2) sorozat az (1) rekurziós egyenlet *általános megoldása* a következő értelemben. Tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén (2) kielégíti (1)-et. (Ezt láttuk.) Fordítva: ha (x_n) az (1) rekurziónak egy tetszőleges (konkrét) megoldása, akkor egyértelműen léteznek olyan α és β valós számok, hogy

$$x_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ennek igazolásához tekintsük az adott x_0, x_1 (kezdő)értékekkel az

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha + \beta \\ x_1 &= \alpha q_1 + \beta q_2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol α és β az ismeretlen. Ennek pontosan egy megoldása van:

$$\alpha = \frac{x_1 - x_0 q_2}{q_1 - q_2}, \qquad \beta = \frac{x_0 q_1 - x_1}{q_1 - q_2}.$$

Megmutattuk tehát azt, hogy az (1) rekurziós összefüggés minden megoldása felírható (2) alakban.

Vegyük most a Fibonacci-sorozat $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ kezdőértékeit. Az α és a β paraméterekre azt kapjuk, hogy

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

A fentiek szerint ezekkel a paraméterekkel képzett

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sorozat kielégíti (1)-et is, ezért ez a Fibonacci-sorozat explicit alakja.

3.3. Másodrendű lineáris rekurziók

Várható, hogy az előző pontban alkalmazott ötleteket felhasználhatjuk az (1)-nél általánosabb rekurziók megoldására is.

Tekintsük az

$$x_0 = A, \qquad x_1 = B,$$
$$x_n = a x_{n-1} + b x_{n-2} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots) \tag{1}$$

rekurzív sorozatot, ahol A, B, a és b adott (rögzített) valós számok. Az ilyen sorozatokat *másodrendű lineáris* rekurziónak nevezzük.

Feladatunk tehát explicit képlet megadása x_n-re.

Ha $A = B = 0$, akkor a triviális megoldás $x_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, ezért feltehetjük, hogy A és B közül legalább az egyik 0-tól különböző.

Az előző pont alapján a (q^n) geometriai sorozatok között keresünk olyanokat, amelyekre (1) teljesül. Ekkor

$$q^n = aq^{n-1} + bq^{n-2} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots). \tag{2}$$

Ennek az egyenletnek $q = 0$ megoldása (a $0^0 := 0$ megállapodással), a (q^n) sorozat tehát a fentebb tárgyalt azonosan 0 sorozat. Ha $q \neq 0$, akkor (2)-ből azt kapjuk, hogy

$$q^2 - aq - b = 0,$$

azaz q gyöke a

$$p(\lambda) := \lambda^2 - a\lambda - b$$

polinomnak. Ezt a p polinomot az (1) rekurzió *karakterisztikus polinomjának* nevezzük.

Tudjuk, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén ennek a másodfokú polinomnak multiplicitással számolva két (általában komplex!) gyöke van. A következő három eset lehetséges:

1. eset: p-nek két különböző valós gyöke van $(\Leftrightarrow\ a^2 + 4b > 0)$.
2. eset: p-nek egy kétszeres valós gyöke van $(\Leftrightarrow\ a^2 + 4b = 0)$.
3. eset: p-nek egy komplex konjugált-pár gyöke van $(\Leftrightarrow\ a^2 + 4b < 0)$.

Az rögtön látható, hogy az 1. eset a Fibonacci-sorozatnál alkalmazott ötletekkel kezelhető. Ott két „lényegében” különböző geometriai sorozattal adtuk meg a rekurzív egyenletnek egy kétparaméteres (α és β-tól függő) megoldásseregét. Ezekből az α és a β paraméterek alkalmas megválasztásával tudtuk kiválasztani az x_0 és az x_1 kezdőértékeknek megfelelő sorozatot. A 2. és a 3. esetben ez közvetlenül nem alkalmazható.

1. eset. Jelölje q_1 és q_2 a p karakterisztikus polinom különböző valós gyökeit. Az előző pont lépéseit megismételve azt kapjuk, hogy az (1) rekurziós egyenlet általános megoldása:

$$x_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ahol α és β tetszőleges valós paraméterek. Ha ezeket úgy választjuk meg, hogy

$$\alpha = \frac{B - Aq_2}{q_1 - q_2}, \qquad \beta = \frac{Aq_1 - B}{q_1 - q_2},$$

akkor az így kapott (x_n) sorozat kezdőértékei $x_0 = A$ és $x_1 = B$.

1. példa. Adjuk meg az

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 1,$$
$$x_n = x_{n-1} + 6x_{n-2} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

rekurzív sorozat explicit alakját.

Megoldás. A karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2).$$

Ennek gyökei $q_1 = -2$ és $q_2 = 3$. Az $x_n = x_{n-1} + 6x_{n-2}$ rekurzív összefüggés általános megoldása

$$\alpha q_1^n + \beta q_2^n = \alpha(-2)^n + \beta 3^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Az α és β értékeket az $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ kezdeti értékek illesztésével határozhatjuk meg. Az $x_0 = 0$ feltételből $\alpha + \beta = 0$, az $x_1 = 1$ feltételből pedig a $-2\alpha + 3\beta = 1$ adódik. Az így kapott egyenletrendszer megoldása $\alpha = -\frac{1}{5}$, $\beta = \frac{1}{5}$, ezért a sorozat explicit alakja:

$$x_n = -\frac{1}{5}(-2)^n + \frac{1}{5}3^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \quad \blacksquare$$

2. eset. A p karakterisztikus polinomnak csak úgy lehet kétszeres valós gyöke, ha az egyenlet diszkriminánsa 0, azaz

$$a^2 + 4b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b = -\frac{a^2}{4}. \tag{3}$$

Ekkor p teljes négyzet:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b = \left(\lambda - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + 4b}{4} = \left(\lambda - \frac{a}{2}\right)^2.$$

Jelölje $q\ \left(= \frac{a}{2}\right)$ a p polinom kétszeres gyökét. Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az

$$x_n = \alpha q^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sorozat kielégíti az (1) rekurziós egyenletet. Az 1. esettől eltérően most csak az egyetlen α paramétertől függő megoldásseregünk van, ezért két kezdőértéket általában nem lehet tetszőlegesen megválasztani.

Most egy újabb *fontos észrevétel* fog segíteni. Nevezetesen az, hogy a (q^n) sorozat mellett az

$$x_n = nq^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sorozat is megoldása az (1) rekurzív egyenletnek. Valóban:

$$nq^n = a(n-1)q^{n-1} + b(n-2)q^{n-2} \iff nq^2 = a(n-1)q + b(n-2) \iff$$
$$\iff n(q^2 - aq - b) = -aq - 2b.$$

Az utolsó egyenlőség bal oldala 0, mert q gyöke a karakterisztikus polinomnak, a jobb oldal pedig a $b = -\frac{a^2}{4}$ miatt egyenlő 0-val.

A fentiek alapján tehát minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméter esetén az

$$x_n = \alpha q^n + \beta n q^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sorozat kielégíti az (1) rekurziós egyenletet, és ez annak az általános megoldása. Ebből a kétparaméteres megoldásseregből az $x_0 = A$ és $x_1 = B$ kezdőfeltételeknek is eleget tevő sorozat már egyértelműen meghatározható, ugyanis az

$$A = \alpha, \qquad B = \alpha q + \beta q$$

egyenletrendszer az α, β ismeretlenekre egyértelműen megoldható:

$$\alpha = A \quad \text{és} \quad \beta = \frac{B - Aq}{q}.$$

Az eddigieket összefoglalva a következőt kapjuk: ha A és B közül legalább az egyik 0-tól különböző, $b = -\frac{a^2}{4}$ és $q = \frac{a}{2}$, akkor az (1) rekurziós egyenlet $x_0 = A$, $x_1 = B$ kezdeti feltételeknek eleget tevő egyetlen megoldása:

$$x_n = \left(A + \frac{B - Aq}{q} n\right) q^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

2. példa. Adjuk meg az

$$x_0 = -2, \qquad x_1 = 3,$$
$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

rekurzív sorozat explicit alakját.

Megoldás. A karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Ennek $q = 1$ kétszeres gyöke. Az $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ rekurzív összefüggés általános megoldása

$$\alpha q^n + \beta n q^n = \alpha + \beta n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Az α és β értékeket az $x_0 = -2$, $x_1 = 3$ kezdeti értékek illesztésével határozhatjuk meg. Az $x_0 = -2$ feltételből $-2 = \alpha$, az $x_1 = 3$ feltételből pedig a $3 = \alpha + \beta$, azaz $\beta = 5$ adódik. A sorozat explicit alakja:

$$x_n = 5n - 2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \quad \blacksquare$$

3. eset. Tegyük fel, hogy a $p(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b$ karakterisztikus polinomnak a $q = u + iv$ ($v \neq 0$) komplex szám egyik gyöke. Mivel a p polinom együtthatói valósak, ezért q komplex konjugáltja, vagyis $\overline{q} = u - iv$ is gyöke p-nek. Ez az eset pontosan akkor áll fenn, ha p diszkriminánsa negatív, azaz $a^2 + 4b < 0$.

Most (q^n) és $(\overline{q}^n)$ komplex számsorozatok, és mindegyik kielégíti az (1) rekurzív összefüggést, amelynek a *komplex értékű* általános megoldása:

$$x_n = \alpha q^n + \beta \overline{q}^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}).$$

A vizsgált sorozatunk paraméterei, az A, B, a és b számok valósak, ezért x_n is valós minden n index esetén. A fenti egyenlőség alapján ez ebben az esetben akkor és csak akkor teljesül, ha az együtthatók egymás komplex konjugáltjai, vagyis $\beta = \overline{\alpha}$. Az (1) rekurzív egyenlet *valós* általános megoldása tehát

$$x_n = \alpha q^n + \overline{\alpha} \cdot \overline{q}^n = \alpha q^n + \overline{\alpha q^n} = 2\mathrm{Re}\ (\alpha q^n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ \alpha \in \mathbb{C}).$$

Az $x_0 = A$ és $x_1 = B$ kezdőértékek figyelembevételével az $\alpha \in \mathbb{C}$ ismeretlenre a következő egyenletrendszert kapjuk

$$\begin{aligned} A &= \alpha + \overline{\alpha}, \\ B &= \alpha q + \overline{\alpha}\, \overline{q}. \end{aligned}$$

Ennek egyetlen megoldása:

$$\alpha = \frac{B - A\overline{q}}{q - \overline{q}}.$$

Az A, B, a és b valós paraméterek tehát egyértelműen meghatározzák a q és az α komplex számokat. A további képletek egyszerűbb alakúak lesznek, ha áttérünk a q és az α komplex számok trigonometrikus (exponenciális) alakjaira. Legyen

$$\begin{aligned} q &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}, \\ \alpha &= \frac{1}{2}\varrho(\cos\omega + i\sin\omega) = \frac{1}{2}\varrho e^{i\omega}. \end{aligned}$$

Ezek az összefüggések egyértelműen meghatározzák az $r \geq 0$, $\varrho \geq 0$ abszolút értékeket, valamint a $\varphi, \omega \in [0, 2\pi)$ szögeket.

Megmutattuk tehát azt, hogy a 3. esetben az (1) rekurziós egyenlet $x_0 = A$ és $x_1 = B$ kezdeti feltételeket kielégítő egyetlen megoldása a következő sorozat:

$$\begin{gathered} x_n = 2\mathrm{Re}\ (\alpha q^n) = \varrho r^n \mathrm{Re}\ \left(e^{i(n\varphi+\omega)}\right) = \varrho r^n \cos(n\varphi + \omega) \\ (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{4}$$

3. példa. *Adjuk meg az*

$$\begin{aligned} x_0 = 0, &\qquad x_1 = 1, \\ x_n = -x_{n-2} &\quad (n = 2, 3, 4, \ldots) \end{aligned}$$

rekurzív sorozat explicit alakját.

1. megoldás. A sorozat első néhány tagja:

$$0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ \ldots,$$

ami alapján sejhető, hogy egy 4 periódusú periodikus sorozatról van szó, amelyik első négy tagja:

$$0,\ 1,\ 0,\ -1.$$

A periodicitás azonban rögtön következik az $x_n = -x_{n-2}$ rekurziós képletből, ugyanis

$$x_n = -x_{n-2} = -(-x_{n-4}) = x_{n-4} \qquad (n = 4, 5, 6, \ldots).$$

A sorozat explicit alakja tehát:

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 2k \\ (-1)^k, & \text{ha } n = 2k+1. \end{cases} \blacksquare$$

2. megoldás. Az ismertetett módszerrel is megoldjuk a feladatot. Az

$$x_n = -x_{n-2} = 0 \cdot x_{n-1} + (-1) \cdot x_{n-2}$$

rekurzió karakterisztikus polinomja

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 0 \cdot \lambda - (-1) = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Ennek

$$q = i = 1\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\right)$$

az egyik gyöke (a másik pedig $\overline{q} = -i$). A kezdeti értékek $x_0 = A = 0$, $x_1 = B = 1$, ezért

$$\alpha = \frac{B - A\overline{q}}{q - \overline{q}} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right).$$

A (4) képlet alapján a sorozat explicit alakja:

$$x_n = \cos\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Mivel

$$\cos\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 2k \\ (-1)^k, & \text{ha } n = 2k+1, \end{cases}$$

ezért ugyanazt kapjuk, mint az előbb. $\blacksquare$

4. példa. Adjuk meg az

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 1,$$
$$x_n = \sqrt{3}x_{n-1} - x_{n-2} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

rekurzív sorozat explicit alakját.

Megoldás. A rekurzió karakterisztikus polinomja:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \sqrt{3}\lambda + 1.$$

Ennek a

$$q = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = 1\left(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\cdot\sin\tfrac{\pi}{6}\right)$$

az egyik és $\overline{q} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ a másik gyöke. A kezdeti értékek $x_0 = 0 = A$ és $x_1 = 1 = B$, ezért

$$\alpha = \frac{B - A\overline{q}}{q - \overline{q}} = -i = \frac{1}{2}\cdot 2\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right).$$

A sorozat explicit alakja a (4) képlet alapján:

$$x_n = 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}n - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \ \blacksquare$$

5. példa. Adjuk meg az

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = 3,$$
$$x_n = 2x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

rekurzív sorozat explicit alakját.

Megoldás. A rekurzív egyenlet karakterisztikus polinomja:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Ennek

$$q = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\right)$$

az egyik, $\overline{q} = 1 - i$ pedig a másik gyöke. Az $x_0 = 1 = A$ és $x_1 = 3 = B$ kezdeti értékek alapján:

$$\alpha = \frac{B - A\overline{q}}{q - \overline{q}} = \frac{1}{2}(1 - 2i) = \frac{1}{2}\sqrt{5}(\cos\omega + i\sin\omega).$$

Az α komplex szám ω argumentumát nem lehet egyszerűen meghatározni, ezért a (4) képletben most az αq^n szám valós részét fogjuk kiszámolni.

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$q^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\tfrac{\pi}{4}\right)\right),$$

ezért

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,(\alpha q^n) &= \frac{(\sqrt{2})^n}{2}\mathrm{Re}\,\left[(1-2i)\left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\tfrac{\pi}{4}\right)\right)\right] = \\ &= \frac{(\sqrt{2})^n}{2}\Big(\cos\left(n\tfrac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(n\tfrac{\pi}{4}\right)\Big).\end{aligned}$$

(4) alapján a sorozat explicit képlete tehát

$$x_n = 2\mathrm{Re}\,(\alpha q^n) = (\sqrt{2})^n\left[\cos\frac{n\pi}{4} + 2\sin\frac{n\pi}{4}\right] \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \ \blacksquare$$

3.4. Az $x_n = rx_{n-1}(1 - x_{n-1})$ logisztikus rekurzió

Az előző pontokban láttuk, hogy vannak olyan általános módszerek, amelyekkel bizonyos *lineáris* rekurziók explicit képlettel is megadhatók. A helyzet lényegesen megváltozik akkor, ha *nemlineáris* rekurziókat tekintünk.

Ebben a pontban két igen egyszerű szerkezetű nemlineáris rekurzió (nemtriviális) explicit előállítását mutatjuk meg.

A pozitív valós r paraméterrel tekintsük a 3.2. pontban ismertetett

$$\begin{gathered} x_0 \in \mathbb{R}, \\ x_n = rx_{n-1}(1 - x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{gathered}$$

rekurzív sorozatot, amelyet *logisztikus rekurziónak* vagy *logisztikus differenciaegyenletnek* szokás nevezni.

A továbbiakban az $r = 4$ és az $r = 2$ speciális esetekkel fogunk foglalkozni.

A fenti rekurzív képlet jobb oldalával tekintsük az

$$f(x) := rx(1 - x) \qquad (x \in \mathbb{R};\ r > 0)$$

függvényt, és ennek az *n-edik iteráltját* definiáljuk a következő módon:

$$f^{[0]} := \mathrm{id}, \quad f^{[1]} := f, \quad f^{[n]} := f \circ f \circ \cdots \circ f \ \ (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Az utolsó képlet jobb oldala n tagú kompozíciót jelöl.

Ezzel ajelöléssel a logisztikus rekurziót így is felírhatjuk:

$$\begin{gathered} x_0 \in \mathbb{R}, \\ x_n = f^{[n]}(x_0) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{gathered}$$

Ennek a sorozatnak az explicit megadása egyenértékű az $f^{[n]}$ függvény explicit alakjának a meghatározásával.

- **Az $r = 4$ speciális eset**

Tekintsük az

$$f(x) := 4x(1 - x) \qquad (x \in [0, 1])$$

függvényt. Mivel $f : [0, 1] \to [0, 1]$ szürjektív, ezért az n-edik iteráltja, vagyis az $f^{[n]}(x)$ $(x \in [0, 1])$ függvény minden n természetes számra képezhető.

Az explicit alak előállításának *alapötlete alkalmas változótranszformáció alkalmazása.*

Az $x \in [0, 1]$ (régi) változó helyett vezessük be az α (új) változót a következőképpen:

$$x = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sin^2 \alpha =: \varphi(\alpha) \quad \left(\alpha \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]\right).$$

(Az ötletet illetően lásd [15]-at és [14]-et.)

Innen már minden egyszerű. Először azt jegyezzük meg, hogy a

$$\varphi : \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \to [0, 1]$$

függvény bijekció, és az inverze:

$$\varphi^{-1}(x) = \alpha = \tfrac{1}{2} \arccos(1 - 2x) \quad (x \in [0, 1]). \tag{1}$$

Nézzük sorba az f függvény iteráltjait:

$$\begin{aligned} f^{[1]}(x) &= f(x) = f(\sin^2 \alpha) = 4 \sin^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha) = \\ &= 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = \sin^2 2\alpha, \\ f^{[2]}(x) &= f(f(x)) = f(f(\sin^2 \alpha)) = f(\sin^2 2\alpha) = \sin^2(2^2\alpha), \\ f^{[3]}(x) &= f(f^{[2]}(x)) = f(\sin^2(2^2\alpha) = \sin^2(2^3\alpha). \end{aligned}$$

A fentiekből már megsejthető, és teljes indukcióval be is bizonyítható, hogy

$$f^{[n]} = f^{[n]}(\sin^2 \alpha) = \sin^2(2^n\alpha)$$
$$\left(x \in [0, 1],\ \alpha \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right],\ n = 0, 1, 2, \ldots\right).$$

A jobboldalt írjuk fel x függvényeként. Ehhez a $\sin^2 y = \frac{1-\cos 2y}{2}$, valamint az (1)-ból adódó

$$2\alpha = \arccos(1 - 2x)$$

összefüggést használjuk fel. Azt kapjuk, hogy

$$\sin^2(2^n\alpha) = \frac{1 - \cos(2^n \cdot 2\alpha)}{2} = \tfrac{1}{2} \left(1 - \cos\left(2^n \arccos(1 - 2x)\right)\right).$$

Bebizonyítottuk tehát az alábbi állítást.

1. tétel. *Az*

$$x_0 \in [0, 1],$$
$$x_n = 4x_{n-1}(1 - x_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

rekurzív sorozat explicit alakja:

$$x_n = \tfrac{1}{2} \left(1 - \cos\left(2^n \arccos(1 - 2x_0)\right)\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

• **Az $r = 2$ speciális eset**

Most az

$$f(x) := 2x(1 - x) \qquad \left(x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right)\right)$$

függvényből indulunk ki. Mivel $f : \left[0, \frac{1}{2}\right) \to \left[0, \frac{1}{2}\right)$ szürjektív, ezért az n-edik iteráltja, vagyis az $f^{[n]}(x)$ $\left(x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ függvény minden n természetes számra képezhető.

Az explicit alak előállításának *alapötlete most az alábbi változótranszformáció alkalmazása.*

Az $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ (régi) változó helyett vezessük be az α (új) változót a következőképpen:

$$x = \frac{1-e^{2\alpha}}{2} := \varphi(\alpha) \qquad (\alpha \in (-\infty, 0]).$$

(Az ötletet illetően lásd [14]-et.)

A $\varphi : (-\infty, 0] \to \left[0, \frac{1}{2}\right)$ függvény bijekció, és az inverze:

$$\varphi^{-1}(x) = \alpha = \tfrac{1}{2}\log(1-2x) \quad \left(x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right)\right). \tag{2}$$

Nézzük sorba az f függvény iteráltjait:

$$\begin{aligned}
f^{[1]}(x) &= f(x) = f\left(\frac{1-e^{2\alpha}}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1-e^{2\alpha}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1-e^{2\alpha}}{2}\right) = \\
&= \frac{(1-e^{2\alpha})(1+e^{2\alpha})}{2} = \frac{1-e^{4\alpha}}{2}, \\
f^{[2]}(x) &= f(f(x)) = f\left(\frac{1-e^{4\alpha}}{2}\right) = \frac{1-e^{8\alpha}}{2}, \\
f^{[3]}(x) &= f(f^{[2]}(x)) = f\left(\frac{1-e^{8\alpha}}{2}\right) = \frac{1-e^{16\alpha}}{2}.
\end{aligned}$$

Ezekből a képletekből már sejthető és teljes indukcióval be is bizonyítható, hogy

$$f^{[n]}(x) = f^{[n]}\left(\frac{1-e^{2\alpha}}{2}\right) = \frac{1-e^{2^n \cdot 2\alpha}}{2}$$
$$\left(x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right),\ \alpha \in (-\infty, 0],\ n = 0, 1, 2, \ldots\right).$$

(2) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{1-e^{2^n \cdot 2\alpha}}{2} = 1 - e^{2^n \log(1-2x)}.$$

Bebizonyítottuk tehát az alábbi állítást.

2. tétel. *Az*

$$x_0 \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right),$$
$$x_n = 2x_{n-1}(1-x_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

rekurzív sorozat explicit alakja:

$$x_n = \tfrac{1}{2}\left(1 - \exp\left(2^n \log(1-2x_0)\right)\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

4. Rekurzív sorozatok határértéke

A 2.1. pontban volt arról szó, hogy a rekurziókkal kapcsolatos egyik alapvető kérdés a *megoldások jellemzésének a problémája.* Egy sorozat viselkedésének a leírásához a következő tulajdonságokat használjuk: monotonitás, korlátosság, határérték, periodicitás. Ebben a fejezetben a *határérték* szempontjából vizsgáljuk meg a rekurziókat. Ha ismerjük a sorozat explicit alakját, akkor a határérték vizsgálatánál megismert eredményeket használhatjuk. Explicit előállítást azonban csak viszonylag „kevés" esetben ismerünk. A továbbiakban ilyen példákat is mutatunk.

Explicit képlet hiányában más utat kell keresni. Két olyan módszert ismertetünk, amelyekkel rekurzív sorozatok konvergenciáját sok esetben lehet vizsgálni. Az egyik módszer alapja a *monoton sorozatok konvergenciájára* vonatkozó tétel, a másiké pedig a *Banach-féle fixponttétel.*

4.1. Elsőrendű lineáris rekurziók

Az egyszerűség végett most csak a 3.1. pontban szereplő elsőrendű, állandó együtthatós lineáris rekurziókat, vagyis az

$$\begin{aligned} &x_0 \in \mathbb{R},\\ &x_n = ax_{n-1} + b \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned} \tag{1}$$

sorozatokat tekintjük, ahol a, b adott valós számok. Ennek explicit alakjára a következő képletet kaptuk:

$$x_n = \begin{cases} a^n \left(x_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a}, & \text{ha } a \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x_0 + bn, & \text{ha } a = 1 \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

A kitűzőtt feladatunk tehát (x_n) határértékének a vizsgálata az x_0, az a és a b paraméterek függvényében.

Induljunk ki a következő egyszerű észrevételből: Ha $|a| < 1$, akkor $\lim(a^n) = 0$ alapján az (x_n) sorozat konvergens és a határértéke:

$$\lim(x_n) = \frac{b}{1-a} =: x^*. \tag{3}$$

Sőt: a (2) explicit alakból az is rögtön adódik, hogy ha a kezdőértéket x^*-nak választjuk, akkor az (x_n) sorozat minden további tagja is x^* lesz, azaz

$$\text{ha } x_0 := x^*, \text{ akkor } x_n = x^* \text{ minden } n = 1, 2, 3, \ldots \text{ indexre.}$$

A (3)-ban definiált x^* számot az (1) rekurzió (vagy differenciaegyenlet) *stacionárius pontjának* vagy *egyensúlyi helyzetének* nevezzük.

A (2) képletből azt is látjuk, hogy (x_n) határértéke az (a^n) sorozat határértékén múlik. A továbbiakban sorra vesszük a lehetséges eseteket.

1. eset. Legyen $a = 0$. Ekkor tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}$ kezdőérték és $b \in \mathbb{R}$ esetén (x_n) az $x_0, b, b, b, \ldots$ sorozat, ami konvergens, és $\lim(x_n) = b$.

2. eset. Legyen $a = 1$. Ekkor az

$$\begin{aligned} &x_0 \in \mathbb{R}, \\ &x_n = x_{n-1} + b \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

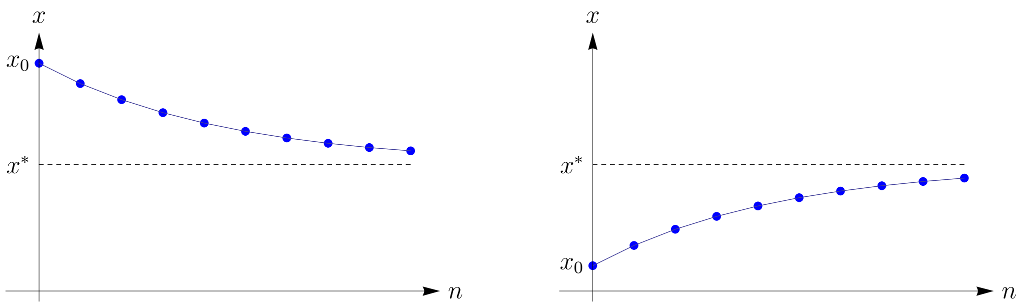
számtani sorozatot kapjuk. Ennek a határértékére a következő adódik:

$$\lim(x_n) = \begin{cases} x_0, & \text{ha } b = 0 \\ +\infty, & \text{ha } b > 0 \\ -\infty, & \text{ha } b < 0. \end{cases}$$

3. eset. Legyen $0 < a < 1$. Ekkor $\lim(a^n) = 0$, ezért (2) alapján az (x_n) sorozat minden $x_0 \in \mathbb{R}$ kezdőérték esetén az x^* stacionárius ponthoz konvergál, azaz

$$\lim(x_n) = \frac{b}{1-a} = x^*.$$

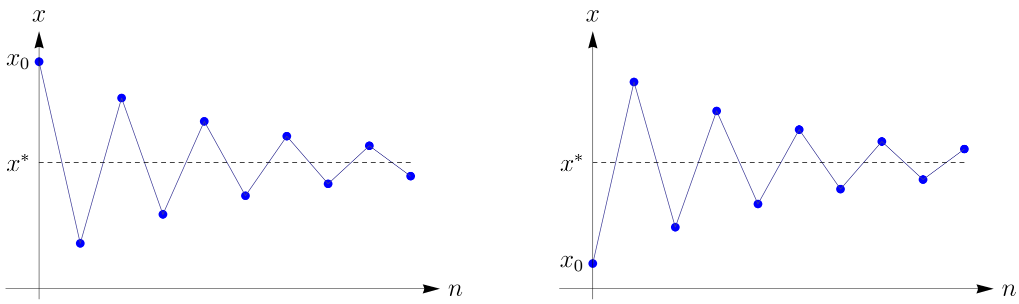
(2)-ből az (x_n) sorozat viselkedésére még további „finomabb” részletek is leolvashatók. Mivel (a^n) monoton csökkenve tart 0-hoz, ezért az (x_n) sorozat $x_0 > x^* = \frac{b}{1-a}$ esetén *monoton csökkenve*, $x_0 < x^* = \frac{b}{1-a}$ esetén *monoton növekedve* tart az x^* stacionárius ponthoz. Ezt az esetet a következő ábrán szemléltetjük:



$x_0 > x^* = \frac{b}{1-a}, \quad a < 0 < 1$ $\qquad$ $x_0 < x^* = \frac{b}{1-a}, \quad a < 0 < 1$

1. ábra

4. eset. Legyen $-1 < a < 0$. Most szintén igaz a $\lim(x_n) = x^*$ egyenlőség. Az (x_n) sorozat viselkedésének a finomabb részletei is közvetlenül leolvashatók a (2) explicit képletből. Az (a^n) sorozat páros indexű részsorozata monoton csökkenve, a páratlan indexű pedig monoton növekedve tart 0-hoz. Ebből az következik, hogy minden $x_0 > x^*$ kezdőérték esetén az (x_n) sorozat páros indexű részsorozata *monoton csökkenve*, a páratlan indexű pedig *monoton növekedve* tart x^*-hoz. Ha $x_0 < x^*$, akkor pedig (x_n) páros indexű részsorozata *monoton növekedve*, a páratlan indexű *monoton csökkenve* tart x^*-hoz. Az (x_n) sorozatnak az ilyen típusú viselkedését röviden úgy is szokás kifejezni, hogy (x_n) *oszcillálva tart* a határértékéhez. Ezt az esetet szemlélteti a következő ábra:



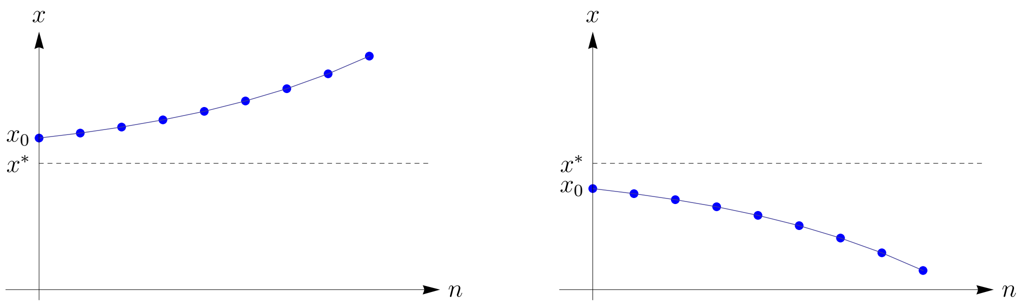
$x_0 > x^* = \frac{b}{1-a}$, $\quad -1 < a < 0$ $\qquad$ $x_0 < x^* = \frac{b}{1-a}$, $\quad -1 < a < 0$

2. ábra

5. eset. Legyen $a > 1$. Most $\lim(a^n) = +\infty$, ezért (2) alapján

$$\lim(x_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } x_0 > x^* = \frac{b}{1-a} \\ -\infty, & \text{ha } x_0 < x^* = \frac{b}{1-a}. \end{cases}$$

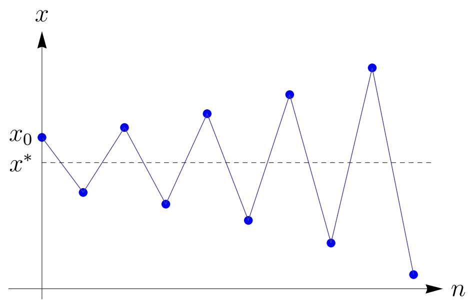
Az (x_n) sorozat mindegyik esetben monoton, $x_0 > x^*$ esetén monoton növekedő, ha $x_0 < x^*$, akkor pedig monoton csökkenő. Ezt szemlélteti a következő ábra:



$x_0 > x^* = \frac{b}{1-a}$, $\quad a > 1$ $\qquad$ $x_0 < x^* = \frac{b}{1-a}$, $\quad a > 1$

3. ábra

6. eset. Legyen $a < -1$. Most az (a^n) sorozat páros indexű részsorozata monoton növekedve tart $(+\infty)$-hez, a páratlan indexű pedig monoton csökkenve tart $(-\infty)$-hez. Ebből az következik, hogy minden $x_0 > x^*$ kezdőérték esetén (x_n) páros indexű részsorozata monoton növekedő módon tart $(+\infty)$-hez, a páratlan indexű pedig monoton csökkenve tart $(-\infty)$-hez. Hasonló a helyzet, ha $x_0 < x^*$. Az (x_n) sorozat ilyen típusú viselkedését úgy fejezzük ki, hogy az (x_n) sorozat *osszcillálva divergens*. Ezt az esetet a következő ábrán szemléltetjük:



$x_0 > x^* = \frac{b}{1-a}, \quad a < -1$

4. ábra

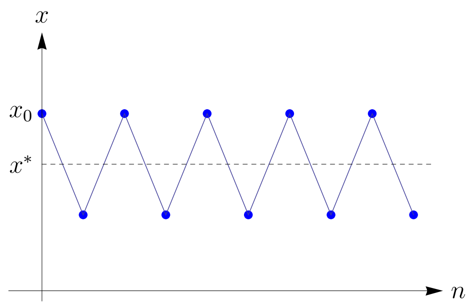
7. eset. Legyen $a = -1$, akkor

$$x_n = (-1)^n (x_0 - \frac{1}{2}b) + \frac{1}{2}b \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

és $x^* = \frac{1}{2}b$. Mivel $x_{2n} = x_0$ és $x_{2n+1} = -x_0 + b \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$, ezért (x_n) egy 2-periodikus sorozat, vagyis kielégíti az

$$x_{n+2} = x_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

összefüggést. Az (x_n) sorozat ebben az esetben az x^* stacionárius pont körül oszcillál az $\left|x_0 - \frac{b}{2}\right|$ állandóval (lásd az 5. ábrát).



$x_0 > x^* = \frac{b}{1-a}, \quad a = -1$

5. ábra

Az eddigieket a következőképpen foglaljuk össze.

1. tétel. *Tegyük fel, hogy a és b adott valós számok, és $a \neq 1$ esetén legyen*

$$x^* := \frac{b}{1-a}.$$

Ekkor az

$$x_0 \in \mathbb{R},$$
$$x_n = a x_{n-1} + b \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

sorozat határértékére a következők teljesülnek:

$$\lim(x_n)\begin{cases} = x_0, & \textit{ha } x_0 = x^*,\ a \neq 1 \textit{ és } b \in \mathbb{R} \\ = x^*, & \textit{ha } |a| < 1 \textit{ és } x_0 \in \mathbb{R} \\ = \operatorname{sign}(b)\cdot(+\infty), & \textit{ha } a = 1 \textit{ és } |b| > 0 \\ = x_0, & \textit{ha } a = 1 \textit{ és } b = 0 \\ = \operatorname{sign}(x_0 - x^*)\cdot(+\infty), & \textit{ha } x_0 \in \mathbb{R},\ a > 1 \textit{ és } b \in \mathbb{R} \\ \nexists\ (\textit{oszcillálva divergens}), & \textit{ha } a \leq -1,\ x_0 \neq x^* \textit{ és } b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

•**Az egyensúlyi helyzet stabilitása**

Most rögzített $a, b \in \mathbb{R}$ esetén figyeljük meg az (1) sorozat viselkedését akkor, ha *csak* az x_0 kezdőértéket változtatjuk.

Tekintsük először azt az esetet, amikor $a = -1$, b rögzített és x_0 változik. Az előzőekből (lásd a 7. eset) világos, hogy ha x_0-at az x^* egyensúlyi helyzet egy „kicsi" környezetéből indítjuk, akkor az (x_n) sorozat minden tagja benne marad az x^* pont egy „kicsi" környezetében. Ezt röviden úgy fejezzük ki, hogy az x^* egyensúlyi helyzet **stabilis**.

Rögzítsük most az $|a| < 1$ és $b \in \mathbb{R}$ számokat (lásd az 1., 3. és 4. eseteket), és változtassuk az x_0 kezdőértékeket. Azt látjuk, hogy az x^* egyensúlyi helyzet egy „kicsi" környezetéből kiinduló megoldások x^*-hoz tartanak. Az ilyen esetekben azt mondjuk, hogy az x^* egyensúlyi helyzet **aszimptotikusan stabilis**.

A fennmaradó esetekben az x^* egyensúlyi helyzet egy „kicsi" környezetéből kiinduló megoldások x^*-tól eltávolodnak, és ekkor azt mondjuk, hogy az x^* egyensúlyi helyzet **instabilis**.

4.2. Monoton sorozatok

Határérték szempontjából a monoton sorozatok a legegyszerűbbek, ugyanis *minden monoton sorozatnak van határértéke.* A határérték $+\infty$, ha a sorozat felülről nem korlátos és $-\infty$, ha alulról nem korlátos. Egy monoton sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha korlátos. Ez azt jelenti, hogy monoton sorozatok esetén a határérték vizsgálatát vissza lehet vezetni a sokkal egyszerűbb monotonitás és a korlátosság vizsgálatára.

Rekurzív sorozatok határértékének a vizsgálatára tehát a következő kézenfekvő módszer adódik: Ha meg tudjuk mutatni, hogy a sorozat monoton és korlátos, akkor ebből már következik, hogy a sorozat konvergens, és a határértékét a rekurzív összefüggésből nyerhető egyenlet gyökeiből próbáljuk kiválasztani. A módszert a következő példán mutatjuk be.

1. példa. Konvergens-e az

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{2}, \\ x_n &= \sqrt{2x_{n-1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

sorozat? Ha igen, akkor mi a határértéke?

Megoldás. *A monotonitás vizsgálatához* írjuk fel a sorozat első néhány tagját:

$$x_0 = \sqrt{2}, \quad x_1 = \sqrt{2\sqrt{2}}, \quad x_2 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}.$$

Ebből az a sejtésünk alakul ki, hogy az (x_n) sorozat monoton növekedő, azaz

$$x_n \le x_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezt a sejtést teljes indukcióval be is bizonyíthatjuk: Mivel $x_0 \le x_1$, ezért csak a következőt kell megmutatnunk: ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ mellett $x_n \le x_{n+1}$, akkor fennáll az $x_{n+1} \le x_{n+2}$ egyenlőtlenség is. Ez viszont igaz, mert

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \le \sqrt{2x_{n+1}} = x_{n+2}.$$

Az (x_n) sorozat tehát monoton növekedő.

Korlátosság. A sorozat tagjait figyelve alakulhat ki az a sejtésünk, hogy (x_n) felülről korlátos, és 2 egy felső korlátja, azaz $x_n \le 2$ $(n \in \mathbb{N})$. Ezt is teljes indukcióval látjuk be. Mivel $x_0 = \sqrt{2} \le 2$, ezért az állítás $n = 0$-ra igaz. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ indexre $x_n \le 2$. Ekkor

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \le \sqrt{2 \cdot 2} = 2,$$

ezért a sorozat felülről korlátos.

Konvergencia. Mivel (x_n) monoton növekedő és felülről korlátos, ezért konvergens. Jelölje A a sorozat határértékét. Az

$$x_n = \sqrt{2x_{n-1}}$$

rekuziós összefüggésben vegyük az $n \to +\infty$ határátmenetet. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$A = \sqrt{2A}.$$

Ennek az egyenletnek a megoldásai 0 és 2. A monoton növekedés és $x_0 = \sqrt{2}$ miatt az (x_n) sorozat minden tagja $\ge \sqrt{2}$, így 0 nem lehet a sorozat határértéke. Ezért $\lim(x_n) = 2$.

Az (x_n) sorozat tehát konvergens és 2 a határértéke. ■

A rekurzív összefüggésből és a sorozat első néhány tagjából általában nem egyszerű feladat egy alsó vagy felső korlát meghatározása. A monotonitás ismerete után egy korlát „megsejtésére” a következő *ötletet* alkalmazhatjuk. Feltételezzük, hogy a sorozat konvergens. Jelöljük A-val a határértékét. Ha (x_n) például monoton növekedő, akkor A egy felső korlát. Ha a rekurzív összefüggésben vesszük az $n \to \to +\infty$ határátmenetet, akkor a lehetséges határértékre (azaz A-ra) egy egyenletet kapunk. Ennek megoldásai közül választunk egyet, és – például teljes indukcióval – megpróbáljuk igazolni, hogy az a sorozatnak egy felső korlátja. Ezt a technikát a következő példán keresztül illusztráljuk.

2. példa. Mutassuk meg, hogy az

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_n &= \frac{x_{n-1}^3 + 1}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

sorozat konvergens, és számítsuk ki a határértékét.

Megoldás. *A monotonitás vizsgálata.* Nézzük a sorozat első néhány tagját:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \tfrac{1}{2}, \quad x_2 = \tfrac{9}{16}, \quad \ldots .$$

Azt a sejtést, hogy a sorozat monoton növekedő teljes indukcióval igazoljuk. Mivel $x_0 = 0 \le \frac{1}{2} = x_1$, ezért az állítás $n = 0$-ra igaz. Tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra $x_n \le x_{n+1}$. Ekkor

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 1}{2} \le \frac{x_{n+1}^3 + 1}{2} = x_{n+2},$$

ezért a sorozat valóban monoton növekedő.

Egy felső korlát keresése. A fentiek alapján *tegyük fel, hogy* (x_n) konvergens és jelöljük A-val a határértékét. Ekkor az

$$x_n = \frac{x_{n-1}^3 + 1}{2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

rekurzív összefüggésből A-ra a következő egyenletet kapjuk:

$$A = \frac{A^3 + 1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^3 - 2A + 1 = 0.$$

Ezt a harmadfokú egyenletet a „szorzatra bontás” módszerével meg tudjuk oldani. Az $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ azonosság alapján:

$$\begin{aligned} A^3 - 2A + 1 &= A^3 - 1^3 - 2(A - 1) = (A - 1)(A^2 + A + 1) - 2(A - 1) = \\ &= (A - 1)(A^2 + A - 1) = 0. \end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek a gyökei $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ és 1. Tehát, ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor a határértéke csak az előbbi három szám valamelyike lehet. Nézzük sorba:

$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ nem lehet a sorozat határértéke, mert $x_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A másik két gyök között viszont fennáll a következő reláció: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$. Teljes indukcióval próbáljuk meg igazolni azt, hogy

$$x_n \leq \tfrac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel $x_0 = 0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ezért az állítás $n = 0$-ra igaz. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ számra $x_n \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ekkor

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 1}{2} \leq \frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 + 1}{2} = \frac{(\sqrt{5}-2)+1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

ezért $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ valóban felső korlátja az (x_n) sorozatnak.

Konvergencia. Mivel (x_n) monoton növő és felülről korlátos, ezért konvergens. A határértéke csak $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ vagy 1 lehet. Mivel $\frac{\sqrt{5}-1}{2}(< 1)$ a sorozatnak egy felső korlátja, ezért 1 nem lehet a határértéke, következésképpen $\lim(x_n) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. ■

Az 1.5. pontban bebizonyított Banach-féle fixponttételnél láttuk, hogy *bizonyos esetekben* egy rekurzív sorozat határértéke független a kezdőérték megválasztásától. A következő példában azt mutatjuk meg, hogy az *általános esetben* ez nem igaz, vagyis ugyanazzal a rekurziós képlettel megadott sorozat a hatérték szempontjából különbözőképpen viselkedhet, ha a kezdőértékeket különböző módon választjuk meg.

3. példa. Határérték szempontjából vizsgáljuk meg az $a \in \mathbb{R}$ kezdőérték függvényében az

$$\begin{aligned} &x_0 = a, \\ &x_n = \frac{1}{19}\left(x_{n-1}^3 + 30\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

sorozatot.

Megoldás. Az előzőekben leírt módszert követve először azt nézzük meg, hogy ha (x_n) konvergens, akkor mi lehet a határértéke. Tegyük fel tehát azt, hogy $\lim(x_n) =: A \in \mathbb{R}$. Ekkor a megadott rekurzív összefüggésben elvégezve az $n \to +\infty$ határátmenetet azt kapjuk, hogy az A lehetséges határérték kielégíti az

$$A = \frac{1}{19}\left(A^3 + 30\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^3 - 19A + 30 = 0 \tag{1}$$

harmadfokú egyenletet. Ennek megoldására a megoldóképlet (Cardano-képlet) helyett a szorzatra bontás módszerét alkalmazzuk. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy $A = 2$ az egyenlet egy megoldása. Ez motiválja a következő átalakítást:

$$\begin{aligned} A^3 - 19A + 30 &= \left(A^3 - 2^3\right) - 19(A-2) = (A-2)\left(A^2 + 2A + 4\right) - 19(A-2) = \\ &= (A-2)\left(A^2 + 2A - 15\right) = (A-2)(A-3)(A+5). \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha (x_n) konvergens, akkor a határértéke csak

$$A_1 = -5, \qquad A_2 = 2 \quad \text{vagy} \quad A_3 = 3$$

lehet. Az $a \in \mathbb{R}$ paramétertartományt ezekkel az értékekkel osztjuk fel.

Először azt vesszük észre, hogy ha az (x_n) sorozatot az A_i $(i = 1, 2, 3)$ pontok valamelyikéből indítjuk, akkor az végig ott marad; azaz ha $a = A_i$, akkor

$$x_n = A_i \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

is teljesül mindegyik $i = 1, 2, 3$ esetén. Valóban, legyen $i = 1$, $x_0 = A_1 = -5$. Ekkor

$$x_1 = \frac{1}{19}\left(x_0^3 + 30\right) = \frac{1}{19}\left((-5)^3 + 30\right) = -5.$$

Teljes indukcióval bizonyítható, hogy a sorozat mindegyik tagja -5. Ugyanez adódik akkor is, ha $x_0 = 2$ vagy $x_0 = 3$. Az A_i pontok $(i = 1, 2, 3)$ tehát a sorozat stacionárius pontjai vagy egyensúlyi helyzetei.

A továbbiakban az alábbi négy esetet fogjuk megvizsgálni:

1. eset: $a < -5$,
2. eset: $-5 < a < 2$,
3. eset: $2 < a < 3$,
4. eset: $3 < a$.

A monotonitás technikáját fogjuk alkalmazni. Nézzük a sorozat első két tagját:

$$x_0 = a, \qquad x_1 = \frac{1}{19}\left(a^3 + 30\right).$$

Azt kell eldönteni, hogy melyik kisebb/nagyobb, azaz

$$a \overset{?}{\gtreqqless} \frac{1}{19}\left(a^3 + 30\right).$$

Ekvivalens átalakítások után ebből azt kapjuk, hogy

$$a \overset{?}{\gtreqqless} \frac{1}{19}\left(a^3 + 30\right) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \overset{?}{\gtreqqless} a^3 - 19a + 30 = (a-2)(a-3)(a+5). \tag{2}$$

1. eset. Legyen $a < -5$. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a sorozat (szigorúan) monoton csökkenő.

i) Legyen $n = 0$. Mivel (2)-ben szereplő háromtényezős szorzat mindegyik tényezője negatív, ezért

$$0 > (a-2)(a-3)(a+5) \quad \Longleftrightarrow \quad a > \frac{1}{19}(a^3 + 30) \quad \Longleftrightarrow \quad x_0 > x_1.$$

Az állítás tehát $n = 0$-ra igaz.

ii) Tegyük fel, hogy $x_n < x_{n-1}$ valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor

$$x_{n+1} = \frac{1}{19}(x_n^3 + 30) < \frac{1}{19}(x_{n-1}^3 + 30) = x_n,$$

ezért az állítás $(n+1)$-re is igaz. Az (x_n) sorozat tehát valóban (szigorúan) monoton csökkenő.

Az (x_n) sorozat alulról nem korlátos. Ha az lenne, akkor a monoton sorozatok határértékére vonatkozó tétel miatt (x_n) konvergens is lenne. A határértéke csak -5, 2 vagy 3 lehet. Ez viszont ellentmond annak, hogy

$$x_n < x_1 < x_0 < -5 \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

A fentieket összefoglalva azt kaptuk, hogy

$$\text{ha} \quad a < -5, \quad \text{akkor} \quad \lim(x_n) = -\infty.$$

2. eset. Legyen $-5 < a < 2$. Ekkor a (2)-ben a háromtényezős szorzat pozitív, ezért $x_0 < x_1$. A fenti módon belátható, hogy (x_n) (szigorúan) monoton növekedő.

Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy 2 a sorozat egy felső korlátja.

i) Az állításunk igaz az $n = 0$ esetben, hiszen $x_0 = a < 2$.

ii) Tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n < 2$. Ekkor

$$x_{n+1} = \frac{1}{19}(x_n^3 + 30) < \frac{1}{19}(2^3 + 30) = 2.$$

Ez azt jelenti, hogy az (x_n) sorozat felülről korlátos, következésképpen konvergens.

A határértéke -5 és 3 nem lehet, ezért a sorozat 2-höz tart. Megmutattuk tehát azt, hogy

$$\text{ha} \quad -5 < a < 2, \quad \text{akkor} \quad \lim(x_n) = 2.$$

3. eset. Legyen $2 < a < 3$. A fentiekhez hasonló módon igazolható, hogy (x_n) most (szigorúan) monoton csökkenő módon tart 2-höz, azaz

$$\text{ha} \quad 2 < a < 3, \quad \text{akkor} \quad \lim(x_n) = 2.$$

4. eset. Legyen $3 < a$. Ekkor az (x_n) sorozat (szigorúan) monoton növekedő és felülről nem korlátos, ezért

$$\text{ha} \quad 3 < a, \quad \text{akkor} \quad \lim(x_n) = +\infty.$$

Az eddigieket összefoglalva tehát azt kaptuk, hogy az (x_n) sorozatnak minden $a \in \mathbb{R}$ paraméter esetén van határértéke, és

$$\lim(x_n) = \begin{cases} -\infty, & \text{ha } a < -5 \\ -5, & \text{ha } a = -5 \\ 2, & \text{ha } -5 < a < 3 \\ 3, & \text{ha } a = 3 \\ +\infty, & \text{ha } 3 < a. \ \blacksquare \end{cases}$$

A következő példában olyan rekurzív sorozatokat adunk meg, amelyeknek a határértéke egy adott pozitív valós szám m-edik gyöke.

4. példa. Legyen $m > 1$ természetes szám és $a > 0$ valós szám. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\begin{aligned} &x_0 > 0 \text{ (tetszőleges valós)}, \\ &x_n = \frac{1}{m}\left(\frac{a}{x_{n-1}^{m-1}} + (m-1)x_{n-1}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \end{aligned}$$

rekurzív módon megadott sorozat konvergens, és $\sqrt[m]{a}$ határtértéke:

$$\lim(x_n) = \sqrt[m]{a}.$$

Megoldás. Megmutatjuk, hogy az (x_n) sorozat az első tagtól kezdve monoton fogyó, azaz $x_n \leq x_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, ami azzal ekvivalens, hogy

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} \leq 1 \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

A rekurziós összefüggésből kiindulva a következő átalakításokat végezzük el:

$$x_n = \frac{1}{m}\left(\frac{a}{x_{n-1}^{m-1}} + (m-1)x_{n-1}\right) \Leftrightarrow \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1}{m}\left(\frac{a}{x_{n-1}^{m}} + (m-1)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1}{m}\frac{a}{x_{n-1}^{m}} + 1 - \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{m}\left(\frac{a}{x_{n-1}^{m}} - 1\right) \leq 1,$$

ezért az (x_n) sorozat pontosan akkor monoton fogyó, ha az utolsó összeg második tagja ≤ 0, azaz

$$a \leq x_n^m \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Ennek bizonyításához x_n-et az m darab

$$\frac{a}{x_{n-1}^{m-1}}, \quad x_{n-1}, \quad x_{n-1}, \quad \ldots, \quad x_{n-1}$$

szám számtani közepének tekintjük. Ezekre a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$x_n^m \geq \frac{a}{x_{n-1}^{m-1}} \cdot x_{n-1} \cdot \cdots \cdot x_{n-1} = a \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Ezzel megmutattuk, hogy az (x_n) sorozat monoton fogyó. Mivel $0 \leq x_n$ minden n indexre, ezért 0 a sorozatnak egy alsó korlátja.

Az (x_n) sorozat tehát monoton fogyó és alulról korlátos, ezért konvergens. Jelölje A a sorozat határértékét, azaz $A := \lim(x_n)$. (3) miatt $A > 0$. Az

$$x_n = \frac{1}{m}\left(\frac{a}{x_{n-1}^{m-1}} + (m-1)x_{n-1}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

rekurziós összefüggésben az $n \to +\infty$ határátmenetet elvégezve A-ra a következő egyenletet kapjuk:

$$A = \frac{1}{m}\left(\frac{a}{A^{m-1}} + (m-1)A\right).$$

Ennek megoldása $A^m = a$, azaz $A = \sqrt[m]{a}$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Megjegyzések

1° Figyeljük meg, hogy az (x_n) sorozat *tetszőleges* $x_0 > 0$ kezdőértékből indítva ugyanahhoz a számhoz konvergál.

2° A fenti sorozat egy igen egyszerű konstruktív lehetőséget ad irracionális számok racionálisokkal való megközelítésére. Ez a helyzet például akkor, ha a és x_0 racionális és $\sqrt[m]{a}$ irracionális.

A következő példában azt mutatjuk meg, hogy az ismertetett technika alkalmazható néhány olyan esetben is, amikor a megadott sorozat nem monoton.

5. példa. Lássuk be, hogy az

$$x_0 = -\tfrac{3}{4},$$
$$x_n = x_{n-1}^2 - \tfrac{3}{4} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

sorozat konvergens, és számítsuk ki a határértékét.

Megoldás. A sorozat viselkedéséről „kézi számolással" most nehezen kaphatunk információt. Az első négy tag

$$-\tfrac{3}{4}, \quad -\tfrac{3}{16}, \quad -\tfrac{183}{256}, \quad -\tfrac{15663}{65536},$$

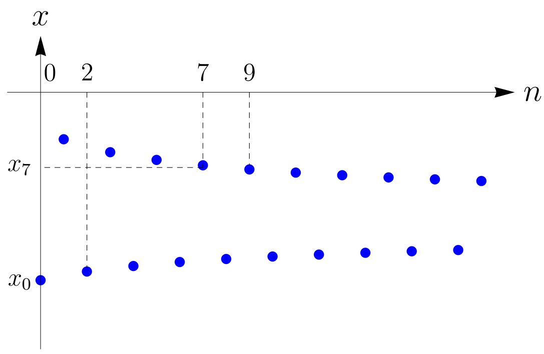
amiből a további tagokról nem lehet sejtést kialakítani. Az azonban nyilvánvaló, hogy $x_n \geq -\frac{3}{4}$ $(n \in \mathbb{N})$, és teljes indukcióval egyszerűen bebizonyítható az is, hogy

$$-\tfrac{3}{4} \leq x_n < 0 \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{4}$$

A *Mathematica* programot használjuk fel további gyors információszerzésre, és abból valamilyen sejtés kialakítására. A sorozat első 19 tagjának közelítő értékei:

$$\begin{array}{lllllll}
-0.75, & -0.187, & -0.715, & -0.239, & -0.693, & -0.270, & \\
-0.677, & -0.291, & -0.665, & -0.308, & -0.655, & -0.321, & \\
-0.6472, & -0.331, & -0.640, & -0.340, & -0.634, & -0.347, & -0.630,
\end{array}$$

amelyeket érdemes szemléltetni:



6. ábra

További kísérletezéseket elvégezve alakulhat ki az a sejtésünk, hogy a sorozat páros indexű részsorozata szigorúan monoton növekedő, a páratlan indexű pedig szigorúan monoton csökkenő, azaz

$$(x_{2n}) \uparrow \qquad \text{és} \qquad (x_{2n+1}) \downarrow .$$

Ezek az állítások teljes indukcióval már egyszerűen bebizonyíthatók.

Nézzük a páros indexű részsorozatot. Mivel

$$x_0 = -\tfrac{3}{4} = -0,75 < x_2 = -\tfrac{183}{256} = -0,715,$$

ezért az állítás igaz, ha $n = 0$. Tegyük fel, hogy

$$x_{2n-2} < x_{2n} \,(< 0) \qquad (\iff \quad x_{2n}^2 < x_{2n-2}^2 \quad (4) \text{ miatt}).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} x_{2n+2} &= x_{2n+1}^2 - \tfrac{3}{4} = \left(x_{2n}^2 - \tfrac{3}{4}\right)^2 - \tfrac{3}{4} > \\ &> \left(x_{2n-2}^2 - \tfrac{3}{4}\right)^2 - \tfrac{3}{4} = x_{2n-1}^2 - \tfrac{3}{4} = x_{2n}. \end{aligned}$$

Az (x_{2n}) sorozat tehát valóban szigorúan monoton növekedő.

A páratlan indexű részsorozatra vonatkozó állítást is hasonlóan bizonyíthatjuk be.

Mindkét sorozat tehát monoton és (4) miatt korlátos, ezért konvergens. Jelölje A és B a határértéküket, azaz

$$A := \lim(x_{2n}) \qquad \text{és} \qquad B := \lim(x_{2n+1}).$$

A két részsorozat rekurzív alakban is felírható:

$$\begin{aligned} x_0 = -\tfrac{3}{4}, \quad x_{2n} &= \left(x_{2n-2}^2 - \tfrac{3}{4}\right)^2 - \tfrac{3}{4}; \\ x_1 = -\tfrac{3}{16}, \quad x_{2n+1} &= \left(x_{2n-1}^2 - \tfrac{3}{4}\right)^2 - \tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

A sorozatok képzési szabályai megegyeznek, ezért a határértékük (vagyis A és B) az

$$X = \left(X^2 - \tfrac{3}{4}\right)^2 - \tfrac{3}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad X^4 - \tfrac{3}{2}X^2 - X - \tfrac{3}{16} = 0$$

egyenlet megoldásai között vannak. Ezt a negyedfokú egyenletet a szorzatra bontás módszerével így oldjuk meg:

$$\begin{aligned} X^4 - \tfrac{3}{2}X^2 - X - \tfrac{3}{16} &= \left(X^4 - \tfrac{1}{2}X^2 + \tfrac{1}{16}\right) - \left(X^2 + X + \tfrac{1}{4}\right) = \\ &= \left(X^2 - \tfrac{1}{4}\right)^2 - \left(X + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^2 \left(X + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(X + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \\ &= \left(X + \tfrac{1}{2}\right)^2 \left[\left(X - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 1\right] = \left(X + \tfrac{1}{2}\right)^2 \left[X^2 - X - \tfrac{3}{4}\right] = \\ &= \left(X + \tfrac{1}{2}\right)^2 \left(X + \tfrac{1}{2}\right)\left(X - \tfrac{3}{2}\right) = \left(X + \tfrac{1}{2}\right)^3 \left(X - \tfrac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

A gyökök tehát: $X_{1,2,3} = -\frac{1}{2}$ és $X_4 = \frac{3}{2}$. A szóban forgó konvergens részsorozatok minden tagja negatív, ezért a határértékük $X_4 = \frac{3}{2}$ nem lehet, következésképpen $A = B = -\frac{1}{2}$.

Az (x_n) sorozat páros és páratlan indexű részsorozatának ugyanaz a határértéke, ezért az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = -\frac{1}{2}$. ■

4.3. Elsőrendű nemlineáris rekurziók

Ebben a pontban az

$$\begin{aligned} &x_0 \in \mathbb{R}, \\ &x_n = f(x_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned} \tag{1}$$

alakú rekurzív sorozatokkal foglalkozunk, ahol f adott valós-valós függvény. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy az (x_n) sorozatot az f függvény *generálja*.

Teljes indukcióval bebizonyítható, hogy ha

$$x_0 \in \mathcal{D}_f \qquad \text{és} \qquad \mathcal{R}_f \subset \mathcal{D}_f,$$

akkor az (x_n) sorozat egyértelműen meghatározott.

Az 1.5. pontban igazolt Banach-féle fixponttétel egy jól használható eszköz az ilyen alakú (x_n) sorozatok konvergenciájának a vizsgálatához. Az alapján tehát, ha az $f : [a, b] \to [a, b]$ függvény kontrakció, vagyis

$$\exists\, q \in [0, 1) : \ |f(x) - f(y)| \le q|x - y| \ \ (x, y \in [a, b]), \tag{2}$$

akkor minden $x_0 \in [a, b]$ kezdőértékkel induló (1) alakú sorozat konvergens, és f fixpontjához (azaz az $x^* = f(x^*)$ feltételt kielégítő $x^* \in [a, b]$ számhoz) konvergál. A fixponttétel a fixpont egyértelmű létezését is állítja.

A (2) kontrakciós feltétel általában nehezen ellenőrizhető. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva azonban a következő elégséges feltétel igazolható: *ha az f függvény deriválható az $[a, b]$ intervallumban és*

$$|f'(x)| \le q < 1 \qquad (x \in [a, b]),$$

akkor f kontrakció a $q \in [0, 1)$ kontrakciós állandóval.

Végül megjegyezzük még azt is, hogy a Banach-féle fixponttétel az (x_n) sorozat konvergenciasebességére is ad jól használható képletet.

1. példa. A Banach-féle fixponttétel alkalmazásával mutassuk meg, hogy az

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_n &= \frac{x_{n-1}^3 + 1}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

sorozat konvergens, és számítsuk ki a határértékét 10^{-2} pontossággal.

Megoldás. A sorozat generáló függvénye:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$x_n = f(x_{n-1}) = \frac{x_{n-1}^3 + 1}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

A Banach-féle fixponttétel alkalmazásához f értelmezési tartományát kell alkalmasan megválasztani, jelen esetben leszűkíteni egy olyan $[a, b]$ intervallumra, amelyre a következő feltételek teljesülnek:

$$\begin{aligned} & x_0 = 0 \in [a, b], \\ & f : [a, b] \to [a, b] \ \ \text{típusú függvény}, \\ & |f'(x)| = \tfrac{3}{2}x^2 \le q < 1 \quad (x \in [a, b]). \end{aligned}$$

Most nem nehéz ilyen intervallumot találni. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy (például) az $[a, b] := [0; 0,7]$ intervallum megfelelő választás, és ekkor $q = \frac{3}{2} \cdot 0,7^2 = 0,735$.

Azt kaptuk tehát, hogy az

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{2} \qquad (x \in [0; 0,7])$$

függvényre a Banach-féle fixponttétel feltételei teljesülnek. Ezért az

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_n &= f(x_{n-1}) = \frac{x_{n-1}^3 + 1}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

iterációs (rekurziós) sorozat konvergens, és a határértéke az f leképezés egyértelműen meghatározott x^* fixpontja, vagyis az

$$x = \frac{x^3+1}{2}$$

egyenlet $[0; 0,7]$ intervallumba eső egyetlen gyöke.

A fixponttételből az (x_n) sorozat konvergenciájának a sebességére az

$$|x_n - x^*| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \qquad (n \in \mathbb{N})$$

egyenlőtlenségeket kapjuk. Ha az x^* határértéket 10^{-2} pontossággal szeretnénk x_n-nel közelíteni, akkor olyan n indexet kell választani, amelyre fenáll a

$$\frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \le \frac{1}{100}$$

egyenlőtlenség. Mivel $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ és $q = 0,735$, ezért azt kapjuk, hogy

$$\frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| = \frac{0,735^n}{0,265} \cdot \frac{1}{2} \le \frac{1}{100} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0,735^n \le 0,0053.$$

A $(0,735^n)$ sorozat monoton csökkenő (0-hoz tart),

$$0,735^{17} = 0,00533 \qquad \text{és} \qquad 0,735^{18} = 0,0039,$$

ezért a fenti egyenlőtlenség minden $n \ge 18$ indexre teljesül, ami azt jelenti, hogy az

$$x_{18} = 0,618028$$

szám 10^{-2} pontossággal közelíti meg a sorozat határértékét. ■

Megjegyzések

1° A Banach-féle fixponttételből az is következik, hogy nemcsak az $x_0 = 0$ pontból induló sorozatnak x^* a határértéke, hanem *minden* $x_0 \in [0; 0,7]$ kezdőértékkel indított és a szóban forgó rekurzív képlettel megadott sorozat is ugyanahhoz az x^* ponthoz konvergál.

2° A fenti példa azt is illusztrálja, hogy a Banach-féle fixponttételt nemlineáris egyenletek megoldására lehet alkalmazni. Itt az

$$x = \frac{x^3+1}{2}$$

harmadfokú egyenletről volt szó. Azt tudjuk, hogy nemlineáris egyenletek pontos (explicit) megoldását csak „kevés” esetben lehet megadni. (A konkrét egyenletünk is ebbe az osztályba tartozik. Az előző pont 2. példájában megmutattuk, hogy ennek a pontos megoldásait hogyan lehet „cselesen” előállítani.) Explicit megoldás hiányában az egyetlen lehetőség az, hogy olyan sorozatot próbálunk megadni, amelyik a megoldáshoz konvergál. A fixpont-iteráció egy ilyen, igen széles körben alkalmazható módszer.

3° A példában kapott $n = 18$ az „elméleti küszöbindex”. A gyakorlatban az egyes iterációs lépéseknél kerekítési hibák is fellépnek, ezért a szükséges pontosság eléréséhez általában több iterációt kell alkalmazni. Bár megadható olyan formula, amelyik a kerekítési hibákat is figyelembe véve határozza meg a szükséges lépésszámot, ennek alkalmazása azonban elég bonyolult.

4° Azt is figyeljük meg, hogy a nagyon egyszerűen képezhető fixpont-iteráció konvergenciasebessége „nem olyan jó” abban az értelemben, hogy elég sok iteráció kell elvégezni már a 10^{-2} pontosság eléréséhez is. Ezért fontos az a kérdés, hogy vajon megadhatók-e olyan közelítő sorozatok, amelyek „gyorsabban” konvergálnak az egyenlet gyökeihez. Több ilyen módszer is létezik.

Most egy olyan példát mutatunk, amikor a fixpont-iteráció nem alkalmazható.

2. példa. Mutassuk meg, hogy az

$$\begin{aligned} x_0 &= -\tfrac{3}{4}, \\ x_n &= x_{n-1}^2 - \tfrac{3}{4} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

sorozat konvergenciájának a vizsgálatához nem használhatjuk a Banach-féle fixponttételt.

Megoldás. Ezt a sorozatot az előző pontban már megvizsgáltuk, és azt az egyszerű észrevételt már megtettük, hogy

$$-\tfrac{3}{4} \le x_n < 0 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Próbáljuk most alkalmazni a Banach-féle fixponttételt. A sorozat generáló függvénye:

$$f(x) = x^2 - \tfrac{3}{4} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$x_n = f(x_{n-1}) = x_{n-1}^2 - \tfrac{3}{4} \qquad (n = 1, 2, 2, \dots).$$

Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor a határértéke csak az f függvény fixpontja lehet:

$$\begin{aligned} x = f(x) \quad &\iff \quad x = x^2 - \tfrac{3}{4} \quad \iff \quad x^2 - x - \tfrac{3}{4} = \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{3}{2}\right) = 0 \quad \iff \\ &\iff \quad x_1^* = -\tfrac{1}{2}, \qquad x_2^* = \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Mivel a sorozat minden tagja negatív, ezért a lehetséges határérték csak $x_1^* = -\frac{1}{2}$ lehet. A Banach-féle fixponttétel alkalmazásához most tehát olyan $[a, b] \subset (-\infty, 0)$

intervallumot kellene találni, amelyikre a következők teljesülnek:

$$x_0 = -\tfrac{3}{4},\ x_1^* = -\tfrac{1}{2} \in [a,b],$$
$$f : [a,b] \to [a,b] \ \ \text{típusú függvény},$$
$$|f'(x)| = 2|x| \leq q < 1 \quad (x \in [a,b]).$$

Mivel $|f'(x_1^*)| = 1$, ezért ilyen intervallum nincs, következésképpen a Banach-féle fixponttétel nem alkalmazható. ■

Irodalom

[1] L. Berg: *Másodrendű differenciaegyenletek*, Tankönykiadó, Budapest, 1982.

[2] Faragó István és Horváth Róbert, *Numerikus módszerek*, Egyetemi jegyzet, ELTE, Budapest, 2011.

[3] Hatvani László, Krisztin Tibor és Makay Géza, *Dinamikus modellek a közgazdaságban*, POLYGON, Szeged, 2001.

[4] Kósa András, Mezei István és S. Gyarmati Erzsébet, *Analízis-Példatár*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.

[5] Laczkovich Miklós és T. Sós Vera: *Analízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.

[6] Leindler László és Schipp Ferenc: *Analízis I.*, egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.

[7] Lovász László, Pelikán József és Vesztergombi Katalin, *Diszkrét matematika*, Typotex, Budapest, 2006.

[8] R.M. May: Nagyon bonyolult dinamikájú egyszerű matematikai modellek, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, **8** 1982, 427–446.

[9] Máté László: *Rekurzív sorozatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[10] Mezei István, Faragó Isván és Simon Péter: *Bevezetés az analízisbe*, Egyetemi jegyzet, ELTE, Budapest.
`http://www.cs.elte.hu/~simonp/jegyzet1.pdf`

[11] Knut Sydsæter and Peter Hammond: *Matematika közgazdászoknak*, Aula, Budapest, 1998.

[12] Szili László: *Analízis feladatokban I.*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2008.

[13] `http://hu.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-sorozat`

[14] Eric W. Weisstein: "Logistic Map", From *MathWorld*–A Wolfram Web Resource, `http://mathworld.wolfram.com/LogisticMap.html`

[15] J.V. Whittaker: An analitical description of some simple cases of chaotic behaviour, *Amer. Math. Monthly*, **98**(June-July) 1991, 489–504.