Szélsőérték feladatok megoldása elemi módszerekkel és a differenciálszámítás segítségével

Szakdolgozat

Készítette: **Tóth Zsuzsanna Edit**

Matematika BSc, Elemző szakirány

Témavezető: **Szentmiklóssy Zoltán** egyetemi adjunktus

Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest

2012

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretném megköszönni témavezetőmnek, Szentmiklóssy Zoltánnak, hogy munkájával segítette szakdolgozatom létrejöttét.

Köszönöm szaktársamnak, Treszl Mártinak az egyetemi tanulmányaink során nyújtott számtalan segítségéért és önzetlen barátságáért.

És végül köszönöm a csodálatos, szerető családomnak, hogy türelemmel és bizalommal kísérnek utamon.

1. Bevezetés

Szakdolgozatom témája a szélsőérték feladatok megoldási módszerei. Ennek oka, hogy egyetemi tanulmányaim során a felmerülő szélsőérték problémákat szinte minden esetben deriválással oldottuk meg. Azonban én úgy gondolom, hasznos a szélsőérték problémák elemi módszerekkel való vizsgálata. Kis kreativitással és kevesebb háttértudással szebb megoldást mutathatunk be. Sőt, a megoldások sok esetben gyorsabbak és egyszerűbbek.

Dolgozatom első felében a minimum és maximum értékét elemi módszerekkel határozom meg. A fejezetben felhasznált definíciókat, tételeket és összefüggéseket a példák előtt ismertetem, ezután a feladatokat és megoldásaikat írom le részletesen. Lényegesnek tartottam többféle feladatot megmutatni, illetve különböző technikákat felhasználni megoldásukhoz. Ezeknek a feladatoknak a megoldásához nem szükséges elmélyedni a matematikai analízisben, egy középiskolai matematika óra anyagát is képezhetnék. Fontos azonban megjegyeznem, hogy mindegyikhez szükség van ötletességre, a matematika bizonyos területének átlátására, éppen ettől lesznek szépek a megoldások. Nem lehet a feladatok megoldási módszerére mintát húzni, mindegyik feladathoz egyéni megoldási folyamat tartozik.

A következő részt a dolgozatomban a differenciálszámítással megoldható feladatok teszik ki. A témakörhöz releváns elméleti anyagot a rész elején röviden ismertetem, hogy elősegítsem a feladatok megoldási folyamatának megértését. A bemutatott feladatok többségénél nem csak a deriválást használom fel a megoldás során, hanem alapvető elemi módszereket (például: Pitagorasz-tételt, területképleteket) abból a célból, hogy így is megmutassam, mennyire hasznos a régen tanult, gimnáziumi anyagot újra átgondolni és alkalmazni.

A példákhoz ábrákat is készítettem, hogy átláthatóbbá váljon maga a feladat, és a megoldások során felhasznált geometriai azonosságok is könnyebben értelmezhetőek legyenek. A használt program az AutoCAD.

Dolgozatom készítésében sok segítséget nyújtott Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása című könyve, amelyben számos probléma ismertetése szerepel.

2. Elemi módszerekkel megoldható feladatok

Ebben a részben olyan feladatokat mutatok be, amelyek megoldásához ötletesség, kreativitás szükséges. Ugyan kizárólag elemi matematikai módszereket használok a feladatok megoldásához, ehhez azonban szükséges a téma egészének átlátása, hogy az elméleti információt a feladatok megoldásánál gyakorlatban is alkalmazni tudjuk. A felhasznált matematikai anyagot a fejezet elején írom le, később, a feladatmegoldások során csak hivatkozok rá.

A definíciók, tételek mindenki számára ismerősek lesznek, hiszen már a középiskolában megtanították őket. A nehézséget a feladatok megoldásában az okozza, hogy ezeket a tételeket illetve összefüggéseket milyen szélsőérték problémáknál és a megoldásuk során hol alkalmazhatjuk.

2.1. Felhasznált definíciók, tételek, összefüggések

Pitagorasz-tétel:. Bármely derékszögű háromszög átfogójának négyzete megegyezik a befogók négyzetösszegével. a, b befogók és c átfogó esetén:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Thalész-tétel:. Ha egy kör átmérőjének A és B végpontját összekötjük a körív A-tól és B-től különböző tetszőleges C pontjával, akkor az ABC háromszög ACB szöge derékszög lesz.

Háromszög-egyenlőtlenség:. A háromszög oldalainak hosszára teljesül, hogy bármely két oldal összege nagyobb a harmadik oldalnál. Azaz (a, b, és c oldalú háromszög esetén):

$$a + b > c; \quad b + c > a; \quad c + a > b.$$

Ezzel ekvivalens felírása a tételnek:

$$a > |b - c|; \quad b > |a - c|; \quad c > |a - b|.$$

Tengelyes tükrözés fogalma és tulajdonságai:. Legyen t az S sík egy adott egyenese. Tengelyes tükrözésen azt az $S \longmapsto S$ leképezést értjük, amelyre:
minden $P \in t$ -re $P \longmapsto P$, és
minden $P \notin t$ -re $P \longmapsto P'$ úgy, hogy a $\overline{PP'}$ szakasznak t a felezőmerőlegese.
Megjegyzés: A t egyenest a tükrözés tengelyének hívjuk.

Főbb tulajdonságai:
1. t pontjai fixpontok.
2. A tengelyre merőleges egyenesek invariáns egyenesek.
3. A leképezés inverze saját maga:

$S_t(P) \longmapsto P'$, $S_t(P') \longmapsto P$, $S_t(S_t(P)) = P$.

4. Egyenes képe egyenes, mégpedig a tengelyt metsző egyenes képe a tengelyt ugyanabban a pontban metsző egyenes lesz, a tengellyel párhuzamos egyenes képe pedig a tengelytől ugyanakkora távolságra haladó, vele párhuzamos egyenes lesz.

5. A leképezés távolságtartó és szögtartó. Vagyis egy szakasz képe ugyanolyan hosszú szakasz lesz, egy szög képe pedig vele azonos nagyságú szög.

6. A tengelyes tükrözés az alakzatok körüljárási irányát megváltoztatja, megfordítja azt.

Kerületi szög definíciója és a kerületi szögek tétele:. Ha egy szög csúcsa egy adott körvonal pontja, szárai pedig vagy a kör két húrjára, vagy egy húrra és egy érintőre illeszkednek, akkor a szöget a kör kerületi szögének nevezzük.

Megjegyzés: A kerületi szöghöz tartozó íven a körvonalnak a szögtartományba eső részét értjük.

Tétel: Adott kör adott ívéhez tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak.

Számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közép definíciói és közöttük lévő összefüggés:. Az a_1,...,a_n nemnegatív számok A számtani közepén az n darab szám átlagát értjük, azaz:

$$A(a_1, ..., a_n) = \frac{a_1 + ... + a_n}{n} \ .$$

Az a_1,...,a_n nemnegatív számok G mértani közepén az n darab szám szorzatának n-ed fokú gyökét értjük, azaz:

$$G(a_1, ..., a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n} \ .$$

Az a_1,...,a_n pozitív számok H harmonikus közepén az n darab szám reciprokaiból számított számtani közép reciprokát értjük, azaz:

$$H(a_1, ..., a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}} \ .$$

Az a_1,...,a_n nemnegatív számok N négyzetes közepén az n szám négyzetei átlagának négyzetgyökét értjük, azaz:

$$N(a_1, ..., a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + ... + a_n^2}{n}} \ .$$

A négy közép közötti összefüggés:

$$H(a_1, ..., a_n) \leq G(a_1, ..., a_n) \leq A(a_1, ..., a_n) \leq N(a_1, ..., a_n) \ ,$$

ahol minden egyenlőtlenségből csak akkor lesz egyenlőség, ha $a_1 = ... = a_n$, vagyis minden szám azonos.

A számtani és mértani közép közötti összefüggés fontos következményei:

- Ha az $a_1, ..., a_n$ nemnegatív számok összege állandó, akkor a szorzatuk $a_1 = ... = a_n$ esetén lesz a lehető legnagyobb.
- Ha az $a_1, ..., a_n$ nemnegatív számok szorzata állandó, akkor az összegük $a_1 = ... = a_n$ esetén lesz a lehető legkisebb.

Befogótétel:. Bármely derékszögű háromszög befogójának hossza az átfogó és az illető befogó átfogóra eső vetülete hosszának mértani közepe. A befogót b-vel, az átfogót c-vel, a vetületet pedig q-val jelölve:

$$b = \sqrt{c \cdot q}$$

Magasságtétel:. Bármely derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága mértani közepe a két befogó átfogóra eső merőleges vetülete hosszának. A magasságot m-mel, a két vetületet pedig p-vel és q-val jelölve:

$$m = \sqrt{p \cdot q}$$

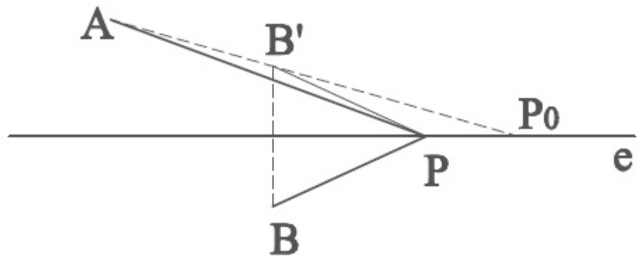
2.2. Feladatok és megoldásaik

1. Adva van a síkban egy e egyenes és ennek különböző partjain - e-től különböző távolságra - egy-egy pont: A és B. Az e egyenes melyik P pontjának érintésével kell haladnunk A-ból B-be, ha azt akarjuk, hogy az $\overline{AP}$ és $\overline{BP}$ egyenes szakaszok különbségének abszolút értéke a lehető legnagyobb legyen?[1]

Feladatunk az $|\overline{AP} - \overline{BP}|$ érték maximalizálása, ha A és B adott pontok, és P pedig az e egyenesen mozgatható.

Tükrözzük tengelyesen a B pontot az e egyenesre és jelöljük az új pontot B'-vel. Állítsunk egyenest az A és B' pontra, és azt a pontot, ahol az egyenes az e egyenest metszi, nevezzük P_0-nak.

[1] Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása c. könyv 9. feladata



Ekkor:

$$|\overline{AP_0} - \overline{BP_0}| = |\overline{AP_0} - \overline{B'P_0}| = \overline{AP_0} - \overline{B'P_0} = \overline{AB'}$$

A tengelyes tükrözés tulajdonságai miatt. Minden más P-re pedig

$$|\overline{AP} - \overline{BP}| = |\overline{AP} - \overline{B'P}| < \overline{AB'},$$

ami a háromszög-egyenlőtlenségből egyértelműen adódik.
Ebből azt kapjuk, hogy az $|\overline{AP} - \overline{BP}|$ maximumát akkor veszi fel, ha $P = P_0$.

2. Bebizonyítandó, hogyha egy zárt, rektifikálható görbének egy téglalap mind a négy oldalával van közös pontja, akkor a görbe ívhossza nem lehet kisebb, mint a téglalap átlójának kétszerese. Mikor egyenlő vele?[2]

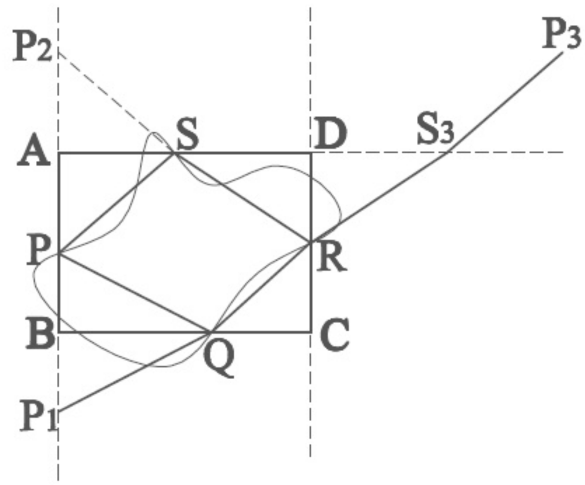
A feladat során olyan görbéről fogunk beszélni, ami valamely síkidom kerülete.

Válasszunk a téglalap minden oldaláról egy-egy téglalap-görbe metszéspontot! Nevezzük ezeket P, Q, R és S-nek. A szomszédos oldalakon lévő pontokat kössük össze egyenes szakasszal úgy, hogy egy $PQRS$ négyszöget kapjunk!

Tudjuk, hogy ennek a négyszögnek a kerülete biztosan kisebb, mint a görbe ívhossza, ezért elegendő ennek a kerületére bizonyítani állításunkat.

A téglalap csúcsait nevezzük A, B, C és D-nek úgy, hogy P az AB oldalon, Q a BC oldalon, R a CD oldalon, S pedig a DA oldalon feküdjön! Ezután a P pontot tengelyesen tükrözve a BC és AD oldalra kapjuk a P_1 és P_2 pontokat, és az S és P_2 pontokat tengelyesen tükrözve a CD oldalra kapjuk az S_3 és P_3 pontokat.

[2] Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása c. könyv 10. feladata



Nézzük a $P_1QRS_3P_3$ törtvonalat! A tengelyes tükrözés tulajdonságai miatt ennek hossza megegyezik a $PQRS$ négyszög kerületével.

Most nézzük a P_1P_3 távolságot! Vegyük észre, hogy a BAD és a $P_1P_2P_3$ háromszögek hasonlóak sőt, az utóbbi oldalai kétszer akkorák, mint az előbbié - a tengelyes tükrözés tulajdonságai miatt. Tehát a P_1P_3 távolság pontosan a téglalap átlójának a kétszerese.

Hogyha összevetjük a $P_1QRS_3P_3$ töröttvonalat és a P_1P_3 távolságot láthatjuk, hogy a P_1P_3 mindig kisebb vagy egyenlő az előbbinél, és csakis akkor egyenlő, ha a törtvonal "kiegyenesedik", vagyis minden része párhuzamos a téglalap BD átlójával.

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

3. Bizonyítsuk be, hogy két egymást metsző sík hajlásszöge a legnagyobb azok között a szögek között, amelyeket a metszésvonal egy tetszés szerinti pontjából az egyik síkban húzott félegyenesek a másik síkkal alkotnak![3]

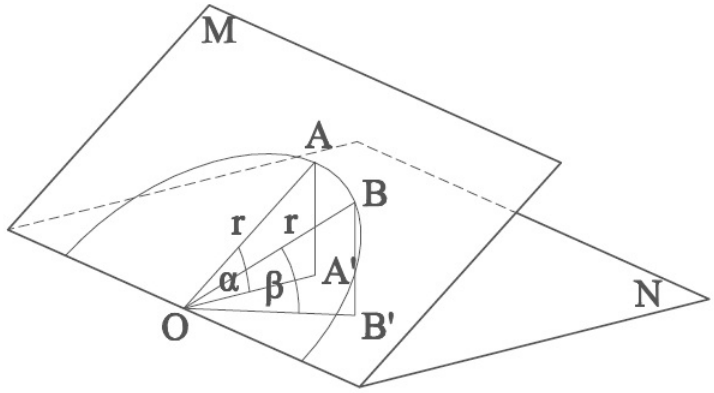
Legyen a két sík M és N, metszésvonaluk e.

Válasszunk e-n egy O pontot és rajzoljuk be az $AOA'\sphericalangle = \alpha$ hajlásszöget! A az M síkra kerüljön, A' pedig az N síkon legyen A merőleges vetülete!

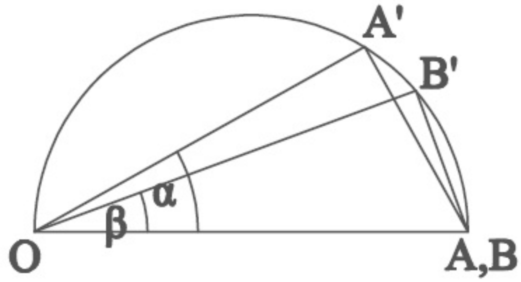
Most vegyünk fel egy tetszőleges B pontot az M síkra O-tól $\overline{OA}$ távolságra, az N-re eső vetülete pedig legyen B'. $BOB'\sphericalangle := \beta$.

Feladatunk megmutatni, hogy $\alpha > \beta$.

[3]Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása c. könyv 12. feladata



Ábrázoljuk az OAA' és OBB' háromszögeket egy Thalész-félkörben! Az OA illetve az OB oldal legyen az átmérő, a derékszögű A' és B' csúcsok pedig az íven helyezkedjenek el.



Tudjuk, hogy $BB' < AA'$ minden esetben, mert B közelebb van e-hez, mint A. És mivel bármely háromszögben két oldal közül a hosszabbikkal szemben nagyobb belső szög van, mint a rövidebbikkel szemben, $\beta < \alpha$ adódik.

Ezzel az állítást be is bizonyítottuk.

4. Adva van egy háromszög alapja és magassága. Mikor maximális az alappal szemközti szög?[4]

Legyen az adott alap az AB szakasz!

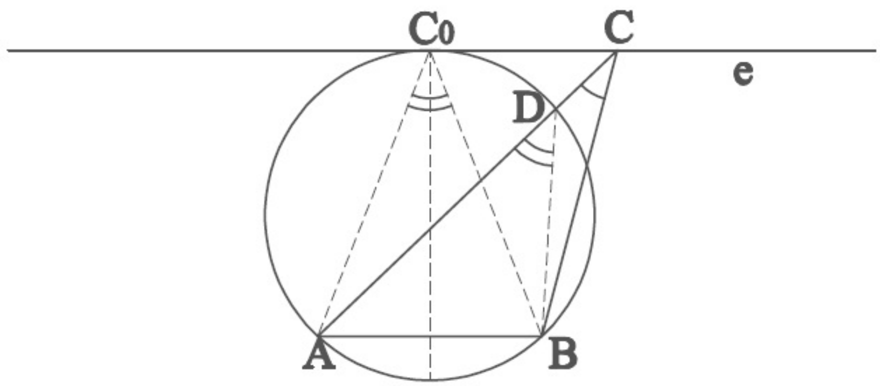
Ha az m magasság is adott, akkor a C csúcsról azt mondhatjuk, hogy az AB szakasztól m távolságra lévő e egyenesen lehet.

[4]Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása c. könyv 13. feladata

Húzzuk be az AB szakasz felező merőlegesét, és nevezzük C_0 csúcsnak azt a pontot, ahol az e egyenest ez elmetszi!

Rajzoljuk meg az ABC_0 háromszög köré írható körét! Bármelyik pontját is választom a körívnek harmadik csúcsként, a kerületi szögek tétele miatt a csúcsnál lévő szög ugyanakkora lesz. Azonban a magasság adott, tehát a csúcsnak az e egyenesen kell lennie.

Vegyünk egy C_0-tól különböző C pontot az e egyenesen és azt a pontot, ahol az AC szakasz a körívet metszi, nevezzük D-nek.



Vegyük észre, hogy az ACB szög mindig kisebb lesz az ADB szögnél, hiszen az ADB szög a BCD háromszög külső szöge, és tudjuk, hogy egy háromszög bármelyik külső szöge egyenlő a vele nem szomszédos két belső szög összegével. Vagyis:

$$ADB\sphericalangle = ACB\sphericalangle + CBD\sphericalangle \ ,$$

amiből egyértelműen adódik, hogy $ACB\sphericalangle < ADB\sphericalangle$.

Egyedül a C_0 pontban kapjuk meg a kerületi szög nagyságát, amiről az előbb megmutattuk, hogy a legnagyobb, tehát a válasz:

Akkor maximális az alappal szemközti szög, ha a hozzátartozó csúcs az e egyenes és a felezőmerőleges metszete.

5. Határozzuk meg a $z = x^2+xy+y^2$ függvény maximumát és minimumát az $1 \le x^2+y^2 \le 2$ feltétellel![5]

Feladatunk megoldását a számtani és mértani közepek közötti összefüggés fogja adni. Írjuk ezt fel a feladatbeli x^2 és y^2-re:

$$\sqrt{x^2y^2} \le \frac{x^2+y^2}{2} \ .$$

[5]Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása c. könyv 45. feladata

Mivel az egyenlőtlenség bal oldalát ekvivalensen át lehet alakítani $\sqrt{(xy)^2} = |xy|$-ná, ezért a számtani és mértani összefüggést most két egyenlőtlenséggel tudjuk leírni:

$$xy \le \tfrac{x^2+y^2}{2} \qquad \text{és} \qquad xy \ge -\tfrac{x^2+y^2}{2} \ .$$

Ez azért kell, mert így a z függvényre fel tudjuk írni a következőtket:

$$z = x^2 + xy + y^2 \le x^2 + y^2 + \frac{x^2+y^2}{2} \ ,$$

$$z = x^2 + xy + y^2 \ge x^2 + y^2 - \frac{x^2+y^2}{2} \ .$$

Ha felhasználjuk az $x^2 + y^2$-re megadott felső korlátot az első, és alsó korlátot a második egyenlőtlenségben, kapjuk, hogy:

$$z \le 2 + \frac{2}{2} = 2 + 1 = 3 \ , \text{ és}$$

$$z \ge 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ .$$

Tehát a z függvény maximuma $z_{max} = 3$, minimuma pedig $z_{min} = \frac{1}{2}$.

6. Egyenlő kerületű derékszögű háromszögek közül melyiknek legnagyobb a területe?[6]

Adott k kerületű derékszögű háromszögeink vannak. Jelöljük a kerület felét s-sel, a két befogót a-val és b-vel, és az átfogót c-vel. Ekkor a háromszög területe

$$t = \frac{ab}{2}$$

alakban felírható, ennek a maximumát keressük.

Ügyes átalakításokkal a területképletet felírhatjuk a kerület és az átfogó függvényében, így:

$$t = \frac{ab}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2ab = \frac{1}{4}[2ab + a^2 + b^2 - a^2 - b^2] = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a^2+b^2)]$$

ami a $k = a + b + c$ kerületképlet és a Pitagorasz-tétel miatt

$$= \frac{1}{4}[(k-c)^2 - c^2] = \frac{1}{4}[k^2 - 2kc] = \frac{1}{2}k(\frac{1}{2}k - c) = s(s-c) \ .$$

[6]Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása c. könyv 55. feladata

Tehát $t = s(s-c)$, ami adott $s = \frac{k}{2}$ mellett akkor maximális, ha c a lehetséges értékei közül a legkisebbet veszi fel.

Használjuk a számtani és négyzetes közepek közötti összefüggést az a és b oldalra!

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ ,$$

amely jobb oldala a Pitagorasz-tétel miatt egyenlő $\sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$-vel ($c > 0$), így az előbbi egyenlőtlenséget felszorozva 2-vel kapjuk, hogy

$$a + b \le c \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = c\sqrt{2} \ .$$

Tehát c-re kaptunk egy alsó korlátot. Mivel $2s = a + b + c$, ha hozzáadunk az egyenlőtlenség mindkét oldalához c-t, láthatjuk, hogy

$$2s \le (\sqrt{2}+1)c \ ,$$

amit tovább alakítva:

$$\frac{2s}{\sqrt{2}+1} = \frac{2s \cdot (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{2s \cdot (\sqrt{2}-1)}{2-1} = 2s \cdot (\sqrt{2}-1) \le c \ .$$

Akkor veszi fel c a minimumát, ha az egyenlőtlenségből egyenlőség lesz, vagyis ha $c = 2s \cdot (\sqrt{2}-1)$.

Ilyenkor a terület:

$$t = s(s-c) = s(s - 2s \cdot (\sqrt{2}-1)) = s^2 - 2s^2 \cdot (\sqrt{2}-1) = s^2(1 - 2(\sqrt{2}-1)) =$$

$$= s^2(1 - (2\sqrt{2}-2)) = s^2(1 - 2\sqrt{2} + 2) = s^2(3 - 2\sqrt{2}) \ .$$

Ez a maximális terület, amit akkor kapunk meg, ha a számtani és négyzetes közepekre felírt (és az ebből következő összes) egyenlőtlenségből egyenlőség lesz, amiről tudjuk, hogy akkor következik be, ha $a = b$.

Tehát adott $k = 2s$ kerület mellett a legnagyobb területű derékszögű háromszöget akkor kapjuk, ha a háromszög egyenlő szárú, és a c oldal hossza $2s \cdot (\sqrt{2}-1)$.

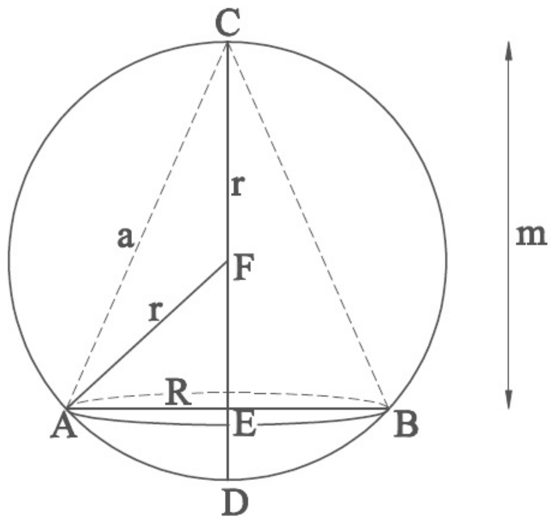
7. Adott gömbbe írt egyenes kúpok közül melyiknek legnagyobb a palástja?[7]

Legyen a gömbbünk adott r sugarú. A kúp paraméterei változóak, ezeket kell jól megválasztani ahhoz, hogy maximalizáljuk a P palástot. Ha a kúp alkotóját a-val, alapkörének sugarát pedig R-rel jelöljük, akkor a P palást felírható

$$P = R\pi a$$

alakban. Ez azonban az alapkör sugarától és az alkotótól is függ. Próbájuk meg egy változótól függővé tenni a palástot, hogy egyszerűbb legyen a maximalizálás!

Nézzük a feladathoz tartozó ábrát!



Először is írjunk fel alapvető feltételeket az R és a értékeire!

Természetesen $0 < R \leq r$, hiszen a kúpnak az adott r sugarú gömbbe írhatónak kell lennie és geometriailag értelmezhetőnek, és $0 < a < 2r$ ugyanilyen okokból.

Most nézzük az ábra szerinti derékszögű háromszögeket! m magasság mellett

$$m^2 + R^2 = a^2$$

az AEC háromszögre felírt Pitagorasz-tétel miatt. Ezen kívül

$$R^2 + (m - r)^2 = r^2$$

az AEF háromszögre felírt Pitagorasz-tétel miatt. Ezt átrendezve:

$$R^2 = r^2 - (m - r)^2 = r^2 - (m^2 - 2mr + r^2) = r^2 - m^2 + 2mr - r^2 = m(2r - m)$$

[7] Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása c. könyv 61. feladata

Ez mind azért kell, hogy egyváltozós függvényt írhassunk fel a palástra.

Számoljunk P^2-tel! Ezt megtehetjük, hiszen ugyanakkor veszi fel a maximumát, mint P. A fenti feltételeket felhasználva:

$$P^2 = R^2\pi^2 a^2 = R^2\pi^2(m^2 + R^2) = m(2r - m)\pi^2[m^2 + m(2r - m)] =$$

$$= m(2r - m)\pi^2(m^2 + 2rm - m^2) = m(2r - m)\pi^2 2rm =$$

$$= m^2\pi^2 r(4r - 2m) = r\pi^2 \cdot m \cdot m \cdot (4r - 2m)\ .$$

Ez adott r mellett, csak az m magasságtól függő érték. Tehát ha maximalizálni akarjuk, akkor elég csak az $m \cdot m \cdot (4r - 2m)$ kifejezés szélsőértékét keresni. Felhasználva a számtani és mértani közepek közötti összefüggés következményét, megállapíthatjuk, hogy mivel

$$m + m + (4r - 2m) = 4r$$

állandó, ezért a kifejezés - vagyis a szorzatuk - akkor maximális, ha a tényezők értékei megegyeznek. Vagyis, ha

$$m = 4r - 2m \Rightarrow m = \frac{4r}{3}\ .$$

Tehát a maximális palástú kúp magassága adott r sugarú gömb mellett $m = \frac{4r}{3}$. A kúp többi paraméterét a fenti képletekbe való behelyettesítéssel kapjuk meg. Az AEF háromszögre felírt Pitagorasz-tétel miatt

$$R^2 = r^2 - (m - r)^2 = r^2 - (\frac{4r}{3} - r)^2 = r^2 - (\frac{16r^2}{9} - \frac{8r^2}{3} + r^2) =$$

$$= \frac{24r^2 - 16r^2}{9} = \frac{8r^2}{9}$$

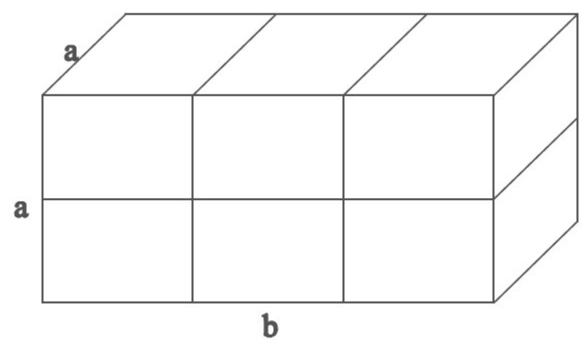
amiből $R = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot r$ adódik. Az a alkotó értékét pedig az előbb kiszámolt értékek segítségével az AEC háromszögre felírt Pitagorasz-tételből kapjuk meg:

$$a^2 = m^2 + R^2 = \frac{16r^2}{9} + \frac{8r^2}{9} = \frac{24r^2}{9}$$

amiből $a = \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot r$ -et kapunk.

A feladat megoldása tehát, hogy adott r sugarú gömbbe írt egyenes kúpok közül az $m = \frac{4r}{3}$ magasságú, $a = \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot r$ alkotójú, $R = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot r$ alapsugarú kúpnak a legnagyobb a palástja.

8. Adott térfogatú, négyzetes oszlop alakú csomagot az ábrán látható módon akarunk átkötni zsineggel. Hogyan kell megválasztanunk a csomag méreteit, ha a lehető legkevesebb zsineget akarjuk felhasználni az átkötéshez?[8]



Jelöljük az ábrán látható módon az oldalakat a-val és b-vel! Ezeket a paramétereket kell jól megválasztanunk ahhoz, hogy a felhasznált zsineg hossza (k) a lehető legkisebb legyen adott V térfogat mellett.

Írjuk fel a minimalizálandó k zsineghosszt! Mindkét a oldalú négyzetes oldallapon egy-egy zsinegszakasz megy keresztül. A többi $a \cdot b$-s téglalap alakú oldallapból kettőt egy-egy b hosszúságú zsineggel és kettő-kettő a hosszúságú zsineggel kötünk át, a másik kettőt pedig csak két-két a hosszúságúval. Így felírható a felhasznált zsineg hossza

$$k = 2a + 2b + 4a + 4a = 5a + 5a + 2b$$

alakban.

Az adott V térfogat pedig:

$$V = a^2 b \ .$$

Nézzük a zsineghossz képletében szereplő tagok szorzatát!

$$5a \cdot 5a \cdot 2b = 50a^2 b = 50V \ .$$

A képletben szereplő V azonban adott a feladat leírása szerint, vagyis a tagok szorzata állandó. Ezek szerint fel tudjuk használni k minimalizálására a számtani és mértani közepek közötti összefüggés következményét, vagyis k akkor veszi fel minimális értékét, ha a képletben szereplő tagok egyenlőek egymással:

$$5a = 2b \ .$$

Tudjuk ezek szerint, hogy

[8] Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása c. könyv 41. feladata

$$5a \cdot 5a \cdot 5a = 50V \ ,$$

amiből

$$5a = \sqrt[3]{50V} \ ,$$

vagyis

$$a = \sqrt[3]{\frac{50}{125}V} = \sqrt[3]{\frac{2}{5}V} \ .$$

Az $5a = 2b$ képletbe behelyettesítve megkapjuk b optimális értékét is:

$$b = \frac{5}{2}a = \frac{5}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{5}V} = \sqrt[3]{\frac{250}{40}V} = \sqrt[3]{\frac{25}{4}V} \ .$$

Akkor lesz tehát adott V térfogat mellett minimális a felhasznált zsineghossz, ha $a = \sqrt[3]{\frac{2}{5}V}$ és $b = \sqrt[3]{\frac{25}{4}V}$. A zsineg hossza ebben az esetben:

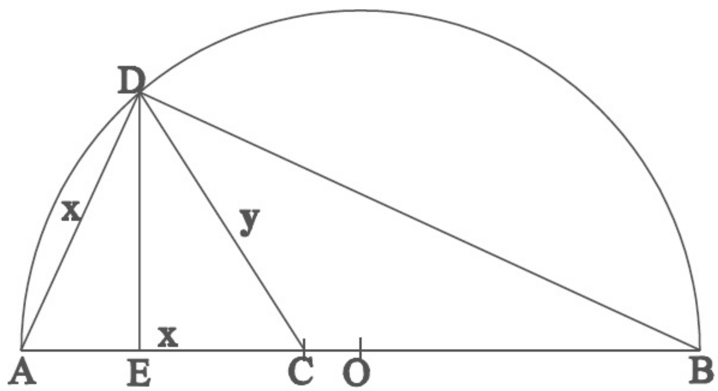
$$k = 5a + 5a + 2b = 3 \cdot \sqrt[3]{50V} \ .$$

9. Egy repülőgép félkörívet leírva repül A repülőtérről B repülőtérre. A repülőterek légvonalban mért távolsága c kilométer. Az AB szakaszon egy megfigyelő helyezkedik el. Állapítsuk meg, hogy az AB szakasz melyik pontjában van a megfigyelő legtávolabb a repülőgéptől egy olyan pillanatban, amikor a repülőgép ugyanolyan messze van A repülőtértől, mint a megfigyelő.[9]

Átfogalmazva, feladatunk maximalizálni a repülő-megfigyelő távolságot, ha az A repülőtértől a megfigyelő és a repülő is ugyanolyan távol vannak.

Ábrázoljuk feladatunkat! Adottak az A, B repülőterek, amik c távolságra vannak egymástól, és ezek fölött egy repülő félköríven halad A-ból B-be. Ez matematikai nyelven: adott az $\overline{AB} = c$ szakasz, egy félkör átmérője, a félköríven pedig egy D mozgó pont. Ezen kívül van egy C megfigyelőnk, ami az AB szakaszon helyezkedik el. Ha az $\overline{AC}$ távolságot x-szel jelöljük, akkor a feladat szerint úgy keressük a D pontot, hogy $\overline{AC} = \overline{AD} = x$ teljesüljön. Ezen kívül jelöljük még ábránkon az ACD háromszögben a AC oldalhoz tartozó magasság talppontját E-vel!

[9] Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása c. könyv 58. feladata



Nevezzük y-nal a maximalizálandó CD szakasz hosszát! Ekkor az ECD derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel alapján

$$y^2 = \overline{CE}^2 + \overline{ED}^2 \ .$$

Célunk ezután kifejezni a $\overline{CE}$ és az $\overline{ED}$ szakasz hosszát az adott c és az x függvényében.

Mivel a D pont az AB szakaszhoz tartozó Thalész-félköríven helyezkedik el, ezért az ABD háromszögben az ADB szög derékszögű. Így pedig használható az ABD háromszögre a befogótétel, az $\overline{AD} = x$ befogóra felírva:

$$x = \sqrt{c \cdot \overline{AE}}$$

amiből

$$x^2 = c \cdot \overline{AE}$$

egyértelműen adódik. Ha ebből kifejezzük az $\overline{AE}$ értékét, máris megkapjuk a $\overline{CE}$ hosszt az x-szel és c-vel kifejezve:

$$\overline{AE} = \frac{x^2}{c} \text{ miatt}$$

$$\overline{CE} = \overline{AC} - \overline{AE} = x - \frac{x^2}{c} \ .$$

Most az $\overline{ED}$ szakasz felírásához nézzük az ADB háromszöget! A magasságtétel által az $\overline{ED}$ szakasz könnyen szorzatra bontható:

$$\overline{ED} = \sqrt{\overline{AE} \cdot \overline{EB}}$$

alakban, ami ekvivalensen átalakítható

$$\overline{ED}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{EB} = \overline{AE}(\overline{AB} - \overline{AE}) = \frac{x^2}{c} \cdot (c - \frac{x^2}{c})$$

alakúvá.

Ezután már csak a kapott képleteket kell behelyettesíteni a maximalizálandó y^2képletébe. Vagyis:

$$y^2 = \overline{CE}^2 + \overline{ED}^2 = (x - \frac{x^2}{c})^2 + \frac{x^2}{c} \cdot (c - \frac{x^2}{c}) =$$

$$= x^2 - \frac{2x^3}{c} + (\frac{x^2}{c})^2 + x^2 - (\frac{x^2}{c})^2 = \frac{2x^2c^2 - 2x^3}{c} =$$

$$= \frac{1}{c} \cdot x^2 \cdot (2c - 2x) \ .$$

Mivel c adott értékű, ezért a maximum eléréséhez elég az $x \cdot x \cdot (2c - 2x)$ kifejezés szélsőértékét keresni. Erre pedig alkalmazhatjuk a számtani és mértani közepek közötti összefüggés következményét, vagyis mivel az

$$x + x + (2c - 2x) = 2c$$

összeg állandó, a szorzat akkor maximális, ha a tényezők egyenlőek:

$$x = 2c - 2x \ .$$

Tehát y^2 és emiatt y is akkor maximális, ha az előző képlet alapján $x = \frac{2c}{3}$. Ebből a maximális y^2 értéke

$$y^2 = \frac{1}{c} \cdot x^2 \cdot (2c - 2x) = \frac{1}{c} \cdot (\frac{2c}{3})^2 \cdot (2c - 2 \cdot \frac{2c}{3}) =$$

$$= \frac{8}{9}c^2 - \frac{16}{27}c^2 = \frac{24 - 16}{27}c^2 = \frac{8}{27}c^2 \ ,$$

amiből

$$y_{max} = \frac{2c}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \ .$$

Vagyis ahhoz, hogy a repülőgép és a megfigyelő a legmesszebb legyenek egymástól az adott feltételek mellett, a megfigyelőnek $\frac{2c}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ távolságra kell állnia a repülőtől, ahol c a két repülőtér közötti távolságot jelöli.

10. Azok közül a négyoldalú szabályos gúlák közül, amelyeknek mindegyik oldaléle a oldalhosszúságú, melyiknek legnagyobb a felszíne?[10]

Legyen a szabályos gúla alapéle x hosszúságú, az oldallapok magassága pedig m. Feladatunk maximalizálni a felszínét ezeknek a gúláknak, ami ilyen alakban írható fel:

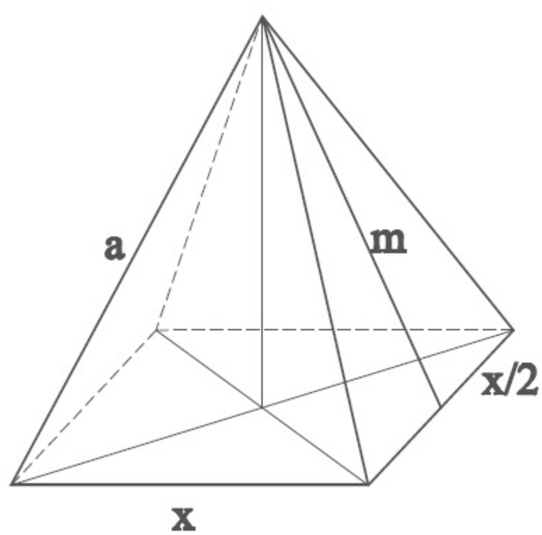
$$F = x^2 + 2xm \; .$$

Szabályos gúla lévén az oldallapokon az alaphoz tartozó magasság pont felezi az x oldalt. Így a Pitagorasz-tétel felírható az oldalmagasság által lemetszett derékszögű háromszögekre:

$$a^2 = m^2 + (\frac{x}{2})^2 \; ,$$

amiből

$$m = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} \; .$$



Ha a Pitagorasz-tétel által a és x-szel kifejezett m értéket behelyettesítjük a felületképletbe,

$$F = x^2 + 2x \cdot \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} = x^2 + \sqrt{4x^2a^2 - x^4} \; ,$$

láthatjuk, hogy két nemnegatív szám összegeként megkaphatjuk. Erre pedig fel tudjuk írni a számtani és négyzetes közepek közötti összefüggést:

[10] Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása c. könyv 77. feladata

$$\frac{x^2 + \sqrt{4x^2a^2 - x^4}}{2} \leq \sqrt{\frac{x^4 + 4x^2a^2 - x^4}{2}} ,$$

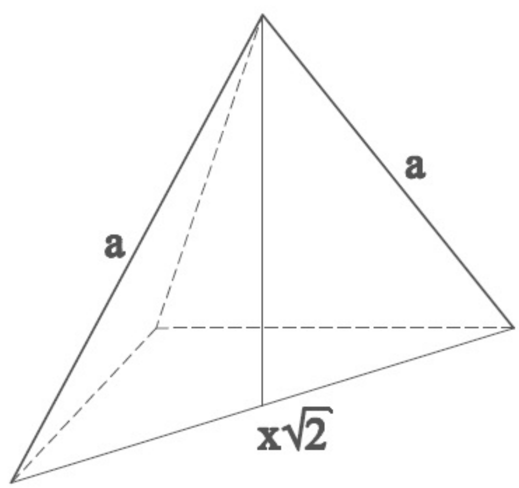
ahol tudjuk, hogy az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha
$x^2 = \sqrt{4x^2a^2 - x^4} \quad \Rightarrow \quad 2x^4 = 4x^2a^2 \quad \Rightarrow \quad x = a\sqrt{2}$,
tehát ez lenne a maximum. Felhasználva a számtani és négyzetes közepek közötti összefüggést és az előbbi eredményt:

$$F \leq 2\sqrt{2}a \cdot x = 2\sqrt{2}a \cdot a\sqrt{2} = 4a^2$$

egyenlőtlenségből a maximum értéket akkor kapnánk, ha F egyenlő lenne a jobb oldallal.

Azonban egy kis ügyeskedéssel be lehet látni, hogy ezt csak az elfajuló eset éri el!

Vágjuk el a gúlát átlósan! Az így kapott tengelymetszet egy olyan háromszög, melynek egyenlő szárai a hosszúságúak, alapéle pedig $x\sqrt{2}$, ugyanis egy x oldalú négyzet átlója.



A háromszög-egyenlőtlenség miatt tehát felírható erre a háromszögre a következő:

$$x\sqrt{2} < a + a ,$$

amiből

$$x < \frac{2a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$$

adódik. A maximum eléréséhez szükséges értéket ($x = \sqrt{2}a$) akkor venné fel az ismeretlen x oldalunk, ha az alkotók - és így a teljes palást is - teljesen rásimulnának átlójára. Ilyenkor a felület

$$F = 4a^2 = 2 \cdot (\sqrt{2}a)^2 = 2x^2$$

képletéből is látszik, hogy valójában csak az alap területét vesszük kétszer.

Ha nem elfajuló a gúlánk, vagyis $m > 0$ magassággal rendelkezik, akkor valódi maximum nem létezik a felületre. Hiszen az F ha felveszi a $4a^2$ maximumát, a gúla már elfajuló. Így F tetszőlegesen megközelítheti a maximum értéket, de nem veheti fel.

Tehát a felület annál nagyobb, minél jobban megközelíti x értéke a $\sqrt{2}a$-t.

3. Differenciálszámítással megoldható feladatok

Ebben a részben a különböző példákra egy általánosabb megoldást mutatok be, a differenciálszámítás segítségével.

A fejezet első felében a felhasznált fogalmak kerülnek bemutatásra, röviden. A nem szereplő definíciók (például: határérték, egy oldali környezet) ugyan fontosak és alapvetők a témakörben, de tekintettel szakdolgozatom témájára, nem részleteztem őket. A feladatok megoldásához nélkülözhetetlen fogalmak és tételek vannak jelen ebben a részben.

Az itt szereplő feladatokat is igyekeztem úgy megválogatni, hogy egy kis ügyeskedés kelljen a megoldásukhoz. Ezekhez is felhasználtam elemi módszereket, hogy a maximalizálandó illetve minimalizálandó függvényeket egyváltozós függvényekkel lehessen felírni. Azonban maga a szélsőérték keresés már deriválással történik.

3.1. Felhasznált definíciók, tételek, összefüggések

Derivált definíciója:. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értelmezve van az a pont egy környezetében. Ha a $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ határérték létezik és véges, akkor ezt a határértéket a függvény deriváltjának nevezzük ebben a pontban.
Jelölése: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

Deriváltfüggvény definíciója:. f deriváltfüggvénye f', egy olyan függvény, amely ott van értelmezve ahol f deriválható és minden pontban a derivált értékét veszi fel.

Lokális növekedés(csökkenés) az a pontban:. Az f függvény az a pontban lokálisan nő(csökken), ha értelmezve van az a pont egy környezetében és van az a pontnak egy olyan bal oldali környezete, ahol minden x-re teljesül az, hogy
$f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$ és egy olyan jobb oldali környezete, ahol minden x-re: $f(x) \geq f(a)$ $(f(x) \leq f(a))$.

Szigorú lokális növekedés(csökkenés) az a pontban:. Az f függvény az a pontban szigorúan lokálisan nő(csökken), ha értelmezve van az a pont egy környezetében és van az a pontnak egy olyan bal oldali környezete, ahol minden $x \neq a$-ra teljesül az, hogy $f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$ és egy olyan jobb oldali környezete, ahol minden x-re: $f(x) > f(a)$ $(f(x) < f(a))$.

Lokális maximum(minimum) az a pontban:. f-nek az a pontban lokális maximuma(minimuma) van, ha értelmezve van az a pont egy környezetében és van az a pontnak egy olyan környezete, ahol minden x-re: $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$.

Szigorú lokális maximum(minimum) az a pontban:. f-nek az a pontban szigorú lokális maximuma(minimuma) van, ha értelmezve van az a pont egy környezetében és van az a pontnak egy olyan környezete, ahol minden $x \neq a$-ra: $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$.

Tétel:. Legyen f differenciálható a-ban. Ekkor

1. $f'(a) > 0 \Rightarrow f$ lokálisan szigorúan nő a-ban
2. $f'(a) < 0 \Rightarrow f$ lokálisan szigorúan csökken a-ban
3. f lokálisan nő a-ban $\Rightarrow f'(a) \geq 0$
4. f lokálisan csökken a-ban $\Rightarrow f'(a) \leq 0$
5. f-nek a-ban lokális minimuma vagy maximuma van $\Rightarrow f'(a) = 0$.

Második derivált fogalma:. f deriváltfüggvényének a deriváltját f második deriváltjának nevezzük. Jelölése: $(f'(x))' = f''(x)$

Tétel: . Legyen f kétszer differenciálható a-ban, és $f'(a) = 0$. Ekkor

1. $f''(a) < 0 \Rightarrow a$-ban szigorú lokális maximum van
2. $f''(a) > 0 \Rightarrow a$-ban szigorú lokális minimum van.

Abszolút maximum(minimum) az a pontban:. f függvény legyen értelmezve az A halmazon. Ha az A-hoz tartozó $f(A)$ értékkészletnek van legnagyobb(legkisebb) eleme, akkor ezt az f függvény A-n felvett abszolút maximumának(minimumának) nevezzük. Jelölés: $\max f(A)$, $\min f(A)$

Ha $a \in A$ és $f(a) = \max f(A)$ $(f(a) = \min f(A))$, akkor azt mondjuk, hogy a az f függvény A-hoz tartozó abszolút maximumhelye(minimumhelye).

Weierstrass tétele:. Egy korlátos, zárt intervallumban folytonos függvénynek mindig van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye.

3.2. Feladatok és megoldásaik

1. Határozzuk meg az $x^6 + y^6$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha tudjuk, hogy $x^2 + y^2 = 1$.[11]

Feladatunk az $f(x,y) = x^6 + y^6$ függvény szélsőértékét megadni az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellet. A feltétel miatt az $f(x,y)$ függvény kifejezhető x változójaként. Vagyis $y^2 = 1 - x^2$ teljesülése miatt az eredeti felírásból az

$$f(x) = x^6 + (1-x^2)^3 = x^6 + 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 = 3x^4 - 3x^2 + 1$$

képletet kapjuk a függvényre. Így ennek a szélsőértékét fogjuk keresni.

A függvény szélsőértékét ott veheti fel, ahol az első deriváltja 0:

$$f'(x) = 12x^3 - 6x = 0$$

vagyis

$$6x(2x^2 - 1) = 0$$

amiből

$$\begin{cases} x = 0, & \text{vagy} \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & . \end{cases}$$

Tehát $f(x)$-nek ezen a helyeken lehet szélsőértéke. Azt, hogy fel is veszi-e a szélsőértékét, a második deriváltból derítjük ki.

$$f''(x) = 36x^2 - 6 = 6(6x^2 - 1)$$

tehát

$f''(0) < 0 \Rightarrow x = 0$-nál maximuma, és

$f''(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) > 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$-nél minimuma van a függvénynek.

Behelyettesítéssel kapjuk, hogy $f(x,y)$ maximuma 1, minimuma pedig $\frac{1}{4}$.

Azonban figyelembe kell vennünk, hogy a feltétel miatt a szélsőértéket az $x \in [-1,1]$ zárt intervallumon keressük. Az $x = -1$ és $x = 1$ pontok határpontok, így itt külön kell keresni a szélsőértéket. Az $x = \pm 1$ helyen $y = 0$:

$$f(\pm 1, 0) = 1$$

is maximumhely.

[11] Bartha Gábor - Bogdán Zoltán - Duró Lajosné dr. - Gyapjas Ferencné - Hack Frigyes - dr. Kántor Sándorné - dr. Korányi Erzsébet: Matematika feladatgyűjtemény II. c. könyv 236. feladata

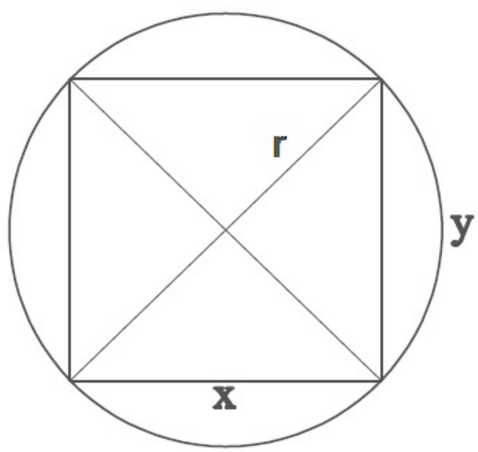
Így a függvény szélsőértékeit az $x = \{0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1\}$ helyeken veheti fel, maximum értéke 1, minimum értéke pedig $\frac{1}{4}$. Az y értékeit a feltételbe való behelyettesítésből és a szimmetria miatt megkapjuk.

2. Határozzuk meg a legnagyobb területűt az adott sugarú
a) körbe b) félkörbe
írt téglalapok közül![12]

a) Az adott sugarat jelöljük r-rel, a téglalap oldalait pedig x-szel és y-nal. Ekkor r, x, $y \geq 0$.

Tudjuk, hogy a téglalap területe felírható $t = xy$ alakban. Úgyhogy a feladat szerint a $t(x, y) = xy$ kétváltozós függvényt kell maximalizálni úgy, hogy a téglalap az adott sugarú körbe legyen írható.

Húzzuk be ábránkon a téglalap átlóját! Ez egybeesik a kör átmérőjével, mert két végpontja a téglalap szemközti csúcsai és felette illetve alatta derékszögben látszanak a szomszédos csúcsaik, amik a köríven helyezkednek el. Tehát az átló $2r$ hosszúságú.



Pitagorasz tételét felhasználva kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 = 4r^2$$

amiből

$$x = \sqrt{4r^2 - y^2}$$

[12]Bartha Gábor - Bogdán Zoltán - Duró Lajosné dr. - Gyapjas Ferencné - Hack Frigyes - dr. Kántor Sándorné - dr. Korányi Erzsébet: Matematika feladatgyűjtemény II. c. könyv 242. feladata

amivel a $t(x,y)$ kétváltozós függvényből csak az y-tól függő függvényt tudunk felírni a keresett területre:

$$t(y) = y \cdot \sqrt{4r^2 - y^2}\ .$$

Ennek azonban feltétele, hogy $4r^2 - y^2 \geq 0$ legyen. Ez akkor teljesül, ha $2r \geq y$. Egyenlőség esetén elfajuló esetet kapunk, ilyenkor azonban minimum területet kapunk, nem maximumot. Ugyanígy az $y = 0$ eset is elfajuló, és minimumot ad. Tehát a maximumhelyet az $y \in (0, 2r)$ intervallumban keressük.

Az előbbi deriváltja

$$t'(y) = \sqrt{4r^2 - y^2} + y \cdot \frac{1}{2} \cdot (4r^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y) =$$

$$\frac{4r^2 - y^2 - y^2}{\sqrt{4r^2 - y^2}} = \frac{4r^2 - 2y^2}{\sqrt{4r^2 - y^2}},$$

vagyis $t(y)$-nak akkor lehet szélsőértéke, ha ennek az értéke megegyezik a 0-val. Tehát ha

$$4r^2 = 2y^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}r = y$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2}r$$

teljesül.

Az első deriváltan kívül a második deriváltat is figyeljük meg:

$$t''(y) = \left(\frac{4r^2 - 2y^2}{\sqrt{4r^2 - y^2}}\right)' = \frac{-4y \cdot \sqrt{4r^2 - y^2} - (4r^2 - 2y^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2y) \cdot (4r^2 - y^2)^{(-\frac{1}{2})}}{\sqrt{4r^2 - y^2}^2}$$

ami $y = \sqrt{2}r$ esetén

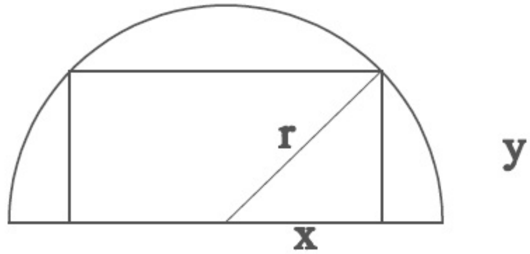
$$t''(\sqrt{2}r) = \frac{-4\sqrt{2}r \cdot \sqrt{2}r}{2r^2} = \frac{-8r^2}{2r^2} < 0$$

vagyis $y = \sqrt{2}r$-ben lokális maximuma van a területfüggvénynek.

Így a legnagyobb területű téglalapot akkor kapjuk, ha az x oldal hossza $\sqrt{2}r$ és az y oldal hossza is $\sqrt{2}r$, tehát a téglalapunk négyzet. A maximális terület: $t = \sqrt{2}r \cdot \sqrt{2}r = 2r^2$.

b) Most a legnagyobb területűt kell megtalálnunk adott sugarú félkörbe írt téglalapok közül. Jelöljük az adott sugarat ismét r-rel, a kör átmérőjére fektetett oldal hosszát $2x$-szel, a másik oldalt pedig y-nal. (r, x, $y \geq 0$) Így a területképlet a következőképp változott:

$$t = 2xy$$



Ha behúzzuk a téglalap egyik a félköríven elhelyezkedő csúcsához a kör sugarát, akkor egy olyan derékszögű háromszöget kapunk, aminek átfogója r, két befogója pedig x és y hosszú. Erre Pitagorasz tételét felírva:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

amiből

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Itt $r^2 - y^2 \geq 0$-nak teljesülnie kell, vagyis $r \geq y$. Az $r = y$ eset elfajuló, ahogyan az $y = 0$ is, ilyenkor minimumhelyről van szó. Ezért a maximumhelyet az $y \in (0, r)$ intervallumban vizsgáljuk.

Így a kétváltozós $t(x, y) = 2xy$ területfüggvényt egyváltozóssá írhatjuk át, mégpedig

$$t(y) = 2y \cdot \sqrt{r^2 - y^2}$$

alakban.

Ezt deriválva kapjuk, hogy

$$t'(y) = 2\sqrt{r^2 - y^2} + y \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 - y^2}} \cdot (-2y) =$$

$$\frac{2(r^2 - y^2) + y(-2y)}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{2r^2 - 2y^2 - 2y^2}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{2r^2 - 4y^2}{\sqrt{r^2 - y^2}},$$

tehát $t(y)$ ott veheti fel a szélsőértékét, ahol ennek az értéke 0.

Vagyis, ha

$$2r^2 = 4y^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}r^2 = y^2$$

$$\Rightarrow \frac{r}{\sqrt{2}} = y$$

és

$$x = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Eszerint, a területfüggvényünknek akkor lehet szélsőértéke, ha a félkörbe írt téglalap egyik oldala $2x = \sqrt{2}r$, ami kétszer akkora, mint a másik oldala $y = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

A második deriváltfüggvény

$$t''(y) = (\frac{2r^2 - 4y^2}{\sqrt{r^2 - y^2}})' = \frac{-8y \cdot \sqrt{r^2 - y^2} - (2r^2 - 4y^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot (r^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y)}{\sqrt{r^2 - y^2}^2}$$

miatt láthatjuk, hogy a függvénynek tényleg szélsőértéke van, hiszen az adott helyen

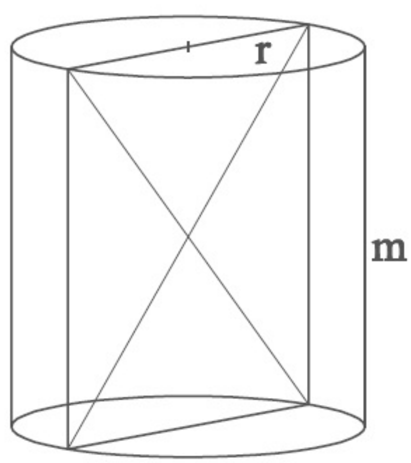
$$t''(\frac{r}{\sqrt{2}}) = \frac{-\frac{8r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{r^2}{2}}}{\frac{r^2}{2}} = \frac{-\frac{8r^2}{2}}{\frac{r^2}{2}} < 0,$$

vagyis lokális maximumhelyről van szó. A maximumot a már meghatározott $x = y = \frac{r}{\sqrt{2}}$ helyen veszi fel, értéke: $t = 2 \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} = r^2$.

3. Tekintsük azokat a forgáshengereket, amelyeknek a tengelymetszete 9 dm kerületű. E forgáshengerek közül melyiknek a térfogata a legnagyobb?[13]

Adva van egy forgáshenger, amelyről azt tudjuk, hogy tengelymetszetének kerülete 9 dm. Ha a henger sugara r dm, magassága pedig m dm hosszú, ez így írható fel:

$$4r + 2m = 9.$$



[13]Rábai Imre: Elemi matematikai példatár IV. 165. feladata

Feladatunk a legnagyobb térfogatút megtalálni azon hengerek közül, amelyekre az előbbi teljesül.

Írjuk fel a forgáshengerek térfogatára vonatkozó általános képletet!

$$V(r,m) = r^2\pi m$$

Ezt a függvényt kell maximalizálnunk. A hengerre vonatkozó feltétel miatt a kétváltozós $V(r,m)$ függvényt egyváltozóssá tudjuk alakítani. Kifejezve m-et r-rel:

$$\frac{9-4r}{2} = m,$$

$V(r)$ könnyedén felírható:

$$V(r) = r^2\pi \cdot \tfrac{9-4r}{2}.$$

Itt a szélsőértéket a $0 \leq r \leq 2.25$ helyen keresnénk, de az egyenlőség esetén minimumot kapnánk. Így a maximumhelyet az $r \in (0, 2.25)$ intervallumban keressük.

Ehhez először $V(r)$ első deriváltjára van szükség:

$$V'(r) = 2r\pi \cdot \frac{9-4r}{2} + r^2\pi \cdot (-2) =$$

$$9r\pi - 4r^2\pi - 2r^2\pi = -6r^2\pi + 9r\pi$$

Ott lehet $V(r)$-nek szélsőértéke, ahol $V'(r) = 0$. Vagyis, ha

$$9r\pi - 6r^2\pi = 0$$

$$\Rightarrow 3r\pi(3-2r) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 0 & \text{ami minimumhely, vagy} \\ r = \frac{3}{2} & \end{cases}$$

Most vegyük a második deriváltat!

$$V''(r) = (-6r^2\pi + 9r\pi)' = -12r\pi + 9\pi$$

$$V''(\frac{3}{2}) = (-12 \cdot \frac{3}{2} + 9)\pi$$

$V''(\frac{3}{2}) < 0$ tulajdonsága miatt a V függvénynek lokális maximumhelye van $\frac{3}{2}$-ben. Behelyettesítve a $4r + 2m = 9$ képletbe kapjuk, hogy a keresett legnagyobb térfogatú forgáshenger $\frac{3}{2}$ dm sugarú, és $\frac{3}{2}$ dm magasságú.

4. Egy téglalap kerülete 12 dm. Az oldalai fölé kifelé egyenlőoldalú háromszögeket rajzolunk. Mekkorák a téglalap oldalai, ha a téglalapból és a négy egyenlőoldalú háromszögből álló alakzat területe a lehető legkisebb?[14]

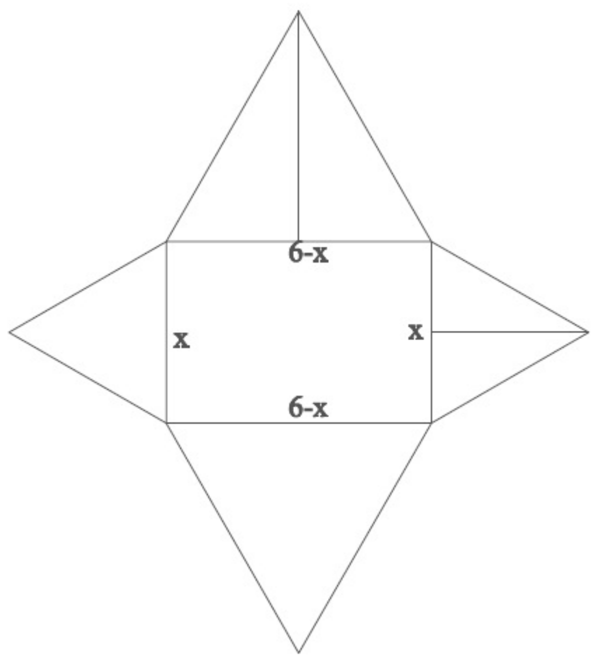
A téglalapról annyit tudunk, hogy kerülete 12 dm. Ezt felhasználva felírhatjuk a téglalap oldalait x, és $(6-x)$-ként, ugyanis ha

$$K = 12 \text{ dm}$$

akkor

$$\frac{K}{2} = 6 \text{ dm}$$

ami egyenlő a két különböző hosszúságú oldal összegével. $(0 \leq x \leq 6)$



Így a téglalap oldalai fölé írt szabályos háromszögek x, és $(6-x)$ oldalhosszúságúak, magasságuk pedig ezek $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szeresei.

A keresett terület ezáltal felírható

$$T(x) = x(6-x) + 2 \cdot \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} + 2 \cdot \frac{(6-x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(6-x)}{2}$$

alakban, ami a téglalapból, két x oldalú és két $(6-x)$ oldalú szabályos háromszög területéből áll.

---

[14]Rábai Imre: Elemi matematikai példatár IV. 107. feladata

Ezt kifejtve kapjuk, hogy

$$T(x) = 6x - x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - 6\sqrt{3}x + 18\sqrt{3} =$$

$$(\sqrt{3} - 1)x^2 + (6 - 6\sqrt{3})x + 18\sqrt{3}.$$

Ennek a kifejezésnek akkor lehet szélsőértéke, ha a deriváltfüggvénye 0:

$$T'(x) = (2\sqrt{3} - 2)x + 6 - 6\sqrt{3} = 0$$

Vagyis

$$x = \frac{6\sqrt{3} - 6}{2\sqrt{3} - 2} = \frac{6(\sqrt{3} - 1)}{2(\sqrt{3} - 1)} = \frac{6}{2} = 3$$

esetén.
A második deriváltat megfigyelve

$$T''(x) = 2\sqrt{3} - 2$$

láthatjuk, hogy az $x = 3$ helyen

$$T''(3) = 2\sqrt{3} - 2 > 0$$

tehát eredeti terület-függvényünknek itt lokális minimuma van. Ilyenkor a terület értéke:

$$T(3) = 3 \cdot 3 + \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2} = 9 + 9\sqrt{3}\ .$$

Mivel az $x \in [0, 6]$ zárt intervallumon keressük a szélsőértéket, meg kell nézni az x értékét a határpontokon. Ha $x = 0$, akkor a másik oldal 6 hosszú, és fordítva. Tehát elég az egyikre nézni a terület értékét:

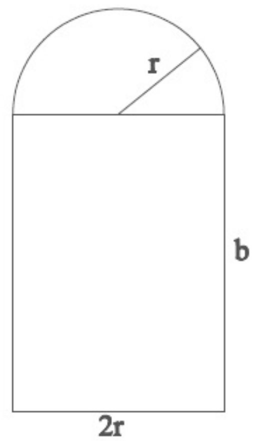
$$T(6) = 2 \cdot \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}6}{2} = 18\sqrt{3}\ ,$$

ami nagyobb, mint az $x = 3$-ra kapott terület, vagyis nem minimumérték.
A keresett téglalap eszerint egy 3 dm oldalhosszúságú négyzet.

5. Egy csatorna keresztmetszete egy téglalapból és a téglalap egyik oldala fölé írt félkörből áll. A metszet L kerülete adott hosszúságú. Milyen méretekkel készítsük a metszetet, ha azt akarjuk, hogy területe a lehető legnagyobb legyen?[15]

Jelöljük a keresztmetszet felső részén elhelyezett félkör sugarát r-rel! Így a téglalap vízszintes oldalai $2r$ hosszúságúak, a másik oldalhossza pedig legyen b. $(r, b \geq 0)$

[15] Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása c. könyv 31. feladata



L kerület adott és a területet szeretnénk maximalizálni. A terület az előbbi jelölésekkel felírva:

$$t = 2rb + \frac{r^2\pi}{2}$$

Láthatjuk, hogy ez az r és a b értékétől is függ.

Mivel az L kerület adott, ezért az egyiket ki tudjuk fejezni a másikkal:

$$L = 2r + 2b + r\pi = (2+\pi)r + 2b$$

$$\Rightarrow 2b = L - (2+\pi)r$$

$$\Rightarrow b = \frac{L-(2+\pi)r}{2}$$

Ezt a területképletbe behelyettesítve egy egyváltozós függvényt kapunk:

$$t(r) = 2r \cdot \frac{L-(2+\pi)r}{2} + \frac{r^2\pi}{2} =$$

$$Lr - r^2(2+\pi) + \frac{r^2\pi}{2} = (-2-\frac{\pi}{2})r^2 + Lr$$

Keressük meg azt a helyet, ahol a derivált értéke 0!

$$t'(r) = 2(-2-\frac{\pi}{2})r + L = (-4-\pi)r + L = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{L}{4+\pi}$$

A derivált akkor 0, ha $r = \frac{L}{4+\pi}$, vagyis itt felveheti szélsőértékét a területfüggvény.

Nézzük meg mi történik itt a második deriválttal!

$$t''(r) = -4 - \pi$$

ami minden esetben kisebb mint 0, tehát $t''(\frac{L}{4+\pi}) < 0$ is fennáll, miszerint itt lokális maximuma van a területfüggvénynek.

Ilyenkor $r = \frac{L}{4+\pi}$ és behelyettesítés alapján $b = \frac{L - \frac{L}{4+\pi} \cdot (2+\pi)}{2}$-ben a terület értéke:

$$t(\frac{L}{4+\pi}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{L^2}{4+\pi} \ .$$

Azonban figyelembe kell vennünk, hogy az r értelmezési tartománya $[0, \frac{L}{2+\pi}]$. Így a határpontokban meg kell néznünk, hogy hogy viselkedik a függvény. $r = 0$-ban csak egy b hosszú szakaszt kapunk, így ez minimum eset. Ha $r = \frac{L}{2+\pi}$ és így $b = 0$, akkor a területet

$$t = \frac{r^2 \pi}{2}$$

alakban kaphatjuk meg. Ilyenkor a terület értéke

$$t(\frac{L}{2+\pi}) = \frac{L^2 \pi}{2 \cdot (2+\pi)^2} \ .$$

Mivel az elfajuló eset területe kisebb, mint az $r = \frac{L}{4+\pi}$ eseté, a legnagyobb területű keresztmetszetet akkor kapjuk meg, ha

$$r = \frac{L}{4+\pi} \qquad \text{és} \qquad b = \frac{L - \frac{L}{4+\pi} \cdot (2+\pi)}{2} \ .$$

4. Összefoglalás

Szakdologzatomban bemutattam az elemi matimatikai módszerek szélsőérték feladatokban való felhasználásának több módját. Olyan példákat válogattam össze, amelyek egy részét csak elemi módon oldottam meg és olyanokat is, amelyekhez a deriválást is alkalmaztam.

A feladatokat (a terjedelemi korlát okán) a teljesség igénye nélkül válogattam össze, azonban úgy érzem, sikerült érzékeltetnem a módszer hatékonyságát és bárki számára befogadhatóságát. Az elemi módszerekkel megoldható példák közül mutattam olyanokat, amik megoldásához csak egy-egy tétel illetve összefüggés elégséges, és olyanokat amelyek szélsőértékei meghatározásához ezeknek a kombinációit kell alkalmazni. Külön kiemelném az első rész 9., repülőteres feladatát, melyet azért választottam, mert megmutatja, mennyire összetett és szép tud lenni a középiskolai anyagra épülő maximalizálás.

A függvények deriválásanak mechanikus menete sok esetben meggyorsítja a szélsőértékfeladatok megoldását, de az elemi módszerek használatával, egy szebb, könnyebben megérthető, nagyobb közönség által alkalmazható megoldást kapunk. Emellett az ábrák felrajzolásával nemcsak áttekinthetőbb, de sokkal kézzelfoghatóbb lesz a feladatok megoldása.

Felhasznált irodalom

- Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása
- Rábai Imre: Elemi matematikai példatár IV.
- Bartha Gábor - Bogdán Zoltán - Duró Lajosné dr. - Gyapjas Ferencné - Hack Frigyes - dr. Kántor Sándorné - dr. Korányi Erzsébet: Matematika feladatgyűjtemény II.
- Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István: Sokszínű matematika 10.
- Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István: Sokszínű matematika 12.
- Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: Analízis I.