Sorok és hatványsorok vizsgálata Abel nyomán

Szakdolgozat

Készítette: **Vánkovics Mária**

Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető: **Pfeil Tamás** adjunktus

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest

2012

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A szakdolgozatom témája sorok és hatványsorok. Niels Henrik Abel nevéhez e terület több tételét kötik, ezek közül dolgoztam fel néhányat.

Az első fejezetben összefoglaltam Abel élettörténetét. A második fejezetben felsoroltam azokat a korábbi tanulmányaimból ismert fogalmakat és állításokat, melyeket a szakdolgozatomban felhasználok. A harmadik fejezetben definiáltam a korlátos változású sorozat fogalmát, majd összegyűjtöttem a rá vonatkozó ismert állításokat. Végül példákat mutattam nem korlátos változású sorozatokra. Az utolsó példa kapcsán leírtam a váltakozó előjelekkel ellátott harmonikus sor konvergenciájának elemi bizonyítását. A negyedik fejezetben az Abel-átrendezés után az Abel-egyenlőtlenség két változatát adtam meg, majd két sorozat szorzatából képzett sorok konvergenciáját vizsgáltam. Bebizonyítottam Abel és Dirichlet tételét, majd példákat mutattam e két tétel alkalmazására. Az ötödik fejezetben röviden foglalkoztam függvénysorozatok és függvénysorok pontonkénti illetve egyenletes konvergenciájával. A hatodik fejezetben ismertettem Abel és Dirichlet végtelen sorokra érvényes tételének függvénysorokra vonatkozó általánosítását. Az utolsó fejezetben azt vizsgáltam, hogyan terjeszthető ki a végtelen sor összegének fogalma. Először végtelen sor szummábilitását, majd az Abel-szummábilitását vizsgáltam.

1. fejezet

Niels Henrik Abel

1.1. Abel élete és munkássága

Niels Henrik Abel 1802. augusztus 5-én a norvégiai Finnoy szigetén született. Édesapja szegény protestáns pap volt. Abel születését követően a család lakóhelyet változtatott, Gjerstad parókiájára költöztek. Itt töltötte gyerekkorát, majd 1815-ben megkezdte tanulmányait az oslói püspöki iskolában. Egyik tanára észrevette Abel matematikai tehetségét, ezért addig megfejtetlen problémákat adott fel neki megoldásra. Tudása tökéletesítése érdekében tanulmányozni kezdte nagy matematikusok, mint Isaac Newton, Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange és Karl Fridrich Gauss munkáit.

1820-ban édesapja meghalt, így a család anyagi helyzete bizonytalanná vált. Tanára támogatást szerzett számára, s ennek köszönhetően 1821-ben megkezdhette tanulmányait a Christiania Egyetemen Oslóban. Ezt követő évben megszerezte első egyetemi tudományos fokozatát. Felismerte, hogy az általános ötödfokú egyenlet algebrailag nem oldható meg, s erre vonatkozó bizonyítását ki is adta 1824-ben. Elismerést remélve az értekezést elküldte Gaussnak, aki nem ismerte fel, hogy a problémának az Abel által adott bizonyítása helyes.

Berlinbe látogatása során találkozott a mérnök és autodidakta matematikus August Leopold Crellével, aki jó barátja lett, és szakmailag is támogatta. Crelle alapított egy folyóiratot, melynek első számában Abel több tanulmánya is olvasható volt.

Kutatásaiban főképp az egyenletek elméletéről, függvényegyenletekről és a zárt alakban való integrálásról írt. A transzcendens függvényekkel foglalkozó tanulmányában adta közre az algebrai függvények integráljáról szóló elméleten belül az Abel-tételt, mely szerint véges számú illeve fajtájú független integrál létezik. Ez utóbbi tanulmányát beterjesztette a Francia Tudományos Akadémiához, ahol visszautasítással kellett szembesülnie, művét nem ismerték el.

Mielőtt haza tért volna Párizsból, megvizsgáltatta magát egy orvossal, aki megállapította, hogy tüdőbeteg. Visszatérve Norvégiába magánórákból tartotta el magát, 1828–ban helyettesítő tanári állást kapott. Nehéz anyagi helyzete és egyre rosszabbodó egészségi állapota nem tartotta vissza tudása mélyítésében és a matematika más ágain belüli kutatásban. Ebben az időszakban adott közre egy tanulmányt, mely tartalmazta az Abel-féle egyenleteknek Abel-csoportokra alapozott elméletét. Karl Gustav Jacobival közösen foglalkoztak az elliptikus függvényekkel.

1828 őszén Abel megbetegedett, és állapota az idő teltével egyre súlyosabb lett. 1829. április 6-án Frolandon tuberkulózisban halt meg.

1841–ben a Francia Tudományos Akadémia kiadta értekezéseit.

1.2. Abel-díj

Az Abel-díjat az Oslói Egyetem matematika tanszékének javaslatára hozták létre 2001 őszén, Abel születésének 200-adik évfordulóján. A díjat 2003–tól évente nemzetközi bizottság osztja ki arra méltó, kiemelkedő matematikusoknak.

2. fejezet

Számsorozatok, végtelen sorok és hatványsorok

2.1. A számsorozat főbb tulajdonságai

2.1.1. Definíció (Konvergens sorozat). Az (y_n) sorozatot konvergensnek mondjuk, ha létezik olyan $Y \in \mathbb{R}$, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz található $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ küszöbindex, amelyre $n \geq N_\varepsilon$ esetén $\mid y_n - Y \mid < \varepsilon$.

2.1.2. Definíció (Nullsorozat). Egy (y_n) sorozatra azt mondjuk, hogy nullsorozat vagy zérussorozat, ha a határértéke 0.

2.1.3. Definíció (Korlátosság). Az (y_n) számsorozatot felülről korlátosnak nevezzük, ha van olyan K valós szám, amelynél nincs nagyobb eleme a sorozatnak, azaz minden n indexre $y_n \leq K$ teljesül. Minden ilyen tulajdonságú K számot a sorozat felső korlátjának nevezünk.

Az (y_n) számsorozatot alulról korlátosnak nevezzük, ha van olyan k valós szám, amelynél nincs kisebb eleme a sorozatnak, azaz minden n indexre $y_n \geq k$ teljesül. Minden ilyen tulajdonságú k számot a sorozat alsó korlátjának nevezünk.

Az (y_n) számsorozatot korlátosnak nevezzük, ha alulról és felülről is korlátos.

2.1.4. Definíció (Monoton sorozat). Azt mondjuk, hogy az (y_n) sorozat monoton növekvő, ha bármely n indexre teljesül, hogy

$$y_n \leq y_{n+1} \ .$$

Ha a fenti feltételben $y_n \geq y_{n+1}$ áll, akkor azt mondjuk, hogy az (y_n) sorozat monoton csökkenő. Amennyiben az $y_n < y_{n+1}$, illetve az $y_n > y_{n+1}$ reláció teljesül, akkor szigorúan monoton növekvő, illetve szigorúan monoton csökkenő sorozatról beszélünk.

Az (y_n) sorozatra azt mondjuk, hogy monoton sorozat, ha monoton növekvő vagy monoton csökkenő.

2.2. A végtelen sor főbb tulajdonságai

2.2.1. Definíció (Végtelen sor és konvergenciája). Legyen az (y_n) egy valós számsorozat, és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ az ebből képzett végtelen sor. Jelölje s_n az (y_n) sorozat n-edik részletösszegét, azaz a $\sum_{i=1}^{n} y_i$ alakú számot minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ha az (s_n) sorozat konvergens, és a határértéke Y, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ végtelen sor konvergens, és az összege Y. Jele $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y$.

Ellenkező esetben, ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ végtelen sort divergensnek hívjuk.

2.2.2. Tétel (Cauchy-konvergenciakritérium). *A $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz található olyan N index, hogy minden $N \leq m < n$ indexek esetén*

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} y_k \right| < \varepsilon.$$

2.2.3. Definíció (Abszolút konvergencia). A $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ végtelen sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} | y_n |$ végtelen sor konvergens.

2.2.4. Definíció (Végtelen sor átrendezése). Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ végtelen sort és legyen $b : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ egy bijekció, azaz a pozitív egész számok önmagára történő bijektív leképezése. A $\sum_{i=1}^{\infty} y_{b(i)}$ végtelen sort a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ végtelen sor b bijekcióhoz tartozó átrendezésének nevezzük.

2.2.5. Tétel.
- *Bármely abszolút konvergens sor konvergens.*

- *Egy abszolút konvergens sor bármely átrendezése abszolút kovergens, és az összege megegyezik az eredeti sor összegével.*

2.2.6. Definíció (Feltételes konvergencia). Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ végtelen sor feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

2.2.7. Tétel (Riemann átrendezési tétele). *Legyen a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ végtelen sor feltételesen konvergens, ekkor bármely $Y \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan átrendezés, amely konvergens és az összege Y, továbbá van olyan átrendezés, melynek összege $+\infty$, illetve olyan is létezik, melynek összege $-\infty$, végül van olyan, amely divergens és nincs összege.*

2.2.8. Definíció (Leibniz-típusú sor). Ha (y_n) monoton fogyó nemnegatív tagú sorozat, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} y_n$ alakú végtelen sort Leibniz-típusú sornak nevezzük.

2.2.9. Tétel. *Egy Leibniz-típusú sor pontosan akkor konvergens, ha $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.*

2.2.10. Definíció (Cauchy-szorzat). *A $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ és $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ végtelen sorok Cauchy-szorzatán a*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} x_j y_{i-j} \right)$$

végtelen sort értjük.

2.2.11. Tétel (Mertens). *Legyenek a $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ és $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ végtelen sorok konvergensek, és $\sum_{i=0}^{\infty} x_i = X$, $\sum_{i=0}^{\infty} y_i = Y$. Ha e végtelen sorok közül legalább az egyik abszolút konvergens, akkor a Cauchy-szorzatuk is konvergens, és*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} x_j y_{i-j} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} y_i.$$

2.3. A hatványsor főbb tulajdonságai

2.3.1. Definíció (Hatványsor). Adott (a_n) sorozat és $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

alakú végtelen sort x_0 középpontú hatványsornak nevezzük. Az (a_n) sorozatot a hatványsor együttható-sorozatának mondjuk.

2.3.2. Definíció (Konvergenciahalmaz). Egy hatványsor konvergenciahalmazán azon x valós számok halmazát értjük, melyre a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ végtelen sor konvergens.

2.3.3. Definíció (Összegfüggvény). A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor összegfüggvényén az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya a hatványsor konvergenciahalmaza.

2.3.4. Definíció (Konvergenciasugár). Vegyünk egy (a_n) együttható-sorozattal megadott hatványsort, ekkor a hatványsor konvergenciasugarán az alábbit értjük:

$$R := \begin{cases} 0, & \text{ha } (\sqrt[n]{|a_n|}) \text{ felülről nem korlátos,} \\ +\infty, & \text{ha } (\sqrt[n]{|a_n|}) \text{ nullsorozat,} \\ \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha } \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} \text{ pozitív valós szám.} \end{cases}$$

2.3.5. Tétel (Cauchy-Hadamard-tétel). *Adott (a_n) sorozat és x_0, x valós számok esetén a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor abszolút konvergens, ha $|x-x_0| < R$, míg $|x-x_0| > R$ esetén divergens.*

2.3.6. Tétel (Abel-tétel). *Egy hatványsor összegfüggvénye a konvergenciahalmaz minden pontjában folytonos.*

2.3.7. Tétel. *A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor összegfüggvénye differenciálható a konvergenciahalmaz belső pontjainak halmazán, és ott az $f(x)$ összegfüggvény deriváltfüggvénye*

$$f'(x) = a_1 + 2\cdot a_2\cdot(x-x_0) + 3\cdot a_3\cdot(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\cdot a_{n+1}(x-x_0)^n.$$

2.3.8. Tétel. *A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor összegfüggvényének létezik primitív függvénye a konvergenciahalmaz belső pontjainak halmazán, melyek*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + c, \textit{ ahol } c \in \mathbb{R}.$$

3. fejezet

Korlátos változású sorozatok

3.1. Korlátos változású sorozatok

3.1.1. Definíció (Korlátos változású sorozat). Az (y_n) sorozatot korlátos változású sorozatnak hívjuk, ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_{n+1} - y_n|$ végtelen sor konvergens.

3.1.2. Állítás. *Minden monoton és korlátos sorozat korlátos változású.*

Bizonyítás: Ha (y_n) monoton és korlátos sorozat, akkor $(y_{n+1} - y_n)$ állandó előjelű, ezért

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} |y_{k+1} - y_k| = \begin{cases} y_{n+1} - y_1, & \text{ha } (y_n) \text{ monoton nő,} \\ y_1 - y_{n+1}, & \text{ha } (y_n) \text{ monoton fogy.} \end{cases}$$

A monoton és korlátos sorozat konvergens, így

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} y_n - y_1, & \text{ha } (y_n) \text{ monoton nő,} \\ y_1 - \lim\limits_{n\to\infty} y_n, & \text{ha } (y_n) \text{ monoton fogy.} \end{cases}$$

Ezért (s_n) konvergens, ami azt jelenti, hogy (y_n) korlátos változású. □

3.1.3. Állítás. *Minden korlátos változású sorozat konvergens.*

Bizonyítás: A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_{n+1} - y_n|$ végtelen sor konvergens, ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (y_{n+1} - y_n)$ végtelen sor is konvergens. Ekkor az

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} (y_{k+1} - y_k) = y_{n+1} - y_1$$

sorozat konvergens. Ebből következik, hogy (y_{n+1}) is konvergens, és így az eggyel kisebb indexű (y_n) korlátos változású sorozat is konvergens. $\square$

Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos is, tehát minden korlátos változású sorozat korlátos.

3.1.4. Állítás. *Egy sorozat pontosan akkor korlátos változású, ha előállítható két konvergens monoton növő sorozat különbségeként.*

Bizonyítás: Legyen (x_n) egy korlátos változású sorozat és $x_0 := 0$. Legyenek az (y_n) és (z_n) sorozatok az alábbi alakúak:

$$y_n := \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}|, \text{ ahol } n \in \mathbb{N}^+$$

$$z_n := y_n - x_n.$$

Ekkor $z_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}| - x_n$, $n \in \mathbb{N}^+$. Az (y_n) sorozat nemnegatív tagú sor részletösszeg-sorozata, ezért monoton növő. A (z_n) sorozatra:

$$z_{n+1} \geq z_n$$

$$y_{n+1} - x_{n+1} \geq y_n - x_n$$

$$y_{n+1} - y_n \geq x_{n+1} - x_n$$

$$|x_{n+1} - x_n| \geq x_{n+1} - x_n \ .$$

Tehát (z_n) monoton növő sorozat. Már csak (y_n) és (z_n) konvergenciáját kell belátnunk. Az (y_n) sorozat konvergens, hiszen $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k-1}|$ konvergens, ami azt jelenti, hogy a részletösszeg-sorozata konvergens. A korlátos változású (x_n) sorozat a 3.1.3. állítás szerint konvergens. Végül azt kaptuk, hogy (z_n) két konvergens sorozat különbsége, így persze (z_n) konvergenciáját is beláttuk. Következésképpen minden korlátos változású sorozat előáll két konvergens monoton növő sorozat különbségeként. Ezzel a bizonyítás egyik irányát végigvittük.

A másik iránynál bebizonyítjuk, ha egy sorozat előáll két konvergens monoton növő sorozat különbségeként, akkor az korlátos változású. Legyenek (y_n) és (z_n) monoton növő konvergens sorozatok és $(y_n) \to Y \in \mathbb{R}$ $(z_n) \to Z \in \mathbb{R}$ a határértékek. Ekkor az $(y_n - z_n)$ sorozat korlátos változású, ez a tulajdonság az alábbi módon bizonyítható:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(y_{n+1} - z_{n+1}) - (y_n - z_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |(y_{n+1} - y_n) - (z_{n+1} - z_n)| \ .$$

Ekkor a végtelen sor részletösszeg-sorozata

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} |(y_{i+1} - y_i) - (z_{i+1} - z_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |y_{i+1} - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_{i+1} - z_i| \ .$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalán minden tag nemnegatív szám abszolút értéke, így mindkét n tagú összeg teleszkópos összeg.

$$\sum_{i=1}^{n} |y_{i+1} - y_i| = \sum_{i=1}^{n} (y_{i+1} - y_i) = y_{n+1} - y_1 \leq Y - y_1 \ ,$$
$$\sum_{i=1}^{n} |z_{i+1} - z_i| = \sum_{i=1}^{n} (z_{i+1} - z_i) = z_{n+1} - z_1 \leq Z - z_1 \ .$$

Ekkor $s_n \leq Y + Z - y_1 - z_1 \in \mathbb{R}$, tehát az (s_n) részletösszeg-sorozat nemnegatív tagú és korlátos, ezért konvergens. □

3.2. Példák nem korlátos változású sorozatokra

Három példát mutatunk olyan sorozatra, mely konvergens, de nem korlátos változású.

3.2.1. Példa.

$$x_n := \begin{cases} \frac{2}{n+1}, & \text{ha } n \text{ páratlan, } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Az (x_n) számsorozat konvergens és a határértéke 0, továbbá a számsorozat nem monoton. Már csak azt kell látnunk, hogy (x_n) nem korlátos változású. Ehhez vizsgáljuk $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|$ konvergenciáját. Nézzük ezen végtelen sor részletösszegeit.

$$s_{2n+1} := \sum_{k=1}^{2n+1} |x_{k+1} - x_k| =$$

$$= |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + |x_4 - x_3| + \ldots + |x_{2n} - x_{2n-1}| + |x_{2n+1} - x_{2n}| + |x_{2n+2} - x_{2n+1}| =$$
$$= |0-1| + \left|\frac{1}{2} - 0\right| + \left|0 - \frac{1}{2}\right| + \ldots + \left|0 - \frac{2}{(2n-1)+1}\right| + \left|\frac{2}{(2n+1)+1} - 0\right| + \left|0 - \frac{2}{(2n+1)+1}\right| =$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \to +\infty \ .$$

A részletösszeg-sorozat páratlan indexű részsorozata divergens, mert a harmonikus sor divergens. A továbbiakban a páros indexű részsorozatot vizsgáljuk.

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} |x_{k+1} - x_k| =$$
$$= |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + |x_4 - x_3| + \ldots + |x_{2n-1} - x_{2n-2}| + |x_{2n} - x_{2n-1}| + |x_{2n+1} - x_{2n}| =$$
$$= |0-1| + \left|\frac{1}{2} - 0\right| + \left|0 - \frac{1}{2}\right| + \ldots + \left|\frac{2}{(2n-1)+1} - 0\right| + \left|0 - \frac{2}{(2n-1)+1}\right| + \left|\frac{2}{(2n+1)+1} - 0\right| =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \to +\infty \ .$$

Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|$ végtelen sor divergens, ezért az (x_n) sorozat nem korlátos változású.

3.2.2. Példa.

$$y_n := \frac{(-1)^n}{n} \ , \text{ ahol } n \in \mathbb{N}^+.$$

Az (y_n) sorozat zérussorozat, de nem monoton. Az a sejtésünk, hogy (y_n) nem korlátos változású.

$$y_{n+1} - y_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)$$
$$|y_{n+1} - y_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n}.$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_{n+1} - y_n|$ végtelen sornak minoráns sora $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ami divergens, ezért $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_{n+1} - y_n|$ is divergens. Következésképpen (y_n) nem korlátos változású.

3.2.3. Példa.

$$z_n := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{1}{i} \ , \text{ ahol } n \in \mathbb{N}^+.$$

A (z_n) sorozat vajon korlátos változású-e? Ehhez nézzük két egymás melletti tag különbségét.

$$z_{n+1} - z_n = (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1}.$$

Ekkor az eltérés abszolút értéke

$$|z_{n+1} - z_n| = \frac{1}{n+1}.$$

Tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_{n+1} - z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ végtelen sor divergens, ezért (z_n) nem korlátos változású.

A (z_n) sorozatról megmutatjuk, hogy konvergens, és a határértéke $\ln 2$. (z_n) konvergenciájában azért lehetünk biztosak, mert $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1}\frac{1}{i}$ Leibniz-típusú sor. Már csak azt kell belátni, hogy $z_n \to \ln 2$, azaz $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1}\frac{1}{i} = \ln 2$. Ehhez nézzük az $f(x) := \ln(1+x)$, $D(f) := (-1, \infty)$ függvény 0 középpontú Taylor-sorát:

$$T(x) := x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \ .$$

Tehát a fenti hatványsor együttható-sorozata $a_0 := 0$, $a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$ s ekkor a konvergenciasugár

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|}} = 1,$$

konvergenciahalmaza $(-1, 1]$.

A hatványsorokra vonatkozó Abel-tétel alkalmazásával vizsgáljuk meg a konvergenciahalmaz végpontjait. Az $|x| < 1$ kvóciensű mértani sor összegére vonatkozó

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \ |x| < 1$$

egyenlőség mindkét oldalának primitív függvényét véve a $(-1, 1)$ intervallumon, az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ ahol } \ |x| < 1.$$

A c konstans értékét az $x := 0$ helyettesítéssel kaphatjuk meg, c=0, vagyis

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \text{ ha } -1 < x < 1.$$

A jobb oldali hatványsor $x = 1$ esetén konvergens, mindkét függvény $x = 1$ esetén folytonos, ezért az Abel-tétel alapján

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

3.2.4. Megjegyzés. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ végtelen sor konvergenciájának létezik elemi bizonyítása is, mely több lépésből áll.

Tekintsük az (x_n) sorozatot, melynek tagjai az alábbi formában állnak elő:

$$x_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n, \text{ ahol } n \in \mathbb{N}^+.$$

1. **Állítás.** $x_n \geq \frac{1}{n}$, ahol $n \in \mathbb{N}^+$.

   Bizonyítás: Az egyenlőtlenséget teljes indukcióval bizonyítjuk. Az első tagra igaz az állítás.

$$x_1 = 1 \geq 1.$$

Tegyük fel, hogy n-re és annál kisebb indexek mindegyikére teljesül az állítás. Ekkor írjuk fel $n+1$-re a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

$$x_{n+1} \geq \frac{1}{n+1}.$$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) =$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln n + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1).$$

Az indukciós feltétel szerint elég igazolni, hogy

$$\frac{1}{n} + \ln n + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) \geq \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n} \geq \ln(n+1) - \ln n = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$1 \geq n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{<e}.$$

Az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatról tudjuk, hogy monoton növő módon tart az e számhoz. Ezzel igazoltuk, hogy (x_n) alulról korlátos, hiszen minden tagja pozitív. $\square$

Vizsgáljuk meg a sorozatot monotonitás szempontjából.

2. **Állítás.** $x_{n+1} < x_n$, $n \in \mathbb{N}^+$.

Bizonyítás:

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$
$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
$$1 < (n+1) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozatról tudjuk, hogy szigorúan monoton csökkenő módon tart az e számhoz. Tehát (x_n) szigorúan monoton fogyó. Ezzel az állítást igazoltuk. $\square$

Az (x_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő, és alulról korlátos, így konvergens. A $C := \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$ határértéket Euler-Mascheroni konstansnak nevezzük, értéke $C \approx 0,5772156649$.

3. **Állítás.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$.

Bizonyítás: A korábban definiált (x_n) sorozat konvergens, ezért $(x_{2n} - x_n)$ nullsorozat, hiszen $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_{2n}) \in \mathbb{R}$, vagyis

$$x_{2n} - x_n = \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \ln 2n\right] - \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \ln n\right] =$$
$$= \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} - \ln 2 \to 0.$$

Ebből következik, hogy $\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \to \ln 2$. $\square$

4. **Állítás.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

Bizonyítás: Legyen $z_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, ahol $n \in \mathbb{N}^+$. Nézzük a z_n sorozat páros, majd a páratlan indexű tagjait:

$$z_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n} =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \to \ln 2,$$
$$z_{2n+1} = z_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to \ln 2.$$

Ebből következik, hogy $z_n \to \ln 2$, s így $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \ln 2$. $\square$

4. fejezet

Abel és Dirichlet tétele

4.1. Abel-átrendezés, Abel-egyenlőtlenségek

4.1.1. Tétel (Abel-átrendezés). *Legyenek c_k, d_k, $k = 1, \ldots, n$ valós számok, és jelölje s_k a $\sum_{i=1}^{k} d_i$ összeget bármely $k = 1, \ldots, n$ esetén. Ekkor a $\sum_{k=1}^{n} c_k d_k$ összeg átrendezhető a következőképpen:*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k d_k = \sum_{k=1}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) s_k + c_n s_n.$$

Bizonyítás:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k d_k = c_1 d_1 + c_2 d_2 + \ldots + c_n d_n = c_1 s_1 + c_2 (s_2 - s_1) + \ldots + c_n (s_n - s_{n-1}) =$$

$$(c_1 - c_2) s_1 + (c_2 - c_3) s_2 + \ldots + (c_{n-1} - c_n) s_{n-1} + c_n s_n = \sum_{k=1}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) s_k + c_n s_n.$$

Ezzel a tételt beláttuk. □

4.1.2. Tétel (I. Abel-egyenlőtlenség). *Legyenek c_k, d_k, $k = 1, \ldots, n$ olyan valós számok, melyekre a (c_k) véges sorozat monoton fogyó és nemnegatív tagú, továbbá $m \leq \sum_{i=1}^{k} d_i \leq M$ bármely $k = 1, \ldots, n$ esetén. Ekkor igaz a következő egyenlőtlenség:*

$$c_1 \cdot m \leq \sum_{k=1}^{n} c_k d_k \leq c_1 \cdot M.$$

Bizonyítás: A tétel feltétele szerint

$$m \leq \sum_{i=1}^{k} d_i \leq M,$$

ami ekvivalens azzal, hogy $m \leq s_k \leq M$, ahol $s_k := \sum\limits_{i=1}^{k} d_i$, $k = 1, \ldots, n$. Az Abel-átrendezést alkalmazva a

$$\sum_{k=1}^{n} c_k d_k = (c_1 - c_2)s_1 + (c_2 - c_3)s_2 + \ldots + (c_{n-1} - c_n)s_{n-1} + c_n s_n$$

összegben minden s_k helyére M-et írva felső becslést kapunk, mert a tétel másik feltétele szerint a (c_k) sorozatról megköveteljük, hogy monoton fogyó legyen, és ennek köszönhetően az összegben szereplő $(c_i - c_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n-1$ és c_n egyike sem lesz negatív. Végül a következőt kapjuk felső becslésként:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k d_k \leq (c_1 - c_2)M + (c_2 - c_3)M + \ldots + (c_{n-1} - c_n)M + c_n M = c_1 \cdot M.$$

Ezzel igazoltuk a tétel második egyenlőtlenségét.

Az első hasonlóan kihozható, hiszen ha a

$$\sum_{k=1}^{n} c_k d_k = (c_1 - c_2)s_1 + (c_2 - c_3)s_2 + \ldots + (c_{n-1} - c_n)s_{n-1} + c_n s_n$$

összegben minden s_k helyére m-et írunk, akkor az összeget alulról becsüljük, hiszen $m \leq s_k$ minden $k = 1, \ldots, n$ esetén, így az alábbi alsó becsléshez jutunk:

$$c_1 \cdot m = (c_1 - c_2)m + (c_2 - c_3)m + \ldots + (c_{n-1} - c_n)m + c_n m \leq \sum_{k=1}^{n} c_k d_k.$$

Ezzel igazoltuk a tétel első egyenlőtlenségét is. □

4.1.3. Következmény. *Legyenek a c_k, d_k, $k = 1, \ldots, n$ olyan valós számok, melyekre a (c_k) véges sorozat monoton fogyó és nemnegatív tagú, valamint $\left|\sum\limits_{i=1}^{k} d_i\right| \leq M$ bármely $k = 1, \ldots, n$ esetén. Ekkor igaz a következő egyenlőtlenség:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k d_k\right| \leq c_1 \cdot M.$$

Az előzőekhez hasonló becslés adható akkor is, ha a (c_k) véges sorozat nem állandó előjelű.

4.1.4. Tétel (II. Abel-egyenlőtlenség). *Legyenek a c_k, d_k, $k = 1, \ldots, n$ olyan valós számok, melyekre a (c_k) véges sorozat monoton és $\left|\sum\limits_{i=1}^{k} d_i\right| \leq M$ bármely $k = 1, \ldots, n$ esetén. Ekkor igaz a következő egyenlőtlenség:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k d_k\right| \leq (|c_1| + 2|c_n|) \cdot M.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy (c_k) monoton fogyó véges sorozat, ebben az esetben nyilván teljesül, hogy

$$c_1 - c_n \geq c_2 - c_n \geq \ldots \geq c_{n-1} - c_n \geq 0.$$

Ekkor az I. Abel-egyenlőtlenség következményének felhasználásával az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (c_k - c_n) d_k \right| \leq (c_1 - c_n) \cdot M.$$

Ebből következik, hogy

$$\left| \sum_{k=1}^{n} c_k d_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} (c_k - c_n) d_k + \sum_{k=1}^{n} c_n d_k \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^{n} (c_k - c_n) d_k \right| + |c_n| \cdot \left| \sum_{k=1}^{n} d_k \right| \leq (\underbrace{c_1 - c_n}_{\leq |c_1| + |c_n|}) \cdot M + |c_n| \cdot M \leq (|c_1| + 2\,|c_n|) \cdot M.$$

Ha (c_k) monoton növő véges sorozat, akkor $(-c_k)$ monoton fogyó, ezért alkalmazhatjuk a már bizonyított monoton fogyó eset becslését:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} c_k d_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} (-c_k) d_k \right| \leq (|-c_1| + 2\,|-c_n|) \cdot M = (|c_1| + 2\,|c_n|) \cdot M.$$

Ezzel a tételt beláttuk. □

4.2. Abel és Dirichlet tétele

4.2.1. Tétel (Dirichlet-tétel). *Tegyük fel, hogy a (z_n) sorozat (s_n) részletösszeg-sorozata korlátos, továbbá (y_n) korlátos változású nullsorozat. Ekkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n (y_n - y_{n+1}) \text{ és a } \sum_{n=1}^{\infty} (y_n z_n)$$

végtelen sorok konvergensek, és az összegük egyenlő.

Bizonyítás: Tekintsük a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n (y_n - y_{n+1})$ végtelen sort. Az (s_n) részletösszeg-sorozat korlátos, tehát létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, melyre $|s_n| \leq K$ minden n indexre. Az (y_n) sorozat korlátos változású, így a definíció szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n - y_{n+1}|$ végtelen sor konvergens.

Tekintsük a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |s_n(y_n - y_{n+1})|$ végtelen sor részletösszegeit.

$$\sum_{k=1}^{n} |s_k(y_k - y_{k+1})| = \sum_{k=1}^{n} |s_k| \cdot |y_k - y_{k+1}| \leq K \sum_{k=1}^{n} |y_k - y_{k+1}| \leq K \sum_{k=1}^{\infty} |y_k - y_{k+1}| \in \mathbb{R}.$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |s_k(y_k - y_{k+1})|$ részletösszegei felülről korlátosak, ezért ez a végtelen sor konvergens, azaz $\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k(y_k - y_{k+1})$ abszolút konvergens.

Ez másképp is bizonyítható. Használjuk a Cauchy-konvergenciakritériumot, melynek segítségével belátható, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(y_n - y_{n+1})$ végtelen sor abszolút konvergens. A tétel feltétele szerint a (z_n) sorozat (s_n) részletösszeg-sorozata korlátos, tehát létezik olyan K valós szám, melyre $|s_n| \leq K$ minden n indexre. Feltettük továbbá, hogy (y_n) korlátos változású, ezért $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n - y_{n+1}|$ konvergens. A Cauchy-konvergenciakritérium szerint bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz található olyan $N_{\frac{\varepsilon}{K}}$ index, hogy minden $N_{\frac{\varepsilon}{K}} \leq m < n$ indexre

$$\sum_{k=m+1}^{n} |y_k - y_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Ekkor

$$\sum_{k=m+1}^{n} |s_k(y_k - y_{k+1})| = \sum_{k=m+1}^{n} |s_k| \cdot |y_k - y_{k+1}| \leq K \sum_{k=m+1}^{n} |y_k - y_{k+1}| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Így a Cauchy-kritérium szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(y_n - y_{n+1})$ végtelen sor abszolút konvergens.

Az Abel-átrendezés szerint

$$\sum_{k=1}^{n} y_k z_k = y_n s_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k(y_k - y_{k+1}).$$

Mivel (y_n) nullsorozat és (s_n) korlátos, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} y_n s_n = 0$, így a bal oldalon álló sorozat is konvergens, és az előző egyenlőség mindekét oldalának határértékét képezve

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k z_k}_{\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k z_k} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} y_n s_n}_{0} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} s_k(y_k - y_{k+1})}_{\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k(y_k - y_{k+1})}.$$

Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(y_n - y_{n+1})$ és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (y_n z_n)$ végtelen sorok összege egyenlő. Ezzel a Dirichlet-tételt beláttuk. $\square$

Milyen elegendő feltétel adható, hogy x valós szám és (y_n) számsorozat esetén az $(y_n \sin nx)$, illetve az $(y_n \cos nx)$ sorozatból képzett végtelen sorok konvergensek legyenek?

4.2.2. Példa. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ végtelen sor részletösszeg-sorozata korlátos, ahol $x \in \mathbb{R}$.

Ha $x \neq 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ részletösszeget a $2\sin\frac{x}{2}$ kifejezéssel bővítve, majd a

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha \cdot \sin\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

addíciós képletet alkalmazva az alábbit kapjuk:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin kx \sin\frac{x}{2}\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right]\right|.$$

Az utolsó összeg teleszkópos, ezért

$$\left(\cos\frac{1}{2}x - \cos\frac{3}{2}x\right) + \left(\cos\frac{3}{2}x - \cos\frac{5}{2}x\right) + \ldots + \left(\cos\left(n-\frac{1}{2}\right) - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) =$$
$$= \cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

A fenti összefüggést felhasználva, majd a háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \cdot \left|\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| \leq$$
$$\leq \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \cdot \left[\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\right] \leq \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|.$$

Tehát $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ részletösszeg-sorozata felülről korlátos, ha $x \in \mathbb{R}$ és $x \neq 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

Ha $x = 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$ alakú, akkor a végtelen sor minden tagja 0, így a részletösszeg-sorozat felülről korlátos.

4.2.3. Példa. Hasonlóan belátható, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx$ részletösszeg-sorozata felülről korlátos, ha $x \neq 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| = \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\cos kx \sin\frac{x}{2}\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]\right| = \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \cdot \left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}\right| \leq$$
$$\leq \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \cdot \left[\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| + \left|\sin\frac{x}{2}\right|\right] \leq \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|.$$

Ha $x = 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, akkor a részletösszeg-sorozat felülről nem korlátos.

4.2.4. Példa. Ha (y_n) korlátos változású nullsorozat, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin nx$ végtelen sor konvergens.

4.2.5. Példa. Ha (y_n) korlátos változású nullsorozat, akkor minden $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2l\pi$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \cos nx$ végtelen sor konvergens.

A Dirichlet-tétel egy speciális esete az alábbi következmény.

4.2.6. Következmény. *Tegyük fel, hogy*

- *az (y_n) sorozat monoton csökkenő zérussorozat, és*
- *a $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ végtelen sor részletösszegeinek sorozata korlátos.*

Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n z_n$ végtelen sor konvergens.

Bizonyítás: Az (y_n) zérussorozat korlátos, így a feltétel szerint monoton és korlátos, tehát korlátos változású. □

4.2.7. Tétel (Abel-tétel). *Legyen (y_n) korlátos változású sorozat, és a $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n)$ végtelen sor konvergens, ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} (y_n z_n)$ végtelen sor konvergens.*

Bizonyítás: Az (y_n) sorozat korlátos változású, ezért konvergens. Jelölje (s_n) a $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n)$ végtelen sor részletösszeg-sorozatát. Mivel a $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n)$ végtelen sor konvergens, ezért (s_n) konvergens. Ekkor vizsgáljuk a $\lim_{n\to\infty} (y_n \cdot s_n)$ határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} (y_n \cdot s_n) = \lim_{n\to\infty} y_n \cdot \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} y_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (z_n).$$

Tehát fent két konvergens sorozat szorzata szerepel, s ekkor $(y_n \cdot s_n)$ konvergens és a határértéke megegyezik a két tényező határértékének szorzatával. Ahogy a Dirichlet-tétel bizonyításában láttuk, az Abel-átrendezést alkalmazva minden n indexre

$$\sum_{k=1}^{n} y_k z_k = y_n s_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (y_k - y_{k+1}).$$

A jobb oldali második tag konvergens, ami pontosan úgy bizonyítható, mint a Dirichlet-tétel bizonyításában. Mivel a jobb oldali összeg mindkét tagja konvergens, ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} (y_n z_n)$ végtelen sor konvergens. □

Az Abel-tétel egy speciális esete az alábbi következmény.

4.2.8. Következmény. *Tegyük fel, hogy*

- *az* (y_n) *sorozat monoton és korlátos, és*
- *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *végtelen sor konvergens.*

Ekkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n z_n$ *végtelen sor is konvergens.*

Bizonyítás: Az (y_n) sorozat monoton és korlátos, tehát korlátos változású. $\square$

4.2.9. Állítás. *Ha* (z_n) *monoton fogyó sorozat, akkor* $\left(\frac{z_1+\ldots+z_n}{n}\right)$ *is monoton fogyó.*

Bizonyítás: Azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{z_1+\ldots+z_n}{n} \geq \frac{z_1+\ldots+z_{n+1}}{n+1}, \; n \in \mathbb{N}^+.$$

Ekvivalens átalakítással a következőt kapjuk:

$$(n+1)\cdot z_1+\ldots+(n+1)\cdot z_n \geq n\cdot z_1+\ldots+n\cdot z_n+n\cdot z_{n+1},$$

$$z_1+\ldots+z_n \geq n\cdot z_{n+1}.$$

A (z_n) sorozat monoton fogyó, ezért

$$\begin{aligned} z_1 &\geq z_{n+1}, \\ z_2 &\geq z_{n+1}, \\ &\vdots \\ z_n &\geq z_{n+1}. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $z_1+\ldots+z_n \geq n\cdot z_{n+1}$. Ezzel igazoltuk, hogy a monoton fogyó (z_n) sorozat számtaniközép-sorozata is monoton fogyó. $\square$

4.2.10. Megjegyzés. *Hasonlóan belátható, hogy monoton növő sorozat számtaniközép-sorozata is monoton növő.*

4.2.11. Példa. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$ végtelen sor konvergens.

A 4.2.2. példából tudjuk, hogy

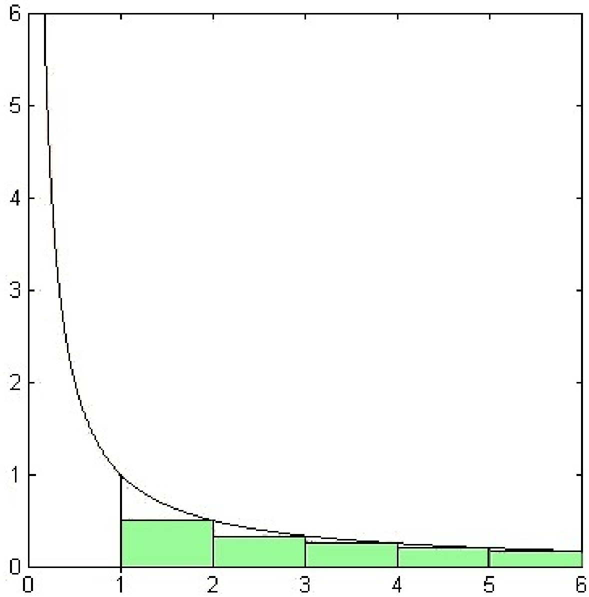
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|, \; x \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z}.$$

Ezt $x = 1$ esetén alkalmazva a következőt kapjuk:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\right| \leq \left|\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}\right|.$$

Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$ végtelen sor részletösszeg-sorozata korlátos.

Még megmutatjuk, hogy az $\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}\right)$ sorozat korlátos változású nullsorozat. A 4.2.9. állításból arra következtethetünk, hogy mivel $(\frac{1}{n})$ monoton fogyó, ezért $\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}\right)$ is monoton fogyó. Már csak azt kell belátnunk, hogy ez a számtaniközép-sorozat nullsorozat. Ehhez vegyük az $\frac{1}{x}$ függvény $[1, n]$ intervallumon vett Riemann-integráljának becslését az alábbi módon:



$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x}dx > \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$
$$\ln n + 1 > 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Ekkor felírható, hogy

$$0 < \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n} < \frac{\ln n + 1}{n} \to 0.$$

A rendőr-elv szerint az $\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}\right)$ sorozat nullsorozat, továbbá monoton fogyó, ezért korlátos változású. Tehát alkalmazható a Dirichlet-tétel, a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$ végtelen sor konvergens.

A 7.1.2. tétel bizonyítása szerint minden konvergens sorozat számtaniközép-sorozata is konvergens, és a két határérték megegyezik.

4.2.12. Példa. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \sin(na)}{n}$ végtelen sor bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén konvergens.

Vegyük észre, hogy a

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \Big)$$

addíciós tételt alkalmazva a következőhöz jutunk:

$$\frac{\cos n \cdot \sin(na)}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n(a+1)) + \sin(n(a-1))}{n} \right) = \frac{1}{2n} \cdot \sin(n(a+1)) + \frac{1}{2n} \cdot \sin(n(a-1)).$$

Itt a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\big(k(a+1)\big)$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\big(k(a-1)\big)$ végtelen sorok részletösszeg-sorozatai a 4.2.2. példa alapján korlátosak. Az $\left(\frac{1}{2n}\right)$ sorozatról tudjuk, hogy monoton fogyó módon tart a nullába. Tehát alkalmazható a Dirichlet-tétel következménye, a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \sin(na)}{n}$ végtelen sor konvergens.

4.2.13. Példa. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{\sqrt{n}}$ végtelen sor konvergens.

Az $(\arctan n)$ sorozat monoton növő és korlátos, tehát konvergens, a határértéke pedig

$$\lim_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}.$$

Az $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ sorozat monoton fogyó és nemnegatív tagú, így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ végtelen sor Leibniz-típusú. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, ezért $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergens. Tehát alkalmazható az Abel-tétel következménye, s így a vizsgált végtelen sor konvergens.

4.2.14. Példa. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{\ln x}}{n}$ végtelen sor konvergens, ha $x > 1$.

A 3.2.4. megjegyzés 4. állításából tudjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ végtelen sor konvergens, összege $-\ln 2$. Az $(\sqrt[n]{\ln x})$ sorozat korlátos, és ha $x > e$, akkor szigorúan monoton csökkenő, míg az $1 < x < e$ esetén szigorúan monoton növekvő. Alkalmazható az Abel-tétel következménye, a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{\ln x}}{n}$ végtelen sor konvergens.

5. fejezet

Függvénysorozatok és függvénysorok

5.1. Függvénysorozatok

5.1.1. Definíció (Függvénysorozat). Egy olyan hozzárendelést, mely minden n természetes számhoz egy valós f függvényt rendel, függvénysorozatnak hívjuk, és a következőképp jelöljük: (f_n).

5.1.2. Definíció (Egyenletes korlátosság). Legyen (f_n) függvénysorozat és $D(f_n) = H$, $n \in \mathbb{N}^+$. Ezt a függvénysorozatot egyenletesen korlátosnak nevezzük, ha létezik olyan K valós szám, hogy bármely n index esetén minden $x \in H$ elemre $|f_n(x)| \leq K$.

5.1.3. Definíció (Pontonkénti konvergencia). Legyen (f_n) függvénysorozat, melyre $D(f_n) = H$, $n \in \mathbb{N}^+$. Az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergál az $f : H \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha a H halmaz minden x elemére teljesül

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Jelölés: $f_n \to f$.

5.1.4. Definíció (Egyenletes konvergencia). Legyen (f_n) függvénysorozat és f valós függvény, melyekre $D(f_n) = D(f) = H$, $n \in \mathbb{N}^+$. Az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens a H halmazon, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz található $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy bármely $n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq N_\varepsilon$ esetén minden $x \in H$ elemre teljesül

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Jelölés: $f_n \overset{e}{\hookrightarrow} f$.

5.1.5. Állítás. *Ha az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens a H halmazon, akkor pontonként is.*

Bizonyítás: Ha a függvénysorozat egyenletesen konvergens, akkor annak definícióját bármely rögzített $x \in H$ elemre alkalmazva azt kapjuk, hogy az $(f_n(x))$ számsorozat konvergens. $\square$

5.1.6. Tétel (Cauchy-konvergenciakritérium). *Az (f_n) függvénysorozat akkor és csak akkor konvergál egyenletesen a H halmazon, ha bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz található olyan $N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy minden $n, m \geq N$ index esetén bármely $x \in H$ elemre teljesül*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $f_n \xhookrightarrow{e} f$ a H halmazon, tehát bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz található olyan $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy bármely $n \geq N_\varepsilon$ indexre és minden $x \in H$ elemre teljesül, hogy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Ekkor az $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}^+$ számhoz is választható olyan $N_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy $n \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}}$ index esetén bármely $x \in H$ elemre $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ezek után a háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával minden $x \in H$ elemre és bármely $n, m \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}}$ indexek esetén teljesülnek az alábbiak:

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq$$
$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

A másik irány belátásához elegendő felismerni, hogy adott $x \in H$ elemre az $(f_n(x))$ számsorozatra teljesül a Cauchy-konvergenciakritérium feltétele. Ezért az $(f_n(x))$ számsorozat konvergens, és ekkor legyen $f : H \to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre minden $x \in H$ elemre

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

A továbbiakban azt látjuk be, hogy $f_n \xhookrightarrow{e} f$ a H halmazon. Adott $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz található olyan $N^*_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy minden $n, m \geq N^*_{\frac{\varepsilon}{2}}$ indexre és bármely $x \in H$ elemre teljesül $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $n \geq N^*_{\frac{\varepsilon}{2}}$ adott index és $x \in H$ rögzített elem, ekkor $m \to +\infty$ esetén

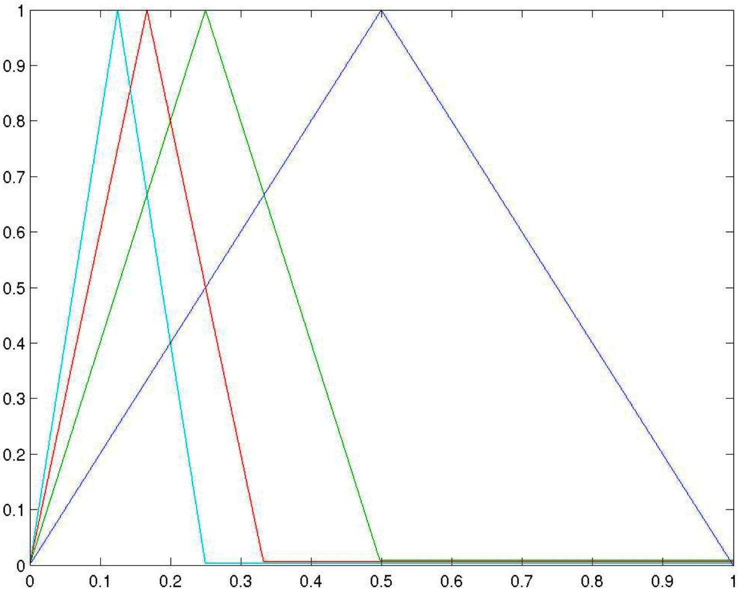
$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Következésképpen $f_n \overset{e}{\hookrightarrow} f$ a H halmazon, s ezzel a Cauchy-konvergenciakritériumot beláttuk. $\square$

A továbbiakban olyan példát mutatunk, ahol az $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvénysorozat pontonként konvergál a 0 konstansfüggvényhez, de egyenletesen nem konvergens.

5.1.7. Példa.

$$f_n(x) := \begin{cases} 2nx, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{2n}, \\ 2 - 2nx, & \text{ha } \frac{1}{2n} < x \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases}$$



Ha $1 \ge x > 0$, akkor található olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy $\frac{1}{N} < x$. Ha $n \ge N$, akkor $\frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < x$, ezért $f_n(x) = 0$. Következésképpen $(f_n(x))$ egy indextől kezdve a nulla konstans sorozat, így $f_n(x) \to 0$. Ha $x = 0$, akkor minden n indexre $f_n(x) = 0$.

Tehát az $f(x) := 0$, $D(f) = [0,1]$ konstansfüggvény a függvénysorozat limeszfüggvénye, így csak ehhez a függvényhez konvergálhatna egyenletesen. Indirekt módon tegyük fel, hogy egyenletesen konvergál, s ekkor teljesülni kellene annak, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz található $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy bármely $n \in \mathbb{N}^+$, $n \ge N_\varepsilon$ esetén, minden $x \in [0,1]$ elemre

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| < \varepsilon.$$

Ellentmondásra jutunk $\varepsilon < 1$ esetén, hiszen ha $x := \frac{1}{2n}$, akkor $f_n(x) = 1$. Tehát (f_n) nem tart egyenletesen a 0 függvényhez.

5.2. Függvénysorok

Legyen az (f_n) függvénysorozat tagjainak a H nemüres halmaz a közös értelmezési tartománya. Ezen függvények végtelen összegét függvénysornak nevezzük, és az alábbi módon jelöljük:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots .$$

5.2.1. Definíció. Legyen az (f_n) függvénysorozat tagjainak a H nemüres halmaz a közös értelmezési tartománya. Az olyan $x \in H$ elemek halmazát, melyekre $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergens, a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor konvergenciahalmazának nevezzük és K-val jelöljük.

A függvénysor összegfüggvénye az a K halmazon értelmezett f függvény, melyre

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \ x \in K.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor pontonként konvergál a K halmazon, és összegfüggvénye az f függvény.

Tehát $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ akkor és csak akkor teljesül, ha az $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$, $n \in \mathbb{N}^+$ függvényekből álló függvénysorozat pontonként konvergál az f függvényhez a K halmazon.

5.2.2. Definíció (Egyenletes konvergencia). A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysort egyenletesen konvergensnek mondjuk a H halmazon, ha az (s_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens a H halmazon.

5.2.3. Definíció (Abszolút konvergencia). *Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor abszolút konvergens a H halmazon, ha $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ pontonként konvergens a H halmazon.*

5.2.4. Tétel (Cauchy-konvergenciakritérium). *A* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *függvénysor akkor és csak akkor konvergál egyenletesen a* H *halmazon, ha bármely* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *számhoz található olyan* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$*, hogy* $N_\varepsilon \leq m \leq n$ *indexek esetén bármely* $x \in H$ *elemre teljesül*

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Bizonyítás: A függvénysorozatokra vonatkozó Cauchy-konvergenciakritériumból könnyen adódik a fenti tétel bizonyítása. □

6. fejezet

Abel és Dirichlet tétele függvénysorokra

6.1. Dirichlet tétele

6.1.1. Tétel (Dirichlet-tétel függvénysorokra). *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ adott halmaz, továbbá legyenek minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az $f_n : H \to \mathbb{R}$ és $g_n : H \to \mathbb{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy*

- *bármely $x \in H$ elemre az $(f_n(x))$ sorozat monoton,*
- *a H halmazon az (f_n) függvénysorozat egyenletesen tart a nullába,*
- *a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ függvénysor (s_n) részletösszeg-sorozata egyenletesen korlátos a H halmazon.*

Ekkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ függvénysor egyenletesen konvergens a H halmazon.

Bizonyítás: A tétel harmadik feltétele szerint $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ részletösszeg-sorozata egyenletesen korlátos, ahol az n-edik részletösszeg $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$ formájú. E feltétel miatt létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre minden n indexre és $x \in H$ elemre $|s_n(x)| \leq K$ teljesül. A második feltétel alapján $f_n \overset{e}{\hookrightarrow} 0$ a H halmazon, definíció szerint ez azt jelenti, hogy bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan N_ε küszöbindex, hogy minden $n \geq N_\varepsilon$ indexre és bármely $x \in H$ elemre igaz, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| = |f_n(x)| < \varepsilon.$$

Ekkor létezik olyan $N_{\frac{\varepsilon}{2K}}$ küszöbindex, hogy az $N_{\frac{\varepsilon}{2K}}$ indextől kezdve bármely n indexre és minden $x \in H$ elemre $|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2K}$.

Az (f_n) függvénysorozat egyenletesen tart a nullába, ezért pontonként is, így bármely $x \in H$ elemre az $(f_n(x))$ sorozat állandó előjelű. Ezt követően ha $N_{\frac{\varepsilon}{2K}} \leq n < m$ és $x \in H$ adott elem, akkor felhasználható az I. Abel-egyenlőtlenség, miszerint monoton fogyó nemnegatív tagú $(f_n(x))$ sorozatra

$$-\varepsilon < f_n(x) \cdot (-2K) \leq f_n(x)g_n(x) + \ldots + f_m(x)g_m(x) \leq f_n(x) \cdot 2K < \varepsilon,$$

ha $(f_n(x))$ monoton növő nempozitív tagú, akkor

$$-\varepsilon < \underbrace{-f_n(x)}_{|f_n(x)|} \cdot (-2K) \leq -f_n(x)g_n(x) - \ldots - f_m(x)g_m(x) \leq \underbrace{-f_n(x)}_{|f_n(x)|} \cdot 2K < \varepsilon,$$

hiszen bármely $x \in H$ elemre

$$|g_n(x) + \ldots + g_m(x)| = |(g_1(x) + \ldots + g_m(x)) - (g_1(x) + \ldots + g_{n-1}(x))| \leq$$
$$\leq |s_m(x)| + |s_{n-1}(x)| \leq 2K.$$

Így bármely $x \in H$ számra igaz

$$|f_n(x)g_n(x) + \ldots + f_m(x)g_m(x)| < \varepsilon.$$

Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ függvénysor kielégíti a Cauchy-konvergenciakritérium feltételét, s így a vizsgált függvénysorról elmondható, hogy egyenletesen konvergens. □

6.1.2. Következmény. *Tegyük fel, hogy (γ_n) monoton fogyó zérussorozat, és legyen a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ függvénysor (s_n) részletösszeg-sorozata egyenletesen korlátos a H halmazon. Ekkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n g_n$ egyenletesen konvergens a H halmazon.*

6.2. Abel tétele

6.2.1. Tétel (Abel-tétel függvénysorokra). *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ adott halmaz, továbbá legyenek minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az $f_n : H \to \mathbb{R}$ és $g_n : H \to \mathbb{R}$ függvények.*
Tegyük fel, hogy

- *az (f_n) függvénysorozat egyenletesen korlátos a H halmazon,*
- *az $(f_n(x))$ sorozat monoton bármely $x \in H$ esetén,*

- *a* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ *függvénysor egyenletesen konvergens a* H *halmazon.*

Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ *függvénysor egyenletesen konvergens a* H *halmazon.*

Bizonyítás: Az első feltétel szerint létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden n indexre és bármely $x \in H$ elemre $|f_n(x)| \leq K$. A tétel harmadik feltétele szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ függvénysor egyenletesen konvergens, emiatt a Cauchy-konvergenciakritérium alapján minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N_{\frac{\varepsilon}{6K}}$ index, hogy $m > n \geq N_{\frac{\varepsilon}{6K}}$ indexek esetén minden $x \in H$ elemre

$$\left| \sum_{i=n}^{m} g_i(x) \right| < \frac{\varepsilon}{6K}.$$

A tétel második feltételéből tudjuk, hogy az $(f_n(x))$ sorozat monoton, így a II. Abel-egyenlőtlenség alkalmazásával minden $m > n \geq N_{\frac{\varepsilon}{6K}}$ esetén bármely $x \in H$ elemre

$$\left| \sum_{i=n}^{m} f_i(x) g_i(x) \right| \leq (|f_n(x)| + 2\,|f_m(x)|) \cdot \frac{\varepsilon}{6K} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ebből következik a függvénysorokra vonatkozó Cauchy-konvergenciakritérium alapján, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ függvénysor egyenletesen konvergens a H halmazon. □

6.2.2. Következmény. *Legyen az* (f_n) *függvénysorozat egyenletesen korlátos a* H *halmazon és tegyük fel, hogy minden* $x \in H$ *esetén az* $(f_n(x))$ *sorozat monoton. Legyen a* $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ *végtelen sor konvergens. Ekkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n$ *függvénysor egyenletesen konvergens a* H *halmazon.*

7. fejezet

Szummábilis sorok és az Abel-szummáció

7.1. Szummábilis sorok

7.1.1. Definíció (Szummábilis sor). A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sort szummábilis sornak nevezzük, melynek szummája $A \in \mathbb{R}$, ha az $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}^+$ részletösszeg-sorozat számtaniközép-sorozata konvergens, és a határértéke

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} = A.$$

7.1.2. Tétel. *Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, akkor a végtelen sor szummábilis és a szummája A.*

Bizonyítás: Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens és összege $A \in \mathbb{R}$, ezért az (s_n) részletösszeg-sorozata konvergens, és $s_n \to A$. Ekkor bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz található olyan $N_{\frac{\varepsilon}{2}}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}}$ indexre $|s_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Azt kell belátnunk, hogy $\left(\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n}\right)$ is az A számhoz tart.

$$\left|\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} - A\right| = \left|\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n - n \cdot A}{n}\right| =$$
$$= \frac{|(s_1 - A) + (s_2 - A) + \ldots + (s_n - A)|}{n} \leq \frac{|s_1 - A| + |s_2 - A| + \ldots + |s_n - A|}{n}.$$

Ha $n \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}}$, akkor

$$\frac{|s_1 - A| + |s_2 - A| + \ldots + |s_n - A|}{n} =$$

$$= \frac{\left(|s_1 - A| + \ldots + \left|s_{N_{\frac{\varepsilon}{2}}-1} - A\right|\right) + \left(\left|s_{N_{\frac{\varepsilon}{2}}} - A\right| + \ldots + |s_n - A|\right)}{n} <$$

$$< \frac{|s_1 - A| + \ldots + \left|s_{N_{\frac{\varepsilon}{2}}-1} - A\right|}{n} + \frac{(n - N_{\frac{\varepsilon}{2}} + 1)\frac{\varepsilon}{2}}{n}.$$

A fenti egyenlőtlenségben $\frac{(n-N_{\frac{\varepsilon}{2}}+1)}{n} \leq 1$, és a $K := |s_1 - A| + \ldots + \left|s_{N_{\frac{\varepsilon}{2}}-1} - A\right|$ jelölést használva

$$\frac{|s_1 - A| + \ldots + \left|s_{N_{\frac{\varepsilon}{2}}-1} - A\right|}{n} + \frac{(n - N_{\frac{\varepsilon}{2}} + 1)\frac{\varepsilon}{2}}{n} \leq \frac{K}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

A jobb oldali összeg akkor és csak akkor kisebb, mint ε, ha

$$\frac{K}{n} < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ azaz } n > \frac{2K}{\varepsilon}.$$

Ezért bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra az

$$N^* := \max\left\{N_{\frac{\varepsilon}{2}}, \left\lceil\frac{2K}{\varepsilon}\right\rceil\right\}$$

küszöbindex olyan, hogy minden $n \geq N^*$ indexre

$$\left|\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} - A\right| < \varepsilon.$$

Tehát az $\left(\frac{s_1+\ldots+s_n}{n}\right)$ sorozat határértéke szintén A. □

7.1.3. Megjegyzés. *A bizonyítás lényege az, hogy egy konvergens sorozat számtaniközép-sorozata is konvergens, és a határértéke az eredeti sorozat határértéke.*

7.1.4. Tétel. *Ha a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor szummábilis, akkor* $\frac{s_n}{n} \to 0$.

Bizonyítás: A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor szummábilis, így

$$\frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} \to A \in \mathbb{R}.$$

Ezzel ekvivalens az alábbi felírás:

$$\frac{a_1 + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) + \ldots + (a_1 + \ldots + a_n)}{n} =$$

$$= \frac{n \cdot a_1 + (n-1) \cdot a_2 + (n-2) \cdot a_3 + \ldots + a_n}{n} \to A.$$

Jelölje S_n a következő sorozatot:

$$S_n := \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n}, \ n \in \mathbb{N}^+,$$

ekkor $S_n \to A$. Az $(n-1)$-edik tagra felírható az alábbi összefüggés:

$$(n-1) \cdot S_{n-1} = s_1 + \ldots + s_{n-1}.$$

Ezt felhasználva a következőhöz jutunk:

$$S_n = \frac{(n-1) \cdot S_{n-1} + s_n}{n} = \frac{n-1}{n} \cdot S_{n-1} + \frac{s_n}{n},$$
$$\frac{s_n}{n} = S_n - \frac{n-1}{n} \cdot S_{n-1} \to 0,$$

mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$ és $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A$. $\square$

7.1.5. Tétel. *Ha a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor szummábilis, akkor* $\frac{a_n}{n} \to 0$.

Bizonyítás: A részletösszegek átlaga felírható az alábbi formában:

$$\frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} = \frac{n \cdot a_1 + (n-1) \cdot a_2 + \ldots + a_n}{n}, \ n \in \mathbb{N}^+.$$

A fenti egyenlőségből következik, hogy

$$\frac{a_n}{n} = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} - \frac{n \cdot a_1 + (n-1) \cdot a_2 + \ldots + 2 \cdot a_{n-1}}{n}.$$

A második tagban elemi átalakításokat végezve a következőt kapjuk:

$$\frac{a_n}{n} = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} - \left[\frac{(n-1) \cdot a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}\right].$$

Az előző tétel miatt

$$\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} = \frac{s_{n-1}}{n-1} \to 0,$$

valamint az előző tétel bizonyításának eleje alapján

$$\frac{(n-1) \cdot a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \to A.$$

Tudjuk, hogy $\frac{n-1}{n} \to 1$, továbbá $\frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} \to A$, hiszen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ szummábilis, és a szummája A. Ebből következik, hogy $\frac{a_n}{n} \to 0$. $\square$

7.1.6. Példa. Mi mondható a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ végtelen sorról szummábilitás szempontjából?

A fenti végtelen sor részletösszegei:

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Ekkor a részletösszegek átlaga:

$$\frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} = \begin{cases} \frac{k}{2k}, & \text{ha } n = 2k, \\ \frac{k+1}{2k+1}, & \text{ha } n = 2k+1. \end{cases}$$

Mivel $n \to \infty$ esetén $k := \lceil \frac{n}{2} \rceil \to \infty$, így $\frac{k}{2k} \to \frac{1}{2}$ és $\frac{k+1}{2k+1} \to \frac{1}{2}$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

Tehát a végtelen sor szummábilis, és a szummája $\frac{1}{2}$.

7.1.7. Példa. Szummábilis-e a $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}i$ végtelen sor?

Először nézzük a páros, majd a páratlan indexű részletösszeget:

$$s_{2k} = \underbrace{(1-2)}_{-1} + \underbrace{(3-4)}_{-1} + \ldots + \underbrace{((2k-1)-2k)}_{-1} = -k,$$

$$s_{2k+1} = \underbrace{(1-2)}_{-1} + \underbrace{(3-4)}_{-1} + \ldots + \underbrace{((2k-1)-2k)}_{-1} + (2k+1) = k+1.$$

Tekintsük a $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}i$ végtelen sor részletösszegeinek átlagát. Ha az index páros, akkor

$$\frac{\overbrace{s_1+s_2}^{0} + \overbrace{s_3+s_4}^{0} + \ldots + \overbrace{s_{2k-1}+s_{2k}}^{0}}{2k} = 0.$$

Ha az index páratlan, akkor

$$\frac{\overbrace{s_1+s_2}^{0} + \overbrace{s_3+s_4}^{0} + \ldots + \overbrace{s_{2k-1}+s_{2k}}^{0} + s_{2k+1}}{2k+1} = \frac{s_{2k+1}}{2k+1} = \frac{k+1}{2k+1}.$$

Tehát a következőt kapjuk:

$$\frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} = \begin{cases} \frac{k+1}{2k+1}, & \text{ha } n = 2k+1, \\ 0, & \text{ha } n = 2k. \end{cases}$$

A páratlan indexű részsorozat határértéke $\frac{1}{2}$, a páros indexű részsorozat 0-hoz tart, ezért a $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}i$ végtelen sor nem szummábilis.

Itt $\frac{a_n}{n}=\frac{(-1)^{n+1}n}{n}$ nem tart a nullába, a szummábilitás 7.1.5. tételbeli szükséges feltétel sem teljesül.

7.2. Abel-szummáció

7.2.1. Definíció. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ végtelen sorra azt mondjuk, hogy Abel-szummábilis, melynek Abel-szummája $A\in\mathbb{R}$, ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ hatványsor konvergens a $(-1,1)$ intervallumon, továbbá fennáll, hogy

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A.$$

7.2.2. Tétel. *Ha egy végtelen sor szummábilis és a szummája A, akkor a sor Abel-szummábilis és az Abel-szummája is A.*

Bizonyítás: Elsőként azt kell belátnunk, hogy a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ hatványsor konvergens a $(-1,1)$ intervallumon. Ez teljesül, hiszen a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ végtelen sorról tudjuk, hogy szummábilis, s mint azt már igazoltuk, ekkor $\frac{a_n}{n}\to 0$. A határérték definícióját $\varepsilon=1$ esetén alkalmazva azt kapjuk, hogy egy indextől kezdve $\left|\frac{a_n}{n}\right|\le 1$, vagyis $|a_n|<n$. Így rögzített $x\in(-1,1)$ esetén $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ majorizálható a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n\cdot|x^n|$ végtelen sorral, ezért $R:=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n|}}=1$ alapján mindkét végtelen sor abszolút konvergens, ha $x\in(-1,1)$.

Már csak azt kell bizonyítani, hogy ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ hatványsor összegfüggvénye $f(x)$, akkor

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=A.$$

Ehhez vegyük a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ végtelen sorok Cauchy-szorzatát.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}x^ka_{n-k}x^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}s_nx^n,$$

ahol (s_n) a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ végtelen sor részletösszeg-sorozata, azaz

$$s_n := \sum_{i=0}^{n} a_i,\ n \in \mathbb{N}^+.$$

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsorok abszolút konvergensek a $(-1,1)$ intervallumon, így Mertens tétele szerint a Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens, és az összege a sorok összegeinek szorzata. Tudjuk, hogy minden $x \in (-1,1)$ számra $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, s ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \frac{f(x)}{1-x},\ x \in (-1,1).$$

Vegyük a fenti sor Cauchy-szorzatát a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ végtelen sorral, s ekkor az előző mintájára azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (s_0 + \ldots + s_n) x^n = \frac{f(x)}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{f(x)}{(1-x)^2},\ x \in (-1,1). \tag{7.1}$$

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ végtelen sorról feltettük, hogy szummábilis, és a szummája A, vagyis $\frac{s_0+\ldots+s_n}{n+1} \to A$. Jelölje S_n^* az alábbi nullsorozatot:

$$S_n^* := \frac{s_0 + \ldots + s_n}{n+1} - A.$$

Ekkor a (7.1) bal oldalán szereplő sort az S_n^* számokkal kifejezve a következőhöz jutunk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (s_0 + \ldots + s_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+1)A + (n+1) S_n^* \Big) x^n =$$

$$= A \cdot \sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) S_n^* x^n = \frac{A}{(1-x)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) S_n^* x^n,\ x \in (-1,1). \tag{7.2}$$

Az egyenlőség azért teljesül, mert mindkét sor abszoút konvergens a $(-1,1)$ intervallumon, és a

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x},\ x \in (-1,1)$$

összefüggésből következik, hogy

$$\sum_{m=1}^{\infty} m \cdot x^{m-1} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2},\ x \in (-1,1).$$

A (7.1) és a (7.2) mindkét oldalát $(1-x)^2$-nel szorozva, és a kettőt összevetve:

$$f(x) = A + (1-x)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) S_n^* x^n, \ \ x \in (-1,1).$$

Végül azt kell belátnunk, hogy

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) S_n^* x^n = 0.$$

Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ adott. Mivel (S_n^*) nullsorozat, ezért található olyan $N_{\frac{\varepsilon}{2}}$ küszöbindex, hogy bármely $n \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}}$ indexre teljesül $|S_n^*| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor bármely $x \in (0,1)$ esetén

$$\left| (1-x)^2 \cdot \sum_{n=N_{\frac{\varepsilon}{2}}}^{\infty} (n+1) S_n^* x^n \right| = (1-x)^2 \cdot \left| \sum_{n=N_{\frac{\varepsilon}{2}}}^{\infty} (n+1) S_n^* x^n \right| \leq$$

$$\leq (1-x)^2 \cdot \sum_{n=N_{\frac{\varepsilon}{2}}}^{\infty} |(n+1) S_n^* x^n| \leq (1-x)^2 \cdot \sum_{n=N_{\frac{\varepsilon}{2}}}^{\infty} (n+1) \cdot |S_n^*| \cdot |x^n| <$$

$$< (1-x)^2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{n=N_{\frac{\varepsilon}{2}}}^{\infty} (n+1) x^n < \frac{\varepsilon}{2} \cdot (1-x)^2 \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n}_{\frac{1}{(1-x)^2}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Minden polinomfüggvény folytonos, ezért $\lim\limits_{x \to 1-0} (1-x)^2 \cdot \sum\limits_{n=0}^{N_{\frac{\varepsilon}{2}}-1} S_n^* x^n = 0$. Így az $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}^+$ számhoz is található olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\left| (1-x)^2 \cdot \sum_{n=0}^{N_{\frac{\varepsilon}{2}}-1} (n+1) S_n^* x^n \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ha $1 - \delta < x < 1$. Végül azt kapjuk, hogy

$$\left| (1-x)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) S_n^* x^n \right| \leq$$

$$\leq \left| (1-x)^2 \cdot \sum_{n=0}^{N_{\frac{\varepsilon}{2}}-1} (n+1) S_n^* x^n \right| + \left| (1-x)^2 \cdot \sum_{n=N_{\frac{\varepsilon}{2}}}^{\infty} (n+1) S_n^* x^n \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ha $1 - \delta < x < 1$. Ezzel a tételt igazoltuk. $\square$

A továbbiakban olyan végtelen sort láthatunk, mely Abel-szummábilis, de nem szummábilis.

7.2.3. Példa.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots$$

Ha a fenti végtelen sor szummábilis volna, akkor $\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n} \to 0$ teljesülne, de a

$$\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n} = (-1)^{n+1} \cdot n$$

sorozat nem konvergál a nullához. E sorozat páros indexekre a mínusz végtelenbe tart, míg páratlan indexekre a végtelenbe. Következésképpen a végtelen sor nem szummábilis, mert annak szükséges feltétele nem teljesül.

Azonban a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2$ végtelen sor Abel-szummábilis. Ennek igazolása érdekében jelölje

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2x^n$$

a hatványsor összegfüggvényét. A hatványsor konvergenciasugara

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(-1)^{n+1}n^2|}} = 1,$$

ekkor a Cauchy-Hadamard-tétel miatt a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2x^n$ hatványsor abszolút konvergens a $(-1,1)$ intervallumon. Ha $x \neq 0$, akkor

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2x^{n-1},\ x \in (-1,0)\cup(0,1).$$

Mindkét oldal primitív függvényét képezve a $(0,1)$ intervallumon a 2.3.8. tétel szerint

$$\int\frac{f(x)}{x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^n + c_1,\ x \in (0,1),\ c_1 \in \mathbb{R}.$$

Jelölje

$$g(x) := \int\frac{f(x)}{x}dx - c_1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^n,\ x \in (0,1).$$

Osztva x-szel

$$\frac{g(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1},\ x \in (0,1),$$

majd mindkét oldal primitív függvényét véve:

$$\int \frac{g(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n + c_2, \; x \in (0,1), \; c_2 \in \mathbb{R}.$$

Az egyenlőség jobb oldalán levő hatványsor átalakítható az alábbi módon:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = -\frac{1}{1-(-x)} = -\frac{1}{1+x}, \; |x| < 1.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{g(x)}{x} dx = -\frac{1}{1+x} + c_2, \; x \in (0,1).$$

Ezt deriváljuk, majd szorozzuk meg x-szel, s ekkor

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{(1+x)^2}, \; x \in (0,1),$$

$$\int \frac{f(x)}{x} dx - c_1 = g(x) = \frac{x}{(1+x)^2}, \; x \in (0,1).$$

Ha a fenti egyenlőség bal és jobb oldalát deriváljuk, majd az eredményt x-szel szorozzuk, akkor

$$\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x}{(1+x)^2} \right)' = \frac{1-x}{(1+x)^3}, \; x \in (0,1),$$

$$f(x) = \frac{(1-x)x}{(1+x)^3}, \; x \in (0,1).$$

Hasonlóan levezetve azt kapjuk, hogy az eredmény érvényes a $(-1,0)$ intervallumon is. Az $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 x^n$ összegfüggvény értéke a 0 helyen $f(0) = 0$, ebből következik, hogy

$$f(x) = \frac{(1-x)x}{(1+x)^3}, \; x \in (-1,1),$$

ezért

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = f(1) = 0.$$

Tehát a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2$ végtelen sor Abel-szummábilis, és az Abel-szummája 0.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Pfeil Tamásnak, aki rendszeresen szakított időt konzultációkra, valamint a szakdolgozatom részletes áttekintésére. Köszönettel tartozom Szilágyi Dánielnek az ábrák elkészítésében nyújtott segítségéért. Hálás vagyok családomnak és szeretteimnek támogatásukért.

Irodalomjegyzék

[1] Britannica Hungarica Világenciklopédia, I. Kötet, Magyar Világ Kiadó, Budapest, 1994.

[2] Internetes forrás, Wikipédia, *Abel-díj*, `http://hu.wikipedia.org/wiki/Abel-díj`

[3] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: *Analízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006.

[4] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: *Analízis II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007.

[5] Szilágyi Tivadar: *Végtelen sorok, hatványsorok*, jegyzet az interneten, `http://bolyai.cs.elte.hu/~sztiv/5vs.pdf`

[6] Bátkai András: *Hatványsorok, Függvénysorok*, jegyzet az interneten, `http://www.cs.elte.hu/~batka/oktatas/hatvanysorok.pdf`

[7] Internetes forrás, Chao-Ping Chen: *The best bounds in Vernescu's inequalities for the Euler's constant*, `http://ajmaa.org/RGMIA/papers/v12n3/Euler-inequality.pdf`

[8] W. J. Kaczor, M. T. Nowak: *Problems in Mathematical Analysis 1: Real Numbers, Sequences and Series*, American Mathematical Society, Providence, R.I, 2000

Nyilatkozat

Név: Vánkovics Mária

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc

ETR azonosító: VAMPABT.ELTE

Szakdolgozat címe: Sorok és hatványsorok vizsgálata Abel nyomán

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2011. december 29.

a hallgató aláírása