

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Függvények közelítése

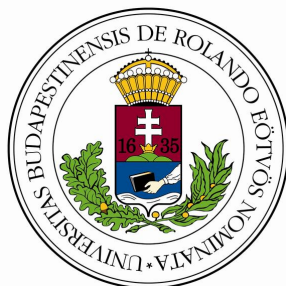
SZAKDOLGOZAT

Készítette:
Bedenek Eszter

Matematika BSc
Matematikai elemző szakirány

Konzulens:
Mezei István
adjunktus

Alkalmazott Analízis és
Számításmatematikai Tanszék



Budapest
2013

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Lagrange-féle interpoláció	4
1.1. Interpoláció, approximáció	4
1.2. Motiváció	5
1.3. Alapfeladat	5
1.4. Lagrange-féle alappolinomok	7
1.5. Példa Lagrange-féle interpolációra	8
2. Hermite-féle interpoláció	11
2.1. Az interpolációs feladat megoldása	12
2.2. Példa	13
3. Weierstrass approximációs tétele	15
3.1. Tétel bizonyítása	16
4. Taylor-polinomok	19
4.1. Az f függvény közelítése Taylor-polinommal	19
4.2. Példák	20
4.2.1. 1. Példa	20
4.2.2. 2. Példa	21
4.2.3. Példa a hibatag becslésére	23
5. Fourier-sorok	25
5.1. Az a_n, b_n együtthatók kiszámolása	26
5.2. Példák adott függvény Fourier-sorának kiszámítására	29
5.2.1. 1. Példa	29
5.2.2. 2. Példa	30
Köszönetnyilvánítás	32
Irodalomjegyzék	33

Nyilatkozat

Név: Bedenek Eszter

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

ETR azonosító: BEEQAAT.ELTE

NEPTUN kód: AMXFDU

Szakdolgozat címe: Függvények közelítése

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2012. december 31.

a hallgató aláírása

Bevezetés

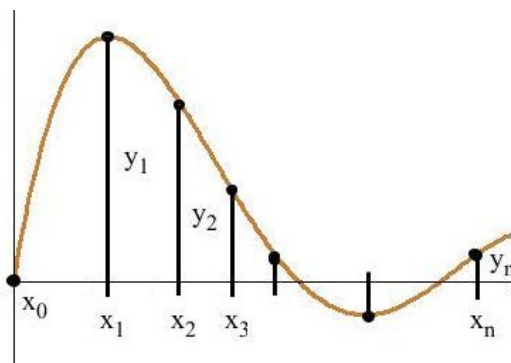
A szakdolgozatom elkészítése előtt kíváncsi voltam arra, hogy egy adott függvény közelítésére milyen módszereket tudunk használni. Ezért is választottam a dolgozatomnak ezt a címet. Felvetődik a kérdés, hogy ezek közül melyek közelítik meg jobban, illetve kevésbé. Persze nehéz megfogalmazni azt, hogy mit értünk jó közelítés alatt, mivel a különböző bemutatott módszerek más és más feltételek mellett közelítik jól az adott függvényt. Most pedig nézzük, miről lesz szó.

Az első fejezetben $n + 1$ pontban ismerjük a függvényértékeket, és ezekre szeretnénk feketetni a Lagrange-féle interpolációs polinomot. A második fejezetben az Hermite-féle interpolációval ismerkedhetünk meg. A következő részben olyan bizonyítást mutatunk be, amiben a függvényt közelítő polinom egy adott sávon belül marad. Majd az utolsó előtti részben a Taylor-polinomokról lesz szó. Végül azt is meg fogjuk nézni, mi történik, ha trigonometrikus polinommal közelítünk. Az elmélet megértését példákkal segítem, amiket ábrákkal teszek szemléletessé.

1. fejezet

Lagrange-féle interpoláció

1.1. Interpoláció, approximáció



Feltesszük, hogy egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értékét $n + 1$ pontban ismerjük. Ezeket a pontokat a következőképpen jelöljük: (x_i, f_i) ($i = 0, \dots, n$). Ezenkívül azt is feltesszük, hogy $x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$. Az x_i ($i = 0, \dots, n$) pontokat *alappontoknak* hívjuk. Azt az intervallumot, amit vizsgálunk, jelöljük I -vel. Erre az $I = [x_{min}, x_{max}]$ jelölést alkalmazzuk, ahol $x_{min} = \min\{x_0, \dots, x_n\}$; $x_{max} = \max\{x_0, \dots, x_n\}$. Tehát ismerjük az alappontokban felvett értékeket. De mit mondhatunk az intervallum többi pontjáról? Erre úgy kapunk választ, hogy lerögzítjük azokat a függvényeket, amelyek az I intervallumon vannak definiálva (ezek lehetnek polinomok, trigonometrikus polinomok, stb.), majd megnézzük, hogy ezek közül melyek mennek át az adott pontokon. Így kapjuk meg az *interpolációs függvényt*. Vagyis ahol nem tudjuk az ismeretlen függvény értékeit, ott ezzel a függvénnyel közelítjük. Magát az eljárást pedig *interpolációnak* nevezzük (az approximáció az interpolációhoz hasonló módszer).

Feladat: Olyan f függvény keresése valamilyen függvényosztályból, amely előre rögzített pontokban adott értékeket vesz fel, vagyis $f = ?$, amelyre

$$f(x_i) = g_i \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1.1)$$

Az $(x_i, g_i, \quad i = 0, 1, \dots, n)$ párokat interpolációs adatoknak nevezzük, x_0, \dots, x_n pontokat pedig interpolációs alappontoknak.

1.2. Motiváció

Vizsgáljunk meg egy kórházi lázlapot.

Reggel, délben és este megmérjük a műtésre váró beteg lázát. Ezután az adatokból egy képlettel megadható függvényt (polinomot) tudunk előállítani. Az orvos ebből következtetne arra, hogy a 10 órakor kezdődő műtétkor milyen testhőmérsékletre számíthat.

Bizonyos elvárásaink vannak a módszerrel kapcsolatban:

- Az alappontok sűrítésével egyre közelebb kerülünk a pontos függvényhez.
- Ha növeljük a mérések pontosságát, akkor a közelítés is javul.

Az interpolációs és approximációs feladatok megoldásában legtöbbször a polinomok osztálya szerepel. A későbbiekben mi is a P_n (a legfeljebb n -edfokú polinomok) osztályában keressük a közelítést. De feltehetjük a kérdést: miért is polinom?

Mert

- olcsón kiértékelhető,
- könnyen deriválható, integrálható,
- a gyökei száma ismert és kiszámítása viszonylag egyszerű,
- a polinomok zártak az algebrai műveletre.

Feltehetjük, hogy $x_i < x_{i+1}$. A $h_i = x_{i+1} - x_i$ jelölés bevezetése után definiálhatjuk az ekvidisztáns alappont-rendszert, ami abban az esetben van, amikor $h_i = h$.

1.2.1. Definíció. *Globális polinominterpolációról* akkor beszélünk, ha az adott pontokat egyetlen polinommal interpoláljuk az I intervallumon.

Legyen ez a polinom p . Vagyis ekkor a $p(x_i) = f_i$ ($i = 0, \dots, n$) feltétel biztosan teljesül. A feltételek száma $n + 1$, így azt sejtjük, hogy p legfeljebb n -edfokú, mert ezekről azt tudjuk, hogy $n + 1$ szabadon választható együtthatójuk van.

1.3. Alapfeladat

Keressük azt a $p_n \in P_n$ polinomot, amelyre

$$p_n(x_i) = g_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

1.3.1. Állítás. A fenti alapeladatnak $\exists!$ megoldása!

Bizonyítás. [2] Először mutassuk meg az unicitást!

Indirekt tegyük fel, hogy $g_h \neq h_n \in P_n$ olyan n -edfokú polinomok, amelyek megoldásai az alapeladatnak.

$$g_n(x_i) = g_i$$

$$h_n(x_i) = g_i$$

Következmény: $p_n(x) = g_n(x) - h_n(x) \in P_n$, $p_n(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Ez ellentmondás ($p_n \neq 0$).

Konstruáljunk olyan n -ed fokú polinomot, amely az x_i pontokban f_i értéket vesz fel. ($i = 0, 1, \dots, n$)

$$\tilde{\Phi}_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1.3)$$

$$\tilde{\Phi}_i(x_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$\Phi_i(x) = \frac{\tilde{\Phi}_i(x)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)} = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (1.4)$$

$$\Phi_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq j \\ 1 & \text{ha } i = j \end{cases} \equiv \delta_{i,j} \quad (1.5)$$

$$\Phi_i(x) \in P_n$$

1.3.2. Definíció. Az

$$(L_n f)(x) := \sum_{i=0}^{n+1} f_i \cdot \Phi_i(x) \quad (1.6)$$

polinomot *Lagrange-féle interpolációs polinomnak* nevezzük.

$$(L_n f)(x_j) = \sum_{i=0}^{n+1} f_i \cdot \Phi_i(x_j) = f_j \quad j = 0, 1, \dots, n$$

A Lagrange polinom átírása:

$$(L_n f)(x_j) = \sum_{i=0}^{n+1} f_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \xrightarrow{*}$$

Jelölje

$$\omega_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^n (x - x_j) \in P_{n+1}.$$

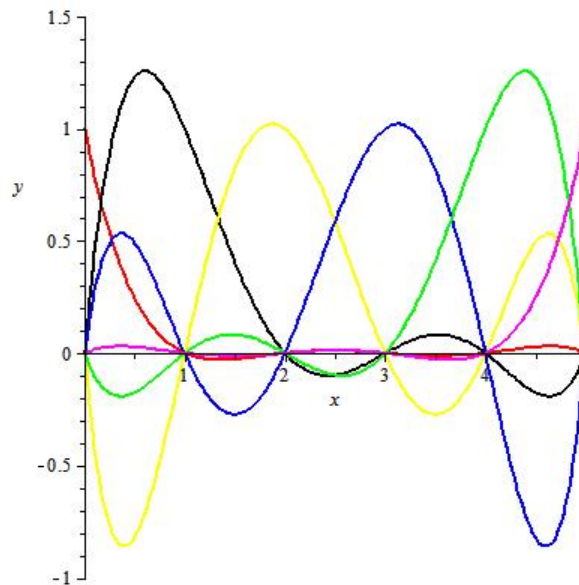
$$\omega'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \left(\prod_{j=0, j \neq k}^n (x - x_j) \right)$$

$$\begin{aligned} \omega'_{n+1}(x_i) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) \\ &+ (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n) \\ &+ \dots + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n - 1) \\ &= \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j) \\ &\stackrel{*}{\Rightarrow} (L_n f)(x_j) = \sum_{i=0}^{n+1} f_i \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)} \end{aligned}$$

□

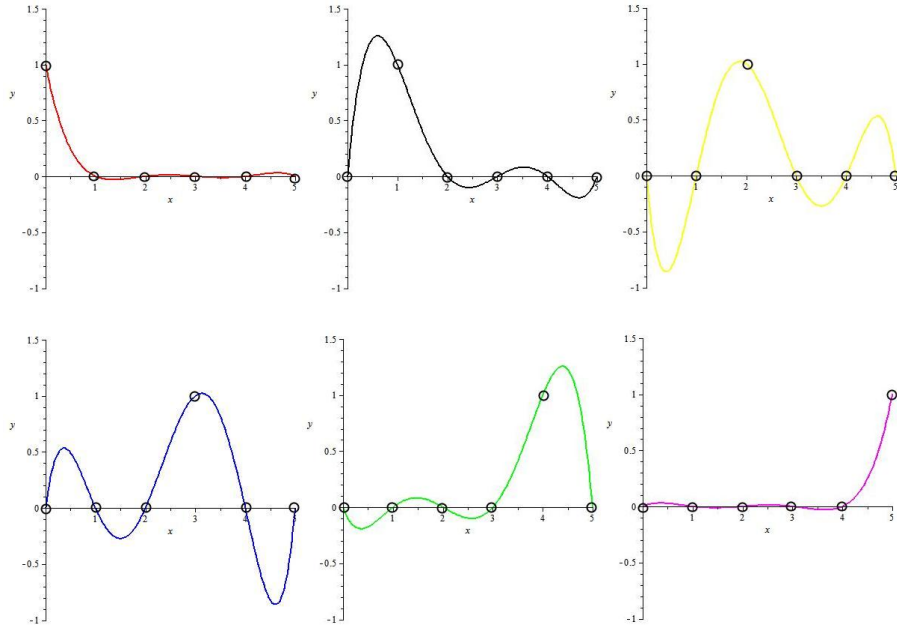
1.4. Lagrange-féle alappolinomok

Az (1.1) ábrán megmutatjuk, hogy néznek ki az $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ pontokhoz tartozó Lagrange-féle alappolinomok.



1.1. ábra

Ha pedig külön rajzoljuk ki őket, akkor láthatjuk, amit már az (1.5)-ösben megállapítottunk: $\Phi_i(x)$ minden x pontban 0, kivéve x_i -ben, ahol 1-et vesz fel.



1.5. Példa Lagrange-féle interpolációra

Legyenek a pontjaink:

x_i	y_i
1	2
2	10
3	-5
4	5
5	-1
6	8

Ebben az esetben 6 adatpontunk van, ezért egy ötödfokú polinomot hozunk létre. Ezekből az értékekből kiszámoljuk a $\Phi_i(x)$ -et.

$$\begin{aligned}\Phi_0(x) &= \frac{(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-5) \cdot (x-6)}{(1-2) \cdot (1-3) \cdot (1-4) \cdot (1-5) \cdot (1-6)} = \\ &= -\frac{1}{120} \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-5) \cdot (x-6)\end{aligned}$$

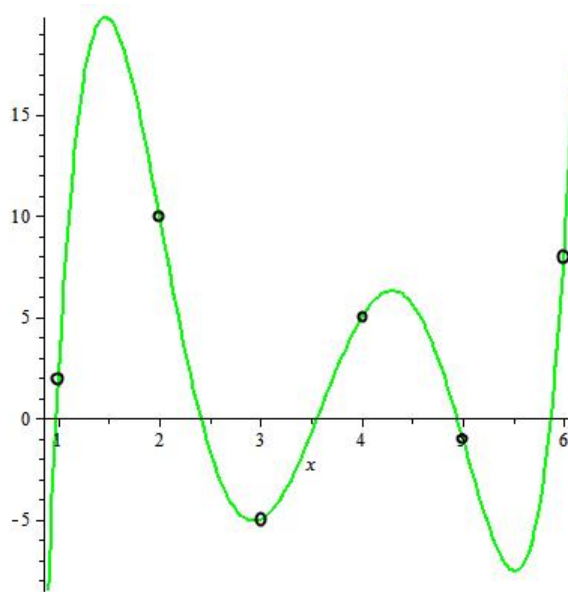
⋮

$$\begin{aligned}\Phi_5(x) &= \frac{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-5)}{(6-1) \cdot (6-2) \cdot (6-3) \cdot (6-4) \cdot (6-5)} = \\ &= \frac{1}{120} \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-5)\end{aligned}$$

Majd az (1.6)-os képletet felhasználva:

$$\begin{aligned}(L_n f)(x) &= 2\Phi_0 + \dots + 8\Phi_5 = \\ &= -327 - \frac{10253}{15}x + \frac{2947}{6}x^2 + \frac{1273}{8}x^3 - \frac{143}{6}x^4 + \frac{161}{120}x^5\end{aligned}$$

Ez így néz ki ábrázolva:

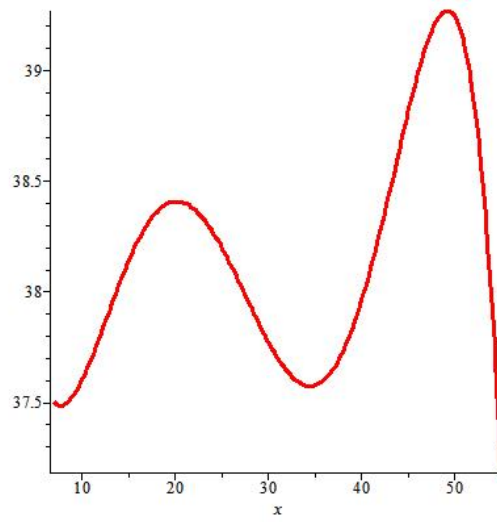


Tehát megkaptuk az adatok egy ötödfokú leírását, és azt is láthatjuk, hogy valóban áthalad az összes adatponton.

Visszatérve a fejezet elején lévő kórházi lázlap vizsgálatára, adott adatok alapján kiszámolhatjuk és felrajzolhatjuk a Lagrange-polinomot.

x_i ($i=1 \dots 7$)	7	12	17	31	36	41	55
y_i ($i=1 \dots 7$)	37.5	37.8	38.3	37.7	37.6	38.1	37.2

Ebben a táblázatban található az adatok, x_i mutatja az időt (értelemszerűen például 31 jelenti a másnap reggelt, mert az eltelt órákat hozzáadtam az előző mérési időponthoz), y_i pedig a mért fokot. A számolást kihagyva, az (1.2) ábra mutatja a Lagrange-polinomot. Innen leolvasható, hogy van olyan hely is, ahol több, mint 39 fok szerepel. Ebből következtethetünk arra, hogy ez a módszer nem megbízható.



1.2. ábra

A fejezethez a következő szakirodalmakat használtam fel: [1], [2], [3].

2. fejezet

Hermite-féle interpoláció

Ebben a fejezetben a Lagrange-interpoláció általánosítását nézzük meg. Itt nem csak a függvényértéket ismerjük minden egyes alappontban, hanem valamely pontig bezárólag a deriváltakat is. Tehát legyenek adottak $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ alappontok. Ezenkívül az $x_i (i = 0 \dots n)$ pontban ismerünk $m_i + 1$ darab számértéket: $f_i^{(0)}, f_i^{(1)}, \dots, f_i^{(m_i)}$. Azt a $H \in P_n$ polinomot keressük, amelyre:

$$H^{(j)}(x_i) = f_i^{(j)} \quad (i = 0 \dots n, j = 0 \dots m_i), \quad (2.1)$$

ahol $p^{(j)}$ a H függvény j -edik deriváltját jelöli.

2.0.1. Definíció. Az ilyen tulajdonságú polinomokat *Hermite-féle interpolációs polinomoknak* nevezzük. Jelölés: $H_n(x) \in P_n$

2.0.2. Állítás. Az Hermite-féle interpolációs feladatnak egyértelműen létezik $H_n \in P_n$ megoldása.

Bizonyítás. [4] Legyen $m := \sum_{i=0}^n m_i$ a (2.1)-ben lévő feltételek száma. Feltesszük, hogy H_1, H_2 olyan (legfeljebb $m-1$ -edfokú) polinomok, amelyek a (2.1) feltételeknek eleget tesznek. Legyen $h = H_1 - H_2 \in P_{m-1}$, ekkor h -nak x_i m_i -szeres gyöke. $m_i = 2$ esetén $h(x_i) = H_1(x_i) - H_2(x_i) = 0$, ezenkívül még $h'(x_i) = H_1'(x_i) - H_2'(x_i)$ is nullával egyenlő. Összesen m gyök van (multiplicitással számítva), de h fokszáma legfeljebb $m-1$, így $h(x) \equiv 0$. \Rightarrow Egnél több megoldás nem lehet.

A (2.1)-es feladat megoldását keressük a következő alakban:

$$H_{m-1}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k,$$

ahol az a_k együtthatók egyelőre ismeretlenek. Ha x_i -ben adott egy függvényérték, akkor kapjuk a

$$H_{m-1}(x_i) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x_i^k = f_{i0}$$

egyenletet, ami lineáris a keresett a_k -kban. Ha x_i -ben az első derivált is adott, akkor ez most is lineáris egyenlet lesz az a_k -kban:

$$H'_{m-1}(x_i) = \sum_{k=0}^{m-1} k a_k x_i^{k-1} = f_{i1}.$$

Ha ezenkívül még a második derivált is adott, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$H''_{m-1}(x_i) = \sum_{k=0}^{m-1} k(k-1) a_k x_i^{k-2} = f_{i2}.$$

Vagyis az eddigiekből megállapíthatjuk, hogy ennek a lineáris egyenletrendszernek legfeljebb egy megoldása van. Ekkor pedig pontosan egy megoldása létezik. \square

2.1. Az interpolációs feladat megoldása

Az Hermite-féle interpolációs feladatot a Lagrange-interpoláció Newton-féle alakjával fogjuk megoldani. Ezt korábban nem néztük meg, ezért most tesszük meg. Tehát a Lagrange-interpoláció Newton-féle alakja így néz ki:

$$P(x) = f(x_1) + \sum_{k=2}^n [x_1 \dots x_k] f \prod_{j=1}^{k-1} (x - x_j), \quad (2.2)$$

ahol $[x_1 \dots x_k]f$ az ún. osztott differenciák, amit a következő két definícióban ismer-tetünk.

2.1.1. Definíció. Legyenek x_1, x_2, \dots, x_n különböző pontok. Ekkor

$$[x_i x_{i+1}]f = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

elsőrendű osztott differenciának nevezzük.

2.1.2. Definíció. Legyenek x_1, x_2, \dots, x_n különböző pontok. Ekkor a következőképen írhatjuk le a k -adrendű osztott differenciát:

$$[x_i \dots x_{i+k}]f = \frac{[x_{i+1} \dots x_{i+k}]f - [x_i \dots x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i}, \quad (k = 1, \dots, n, i = 1, \dots, n-k).$$

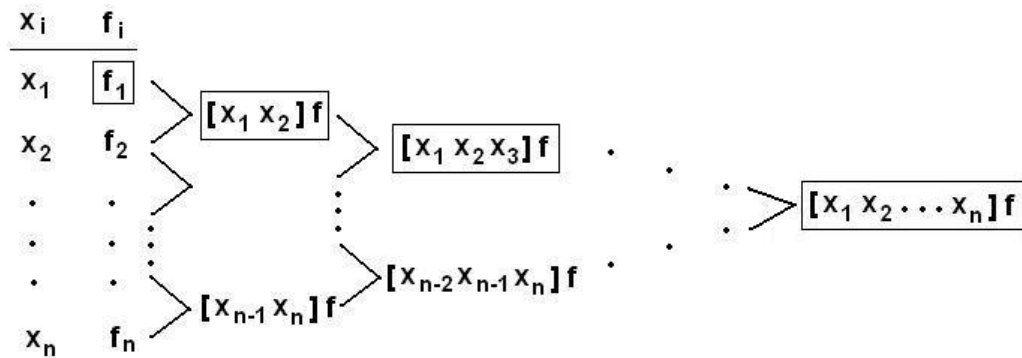
Meg kell említenünk azt az esetet is, amikor azonosak az alappontok. Ilyenkor másképp definiáljuk az osztott differenciákat:

$$[xx]f = \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f',$$

és a k -1-edrendű osztott differenciát az

$$[xx \dots x]f = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$$

képlet írja le. A (2.1) ábrán láthatjuk, hogy kell készíteni osztott differencia táblázatot.



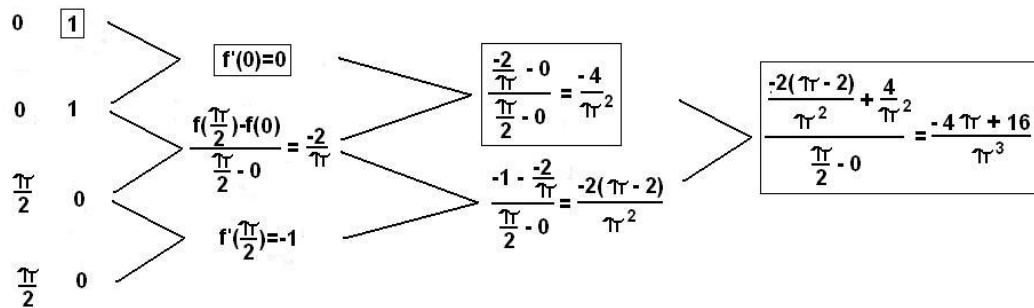
2.1. ábra

Az osztott differencia tábla kitöltése:

Az első oszlopba az x_i alappontokat írjuk, méghozzá annyiszor, amennyi a multiplícitása, tehát x_i -t $m_i + 1$ -szer. Ezután beírjuk az adatokat, amiket tudunk, tehát az $f(x_i)$ értékeket, valamint a megfelelő deriváltakat. Miután ez megvan, felhasználjuk az osztott differencia definícióját, aminek segítségével kitöltjük a többi helyet is.

2.2. Példa

Alkalmazzunk Hermite-féle interpolációt az $f(x) = \cos x$ függvényre, ami az $x_1 = 0$ és $x_2 = \frac{\pi}{2}$ pontokra támaszkodik. A (2.1) ábra segítségével megcsinálhatjuk az osztott differencia táblát. Ezt mutatja a (2.2) ábra.

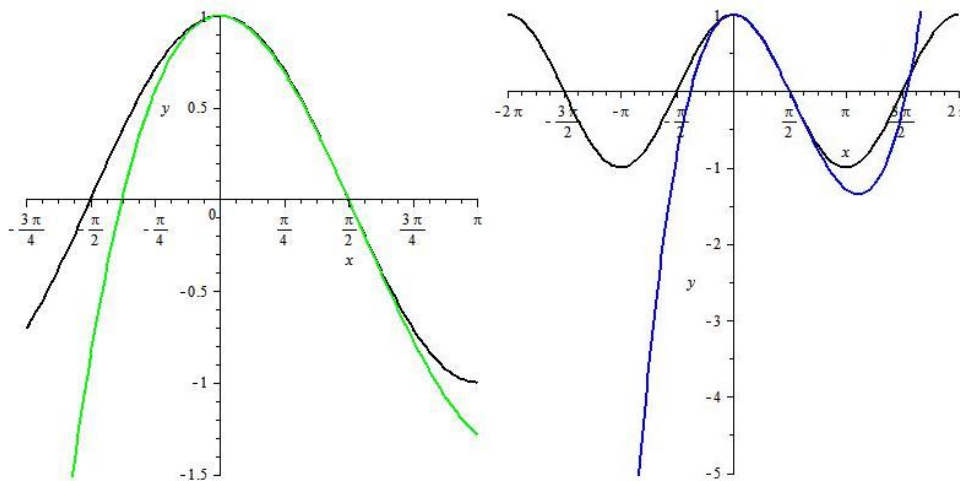


2.2. ábra

A (2.1) képletbe behelyettesítve kiszámolhatjuk az Hermite-féle interpolációs polinomot:

$$1 + 0 \cdot (x - 0) + \frac{4}{\pi^2} \cdot (x - 0)^2 + \frac{-4\pi + 16}{\pi^3} (x - 0)^2 (x - \frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{2\pi - 12}{\pi^2} x^2 + \frac{16 - 4\pi}{\pi^3} x^3$$

A (2.3) ábra bal oldalán $-\pi$ -től π -ig, a jobb oldalon pedig -2π -től 2π -ig ábrázoltuk.



2.3. ábra

Az Hermite-féle polinom előnye a Lagrange polinommal szemben, hogy lokálisan jobban közelít, de a szélső alappontoknál a Lagrange-féle interpolációhoz képest nagyobb kilengést tapasztalhatunk.

A második fejezet forrása az [1], [4], [6] és [7].

3. fejezet

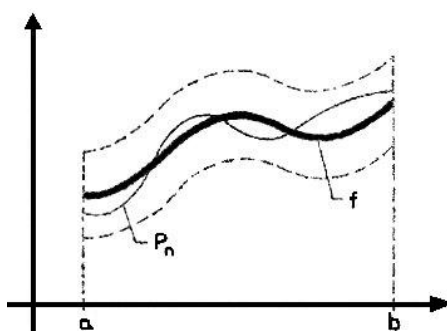
Weierstrass approximációs tétele

Most a Weierstrass tételnek azt a bizonyítását láthatjuk, amely S. N. Bernsteintől származik. Ennek a segítségével egy olyan polinomiális approximációval ismerkedhetünk meg, ami elég lassan konvergál, de biztosan.

Legyen $C[a, b]$ az $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények tere. Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett összes polinomok $P[a, b]$ lineáris tere pedig a szokásos összeadási és skalárral való szorzási művelettel a $C[a, b]$ tér altere. Mi most f folytonos függvényt szeretnénk polinomokkal közelíteni. Ebben az esetben a kérdés a következő: milyen $f \in C[a, b]$ függvény esetén létezik olyan (P_n) polinomsorozat, melyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| = 0 \quad (3.1)$$

(Az f függvény és P_n polinomsorozat távolságának a maximuma az $[a, b]$ intervallumon a nullához tart.)



3.1. ábra

Ha van ilyen (P_n) sorozat, akkor létezik olyan $P_n \in P[a, b]$ polinom, amely benne van a (3.1) ábrán látható tetszőleges szélességű sávban.

3.0.1. Tétel. (Weierstrass approximációs tétele) *(A $C[a, b]$ térben) minden $f \in C[a, b]$ függvényhez létezik olyan (P_n) polinomsorozat, amelyre teljesül az (3.1) egyenlőség.*

Ebből a tételből következik, hogy minden $f \in C[a, b]$ függvény tetszőleges pontossággal közelíthető polinomokkal.

3.1. Tétel bizonyítása

Bizonyítás. [8] Mivel az $[a, b]$ intervallumot átvihetjük a $[0, 1]$ intervallumba a

$$z = \frac{x - a}{b - a}$$

transzformációval, ezért elég, ha $a = 0$ és $b = 1$ esetén bizonyítjuk a tételt. Első lépésként definiáljuk az f függvényhez rendelt ún. Bernstein-féle polinomokat:

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad (3.2)$$

ahol C_n^k n elem k -ad osztályú kombinációinak számát jelöli. Bebizonyítjuk, hogy a

$$P_n(x) = B_n(f; x)$$

polinomokra igaz az (3.1) egyenlőség.

A bizonyítást először az $f_0(x) \equiv 1$, $f_1(x) \equiv x$ és az $f_2(x) = x^2$ függvények esetén végezzük el. Nyilván

$$B_n(f_0; x) \equiv \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1.$$

A

$$\frac{k}{n} \cdot C_n^k = \frac{k}{n} \cdot n \frac{(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k(k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{(k-1)} = C_{n-1}^{k-1}$$

egyenlőségekből következik, hogy

$$\begin{aligned} B_n(f_1; x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n} = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= x \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} = x [x + (1-x)]^{n-1} = x. \end{aligned}$$

Végül pedig

$$B_n(f_2; x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \cdot \frac{k^2}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{n-1} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} x \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 \underbrace{\sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k}}_{=1} + \frac{x}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}}_{=1} = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} \xrightarrow{\text{egyenletesen}} x^2.
\end{aligned}$$

Tehát az f_0, f_1, f_2 függvények esetén igaz a (3.1) egyenlőség. Legyen most f a $C[0, 1]$ tér tetszőleges eleme. Mivel f folytonos, Weierstrass I. tétele szerint korlátos, tehát létezik olyan $M > 0$ szám, amelyre $|f(x)| \leq M$ minden $x \in [0, 1]$ esetén.

$$\Rightarrow -2M \leq f(x) - f(t) \leq 2M \quad (3.3)$$

minden x és t pontra a $[0, 1]$ intervallumból.

Legyen ϵ tetszőleges pozitív szám. Az f függvény Cantor tétele szerint (Ha $f: A \rightarrow R^m$ ($A \subset R^n$) folytonos és A kompakt, akkor f egyenletesen folytonos A -n.) folytonos, tehát létezik olyan $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ szám, amelyre

$$-\epsilon < f(x) - f(t) < \epsilon, \quad (3.4)$$

hacsak $|x - t| < \delta$; $x, t \in [0, 1]$. Legyen $t \in [0, 1]$ rögzített és $\Psi_t(x) = (x - t)^2$. Ekkor

$$-\epsilon - \frac{2M}{\delta^2} \Psi_t(x) < f(x) - f(t) < \frac{2M}{\delta^2} \Psi_t(x) + \epsilon \quad (3.5)$$

minden $x \in [0, 1]$ esetén. Valóban, ha $|x - t| < \delta$, akkor (3.4)-ből következik (3.5); ha $|x - t| \geq \delta$, akkor

$$\frac{2M}{\delta^2} \Psi_t(x) \geq \frac{2M}{\delta^2} \cdot \delta^2 = 2M,$$

tehát (3.3) alapján ebben az esetben is fennállnak a (3.5) egyenlőtlenségek.

A $B_n: C[a, b] \rightarrow \varphi[a, b]$ leképezés lineáris ($n \in \mathbf{N}$), vagyis minden $f, g \in C[a, b]$ függvénypár és minden $\lambda \in \mathbf{R}$ szám esetén fennállnak a

$$B_n(f + g; x) = B_n(f; x) + B_n(g; x), B_n(\lambda f; x) = \lambda \cdot B_n(f; x)$$

egyenlőségek ($x \in [0, 1]$). Ezenkívül a B_n leképezés izoton is: ha $f(x) \leq g(x)$ minden $x \in [0, 1]$ számra, akkor $B_n(f; x) \leq B_n(g; x)$ ugyancsak minden $x \in [0, 1]$ esetén. Ezek a tulajdonságok rögtön következnek a Bernstein-féle polinomok értelmezéséből.

Tehát a (3.5) egyenlőtlenségek alapján írhatjuk, hogy

$$-\epsilon \cdot B_n[1; t] - \frac{2M}{\delta^2} B_n(\Psi_t; t) \leq B_n(f; t) - f(t) \cdot B_n(1; t) \leq \epsilon B_n(1; t) + \frac{2M}{\delta^2} B_n(\Psi_t; t)$$

minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. A fentiek szerint

$$B_n(1; t) = B_n(f_0; t) = 1$$

és

$$B_n(\Psi_t; t) = B_n(f_2 - 2tf_1 + t^2f_0; t) = t^2 + \frac{t-t^2}{n} - 2t \cdot t + t^2 \cdot 1 = \frac{t-t^2}{n},$$

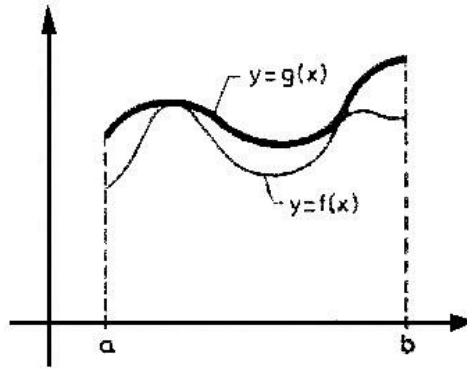
tehát

$$-\epsilon - \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{t-t^2}{n} \leq B_n(f; t) - f(t) \leq \epsilon + \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{t-t^2}{n},$$

vagyis

$$|B_n(f; t) - f(t)| \leq \epsilon + \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{t-t^2}{n} \leq \epsilon + \frac{2M}{\delta^2 \cdot n}$$

minden $n \in \mathbf{N}$ és minden $t \in [0, 1]$ esetén.



3.2. ábra

Legyen

$$n_0 = \left\lceil \frac{2M}{\delta^2 \epsilon} \right\rceil.$$

Ha $n > n_0$, akkor

$$|B_n(f; t) - f(t)| < 2\epsilon$$

minden $t \in [0, 1]$ esetén. Tehát minden $\epsilon > 0$ számhoz hozzárendelhető olyan $n_0 > N$ szám, amelyre

$$\|B_n(f) - f\| = \max \{|B_n(f; x) - f(x)| : x \in [0, 1]\} < 2\epsilon,$$

hacsak $n > n_0$. Ez pedig azt jelenti, hogy $B_n(f, x)$ egyenletesen tart $f(x)$ -hez, ha $n \rightarrow \infty$, amit bizonyítani kellett. \square

Ennek a fejezetnek a forrása a [8] és [5] könyvek.

4. fejezet

Taylor-polinomok

Kezdjük egy példával:

Egy bróker értékpapírt ajánl neked a névértéke 90%-áért. Amikor a későbbiek folyamán beváltod a teljes névértéken, akkor hány százalék profitot csinálsz?

Sokan azt hinnék, hogy 10%-ot, de gondoljuk csak át a dolgot. Mivel 1 dollárt kapsz minden 0.90 dollárért, amit befektetsz, ezért $\frac{1}{0.90} \approx 1.11$ dollárt kapsz vissza. Tehát 11%-os profitod lesz.

Vizsgáljuk meg ezt a kérdést más módon is.

Felajánlottak neked egy x engedményt, ami ebben az esetben $x = 0.10$. Ahhoz, hogy a profitot kiszámítsuk, az

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - 1 \quad \text{-re van szükségünk.}$$

Ezért $f(x)$ -nek egy olyan közelítését szeretnénk megtalálni, amiből látjuk, hogy $f(0.9) \approx 0.11$.

Ezt a problémát általánosítva, feltehetünk egy kérdést:

Hogyan közelítsünk bármely $f(x)$ függvényt polinommal olyan x értékekre, amik közel vannak egy bizonyos a ponthoz.

A következő tételben egy hasznos választ adunk erre.

4.1. Az f függvény közelítése Taylor-polinommal

4.1.1. Tétel. *Ha az f függvény n -szer differenciálható az a pontban, akkor*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n, \quad (4.1)$$

ahol

$$R_n = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \quad (n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1) \quad (4.2)$$

4.1.2. Definíció. A

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

polinomot az a körüli n -edik *Taylor-polinom*nak hívjuk.

4.1.3. Definíció. R_n -t maradéktagnak, vagy hibatagnak nevezzük, ami azt mutatja meg, hogy a polinom milyen messze van a függvénytől, vagyis

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Most a maradéktagot ne vegyük figyelembe, csak a Taylor-polinomot vizsgáljuk meg. Valójában gyakran történik az, hogy R_n egyre kisebb és kisebb lesz, vagyis ha n nagy, akkor 0-hoz tart. Ekkor f közelítőleg megegyezik az n -edik Taylor-polinomjával. Ezért a Taylor polinomot másnéven sokszor Taylor közelítésnek is hívjuk. Ezenkívül az is igaz, hogy minél nagyobb az n , annál jobb a közelítés.

4.2. Példák

4.2.1. 1. Példa

Térjünk vissza a kiindulási feladatunkra!

$f(x) = \frac{1}{1-x} - 1$ függvényhez szeretnénk lineáris, négyzetes és köbös közelítést adni $a = 0$ körül. Ehhez a definícióban szereplő Taylor-polinom képletét használjuk.

Első lépésként ki kell kiszámolnunk $f(x)$ deriváltjait, majd ezek értékeit $a = 0$ -ban, amit a következő táblázat mutat.

	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
$n = 0$	$\frac{1}{1-x} - 1$	0
$n = 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$	1
$n = 2$	$\frac{2}{(1-x)^3}$	2
$n = 3$	$\frac{6}{(1-x)^4}$	6

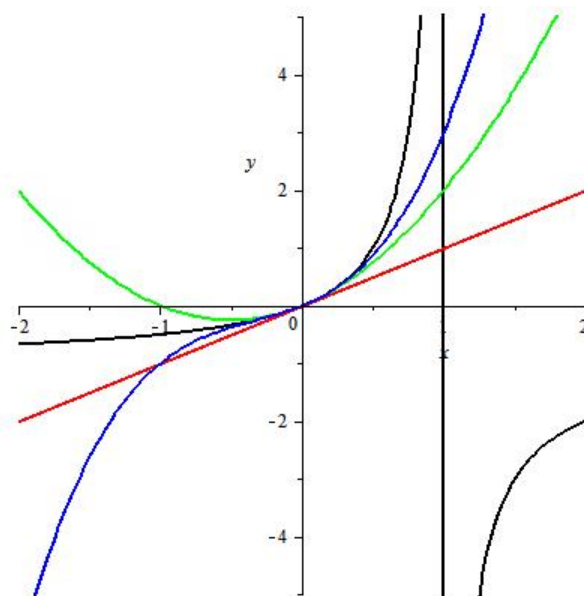
Majd behelyettesítjük a táblázatban kapott értékeket. Így kapjuk meg $f(x)$ megfelelő közelítéseit:

- elsőfokú: $\frac{1}{1-x} - 1 \approx 0 + (1)x = x$
- másodfokú: $\frac{1}{1-x} - 1 \approx 0 + (1)x + \frac{2x^2}{2!} = x + x^2$
- harmadfokú: $\frac{1}{1-x} - 1 \approx 0 + (1)x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{6x^3}{3!} = x + x^2 + x^3$

Ha vetünk az eredményekre egy pillantást, akkor kitalálhatjuk a magasabb fokú közelítéseket is. Vagyis ha x kisebb mint 1, akkor ezek a közelítések egyre pontosabbak lesznek, és $\frac{1}{1-x} - 1$ valójában egyenlő az $x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$ véget nem érő összeggel.

4.2.1. Definíció. Ezt a végtelen összeget nevezzük az f függvény *Taylor-sorának*.

A (4.1) ábrán megfigyelhető az $f(x)$ függvény fekete színnel, és közelítései piros, zöld és kék színnel jelölve.



4.1. ábra

Az ábrát nézve azt is észrevehetjük, hogy az $x = 0$ pont körül egyre közelednek $f(x)$ -hez a színes görbék, viszont $x > 1$ -re ez egyáltalán nem mondható el.

4.2.2. 2. Példa

Legyen $f(x) = e^{4x}$, $a = 0$, a Taylor-polinom pedig negyedfokú! Az eredményt felhasználva számoljuk ki e közelítő értékét![9]

A következő táblázat második oszlopában kiszámoljuk az első 4 deriváltat, majd a harmadik oszlopba ezek értékét írjuk $a = 0$ pontban.

	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
$n = 0$	e^{4x}	1
$n = 1$	$4 \cdot e^{4x}$	4
$n = 2$	$16 \cdot e^{4x}$	16
$n = 3$	$64 \cdot e^{4x}$	64
$n = 4$	$256 \cdot e^{4x}$	256

Az f függvény a pont körüli negyedfokú Taylor polinomja

$$T_4(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3 + \frac{f^{(IV)}(a)}{24}(x - a)^4$$

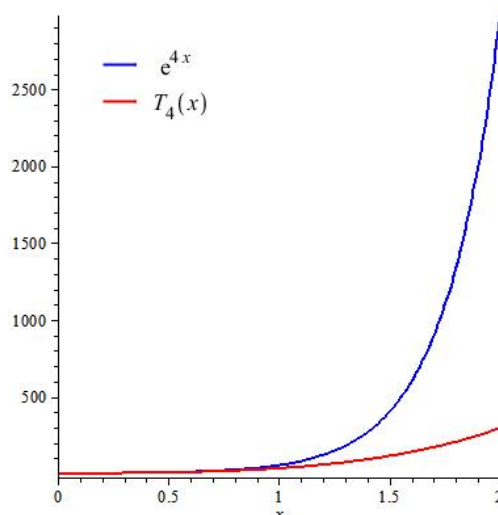
Ebbe a képletbe behelyettesítjük a táblázatban lévő adatokat:

$$T_4(x) = 1 + 4 \cdot (x - 0) + \frac{16}{2} \cdot (x - 0)^2 + \frac{64}{6} \cdot (x - 0)^3 + \frac{256}{24} \cdot (x - 0)^4$$

Ezt egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$T_4(x) = 1 + 4 \cdot x + 8 \cdot x^2 + \frac{32}{3} \cdot x^3 + \frac{32}{3} \cdot x^4,$$

ami együtt ábrázolva e^{4x} -szel így néz ki:



4.2. ábra

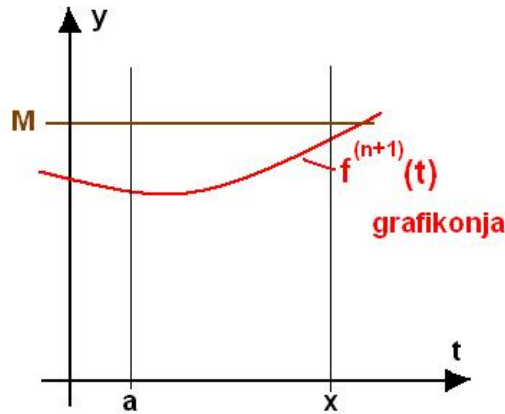
Ezek után az e közelítő értékét úgy kapjuk, hogy az előbbi Taylor-polinom értékét kiszámoljuk az $x = \frac{1}{4}$ helyen, mert e^{4x} -be x helyére $\frac{1}{4}$ -et írva kapjuk meg e -t:

$$e \approx T_4\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{32}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{32}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{65}{24}$$

Most pedig vizsgáljuk meg a hibatagot, vagyis (4.2)-t.

Amikor $f(x)$ -et az n -edik Taylor polinommal közelítjük, akkor ez a képlet adja meg a pontos hibát. Viszont ezt gyakran nehéz kiszámolni. Ezért szeretnénk teljesen elfelejteni ezt a képletet és valami sokkal kezelhetőbbel helyettesíteni. Próbáljunk találni olyan egyszerűbb képletet, amivel okosan túlbecsüljük a hiba nagyságát. De ezt hogy tudnánk megtenni?

Először is nézzük $f(t)$ $(n + 1)$ -edik deriváltját, ahol t a és x között változik és ezt becsljük felül egy M számmal. A (4.3) ábra ezt jól szemlélteti is.



4.3. ábra

4.2.2. Tétel. (A hibatag becslése) Ha f -et az n -edik Taylor-polinomjával közelítjük $x = a$ környezetében, akkor R_n , a hibatag nem több mint

$$\frac{M(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

vagy

$$R_n \leq \frac{M(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

ahol M felső becslése az $|f^{(n+1)}(t)|$ értékének a és x közötti t -re.

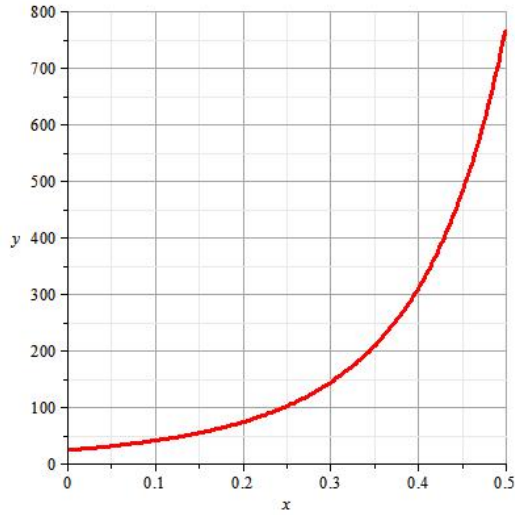
4.2.3. Példa a hibatag becslésére

Nézzük $f(x) = \frac{1}{1-x} - 1$ egy harmadfokú közelítését $x = 0$ körül és becsljük meg a hibát, ha $f(x)$ -et 0 és $\frac{1}{2}$ közötti x értékekre közelítjük.

Láttuk már a (4.2.1) példában $f(x)$ harmadfokú közelítését, azaz

$$T(x) = x + x^2 + x^3.$$

Ahhoz, hogy megbecsljük a hibát, ki kell számítani M -et. Tehát $f(t)$ $(n+1)$ -edik, vagyis a 4. deriváltját, ami $\frac{24}{(1-t)^5}$. Most t 0 és $\frac{1}{2}$ között változik. Mi arra vagyunk kíváncsiak, hogy mikor a legnagyobb $\frac{24}{(1-t)^5}$? Ha ábrázoljuk, rögtön meg is kapjuk a választ, mert a (4.4)-es ábrából kiderül, hogy 0 és $\frac{1}{2}$ között növekszik a függvény.



4.4. ábra

Tehát akkor a legnagyobb, amikor $t = \frac{1}{2}$. Ezt behelyettesítve $\frac{24}{(1-\frac{1}{2})^5} = 768$, így M értéke lehet 768. Mivel

$$R_n \leq \frac{M(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

ezért

$$R_1 \leq \frac{768x^{(3+1)}}{(3+1)!} = \frac{768x^4}{4!} = 32x^4.$$

Ha például vesszük $x = \frac{1}{3}$ -ot, akkor $f(\frac{1}{3}) \approx \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3$, és még ehhez hozzáadjuk a $32(\frac{1}{3})^4$ -t, ami így egyenlő 0.395-del.

Ez a fejezet a [10]-esen alapul.

5. fejezet

Fourier-sorok

A Taylor-polinomok – mint azt láttuk az előző fejezetben – csak egy adott pont környezetében közelítik jól a függvényt. Ez az egyik különbség a jelen fejezetben tárgyaltakhoz képest, mivel itt egy intervallumban közelítjük a függvényt. A másik különbség, hogy ebben a fejezetben egy adott f függvényt trigonometrikus polinomokkal szeretnénk közelíteni. Meg kell jegyeznünk, hogy ennek a közelítésnek akkor van nagy jelentősége, ha periodikus jelenségeket vizsgálunk.

Rögtön fel is írhatjuk a következő definíciókat (itt, és a fejezet más részeinél is használtam a [11]-est).

5.0.3. Definíció.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots$$

sort trigonometrikus sornak nevezzük, ahol a_0, a_k, b_k ($k = 1, 2, \dots$) konstansok a sor együtthatói.

A trigonometrikus sor tagjai periodikus függvények, mivel $\cos nx$ és $\sin nx$ függvények 2π szerint periodikusak minden $n \in \mathbb{N}$ -re.

5.0.4. Definíció. A

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx + \dots$$

sort tiszta koszinus sornak, a

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin kx = \frac{b_0}{2} + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx + \dots$$

sort tiszta szinusz sornak nevezzük.

5.1. Az a_n, b_n együtthatók kiszámolása

Legyen $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C$.

Kérdés: vannak-e olyan $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, melyre

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots \quad (5.1)$$

Fourier-nak az az ötlete támadt, hogy az (5.1)-est integráljuk $-\pi$ -től π -ig. Vagyis

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx + \dots \quad (5.2)$$

Jobb oldalon az első integrált kivéve az összes többi kiesik, mert

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Így ezeket az integrálokat konstanssal megszorozva is nullát kapunk.

Mivel

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi \Rightarrow a_0\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Tehát

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (5.3)$$

A további együtthatók kiszámításához szorozzuk be (5.1)-t először $\cos x$ -szel, majd $\sin x$ -szel.

$$(5.1) \quad \cdot \cos x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx + a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin x \cos x}_{\text{szorzatuk páratlan}} dx + \dots \quad (5.4)$$

Tudjuk, hogy páratlan függvény integrálja origóra szimmetrikus intervallumon nulla, így $b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx$ kiesik, ahogy a soron következő tagok is (ezt most nem mutatjuk meg).

Korábban láttuk, hogy $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = 0$, ezért az egyenlőség jobb oldalán csak a második tag, vagyis $a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx$ marad. Próbáljuk meg kiszámítani!

Ehhez felhasználjuk, hogy $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

$$a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = a_1 \left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} = a_1 \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi \right) = a_1\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx = a_1 \pi \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx$$

(5.1) \ \cdot \sin x

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx + a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{\cos x}_{\text{páros}} \underbrace{\sin x}_{\text{páratlan}}}_{\text{szorzatuk páratlan}} \, dx + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx + \dots$$

Az egyenlőség jobb oldalát tekintve az első tag itt is nulla, mivel $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 0$; a második tag az előzőhöz hasonlóan kiesik, ezért marad $b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx$, mert a többi tag is nulla (amit itt sem látunk be). A $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ képletet használva elkezdhetjük a számolást:

$$b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = b_1 \left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} = b_1 \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi \right) = b_1 \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx = b_1 \pi \Rightarrow b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx$$

Általában felírhatjuk, hogy

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad b_0 = 0$$

5.1.1. Definíció. Az a_n, b_n együtthatókat Fourier együtthatóknak nevezzük.

Megállapíthatjuk, hogy az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{5.5}$$

tökéletes választás az f függvény közelítéséhez.

5.1.2. Definíció. (5.5)-t a 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény Fourier-sorának hívjuk, amiben a nemrég definiált együtthatók szerepelnek.

Érdemes megjegyezni, hogy

- egy páros függvény Fourier-sora tisztán koszinuszos lesz, egy páratlan függvénynek pedig tisztán szinuszos;
- egy 2π szerint periodikus függvény esetén vehetünk akármilyen 2π hosszúságú intervallumot, mert az együtthatókban lévő integrálok eredménye akkor is ugyanannyi lesz;
- ha esetleg az f függvény valahol szakadásos az adott periódus belsejében, vagy ha folytonos, viszont a deriváltjának van szakadása, akkor szakaszonként végezzük el az integrálást és az eredményeket összeadjuk a végén.

Mi van akkor, ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C$ ($a > 0$)?

1. $\varphi: [0, \pi] \rightarrow [a, b]$

Ekkor $\varphi(t) := \frac{b-a}{\pi}t + a$.

2. $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f\left(\frac{b-a}{\pi}t + a\right)$

Itt választhatunk, hogy páros vagy páratlan módon terjesszük ki. Ha az utóbbit tesszük, akkor g Fourier-sora tiszta szinuszos lesz, azaz $g(t) = b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \dots$. $(x = \frac{b-a}{\pi}t + a \Rightarrow x - a = \frac{b-a}{\pi}t \Rightarrow t = \frac{\pi(x-a)}{b-a})$

Így $f(x) = b_1 \sin \frac{\pi(x-a)}{b-a} + b_2 \sin \frac{2\pi(x-a)}{b-a} + \dots$.

Ennek speciális esete, amikor $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$.

Ilyenkor $f(x) = b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots$.

Ezek után megkérdezhetjük a következőket:

Mikor állítja elő az f függvényt a Fourier-sora, és hogy ez egyáltalán mikor konvergens, illetve egyenletesen konvergens?

Erre a kérdésre a következő tétel ad választ, amit most nem fogok bizonyítani.

5.1.3. Tétel. [13] Legyen $f \in C^2(\mathbb{R})$ és f 2π szerint periodikus. Ekkor minden $x \in [-\pi, \pi]$ esetén

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

azaz f -et előállítja Fourier-sora, és a konvergencia egyenletes.

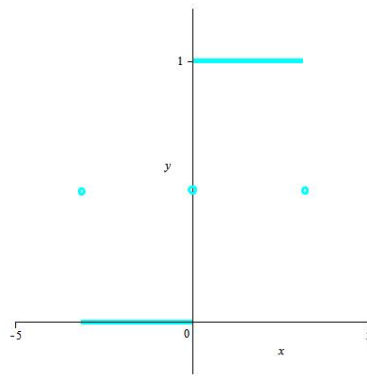
Végül nézzük meg két adott függvény Fourier-sorának a kiszámítását!

5.2. Példák adott függvény Fourier-sorának kiszámítására

5.2.1. 1. Példa

Írjuk fel a Fourier-sorát annak a 2π szerint periodikus függvénynek, melyet a $[-\pi, \pi]$ intervallumon a következőképpen definiálunk ([12]):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{ha } 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2} & \text{ha } x = k\pi, k = -1, 0, 1 \end{cases}$$



5.1. ábra

Először számítsuk ki a_0 -t, majd a_n -t és b_n -t!

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 dx + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = 0 + \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1 \end{aligned}$$

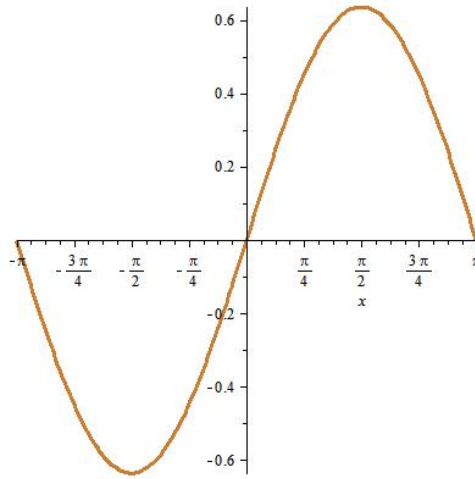
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-(-1)^n}{n} - \frac{-1}{n} \right) \end{aligned}$$

Így az f függvény Fourier-sora tiszta szinuszos sor lesz:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + \dots + \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)x + \dots$$

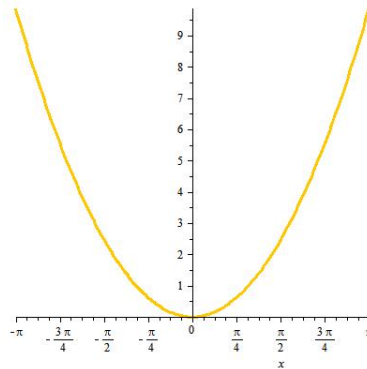
Ezt $n = 17$ -ig ábrázoltam, de az (5.2) ábrán látszik, hogy a közelítés nem tökéletes.



5.2. ábra

5.2.2. 2. Példa

Második példának az $f(x) = x^2$ függvényt választottam ((5.3) ábra). Itt is az f függvény Fourier-sora a kérdés.[12]



5.3. ábra

Ennél a feladatnál ugyancsak azzal kezdjük, hogy a_0 -t meghatározzuk.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^3 - (-\pi^3)}{3} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^2 \end{aligned}$$

Mivel f egy páros függvény, ezért a b_n együtthatók nullák lesznek. Tehát csak az a_n -eket kell kiszámolni. Kezdjük is el:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

A most következő lépésnél parciális integrálást kell csinálnunk (az egyszerűség kedvéért az integráljel előtti $\frac{1}{\pi}$ -vel majd a számolás végén szorzok). Határozott integrálokra pedig a következőképpen néz ki a parciális integrálás:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Behelyettesítve ebbe a képletbe kapjuk, hogy

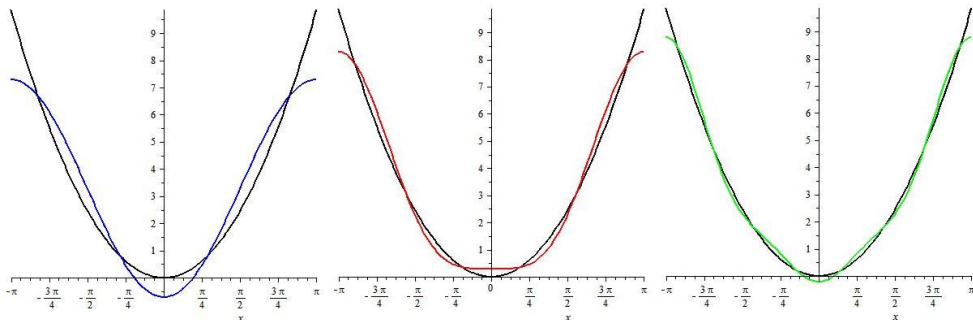
$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2}_f \underbrace{\cos nx}_{g'} dx &= \underbrace{\pi^2 \cdot \frac{\sin n\pi}{n} - (-\pi)^2 \cdot \frac{\sin n(-\pi)}{n}}_{=0, \text{ mert } \sin n\pi=0, \text{ ha } n \in \mathbb{Z}} - \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x}_f \underbrace{\sin nx}_{g'} dx = \\ &= -\frac{2}{n} \left(\underbrace{\pi \cdot \frac{-\cos n\pi}{n} - (-\pi) \cdot \frac{-\cos n(-\pi)}{n}}_{-(-1)^n \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{n}} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos nx}{n} dx \right) = \\ &= (-1)^n \cdot \frac{4\pi}{n^2} + \underbrace{\frac{2}{n} \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) \left[-\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0, \text{ mert } \sin n\pi, \sin n(-\pi) \text{ is nulla}} = (-1)^n \cdot \frac{4\pi}{n^2} \end{aligned}$$

Viszont még meg kell szorozni ezt $\frac{1}{\pi}$ -vel, tehát

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot (-1)^n \cdot \frac{4\pi}{n^2} = (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2}$$

Így már fel is írhatjuk a Fourier-sort:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cdot \cos x + \cos 2x - \frac{1}{2} \cdot \cos 3x + \dots + (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx + \dots$$



5.4. ábra

Az (5.4) ábrán először $\frac{\pi^2}{3} - 4 \cdot \cos x$, majd $\frac{\pi^2}{3} - 4 \cdot \cos x + \cos 2x$ és végül $\frac{\pi^2}{3} - 4 \cdot \cos x + \cos 2x - \frac{1}{2} \cdot \cos 3x$ lett ábrázolva az x^2 függvénnyel együtt. Látszik, hogy plusz egy tag hozzáadásával egyre közelebb és közelebb jutunk az eredeti függvényhez.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Mezei Istvánnak, hogy segítségével, türelmével hozzájárult szakdolgozatom elkészítéséhez.

Köszönettel tartozom családomnak és szeretteimnek az egyetemi éveim alatt nyújtott támogatásukért.

Irodalomjegyzék

- [1] Faragó István - Horváth Róbert: *Numerikus módszerek*, Typotex, 2011.
- [2] Faragó István: *Előadás jegyzet*, 2010.
- [3] <http://www.wmueller.com/precalculus/families/lagrange.html>.
- [4] Stoyan Gisbert: *Numerikus matematika mérnököknek és programozóknak*, Typotex, 2007.
- [5] Stoyan Gisbert - Takó Galina: *Numerikus módszerek 1.*, Typotex, 2002.
- [6] http://www.uni-miskolc.hu/~matha/Numerikus_08ea.pdf.
- [7] <http://meip.x5.hu/files/1702>.
- [8] Balázs Márton - Kolumbán József: *Matematikai analízis*, Dacia Könyvkiadó, 1978.
- [9] <http://www.mk.unideb.hu/userdir/kezicsaba/sites/dolgozok/mat2gy/sites/hun/gyak5.pdf>.
- [10] <http://www.zweigmedia.com/pdfs/TaylorSeries.pdf>.
- [11] http://www.uni-miskolc.hu/~matszisz/Fourier_sorokea.pdf.
- [12] <http://www.math.bme.hu/~simonk/a2/Fouriers.pdf>.
- [13] <http://www.cs.elte.hu/~batka/oktatas/fouriersor.pdf>