Párosítások, páros gráfokban és tetszőleges gráfokban, alkalmazások

Szakdolgozat

Konfár Kitti

Matematika B.Sc., matematikai elemző

Témavezető: **Vesztergombi Katalin**, egyetemi docens

Számítógéptudományi Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2011

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Szakdolgozatom témája a párosítások és azok alkalmazásai. A témaválasztáskor elsődleges célom volt, hogy a matematika sokrétű területei közül olyan témáról írjak, amelynek alkalmazásai fontos szerepet töltenek be akár a mindennapi életben.

Elsőként egy rövid betekintést nyerhetünk a gráfelmélet alapjaiba.
A témát két részre osztottam, először a páros gráfokban keresünk maximális párosítást, majd ezt vizsgáljuk általános esetben is.

Az egyik legfontosabb algoritmus páros gráfok esetében a magyar módszerként idézett algoritmus, amely Kőnig Dénes és Egerváry Jenő nevéhez fűződik.

Az algoritmusban javító utak keresésének segítségével maximális számú független élt keresünk, azaz maximális elemszámú párosítást.

Az algoritmus lényege, hogy amíg tudunk, egy párosításhoz hozzáveszünk további független éleket, így kapunk egy párosítást, ami nem feltétlenül maximális. Ha ez nem lehetséges már, akkor keresünk egy javító utat és ennek segítségével növeljük a párosítást. Belátjuk, hogy ha a javító utak módszerével a párosítás nem növelhető, akkor ennél több párosítás nem lehetséges.

Felmerül a kérdés, hogyan tudunk-e párosításokat keresni tetszőleges, nem páros gráfokban, illetve hogyan tudunk maximális elemszámú párosítást keresni. Edmonds algoritmusa segítségével kaphatunk egy gráfban maximális párosítást. Hasonlóan a páros gráfoknál itt is javító út kezdeményeket növelünk.

2. fejezet

Gráfelméleti alapfogalmak, definíciók

2.1. Definíció. Egy gráf egy rendezett pár, $G = (V, E)$, ahol V egy nemüres halmaz, E pedig ebből a halmazból képezhető párok egy halmaza. V elemeit pontoknak vagy csúcsoknak nevezzük, E elemeit éleknek nevezzük.

2.2. Definíció. Ha egy G gráfról beszélünk, akkor $V(G)$-vel illetve $E(G)$-vel jelöljük a gráf pontjainak illetve éleinek halmazát, míg a pontok illetve élek számát $|V(G)| = n$-nel illetve $|E(G)| = m$-mel jelöljük.

2.3. Definíció. Ha az $e \in E$ él a $\{v_1, v_2\}$ párnak felel meg, akkor ez a két pont e végpontja. Ha $v_1 = v_2$, akkor e hurokél. Ha két különböző nem hurokélnek a végpontjai azonosak, a két élet párhuzamos vagy többszörös élnek nevezzük. Azokat a gráfokat, amelyekben nincsenek hurokélek és többszörös élek, egyszerű gráfoknak nevezzük.

2.4. Definíció. Ha $e, f \in E$ végpontjai $\{v_1, v_2\}$, $\{w_1, w_2\}$, és $\{v_1, v_2\} \cap \{w_1, w_2\} \neq \emptyset$, akkor e, f szomszédos élek. Hasonlóan, v_1 és v_2 szomszédos pontok, ha $v_1, v_2 \in E$. A v_1 illeszkedik e-re, ha annak egyik végpontja.

2.5. Definíció. Egy pont izolált pont, ha nincsen vele szomszédos másik pont, vagyis nem illeszkedik egyetlen élre sem. Egy pontra illeszkedő élek száma a pont fokszáma.

Egy esetleges hurokél kettővel növeli a fokszámot.

A v pont fokszámát $d(v)$-vel jelöljük.

A maximális fokszámot Δ-val, a minimálist δ-val fogjuk jelölni.

A gráf r-regurális, ha minden pontjának foka r.

Ha egy n pontú egyszerű gráf tetszőleges két pontja szomszédos, akkor n-pontú teljes gráfnak nevezzük és K_n-nel jelöljük.

2.6. Definíció. A $G = (V, E)$ és a $G = (V', E')$ gráfok izomorfak, ha van olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés V és V' között, hogy G-ben pontosan akkor szomszédos két pont, ha G'-ben a nekik megfelelő pontok szomszédosak és szomszédos pontpárok esetén ugyanannyi él fut közöttük.

2.7. Definíció. A $G' = (V', E')$ gráf a $G = (V, E)$ gráf részgráfja, ha $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ valamint egy pont és egy él pontosan akkor illeszkedik egymásra G'-ben , ha G-ben is illeszkedők. Ez utóbbi azért szükséges, mert különben előfordulhatna, hogy egy él végpontja nem tartozik a gráfhoz. Részgráfot kapunk, ha elhagyunk néhány pontot a hozzá illeszkedő élekkel együtt, valamint esetleg még néhány élet is.

2.8. Definíció. Ha E' pontosan azokból az E-beli élekből áll, amelyeknek mindkét végpontja V'-ben van és E' az összes ilyen élet tartalmazza, akkor G' a G gráf V' által feszített részgráfja.

2.9. Definíció. Egy G gráf komplementerén azt a $\overline{G}$ gráfot értjük, amelyet akkor kapunk, ha G-t a K_n teljes gráf részgráfjának tekintjük. Vagyis $\overline{G}$-ben azok a pontpárok vannak összekötve, amelyek G-ben nincsenek. A $G^{'}$ részgráf komplementere az a $G^{''} = (V^{''}, E^{''})$ gráf, melyre $V^{''} = V$ és $E^{''} = E - E^{'}$.

2.10. Definíció. Egy $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., v_{k-1}, e_k, v_k)$ sorozatot élsorozatnak nevezünk, ha e_i a v_{i-1}-t és $v_i - t$ összekötő él. Ha $v_0 = v_k$, akkor az élsorozat zárt. Ha a csúcsok mind különbözőek, akkor egy utat definiáltunk. Ha $e_1 \neq e_2, v_0 = v_k$ és különben a csúcsok mind különbözőek, akkor ez egy kör a gráfban. Az út vagy kör hosszán az őt alkotó élek számát értjük. Egyszerű gráfban $(v_0, v_1, v_2, ..., v_k)$-val írjuk le az utat.

2.11. Definíció. A pontok egy osztályba tartoznak, ha van őket összekötő út. Az egy osztályba eső pontok által feszített részgráfokat a G gráf összefüggő komponenseinek hívjuk, számukat $c(G)$-vel jelöljük. Ha a komponensek száma 1, vagyis ha G bármely két pontja között vezet út, akkor a G gráf összefüggő.

2.12. Definíció. Egy $X \subseteq E$ élhalmazt elvágó élhalmaznak nevezünk, ha az X-beli élek elhagyásával nő a gráf komponenseinek száma, azaz a gráf több komponensre esik, mint ahányból eredetileg állt. X vágás, ha elvágó, de semelyik valódi részhalmaza nem az. Az egyelemű vágásokat elvágó éleknek nevezzük.

2.13. Definíció. Az összefüggő körmentes gráfokat fáknak, a körmentes gráfokat erdőnek nevezzük.

Néha szükségünk lesz arra, hogy irányított gráfokkal foglalkozzunk, vagyis olyanokkal, amelyeknek élei nem v_1, v_2 alakú rendezetlen párok, hanem (v_1, v_2) alakú rendezett párok. Egy ilyen (v_1, v_2) élnek v_1 a kezdőpontja, v_2 végpontja. Forrásnak hívunk egy pontot, ha egyetlen élnek sem végpontja, de legyen belőle kiinduló él és nyelőnek, ha egyetlen élnek sem kezdőpontja, de legyen bele menő él.

Irányított gráfban egy $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_k, v_k)$ utat akkor hívunk irányított útnak, ha $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), ..., e_k = (v_{k-1}, v_k)$. Az irányított kör definíciója hasonló. Egy irányított gráf erősen összefüggő, ha bármely pontjából bármely más pontjába vezet irányított út.

3. fejezet

Párosítás páros gráfokban

A következő fejezetben a páros gráfokkal fogunk foglalkozni. Hogyan lehet maximális párosítást keresni egy páros gráfban, illetve mikor alkalmazhatjuk. Először is nézzünk meg két példát a páros gráfokban lévő párosításokra.

1. példa. Egy tánctermi probléma

Egy iskolai bálon 300 fős vendégsereg jelent meg. A vendégek közül nem ismer mindenki mindenkit, annyit azonban tudunk, hogy minden lány 50 fiút, és minden fiú 50 lányt ismer (most is feltesszük, hogy az ismeretség kölcsönös).

Belátható, hogy ekkor az egész vendégsereg táncra perdülhet úgy, hogy mindenkinek egy ismerőse a párja.

Mivel ismeretségekről van szó, a szituációt természetes módon egy gráffal ábrázolhatjuk (vagy legalábbis elképzelhetjük a vendégsereg ismeretségi gráfját).

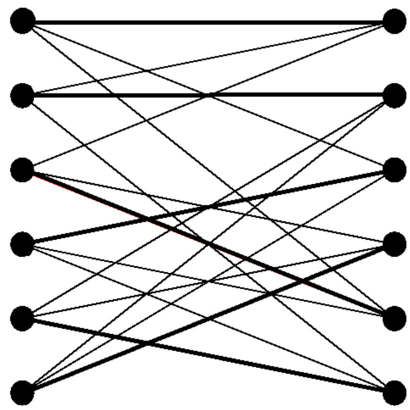
Rajzoljunk tehát 300 pontot, és összekötjük azokat, amelyek ismerősöket prezentálnak. Esetünkben a gráf ennél kicsit egyszerűbb: annak, hogy két fiú vagy két lány ismeri-e egymást, a probléma szempontjából nincs különösebb jelentősége, az ilyen ismeretségek ábrázolásától ezért el is tekintünk. A gráf pontjait eszerint elrendezhetjük úgy, hogy a fiúknak megfelelő pontok a bal, a lányokat reprezentálók pedig a jobb oldalon helyezkednek el, ekkor tehát a gráf minden éle egy jobb és egy bal oldali pontot köt össze. A bal oldali pontok halmazát A, a jobb oldaliakét B jelöli.
Az így kapott speciális gráfot páros gráfnak nevezzük; egy páros - mindazonáltal a példabelinél jóval kisebb szabású partit reprezentáló - gráfot az ábrán tanulmányozhatunk. A vastag élek a táncosokat jelzik; az ilyen élrendszert teljes párosításnak nevezzük.

Ezen előkészületek után a feladatot a következőképpen fordíthatjuk le a gráfelmélet nyelvére: azt kell belátnunk, hogy ha egy 300 pontú páros gráfban minden pont fokszáma 50, akkor a gráfban van teljes párosítás.

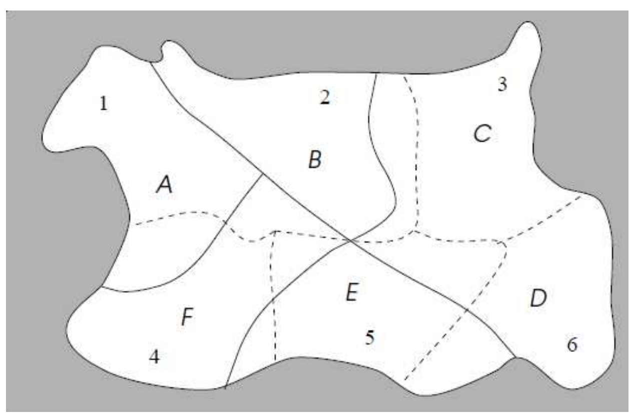
2. példa. Egy szigeten hat törzs él. A sziget területe $600km^2$, és a törzsek jó kapcsolatban vannak, így mindegyiknek $100km^2$ a vadászterülete.

A törzsek egy-egy totemállattal jelképezik identitásukat. Megállapodnak, hogy a szigeten élő 6 teknősfajból választanak egyet-egyet és mindegyiknek különböző totemállata lesz, de olyan amely a vadászterületen előfordul.

Tudjuk továbbá, hogy a teknősbékafajok mindegyike $100km^2$ területen él, és a különböző fajok élőhelyei nem metszik egymást (minden területen él egy faj). A teknősök területe természtesen nem a törzsek vadászterületei szerint

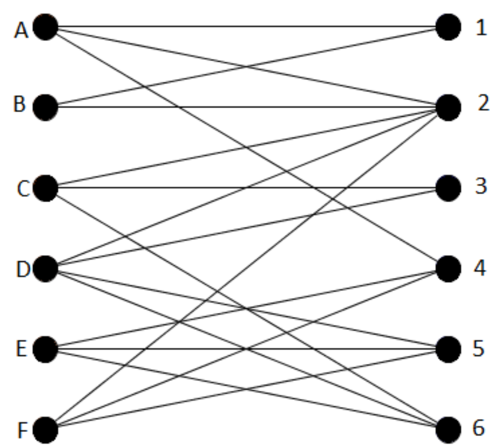


3.1. ábra. Páros gráf teljes párosítással



3.2. ábra. A hat törzs vadászterülete és a hat teknősbékafaj élőhelye. A törzseket A,...,F, a teknősbéka-fajtákat 1,...,6, az előbbiek közötti határokat folytonos, az élőhelyeket elválasztó határokat szaggatott vonal jelzi

oszlik meg a szigeten.
A feladatunk, hogy bebizonyítsuk, hogy lehetséges a megállapodásnak megfelelő választás, úgy hogy betartjuk a feltételeket. Ábrázoljuk a problémát egy gráffal (3.2. ábra).



3.3. ábra. A feladat ábrázolása gráffal

A törzseket és a teknősfajokat is egy-egy pont reprezentálja, egy teknőspont és egy törzs-pont pedig pontosan akkor van összekötve éllel, ha a teknősfaj élőhelyének és a törzs vadászterületének van közös része. A törzs-pontokat bal oldalra, a teknős-pontokat pedig jobb oldalra rajzolva nyilvánvaló, hogy egy páros gráfot kapunk. Azt akarjuk bizonyítani, hogy a páros gráfban létezik teljes párosítás.

Nem lenne szerencsés, ha valamelyik törzs vadászterületén egyáltalán nem élnének teknősbékák. Probléma lenne az is, ha két törzs területén egyetlen faj élne csak és így nem tudnának különböző totemet választani.

A teljes párosítás bebizonyításával megoldódik a báli táncrend és a totemválasztás problémája.

3.1. Definíció. Egy G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha a G pontjainak *V(G)* halmaza két részre, egy A és B halmazra osztható úgy, hogy G minden élének egyik végpontja A-ban, másik B-ben van. Ennek jelölése: *G=(A,B)*. A $K_{a,b}$-vel jelölt teljes páros gráf olyan *G=(A,B)* páros gráf, ahol $|A| = a$ és $|B| = b$, és amelyben minden A-beli pont össze van kötve minden B-beli ponttal.

3.1. Tétel. Egy G gráf akkor és csak akkor páros gráf, ha minden G-ben lévő kör páros hosszúságú.

3.1. Bizonyítás. Ha G páros gráf és C egy kör G-ben, akkor C pontjai felváltva vannak A-ban és B-ben. Így $|V(C)|$ páros. Ha G minden köre páros hosszú, akkor megadhatjuk az A és B halmazt. Válasszunk egy tetszőleges $v(G)$ pontot. Legyen ez A első pontja. A v minden szomszédját tegyük B-be, majd minden eddig B-ben lévő pont minden szomszédját tegyük A-ba. Most minden A-beli minden eddig még nem szerepelt szomszédját tegyük B-be, és ezt az eljárást folytassuk addig, amíg minden pontot el nem helyeztünk. Ez biztos jó elosztás, hiszen ha most lenne például A-ban két szomszédos pont, akkor kell lennie a gráfban páratlan körnek is, ami viszont ellentmondás volna. Ha a gráf nem összefüggő, akkor ezt az eljárást komponensenként hajtsuk végre.

3.2. Definíció. Párosításnak vagy részleges párosításnak nevezünk egy M élhalmazt, ha semelyik két élnek nincs közös pontja. Az ilyen éleket független éleknek is nevezzük. A részleges párosítás lefedi éleinek végpontjait. Egy párosítást teljes párosításnak nevezünk, ha a gráf minden pontját lefedi.

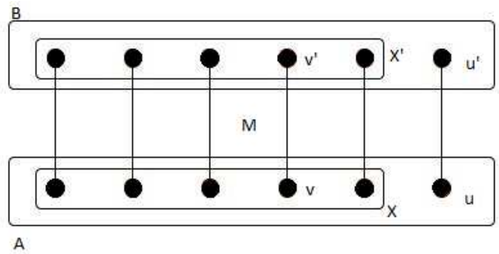
$N(X)$-szel jelöljük egy $X \subseteq V(G)$ ponthalmaz szomszédainak halmazát, vagyis $N(X)$ azon y pontok halmaza, amelyekhez van olyan él, melynek egyik végpontja y, másik pedig egy X-beli pont.

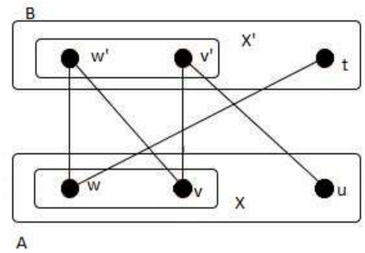
3.1. Hall tétel

3.2. Tétel. Hall tétel. Egy $G = (A, B)$ páros gráfban akkor és csak akkor van A-t lefedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|N(X)| \geq |X|$. Ezt a feltételt Hall-feltételnek nevezzük.

3.2. Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy ha van A-t lefedő párosítás, akkor teljesül a feltétel, hiszen ekkor a párosítás élei minden ponthoz egyértelműen hozzárendelnek egy B-beli pontot. Tegyük most fel, hogy teljesül a Hall-feltétel, és lássuk be, hogy ekkor van A-t lefedő párosítás. Tegyük fel, hogy már van egy M párosításunk, ami lefedi az $X \subset A$ halmazt, de még van olyan $u \in A - X$ pont, amit nem. Minden $v \in X$ pont M-beli párját jelöljük v'-vel, X' pedig legyen a B-beli, M által lefedett pontok halmaza. Ha u-nak van szomszédja $B - X$-ben, akkor egy élet hozzávehetünk M-hez.

Lehetséges azonban, hogy u-nak minden szomszédja X'-ben van. Ekkor is előfordulhat, hogy növelni tudjuk a párosítás élszámát. Ha van egy olyan P út, ami egy $A - X$-beli pontból indul, egy $B - X'$-beli pontban végződik és minden második éle M-beli, de a többi nem M-beli, akkor növelhetjük a párosítást, ekkor ugyanis a P út első és utolsó éle nem M-beli, tehát eggyel





több nem M-beli él szerepel benne, mint az M-beliek száma. Az ilyen P utakat javító útnak nevezzük. Ha tehát $M' = (M - (M \cap P)) \cup (P - M)$, vagyis ha M-ből elhagyjuk a P-ben szereplő éleket és hozzávesszük a többi P-beli élet, akkor az így kapott M' párosítás élszáma eggyel nagyobb lesz.
A javító utakat és részeiket, vagyis az olyan utakat, amelyek $A - X$-beli pontból indulnak és minden második élük M-beli, de a többi nem, alternáló útnak nevezzük.
Tegyük fel, hogy javító úttal sem növelhetjük a párosítást. Belátjuk, hogy ekkor már M lefedi A-t. Legyen T' azon B-beli pontok halmaza, amelyek elérhetők u-ból alternáló úttal.
Ekkor feltevésünk szerint $T' \subseteq X'$. Jelölésünk szerint T a T'-beli pontok párjai és nyilván $T \subseteq X$. Belátjuk, hogy $N(T) = T'$.
A párosításból világos, hogy $T' \subseteq N(T)$. Tegyük fel tehát, hogy van egy olyan x, y él, hogy $x \in T$ és $y \notin T'$. Legyen P egy alternáló út u-ból x'-be. Ekkor P nem megy át x-en, hiszen P utolsó éle nem lehet az M-beli x, x' él és ha egy közbeeső pont volna x, akkor P-nek kétszer kellene átmennie x'-n. Így azonban P-t folytatva x', x-szel majd x,y-nal egy javító utat kaptunk u-ból $y \in T'$-be. Ez pedig ellentmond T' definíciójának.
Tehát $N(T) = T'$ Mivel azonban u-nak is minden szomszédja csak T'-ben

lehet, a $T \cup u \subseteq A$ halmazra $N(T \cup u) = T'$, de $|T'| = |T| < |T \cup u|$, vagyis nem teljesül a Hall-feltétel.

3.3. Tétel. Ha egy páros gráfban a pontok fokszáma egyenlő, akkor a gráfban létezik teljes párosítás.

3.3. Bizonyítás. Legyen A és B halmazban $k - k$ pont. Minden pont foka legyen r, azaz egy r reguláris páros gráf. Az A halmazbeli k darab pontból összesen $k \cdot r$ él indul ki. Másrészt egy B halmazbeli ponthoz ezekből legfeljebb r él mehet. Tehát a k darab A-beli pontból kiinduló élek legalább k B-beli ponthoz vezetnek, azaz a gráf teljesíti a Hall-feltételt. Így létezik A-t lefedő teljes párosítás.

3.3. Definíció. Ha R egy gráf ponthalmazának olyan részhalmaza, hogy a gráf minden élének legalább az egyik végpontja $R - beli$, akkor R-et a gráf lefogó ponthalmazának nevezzük.

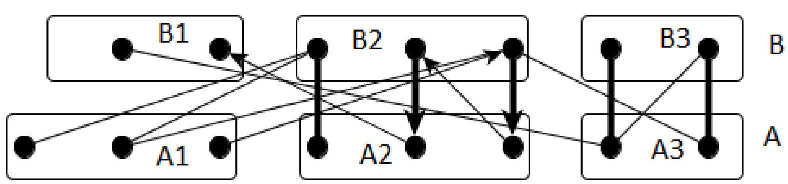
Jelöljük a G gráf lefogó ponthalmazainak halmazát $\tau(G)$-val. A G-beli lefogó pontok minimális számán azt a számot értjük, amely minimálisan szükséges ahhoz, hogy az összes pontot lefogja.

A G gráfban a független élek maximális számát $\nu(G)$-vel jelöljük.

3.4. Tétel. (**König**) Minden páros gráfban a független élek maximális száma egyenlő a lefogó pontok minimális számával.

A bizonyítás a lentebb részletezett alternáló utak módszerére épül. Ha egy gráf valamely L útját bejárjuk és abban rendre kétféle -mondjuk kövér és sovány- élek váltogatják egymást, akkor L-et alternáló útnak nevezzük és L bármelyik pontjából bármely másik pontja alternáló úttal elérhető. A módszer abban áll, hogy ha egy alternáló út mindkét végét sovány él zárja, akkor az út éleinek sovány és kövér jellegét felcserélve eggyel növekszik a kövér élek száma. Azt is figyeljük meg, hogy ha egy gráf kövér élei függetlenek és az alternáló út végpontjaihoz nem illeszkednek kövér élek, akkor a kövér élek a csere után is függetlenek lesznek.

3.4. Bizonyítás. (**König**) Válasszuk ki a $G = G(A, B)$ páros gráfban lehetőleg sok független, azaz kövér élet. Álljon A_1-beli, illetve B_1-beli pontokból, amelyekhez nem illeszkedik kövér él. Ekkor nyilván nincs G-ben A_1B_1 él. A kövér élek végpontjai aszerint tartoznak A és B 2-es, illetve 3-as indexű részhalmazaiba, hogy A_1-ből alternáló úttal elérhetők vagy nem érhetők el. Ekkor nyilván nincs G-ben sem A_1B_3 él, sem A_2B_2 él. Mármost ha van G-ben A_2B_1 él, akkor van alternáló A_1B_1 út is (Az ábrán nyilakkal jelzett). Alkalmazva az alternáló utak módszerét, növelhetjük a kövér élek számát. Ha pedig nincs G-ben A_2B_1 él, akkor $B_2 \cup A_3$ nyilván lefogó ponthalmaz és mivel $|B_2 \cup A_3|$ egyenlő a kövér élek számával, ez utóbbi maximális és $B_2 \cup A_3$ minimális. Ezzel bebizonyítottuk König tételét.



3.4. ábra.

3.2. Magyar módszer

A következő algoritmusokhoz szükségünk lesz néhány fogalomra.

Rendeljük az M-hez a teljes $G = G(A, B)$ páros gráfot a következőképpen: jelölje $a_1, a_2, ..., a_n$ illetve $b_1, b_2, ..., b_n$ az A és B halmaz pontjait és legyen szomszédos minden A-beli pont minden B-beli ponttal egy-egy él révén, továbbá rendeljük a c_{ij} számot az a_i, b_j élhez értékként. Egy P permutáció n számú független élt jelöl ki G-ben, $c(P)$ pedig a P által kijelölt független élekhez rendelt számok összege, röviden e független élrendszer értéke. Az f fedő súlyrendszerre azt is mondjuk, hogy fedi G éleit, az $f(a_i)$ függvényértéket a_i súlyának nevezzük, továbbá az a_i, b_j élt fedettnek illetve pontosan fedettnek, túlfedettnek nevezzük.

Legyen ϵ_1 a G-beli túlfedett élek között minimális, azaz

$$\epsilon_1 = min_e(f_0(a_i) + (f_0(b_j) - c_{ij}),$$

ahol $e = a_i, b_j$ G-beli telített él, legyen ϵ_2 a legkisebb nem 0 súly, azaz

$$\epsilon_2 = min_a f_0(a),$$

ahol $a \in A \cup B$ és $f_0 a \neq 0$ legyen továbbá

$$\epsilon_0 = min(\epsilon_1, \epsilon_2)$$

3.1. Algoritmus. Alkossa a teljes $G = G(A, B)$ páros gráf A-beli pontjait $a_1, a_2, ..., a_n$, B-beli pontjait $b_1, b_2, ..., b_n$, továbbá legyen a nemnegatív egész c_{ij} az a_i, b_j él értéke.

A páros gráfban maximális összértékű független élrendszer és a gráf éleit fedő minimális súlyrendszer keresésére.

Speciális esetben a súlyok egyformák, ekkor a maximális párosítás számát kapjuk meg.

(1) Válasszuk az f fedő súlyrendszert a következőképpen: $i = 1, 2, ..., n$ mellett $f(a_i) = max_j c_{ij}$ és $f(b_i) = 0$

(2) Legyen $G_0 = G_0(A, B)$ a G gráfnak az a részgráfja, amelynek élei G-nek az f által pontosan fedett élei.

Jelöljünk ki G_0-ban maximális sok független élt. Vegyük G_0 ponthalmazának egy felosztását.

(3) Ha A_1 nem üres és $A_1 \cup A_2$ nem tartalmaz 0 súlyú pontot, akkor csökkentsük a fentebb definiált ϵ_0-lal az $A_1 \cup A_2$-beli pontok súlyát, továbbá vegye át az így nyert fedő súlyrendszer f szerepét és térjünk vissza (2)-re.

(4) Ha A_1 nem üres, akkor csökkentsük ϵ_0-lal a $B_1 \cup B_3$-beli pontok súlyát és növeljük az A_3-beli pontok súlyát, továbbá vegye át az így nyert fedő súlyrendszer f szerepét és térjünk vissza (2)-re.

(5) Olvassuk le az eredményt: a kövér élek halmaza maximális értékű független élrendszert és f minimális fedő súlyrendszert szolgáltat G-ben.

A következő eljárást a fenti bizonyítás alapján fogalmazzuk meg.

3.2. Algoritmus. (**Magyar módszer**)Algoritmus a $G = G(A, B)$ páros gráfban maximális számú független él és minimális számú lefogó pont keresésére.

(1) Ha nincs G-ben AB él, akkor nincs sem kövér él, sem megjelölt pont és ugorjunk (5)-re. Válasszunk G-ben tetszőlegesen egy AB élt, legyen ez kövér.

(2) Jelöljük meg azokat az A-beli pontokat, amelyekhez nem illeszkednek kövér élek.

(3) Ha van olyan B-beli megjelölt r pont, amelyhez nem illeszkedik kövér él, akkor ugorjunk (4)-re.

Ha van eddig még ki nem választott $e = p, q$ él, amelynek a p végpontja megjelölt, a q végpontja nem megjelölt, továbbá $p \in A$ és e sovány, vagy $p \in B$ és e kövér, akkor válasszuk ki az e élt, jelöljük meg a q pontot és térjünk vissza a (3)-ra.

Ugorjunk (5)-re.

(4) Jelöljük meg azt az $f = \{s, r\}$ élt, amelynek kiválasztása révén r-et jelöljük meg és változtassuk ellenkezőjére f kövér illetve sovány jellegét.

Ha s-hez nem pontosan egy kövér él illeszkedik (vagyis 0 vagy 2), akkor vegye át s az r szerepét és térjünk vissza (4)-re.

Tekintsük a (2)-ben (3)-ban és (4)-ben megjelölt pontokat és kiválaszott éleket meg nem jelölteknek illetve ki nem választottaknak.

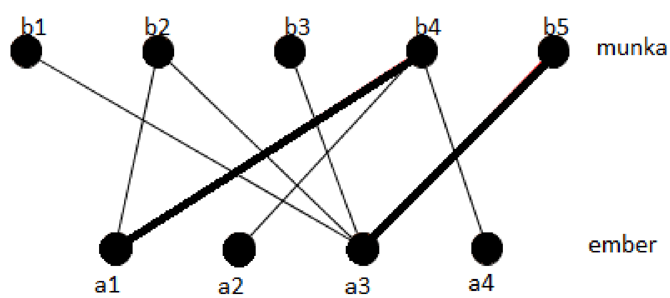
Térjünk vissza (2)-re.

(5) Olvassuk le az eredményt: a kövér élek maximális számú független élt szolgáltatnak, a kövér éleknek az A-beli meg nem jelölt és a B-beli megjelölt végpontjai pedig minimális számú lefogó pontot alkotnak.

3.3. Algoritmus. (**Optimális párbaállítás**) Tegyük fel, hogy egy vállalat n számú munka elvégzésére m számú emberrel rendelkezik. Egy munkát csak egy ember végezhet el, és egy ember csak egy munkát végezhet, továbbá nem mindenki alkalmas minden munkára. A feladat, minél több embert foglalkoztató tervet készíteni.

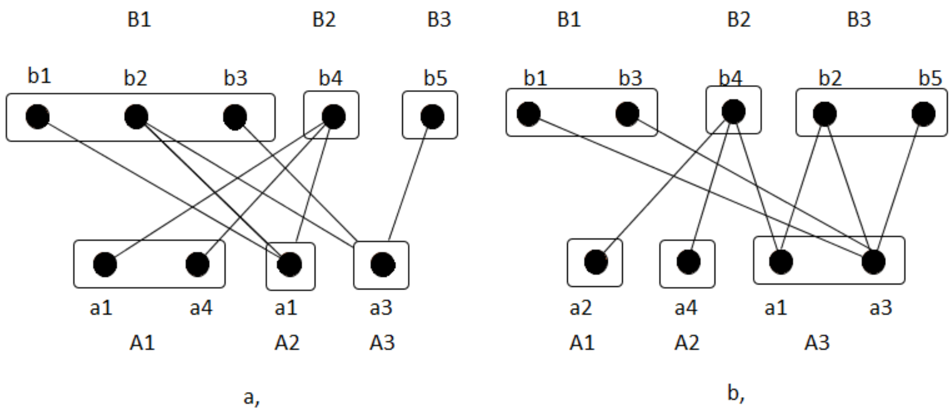
Rendeljük a problémához azt a $G(A, B)$ páros gráfot, amelynek A-beli pontjai az embereknek, B-beli pontjai pedig a munkáknak felelnek meg és egy-egy AB él jelentse azt, hogy az A-beli végpontjának megfelelő ember alkalmas a B-beli végpontjának megfelelő munkára.

Ezek után optimális tervet G egy maximális elemszámú független élhalmaza szolgáltat, amelyet kijelölhetünk az alternáló utak módszerének alkalmazásával.



3.5. ábra.

Példaként tekintsük a 3.5. ábrán vázolt esetet. A két vastag éllel már munkába is állítottuk az a_1 és a_3 pontoknak megfelelő embereket. Az alternáló utak módszerének alkalmazásával vizsgáljuk meg, optimális-e a sorbaállítás. A vizsgálat lépéseit a 3.6. ábra mutatja. Minthogy ebben találhatunk A_2B_1 élt, bővíthető a kövér élek halmaza. Cseréljük fel a vastag és a vékony éleket egymással az a_4b_2 alternáló úton. A csere utáni felosztást az 3.6.b ábra mutatja. Ekkor már nincs A_2B_1 él, tehát az itt látható 3 vastag él optimális foglalkoztatási tervet szolgáltat.



3.6. ábra.

3.4. Algoritmus. Optimális hatásfokú foglalkoztatás. Tartsuk meg az előző feladat feltételeit azzal a módosítással, hogy minden embernek minden munkában ismert a hatásfoka, amelyet nemnegatív egész számmal fejezünk ki. Ez lehet aktuálisan időegységenkénti munkaegység, termelt árucikk mennyisége, $100 - s$ (s a selejtszázalék). Ha valaki nem alkalmas egy munkaegség elvégzésére, akkor a hatásfokát 0-nak definiáljuk. A feladat olyan munkáltató terv elkészítése, amelynek alkalmazása révén a foglalkoztatottak összhatásfoka maximális.

A problémához most azt a $G(A, B)$ páros gráfot használjuk, amelyben minden AB él létezik és az AB élek értékei a hatásfokok. Optimális tervet olyan P permutáció szolgáltat, amelyre $c(P)$ maximális. Ilyen permutáció nyerhető a lentebb említett algoritmus révén. Ha $n < m$, akkor cseréljük fel A és B szerepét. Optimális tervben $m \leq n$ esetén minden ember foglalkoztatható és $n < m$ esetén minden munka elvégeztethető, az azonban előfordulhat, hogy némelyik munkavégzés 0 hatásfokkal történik - ez természetesen el is hagyható.

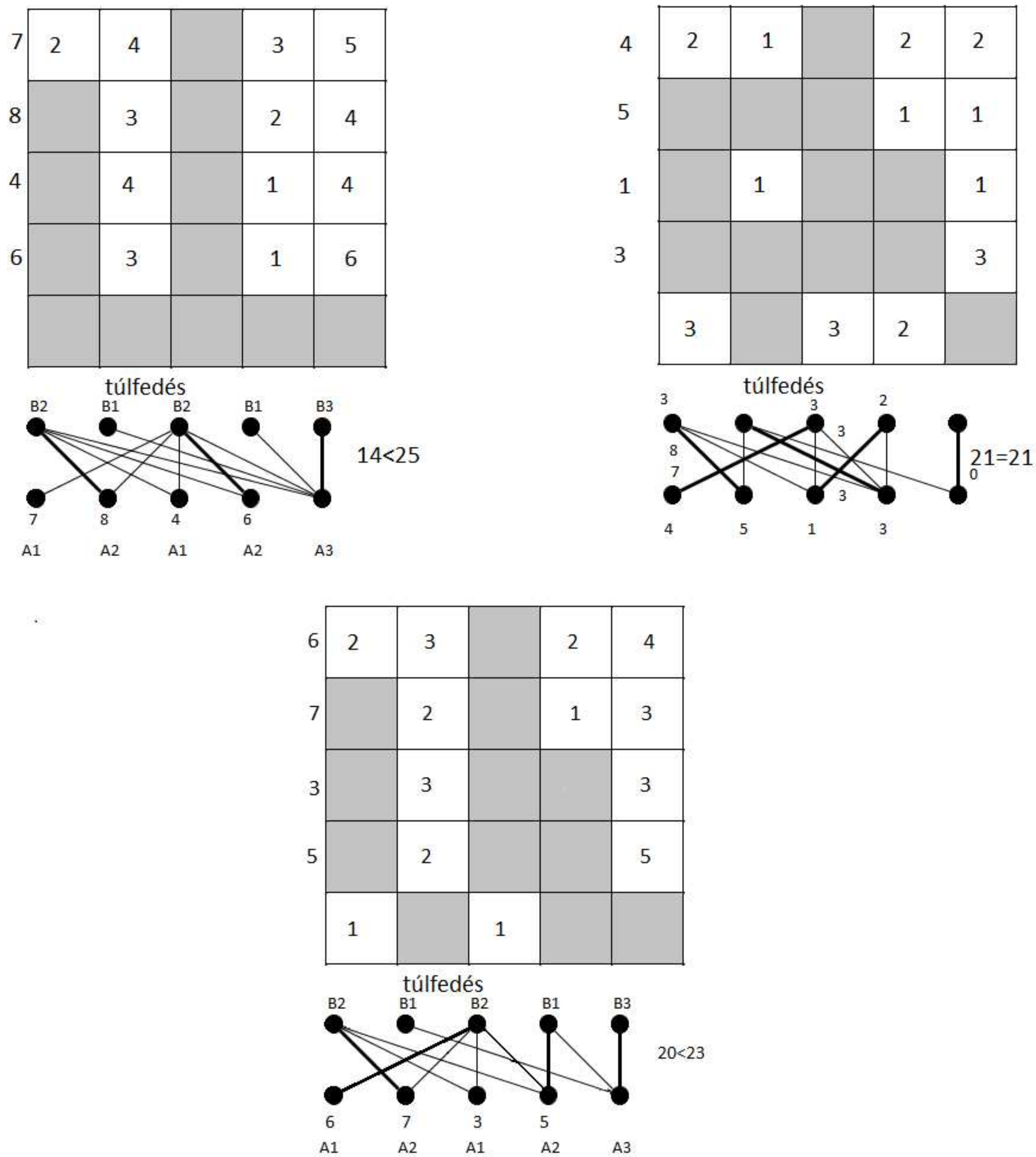
Az a probléma pedig, amely minimális súlyösszegű fedő súlyrendszer meghatározását kívánja, a következőképpen is értelmezhető. Maradjunk az iménti problémánál azzal a módosítással, hogy a hatásfok jelentése az egyes embereknek az egyes munkákban megszerezhető órabére legyen. Az a kérdés, hogy bizonyos időszakra a munkabérek kifizetése minimálisan mekkora összeget tároljon a vállalat, hogy bármilyen munkafolyamat esetén is ki tudja fizetni a béreket.

	b1	b2	b3	b4	b5
a1	5	3	7	4	2
a2	8	5	8	6	4
a3	4	0	4	3	0
a4	6	3	6	5	0

3.7. ábra.

A 3.7. abrán látható táblázat egy konkrét esetben a hatásfokokat tünteti fel. Keressünk optimális hatásfokú munkáltató tervet. Az egyszerűség és a fentebb említett algorimtus kedvéért vettünk mindenhová egész számokat. A táblázatot először egészítsük ki a kizárólag nullákat tartalmazó a_5 sorral kvadratikussá. A megoldás menetét a 3.8. ábra szemlélteti.

A pontokat az indexek növekvő sorrendjében vettük fel. A nem 0 sú-



3.8. ábra.

lyokat a pontokhoz, illetve a túlfedési táblázatok megfelelő sávjaihoz írtuk. A relációk bal oldalán a kövér élek hatásfoka, jobb oldalán pedig a súlyösszeg szerepel. Első lépésben az algoritmus (1) pontja szerint súlyoztunk. Majd a (2) szerint létrehoztuk a pontosan fedett élek által alkotott G_0 gráfot és ebben vastagítással kijelöltünk maximálisan sok független élt. Ezután (3) szerint $\epsilon_0 = 1$ választás mellett változtattunk súlyt, így kaptuk a második gráfot. Végül ismét (3) szerint $\epsilon_0 = 2$ választás mellett változtattunk súlyt, kaptuk a harmadik táblázatot és így (2) végrehajtása után már a megoldásra jutottunk, ami a harmadik gráfból kiolvasható.

4. fejezet

Párosítás tetszőleges gráfban

Páros gráfok esetén a Hall-feltétel elégséges teljes párosítás létezéséhez, ha $|A| = |B|$. Tutte (1947) olyan feltételt talált, amely szükséges és elégséges a teljes párosítás létezéséhez. Az itteni bizonyítást Lovász adta (1973).

A gráf komponense páros vagy páratlan aszerint, hogy páros vagy páratlan számú csúcsa van. Jelöljük $o(G)$-vel a G gráf páratlan (azaz páratlan sok pontot tartalmazó) komponenseinek számát.

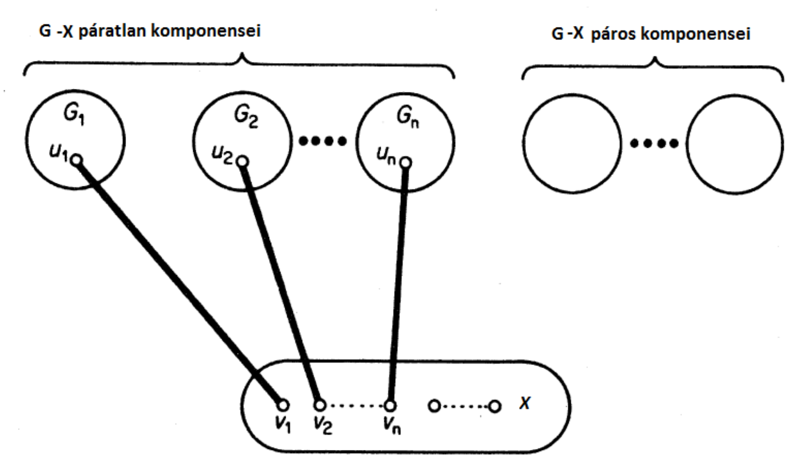
4.1. Tutte tétel

4.1. Tétel. Tutte. Egy G gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha minden $X \subset V$-re $o(G - X) \leq |X|$.

4.1. Bizonyítás. Egyértelmű, hogy a tételt elegendő egyszerű gráfokra bizonyítani.

Először tegyük fel, hogy G-ben van teljes párosítás, legyen ez M. Legyen X valódi részhalmaza V-nek és legyenek $G_1, G_2, G_3, ..., G_n$ a $G - X$ páratlan komponensei. Mivel G_i páratlan, néhány G_i-beli u_i csúcsból indul ki néhány párosításbeli él X_i-beli v_i pontokba.(4.1.ábra) Ezért mivel a $v_1, v_2, ..., v_n \subseteq X$

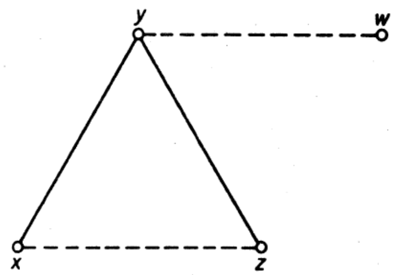
$$o(G - X) = n = |\{v_1, v_2, ..., v_n\}| \leq |X|$$



4.1. ábra.

A feltétel elégséges voltának bizonyítása már jóval bonyolultabb. Tegyük fel tehát, hogy G megfelelő, de nincs benne teljes párosítás. G^*-ot úgy definiáljuk, hogy addig húzunk be új élet, amíg nincs benne teljes párosítás, de bármely élet behúzva van benne teljes párosítás.Ekkor G feszítő részgráfja a teljes gráfnak G^*-nak és nincs benne teljes párosítás. Mivel $G - X$ feszítő részgráfja $G^* - X$-nek, $o(G^* - X) \leq o(G - X)$ és ezért minden $X \subset V(G^*)$-re (4.1. ábra)

$$o(G^* - X) \leq |X|$$

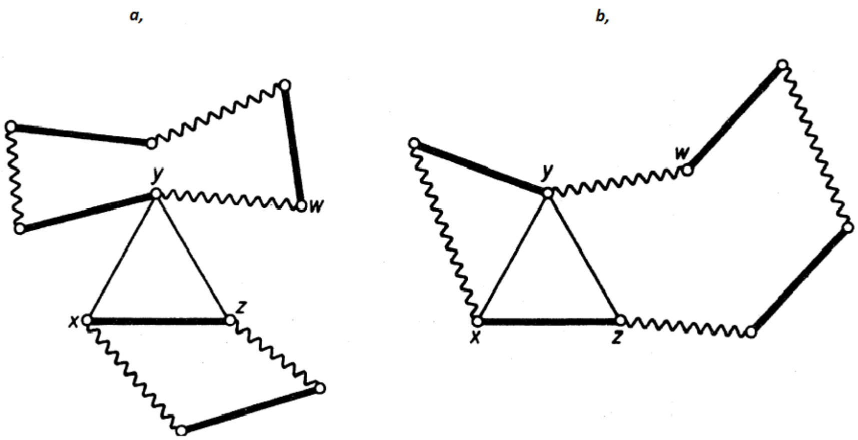


4.2. ábra.

Mivel G^*-ban nincs teljes párosítás, ezért $U \neq V$. Különösen $X = 0$ esetén látjuk, hogy $o(G^*) = 0$ és így $v(G^*)$ páros. Jelöljük U-val a $v-1$ fokú csúcsok halmazát G^*-ban. Meg akarjuk mutatni, hogy $G^* - U$ teljes gráfok diszjunkt uniója. Tegyük fel indirekt, hogy $G^* - U$ néhány komponense nem teljes gráf. A x, y és z csúcsok a következőkeppen vannak ebben a komponensben $xy \in E(G^*)$, $yz \in E(G^*)$ és $xz \notin E(G^*)$. Ráadásul mivel $y \notin U$, $G^* - U$-ban van egy w csúcs, úgy hogy $yw \notin E(G^*)$. Ez az eset a 4.2. ábrán látható.

G^* teljes gráf maximálisan olyan, hogy nem tartalmaz teljes párosítást, de bármely élt hozzávéve már tartalmaz teljes párosítást. Legyen M_1 és M_2 teljes párosítás a $G^* + xz$-ben és $G^* + yw$-ben, jelöljük H-val a $G^* \cup \{xz, yw\}$ gráfnak az M_1 M_2 által alkotott részgráfját és mivel minden csúcsnak kettő a foka, H körök diszjunkt uniója. Továbbá minden kör páros, mivel M_1 és M_2 élei felváltva vannak bennük. Két esetet különböztetünk meg:

(1) xz és yw H különböző komponensében vannak. Továbbá, ha yw a H C körében van, M_1 C-beli élei az M_2 nem C-beli éleivel alkotnának teljes párosítást, ami ellent mond G^* definíciójának.(4.3.a ábra)

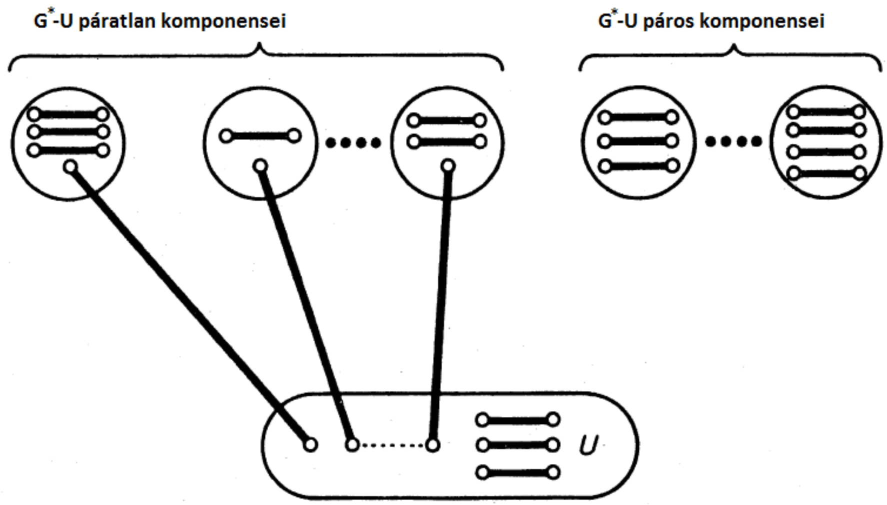


4.3. ábra.

(2) xz és yw most ugyanabban a H-beli C komponensben vannak. Az x z szimmetriája miatt feltehetjük, hogy az x, y, w és z csúcsok ebben a sorrendben fordulnak elő C-ben (4.3.b ábra). Ekkor M_1 élei az $yw...z$ részben az yz éllel és az M_2 nem $yw...z$-beli éleivel együtt teljes párosítást alkotnának G^*-ban, újra a G^* definíciójának ellentmondására jutottunk.

Mind az (1), mind a (2) esetben ellentmondásra jutottunk, amiből következik, hogy $G^* - U$ valóban diszjunkt unió a teljes gráfban. Most $o(G^* - U) \leq |U|$. Így legfeljebb $|U|$ darab komponens páratlan. De ekkor G^*-ben létezik teljes párosítás: minden $G^* - U$-beli páratlan komponens egy csúcsa párosítható egy U-beli csúccsal; a fennmaradó U-beli csúcsokat és a $G^* - U$-beli komponenseket a 4.4. ábra szerint tudjuk párosítani.

Mivel feltettük, hogy G^*-ben nincs teljes párosítás, így ellentmondásra jutottunk. Így G-ben valóban létezik teljes párosítás.



4.4. ábra.

A fenti tétel tartalmazza a Hall feltételt, bizonyítható a Hall-tétel felhasználásával is, de sok más bizonyítása is létezik.

4.2. Edmonds algoritmusa

Általános esetben javító út keresésére az Edmonds algoritmus alkalmazható.

4.1. Definíció. Tutte akadály. A gráf egy olyan ponthalmaza, amely elhagyása után keletkezett páratlan pontszámú komponensek száma több, mint az elhagyott pontok száma.

4.1. Algoritmus. Edmonds algoritmusa. Az algoritmus folyamán javító út kezdeményeket növelünk. Egy címkézési eljárás keretében a javító út kezdeménnyel elért csúcsoknak egy címkét adunk, amely az odavezető megtalált javító út kezdemény hosszának csupán a paritását tartalmazza (páros címke=külső pont, páratlan címke belső pont). Legyen B a páratlan címkét kapott csúcsok halmaza, belső pontok. Legyen K a páros címkét kapott csúcsok halmaza, külső pontok. Kiindulásként minden párosítatlan csúcs kap egy 0 (külső címkét). Ezek után címkézünk bővítéssel.

Címkézés bővítési lépés: Adott egy címkézés B és K címkékkel. Egy K címkéjű pontnak címkézetlen szomszédját B címkével látjuk el és ennek párosított szomszédját (ami létezik és címkézetlen) K címkével látjuk el.

A címkézés bővítési lépést addig végezzük el, amíg új címkét ki tudunk osztani.

A fenti címkézési eljárás egy kereső erdőt is definiál: Minden címke kiosztásánál egy mutatót vezetünk be, amely arra a csúcsra mutat, ami az így kapott mutatók egy erdő éleit alkotját, amely élhalmaza úgy van irányítva, hogy minden komponensben egy él kivételével minden él kifoka 1. Az egyetlen kivétel a komponensek egyetlen 0 címkéjű csúcsai. Tehát minden komponensben egyetlen párosítatlan csúcs lesz, a komponens egyetlen párosítatlan csúcsa. Ezt a komponens gyökerének nevezzük. A kapott erdő a kereső erdő. Ennek (a maximalitás elérése után) meg van az a tulajdonsága, hogy a külső pontok szomszédai közt nincsen címkézetlen csúcs.

Ezekután a külső pontok közötti éleket vizsgáljuk.

(1).eset: Létezik a kereső erdő két különböző komponensbeli csúcs közötti él. Ezen él mentén a keresés által megtalált két javító út kezdemény egy javító úttá olvasztható össze. A keresés sikeres.

(2).eset: Külső pontok között nincs él. Ekkor a belső pontok egy Tutte-akadályt adnak, amely bizonyítja, hogy aktuális párosításunk optimális, nincs javító út, a keresés sikertelen.

(3).eset: A külső pontok között van egy él, de egy kereső fán belül. Ez az e él egy kört definiál a fa éleivel. Ezen kör élhalmazát három részre bonthatjuk: az e él és két ív, amely az e él két végpontjából a kereső fa gyökerébe vezető két út összetalákozásáig vezető egy-egy szakasza. A két ív találkozási pontja egy külső pont. Ekkor ezen kör csúcsait egy ponttá tesszük össze úgy, hogy a köztük vezető élek eltűnnek.

Megjegyzés: Páros gráfok esetén ez az eset nem lehetséges.

Legyen $G^{'}$ az így kapott gráf. A G gráf élei közül néhány eltűnt és néhány megmaradt, mint a G' gráf élei. Ennek megfelelően beszélhetünk M'-ről az M párosítás megmaradt éleiről és F'-ről a kereső erdő megmaradt éleiről.

4.1. Lemma. (i) $M^{'}$ *egy párosítás* G'-*ben.*

(ii) F' egy kereső erdő M'-re nézve.

Az algoritmus ezek után a címkézés kiterjesztő lépéssel kezdve meghívja önmagát a $(G^{'}, M^{'}, F^{'})$ hármassal. A rekurzív algoritmus kimenete egy javító út egy (esetleg többszörösen) zsugorított gráfban vagy Tutte-akadály egy (esetleg többszörösen) zsugorított gráfban. A következő két lemma adja az Edmonds-algoritmus hiányzó lépéseit és a helyesség igazolását.

(1.)lemma: Ha a H többszörösen zsugorított gráfban van javító út, akkor G-ben is van és ez algoritmikusan megtalálható.

(2.)lemma: Ha H-ban egy többszörösen zsugorított gráfban a külső pontok Tutte-akadályt adnak, ami bizonyítja az aktuális párosítás optimalitását, akkor a külső pontok ősei az eredeti gráfban Tutte-akadályt adnak, amik M optimalitását igazolják.

5. fejezet

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Témavezetőmnek, Vesztergombi Katalinnak, hogy hasznos tanácsaival és ötleteivel hozzájárult a szakdolgozatom elkészítéséhez.

Végül szeretném megköszönni a támogatást, amelyet a családomtól és a barátaimtól kaptam.

Nyilatkozat

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Irodalomjegyzék

[1] Katona-Recski-Szabó: A számítástudomány alapjai, *Typotex*, Budapest 2002

[2] Lovász László - Pelikán József - Vesztergombi Katalin: Diszkrét matematika, *Typotex*, Budapest, 2006

[3] J.A. Bondy and U.S.R. Murty: Graph Theory with Applications, *American Elsevier*, New York, 1976

[4] Andrásfai Béla: Gráfelmélet, *Akadémiai Kiadó*, Budapest, 1983

[5] http://www.math.u-szeged.hu/ hajnal/courses/algraf00/edmonds.htm