Nevezetes számok a matematikában

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Németh Regina

Matematika BSc - elemző szakirány

Témavezető: Ágoston István, egyetemi docens
ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2013

„A legtöbb tudományban mindegyik generáció lerombolja azt,
amit elődei építettek. A matematika az egyetlen,
amelyben minden egyes generáció
új értelmet illeszt a régi struktúrához."
(H. Hankel)

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezető

Általános iskolában megismerkedtünk a természetes számokkal, felsőtagozatban már találkoztunk a racionális számokkal, a tizedestörtekkel és a gyökökkel. Középiskolában előkerültek a különlegesebb számokat mint, például a π és az e. Az egyetemen a különleges számok ismerete csak tovább bővült, például megismertük az imagionárius számot. Akkoriban nem is gondoltam, hogy az $e^{\pi \cdot i} = -1$-gyel, hiszen az e és a π nem egész számok. De, ha vesszük a (-1) és az i vagy az e és a $-\pi$ kombinációját, $(-1)^i = e^{-\pi} = 0,0432139\ldots$, akkor egy transzcendens számot kapunk.

A dolgozatomban bemutatom az első transzcendes számot, amely a Liouville-szám. Ez a szám segítségével sikerült bebizonyítani azt a sejtést, hogy az e transzcendens. Vannak olyan nevezetes konstansok, amelyekről még nem eldöntött, hogy transzcendens szám-e, ilyen például a Catalan-állandó, Brun konstans vagy a Feigenbaum állandó. A dolgozatom első részében bemutatom még a Catalan-állandót, az aranyarányt, a Brun konstanst és az Euler-Mascheroni konstanst.

A nevezetes számok körébe a sorozatok is beletaroznak. Így az egyik legismertebb sorozatot is prezentálni fogom, a Fibonacci-sorozatot tulajdonságaival és az általánosításával. Írok még a kombinatorikában az egyik legfontosabb sorozatról a Catalan-számokról, bemutatom pár tulajdonságát és két alkalmazását.

2. fejezet

Nevezetes konstansok

2.1. Liouville szám

2.2. Definíció. *Egy α komplex szám algebrai szám, ha létezik olyan nem nulla, racionális együtthatós polinom, amelynek az α gyöke.*

2.3. Definíció. *Egy komplex szám transzcendens, ha egyetlen racionális együtthatós polinomnak sem gyöke a nullpolinomon kívül, azaz nem algebrai szám.*

Egy konkrét számról általában nehéz eldönteni, hogy algebrai vagy transzcendes szám. Már Euler, Lambert és Legendre is felvetették, hogy a π nem algebrai. Ennek a transzcendenciájának bizonyításához az első lépést Joseph Liouville tette meg 1844-ben aki megmutatta, hogy a Liouville-konstans:

$$10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + 10^{-4!} + 10^{-5!} + ...$$

transzcendens. Sok évvel később 1873-ban sikerült bebizonyítania Charles Hermite-nek, hogy az Euler-féle szám, azaz az e szám transzcendens. Ennek a bizonyításnak az ismeretében 1882-ben Carl Louis Ferdinand von Lindemann az "Über die Zahl π" munkájában megmutatta, hogy a π szám transzcendens.

Az e és a π szám transzcendenciájának a bizonyítását vélhetően többen ismerik, mint az első transzcendens számét. Így a dolgozatomnak ebben a fejezetében a Liouville-konstans transzcendenciáját szeretném bemutatni. Ehhez előbb egy másik tételt kell először belátni, amely megmutatja, hogy az algebrai számok általában rosszul approximálhatóak.

2.4. Tétel. *Legyen α egy n-edfokú valós algebrai szám, ahol $n \geq 2$, ekkor létezik olyan $c=c(\alpha)>0$ valós konstans, hogy bármely $\frac{r}{s}$ racionális számra*

$$|\alpha - \frac{r}{s}| > \frac{c(\alpha)}{s^n}.$$

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy bármely c>0-hoz létezik olyan $\frac{r}{s}$, amelyre

$$|\alpha - \frac{r}{s}| < \frac{c}{s^n}$$

Ebben az esetben létezik a racionális számoknak olyan $\frac{r_i}{s_i}$ sorozata, hogy $(s_i > 0)$

$$(1) \qquad \lim_{i\to\infty} s_i^n \left(\alpha - \frac{r_i}{s_i}\right) = 0$$

Ez azt jelenti, hogy

$$(2) \qquad \lim_{i\to\infty} \left(\alpha - \frac{r_i}{s_i}\right) = 0, \text{ azaz } \lim_{i\to\infty} \frac{r_i}{s_i} = \alpha$$

Vegyük az α minimálpolinomját (jelölje m_α), melynek komplex gyökei $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$. Ekkor

$$m_\alpha = a_0 + a_1 x + ... + a_n x = a_n \prod_{j=2}^{n} (x - \alpha_j),$$

ahol $a_0, a_1, ..., a_n$ egészek és $a_n \neq 0$. Az m_α minimálpolinomnak nincs többszörös gyöke, mert irreducibilis a racionális számok felett. Ezért az α_j számok mind különbözőek.

A minimálpolinomba x helyére $\frac{r_i}{s_i}$-t helyettesítve, a következőt kapjuk:

$$a_0 + a_1 \left(\frac{r_i}{s_i}\right) + ... + a_n \left(\frac{r_i}{s_i}\right)^n = a_n \left(\frac{r_i}{s_i} - \alpha\right) \prod_{j=2}^{n} \left(\frac{r_i}{s_i} - \alpha_j\right)$$

A bal oldali kifejezés közösnevezője az s_i^n, ami nem lehet 0, mert a m_α-nak nincs racionális gyöke. Így a bal oldal abszolútértékét alulról tudjuk becsülni $\frac{1}{s_i^n}$-nel.

$$\frac{1}{s_i^n} \leq \left| s_i^n a_n \left(\alpha - \frac{r_i}{s_i}\right) \prod_{j=2}^{n} \left(\frac{r_i}{s_i} - \alpha_j\right) \frac{1}{s_i^n} \right|$$

s_i^n-nel beszorozva a következő becslést kapjuk:

$$1 \leq \left| s_i^n a_n \left(\alpha - \frac{r_i}{s_i}\right) \prod_{j=2}^{n} \left(\frac{r_i}{s_i} - \alpha_j\right) \right|$$

Az (1)-es (2)-esből a következő egyenlet adódik

$$\lim_{i\to\infty} \prod_{j=2}^{n} \left(\frac{r_i}{s_i} - \alpha_j\right) = \prod_{j=2}^{n} (\alpha - \alpha_j)\text{-vel.}$$

A bal oldalon álló határérték $i \to \infty$ esetén 0-hoz tart, ez azonban ellentmond a becslésnek.

$\square$

Ennek a tételnek a segítségével már könnyebben lehet transzcendens számot konstruálni, hiszen egy α valós szám, ha "nagyon jól" közelíthető, akkor transzcendens. Egy ilyen számot egy racionális számokból képzett végtelen sor összegeként kaphatunk meg. Ennek a sornak a részletösszegei gyorsan konvergálnak a végtelen sor összegéhez. Például Liouville-konstans is egy ilyen szám, amelyet a következőkben ismertetek és a transzcendenciáját is bebizonyítom.

2.5. Tétel. *A Liouville-konstans transzcendens, azaz*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = 0,110001000000000000000001...$$

szám transzcendens.

Megjegyzés

1. α valóban egy valós szám, ez legjobban a tizedestört alakjából látszik.
2. Ez a sor konvergens, hiszen a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 10^{-k}$ végtelen mértani sorral majorálható

Bizonyítás. Azt kell bizonyítani, hogy a Liouville-konstans részletösszegei "nagyon jól" approximálják α-t.

Első lépésként írjuk fel az m-edik részletösszeget $\frac{r_m}{s_m}$ alakban $(s_m > 0)$, ahol r_m és s_m relatív prímek, azaz $(r_m, s_m) = 1$. Közös nevezőre hozás után a következőt kapjuk:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{10A+1}{10^{m!}}$$

Ebből látszik, hogy az $s_m = 10^{m!}$-sal. Ekkor

$$0 < \alpha - \frac{r_m}{s_m} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} < \sum_{j=(m+1)!}^{\infty} \frac{1}{10^{j}} = \frac{10}{9 \cdot 10^{(m+1)!}} = \frac{10}{9 s_m^{m+1}}.$$

Vegyük a két oldal abszolútértékét, így a következőt kapjuk:

$$\left| \alpha - \frac{r_m}{s_m} \right| < \frac{10}{9 s_m^{m+1}} \tag{1}$$

A jobb oldal értéke pozitív az abszolútérték jel nélkül is, így elhagyható.

Indirekt tegyük fel, hogy valamely n-re α egy n-edfokú algebrai szám. Az α-nak a tizedestört alakjából látszik, hogy nem egy szakaszos tizedes tört, hanem egy irracionális szám, tehát n$\geq$ 2. Ekkor az előző tétel szerint létezik olyan $c(\alpha) > 0$, hogy bármely $\frac{r}{s}$ racionális számra

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| > \frac{c(\alpha)}{s^n}.$$

teljesül. Speciálisan az $\frac{r_m}{s_m}$ esetén:

$$\left|\alpha - \frac{r_m}{s_m}\right| > \frac{c(\alpha)}{s_m^n}.$$

Ezt az (1)-essel összevetve a következőket kapom:

$$\frac{c(\alpha)}{s_m^n} < \frac{10}{9s_m^{m+1}}, \text{ azaz } c(\alpha) < \frac{10}{9s_m^{n-m+1}}$$

Vegyük mint a két oldal határértékét végtelenben.

$$c(\alpha) = \lim_{m\to\infty} c(\alpha) < \lim_{m\to\infty} \frac{10}{9s_m^{n-m+1}} = 0,$$

ami ellentmondás, hiszen $c(\alpha) > 0$.

$\square$

2.6. Aranymetszés, avagy aranyarány

Az aranymetszés régóta ismert az emberiség számára. Felismerték, hogy egy szobor, épület vagy akár egy rajz esztétikai szépségét növeli, ha érvényesülnek rajta az aranymetszés arányai. Több neves művész vagy műalkotás épít az aranymetszés szabályaira, például a magyar Szent korona is eszerint készült vagy Dante Isteni színjátéka. Bizonyíthatóan az ókorban is ismerték, hiszen az i. e. 2600 körül épült Gízai Nagy-piramisban is megtalálható ez az arány. Mégpedig úgy, hogy a piramis alapélének a fele (kb 186,42 m) és az oldallapjainak a magassága (kb 115,18 m) úgy aránylik egymáshoz, mint az aranyarány.

Matematikailag a következőképpen közelíthetjük meg. Legyen adott egy távolság, melynek a kisebbik része **a** és a nagyobbik része **b**.

2.7. Definíció. *Ha kisebbik része (a) úgy aránylik a nagyobbik részhez (b), mint a nagyobbik rész a (b) az egészhez (a+b), azaz*

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$$

ezt az arányt aranyaránynak nevezzük.

2.8. Definíció. *Ha egy szakaszt egy S pont úgy oszt két részre, hogy a kisebbik szakasz úgy aránylik a nagyobbikhoz, mint a nagyobbik az egészhez, akkor az S az aranymetsző pontja.*

Teljesen nyílvánvaló, hogy két olyan pont létezik, amelyik az $\overline{AB}$ szakasznak az aranymetsző pontja lehet, mert az S pont lehet az A ponthoz vagy a B ponthoz közelebb. (Én a következőkben azt fogom használni, amikor az A-hoz van közelebb az S, tehát az $\overline{AS}$ szakasz a rövidebb.)

A következő pár sorban ismertetem, hogy lehet kiszámolni az aranymetszés pontos értékét.
Induljunk ki a definícióból:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$$

Ezt beszorozva b-vel és a+b-vel a következő egyenletet kapom:

$$a^2 + ab = b^2$$

Osztva a^2-tel és jobb oldalra rendezve:

$$0 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a} - 1$$

A továbbiakban jelölje $\varphi = \frac{b}{a}$.

Ezt beírva az egyenletbe az alábbi másodfokú egyenletet kapom:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Az egyenlet két megoldása:

$$\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887\text{... és } \varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618033988\text{...}$$

Az aranymetszést a pozitív gyökkel szokták jellemezni, tehát $\varphi = 1,61803$.

Az aranymetszés Euklidészi szerkesztése:

1. Vegyünk fel egy tetszőleges szakaszt, melynek egyik vége legyen A, a másik vége legyen B és a szakasz hosszát jelöljük b-vel, amely az aranymetszés szabályai szerint a nagyobbik rész.

2. A B végére állítsunk egy merőleges félegyenest a b-re, amelyre felmérjük a $\frac{b}{2}$ távolságot, ennek a metszési pontnak a neve legyen O.

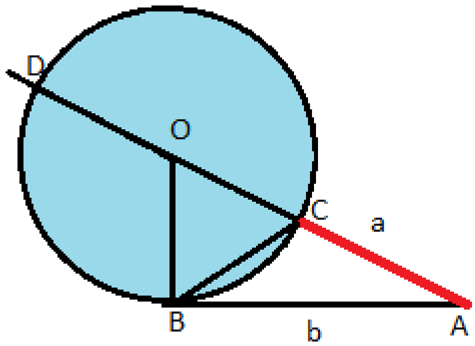
3. Szerkesszük meg az O középpontú $\overline{OB}$ sugarú kört.

4. Az A-ból húzzunk szelőt az O-n keresztül. Az A-hoz közelebbi metszéspont legyen C a távolabbi pedig D. Vegyük észre, hogy itt a $\overline{CD} = b$.

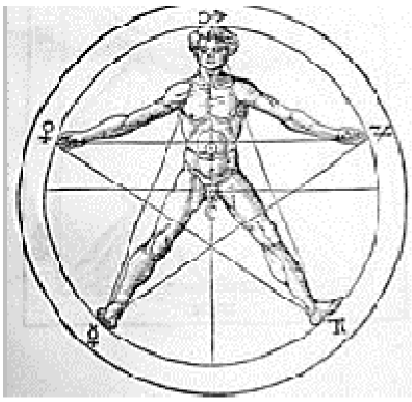
5. Az $\overline{AC} = a$ távolság lesz az arány kisebbik része, ugyanis a külső pontból húzott *érintő és szelőszakaszok tétele* alapján:

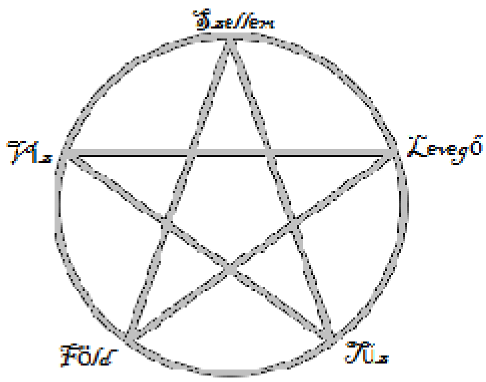
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$$

   Az alábbi kép ábrázolja az aranyarányt:



Az aranymetszés használatára példaként állíthatjuk a pentagrammát, amelyet az ókorban az eltérő népeknél eltérő jelentése volt, például Babilóniában az öt irányt jelképezte: elöl, hátul, balra, jobbra és fent. Ezeknek az irányoknak asztrológiai jelentést is tulajdonítottak, felülről kezdve az óramutatás irányában Mars, Jupiter, Szaturnusz, Merkúr és a Vénusz jelei vannak. A középkorban az öt őselemet jelölték vele a szellemet, levegőt, tüzet, vizet és a földet.





A dolgozatomban szeretném bemutatni a pentagramma szerkesztését, melyet az alábbiakban lépésenként ismertetek.

1. Először egy ötszöget kell szerkeszteni.

   (a) Vegyünk fel egy tetszőleges O pontot és húzzunk belőle egy tetszőleges r sugárú kört.

   (b) Jelöljük be egy tetszőleges A pontot a körvonalon, ez legyen az ötszög egy pontja.

   (c) Kössük össze az A pontot az O ponttal.

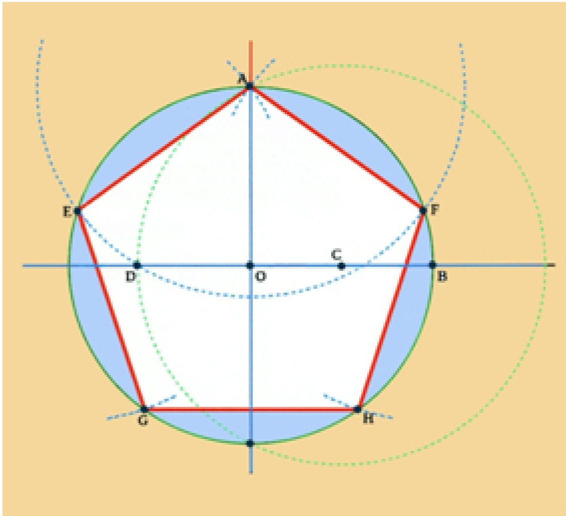
   (d) Állítsunk egy merőlegest az $\overline{AO}$ szakaszra, amely a B pontban fogja metszeni a körvonalat.

   (e) Az $\overline{OB}$ szakasz felezőpontja legyen C. A C pontból $\overline{AC}$ sugarral húzzunk egy kört, amely elmetszi az $\overline{OB}$ egyenest a D pontban.

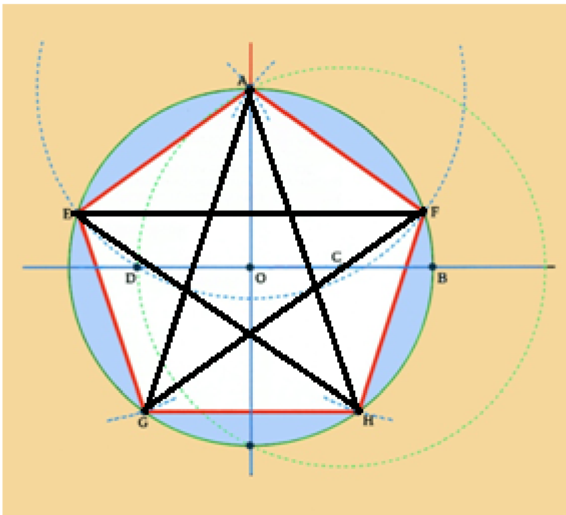
(f) Felvesszük az $\overline{AD}$ távolságot és körzőzünk vele A-ból, így keletkezik az E és az F metszéspont, amely az ötszögnek két pontja lesz.

(g) Körzőnyílásba vesszük az $\overline{AE}$ távolságot és elmetszük vele a kört az E pontból, így megkapjuk a G pontot. Ezt megismételjük az F pontból is és így kialakul az ötszög utolsó pontja is H.

(h) Az AFHGE pontokat összekötve egy szabályos ötszöget kapunk.

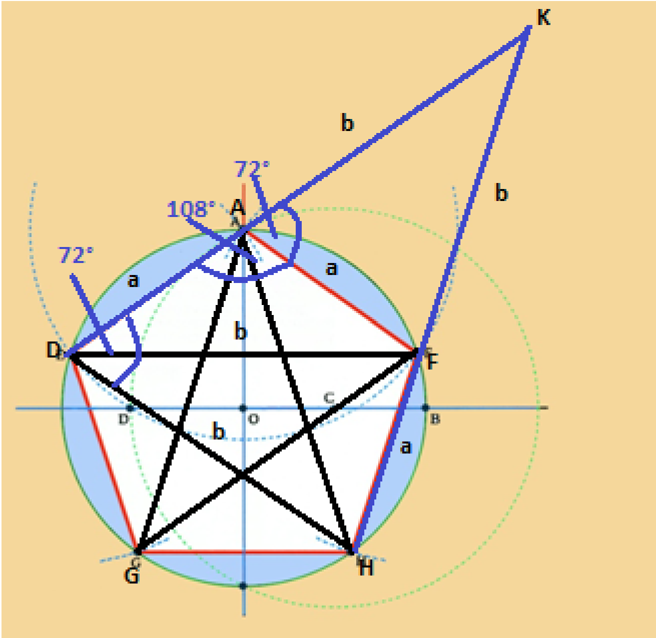


2. Miután megszerkesztettük az ötszöget már csak az átlóit kell behúzni és kész is a pentagramma.



A fenti a szerkesztést alátámasztja Hajós György: Bevezetés a geometriába 163-164. oldala.

Joggal kérdezhetnénk, hogy a pentagrammban hol jelenik meg az aranymetszés. Tekintsük az ABHE húrnégyszöget, jelölje az oldalakat a és az átlókat b. Ekkor megfigyelhető, hogy ez egy húrtrapéz, amely kiegészíthető egy háromszöggé. Legyen a háromszög csúcsa K.



A DAF és a HFA az ötszögnek egy-egy szöge, amelyekről tudjuk, hogy 108 fokosak. A KAF szög éppen a DAF kiegészítő szöge, így ez 72 fokos. A HFA kiegészítő szöge az AFK szög. Tehát az AFK háromszög egy egyenlő szárú háromszög, amelynek a harmadik szöge 36 fokos. Megfigyelhető, hogy az AHD háromszög hasonló az AKF háromszöghöz. Ezért az AKF oldalai pontosan b-k lesznek. Ekkor a párhuzamos szelők tétele alapján, az AF úgy aránylik a DH-hoz, mint az AK, a DK-hoz, azaz:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$$

2.9. Egyéb érdekes matematikai konstansok

1. **Euler-Mascheroni konstans.**

A harmadik legfontosabb szám az Euler-Mascheroni konstans, melyet néha csak Euler számnak nevezünk. Eldöntetlen kérdés, hogy algebrai szám vagy transzcendens, ráadásul azt sem tudjuk bizonyítani, hogy racionális vagy irracionális szám-e.

2.10. Tétel. $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log(n)\right)$ *határérték létezik és véges.*

Bizonyítás. Alakítsuk át a szummás kifejezést

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-log(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\int_{1}^{n}\frac{1}{x}dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)dx+\frac{1}{n}$$

Észrevehető, hogy ha $k\le x\le k+1$ teljesül, akkor az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$0\le\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\le\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}<\frac{1}{k^2}$$

Tehát

$$\left|\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{k^2}$$

$\forall k\le x\le k+1$, ekkor

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log(n)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\frac{1}{n}$$

ahol $|a_k|<\frac{1}{k^2}$. Mivel a $\sum\frac{1}{k^2}$ konvergens és $\frac{1}{n}\to 0$, ha $n\to\infty$, ezért a $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-log(n)$ határértéke létezik és véges.

□

2.11. Definíció. *Az Euler-Mascheroni konstans:*

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log(n)\right)=\int_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right)dx\approx 0.57721566490153286.$$

Megjegyzés. A bizonyításból nyilvánvaló, hogy $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log(n)\right)$ és $\int_1^\infty\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right)dx$ egyenlő.

Számos helyen előfordul az Euler-Mascheroni konstans, például

- A számelméletben felírható a prímszámok sorozata:
$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\log(n)-\sum_{p\leq n}\frac{\log(p)}{p-1}\right),\text{ ahol p prím.}$$
- A számelméletben egy fontos konstans az e^γ. A következő sorozattal írható fel:
$$e^\gamma=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log(p_n)}\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_i-1},\text{ ahol } p_n \text{ az n-edik prímszám.}$$
- A válószínűségszámításban a kupongyűjtő problémánál merül fel. Röviden ismertetem a problémát. Tegyük fel, hogy n darab kuponból véletlenszerűen visszatevéssel húzunk. Mennyi a várható értéke annak, hogy megszerezzük mind az n kupont? Legyen t_i az i-edik kupon megszerzésének az ideje, miután már megszereztük az (i-1)-ediket, ennek a várható értéke $E(t_i)$, és legyen T az az idő, amennyi ahhoz kell, hogy minden kupont kihúzzunk egyszer, ennek a várható értéke $E(T)$. Ekkor világos, hogy
$$\begin{aligned}E(T) &= E(t_1)+E(t_2)+E(t_3)+\cdots+E(t_n)=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}\\ &= \frac{n}{n}+\frac{n}{n-1}+\cdots+\frac{n}{1}=n\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=n\cdot H_n\end{aligned}$$
A H_n jelölje a harmonikus sort. Használjuk az asszimptotikus becslést
$$E(T)=n\cdot H_n=n\log(n)+\gamma n+\frac{1}{2}+o(1), n\to\infty$$

2. **Catalan-állandó.**

Eugéne Charles Catalan belga matematikusról kapta a nevet ez az állandó, amely leggyakrabban a kombinatorikai becslésekben fordul elő. Jelenleg 31 026 000 000 2009 tizedesjegye ismert, amelyet április 16-án Alexander J. Yee és Raymond Chan tették közzé. Még nem sikerült bizonyítani, hogy algebrai szám vagy transzcendes, sőt azt sem tudjuk, hogy irracionális-e.

2.12. Tétel. *A* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ *konvergens.*

Bizonyítás. A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ egy Leibniz-sor, mert

(a) váltakozó előjelű,

(b) tagjai nullsorozatot alkotnak: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 0$

(c) a sorozat tagjai abszolút értékben mononton csökkenő: $1; \frac{1}{9} \approx 0,111; \frac{1}{25} = 0,04; \frac{1}{49} \approx 0,0204\ldots$

Tehát a fenti sor Leibniz-sor, így konvergens. $\square$

2.13. Definíció. *Catalan-állandó:*

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots \approx 0,9159655911177\ldots$$

Integrálok, melyeknek az értéke éppen a Catalan-állandó:

(a) $G = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2} dxdy$

(b) $G = -\int_0^1 \frac{ln(t)}{1+t^2} dt$

(c) $G = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{sin(t)cos(t)} dt$

(d) $G = \int_0^{\infty} arctan(e^{-t}) dt$

3. **Brun-konstans.**

A számelméletben ez a konstans nagyon fontos, hiszen megoldhatna egy nevezetes problémát, az ikerprím-sejtést. Ez a sejtés az, hogy végtelen sok olyan p prím van, amire p+2 is prím, például 3,5; 5,7; 17,19. Az ilyen prímpárokat, melyeknek a különbsége 2, ikerprímeknek nevezzük.

2.14. Tétel. *Brun-tétele:* $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right) + \ldots$ *véges értékhez konvergál.*

2.15. Definíció. *Brun-konstans:*

$$B_2 = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right) + \cdots \approx 1,902160583104$$

Ha bebizonyítanánk, hogy a Brun-konstans irracionális, akkor abból azonnal következne, hogy az ikerprím-sejtés igaz volna. Viszont, ha a racionalitását sikerülne bebizonyítani az nem igazolná és nem is cáfolná ezt a kérdést.

3. fejezet

Nevezetes sorozatok

3.1. Fibonacci számok

Az egyik legismertebb rekurzív összefüggés Leonardo Fibonacci nevéhez fűződik, amelyet 1202-ben megjelent Liber Abaci című könyvében fogalmazott meg:

Egy nyúlpárnak havonta egyszer születik kölyke, egy hím és egy nőstény. A kölyköknek születésük után két hónap múlva lesz először kölykük. Feltételezzük, hogy a nyúlpárok örökké élnek és minden termékeny nyúlpár minden hónapban szül egy újabb nyúlpárt. Hány pár nyúl lesz n hónap múlva?

Kis n-ekre könnyen ki lehet számolni, csak figyelni kell, hogy éppen hány nyúlpár válik ivaréretté. Az első hónapban 1 pár nyulunk van és ez a helyezet a második hónapban sem fog változni. A harmadik hónapban viszont már 2 nyúlpárunk van, hiszen az első nyúlpárunk ivarérett lett. A negyedik hónapban már 3 nyúlpárnk van és az ötödik hónapban a harmadik hónapban született nyúlpár is ivarérett lett, így 5 nyúlpárt számolhatunk és így tovább. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a nulladik hónapban lévő nyúlpárok száma 0. Így a következő sorozatot kapjuk:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$$

Ha jobban megnézzük ezt a sorozatot, akkor látható, hogy a következő számot úgy kaphatjuk meg, hogy az előző kettőt összeadjuk. Más szavakkal az (n+1)-edik havi nyúlpárok számát úgy kaphatjuk meg, hogy az n-edik hónapban meglévő nyúlpárok számát és az újszületteket számát összeadjuk. Az újszülöttek száma éppen az (n-1)-edik hónapban lévő nyúlpárok számával egyenlő, ugyanis pontosan azok és csak azok fognak az (n+1)-edik hónapban szülni, amelyek az (n-1)-edik hónapban már megvoltak. Jelöljük F_n-el az n-edik hónapban lévő nyúlpárok számát. Így a következő definíciót írhatjuk fel:

3.2. Definíció. *Fibonacci számok:*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ és } F_0 = 0, F_1 = 1.$$

A képlet alapján már nagyobb n-re is könnyen kiszámíthatóak lesznek a sorozat tagjai. Viszont ezzel a képlettel ki kell számolni n előtt az összes tagot mire megkapjuk a kivánt számot. Vajon létezik-e olyan képlet, amellyel csupán n ismeretében ki tudjuk számolni azt a tagot. A kérdésre a választ az alábbi tétel adja meg.

3.3. Tétel. *A Fibonacci-számokra fennáll az alábbi azonosság:*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Erre a tételre három különböző bizonyítást szeretnék adni, az első egy egyszerű teljes indukciós bizonyítás, a második egy mértani sorozatos és a harmadik bizonyítás generátorfüggvényes. Ez is azt mutatja, hogy milyen sokan foglalkoztak a Fibonacci-számokkal.

1. Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítsuk.
n=0-ra

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (1-1) = 0$$

n=1-re

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} \right) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{2} = 1$$

Tehát n=0-ra és n=1-re igaz. Az F_{n-1}-re és az F_{n-2}-re igaz a képlet. A rekurzióból az $n \geq 2$-ra a következő adódik:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} \right) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \qquad (*)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.$$

A (*) egyenlőség az alábbiak miatt igaz:

1. $$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}$$

2. $$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}$$

Ezzel beláttuk a tételt.

□

2. Bizonyítás. Induljunk ki az n+2-dik tag definíciójából.

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

Tegyük fel, hogy az $f_n = r^n$-el. Helyettesítsünk be az egyenletbe, és határozzuk meg a megoldásokat.

$$r^{n+2} = r^{n+1} + r^n$$

Átrendezés és r^n-nel való egyszerűsítés után a következő egyenletet kapjuk:

$$r^2 - r - 1 = 0$$

Másodfokú megoldóképlettel megoldjuk és az alábbi két megoldást kapjuk:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\ r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Az $r_1^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $r_2^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ megoldásoknak a lineáris kombinációja is megoldása az egyenletnek. Keressük F_n-t ilyen alakban: $(F_n) = a \cdot (r_1^n) + b \cdot (r_2^n)$. A kezdeti feltételekből $F_0 = 0$-ból és $F_1 = 1$-ből meghatározhatjuk az a-t és a b-t. Tehát

$$\begin{aligned}
&\textbf{I.} \quad F_0 = 0 = a + b \\
&\textbf{II.} \quad F_1 = 1 = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Az **I.** és a **II.** egyenletből azt kapjuk, hogy:

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}},\ b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ezt visszahelyettesítve az $F_n = a \cdot r_1^n + b \cdot r_2^n$-be, éppen a tételt kapjuk meg.

□

3. Bizonyítás. Tekintsük a $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$ hatványsort. A Fibonacci-sorozat definíciójából könnyen adódik teljes indukcióval, hogy $F_n < 2^n$, emiatt az $F(x)$ hatványsor abszolút konvergens $|x| < \frac{1}{2}$-re.

Ekkor

$$\begin{aligned}
F(x) &= F_0 + F_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} F_k x^k = \\
&= x + \sum_{k=2}^{\infty} (F_{k-1} x^k + F_{k-2} x^k) = \\
&= x + x \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1} x^{k-1} + x^2 \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-2} x^{k-2} = \\
&= x(F(x) + 1) + x^2 F(x) = x + (x + x^2) F(x)
\end{aligned}$$

Ebből az alábbi egyenletet tudjuk felírni F(x)-re

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Az $1 - x - x^2$ polinomot alakítsuk át szorzattá, így a következőt kapjuk:

$$F(x) = \frac{x}{(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x)(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x)}$$

Parciális törtekre bontjuk:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x} =$$

Az $(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x)^{-1}$ függvény sorba fejtése után:

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n x^n \quad - \quad \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n x^n\Big]$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n \quad - \quad \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big]x^n.$$

Tehát x^n együtthatójára a tételben megadott értéket kapjuk.

□

A Fibonacci-sorozat tulajdonságai.

A Fibonacci-sorozatnak rengeteg tulajdonsága van, így csak néhány érdekesebb tulajdonságot szeretnék kiemelni.

1. A Fibonacci-sorozat egymást követő tagjainak a hányadosából kapott sorozat határértéke pontosan az aranymetszéshez $\varphi \approx 1,618033988\ldots$-hez tart.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\varphi$$

Bizonyítás.

$$x=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_n+F_{n-1}}{F_n}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n}=1+\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}}=1+\frac{1}{x},$$

azaz $x^2=x+1$, amelynek a gyökei φ és $1-\varphi$.

□

2. A sorozat n-edik tagja eggyel nagyobb, mint az első n-2 tag összege, azaz

$$F_n=1+\sum_{i=1}^{n-2}F_i.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a rekurzív definíciót többször egymás után:

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}=F_{n-2}+F_{n-3}+F_{n-2}=F_{n-3}+F_{n-4}+F_{n-3}+F_{n-2}=$$
$$\cdots=F_{n-(n-2)}+F_{n-(n-1)}+F_{n-(n-2)}+F_{n-(n-3)}+\cdots+F_{n-3}+F_{n-2}$$

Amit egyszerűbben így írhatjuk fel:

$$F_n=F_2+F_1+F_2+F_3+F_4+\cdots+F_{n-3}+F_{n-2}$$

Mivel a jobb oldali összeg első tagja $F_2 = 1$, ezért

$$F_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-2} F_i.$$

Ezzel bebizonyítottuk ezt a tulajdonságok.

□

3. Az első n tag négyzetösszege egyenlő az n-dik és (n+1)-dik tag szorzatával, azaz:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

Bizonyítás. Ennek a tulajdonságnak a bizonyításához a sorozat definíciójából induljunk ki.

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Amit rendezzük úgy, hogy a bal oldalon F_n álljon

$$F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$$

Ezt az egyenlőséget szorozzuk fel F_n-el, így az alábbi egyenlőséget kapom:

$$F_n^2 = F_n(F_{n+1} - F_{n-1})$$

Most alkalmazzuk egymás után ezt a rekurziós feltevést:

$$F_1^2+F_2^2+F_3^2+\cdots+F_n^2 = F_1^2+F_2(F_3-F_1)+F_3(F_4-F_2)+\cdots+F_n(F_{n+1}-F_{n-1}) =$$
$$F_1^2 + F_2F_3 - F_2F_1 + F_3F_4 - F_3F_2 + F_4F_5 - F_3F_4 + \cdots + F_nF_{n+1} - F_nF_{n-1}.$$

Ha jobban megnézzük ezt az egyenlőséget, akkor látjuk, hogy sok tag kiesik és csak az első, harmadik és az utolsó előtti tag marad meg, így ezt kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_1^2 - F_2F_1 + F_nF_{n+1} = 1 - 1 + F_nF_{n+1} = F_nF_{n+1}$$

Ezzel beláttuk ezt a tulajdonságot.

□

Általánosított Fibonacci-sorozat

A Fibonacci-sorozat általánosabb formájában adott egy olyan g sorozat, amely a $g_{n+2} = g_n + g_{n+1}$ rekurzív képletet kielégíti. Nyílvánvalóan minden ilyen sorozat átírható olyan alakra, hogy $g_n = aF_n + bF_{n+1}$.

1. **Lucas-számok**

   A Fibonacci-típusú sorozatok előállításának egyik módja, amikor a rekurzivitási tulajdonságot változatlanul hagyva, az első két elem értékét változtatjuk meg. A Lucas-számok is ilyen típusú számok.

   3.4. Definíció. *Lucas számok:*

   $$L_0 = 2,\ L_1 = 1 \text{ és } L_{n+2} = L_n + L_{n+1},\ ha\ n{>}2.$$

   Néhány összefüggés a Fibonacci és a Lucas számok között:

   (a) $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$

   Bizonyítás. Teljes indukcióval fogom bizonyítani.
   Ellenőrizzük az állítást, hogy $n = 1$-re igaz-e.

   $$L_1 = 1 = F_0 + F_2 = 0 + 1\surd$$

   Tegyük fel, hogy k-ig igaz az állítás. Ekkor be kell látni, hogy k+1-re is igaz is.

   $$\begin{aligned} L_{k+1} &= L_{k-1} + L_k \\ &= F_{k-2} + F_k + F_{k-1} + F_{k+1} \\ &= (F_{k-2} + F_{k-1}) + (F_k + F_{k+1}) \\ &= F_k + F_{k+2} \end{aligned}$$

   Ezzel beláttuk az állítást.

   □

   (b) $F_n = \frac{1}{5}(L_{n-1} + L_{n+1})$

   Bizonyítás. Teljes indukcióval fogom bizonyítani. Ellenőrizzük az állítást n=1-re.

   $$F_1 = 1 = \frac{1}{5}(L_0 + L_2) = \frac{1}{5}(2 + 3) = 1.\surd$$

Tegyük fel, hogy az állítás k-ig igaz. Ekkor be kell látni k+1-re is.

$$\begin{aligned}
F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} \\
&= \frac{1}{5}(L_{k-1} + L_{k+1}) + \frac{1}{5}(L_{k-2} + L_k) \\
&= \frac{1}{5}(L_{k-1} + L_{k-2} + L_{k+1} + L_k) \\
&= \frac{1}{5}(L_k + L_{k+2})
\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk ezt az állítást.

□

A következő tulajdonságokat érdekességként, bizonyítás nélkül írom le:

(c) $F_{n+1} = \frac{1}{2}(F_n + L_n)$

(d) $F_{2n} = F_n L_n$

(e) $F_{m+n} = \frac{1}{2}(F_m L_n + F_n L_m)$

(f) $F_{m-n} = \frac{1}{2}(-1)^n (F_m L_n - F_n L_m)$

2. **Polibonacci-számok** Hasonlóan számoljuk a Fibonacci számokhoz, csak kettő helyett három, négy vagy több elemet adunk össze. Amikor három elemet adunk össze, azt tribonacci-számoknak nevezzük és a tagjai 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, ...

3.5. Definíció. *k-ad rendű Fibonacci-sorozatnak nevezzük az $F_0^{(k)} = F_1^{(k)} = \cdots = F_{k-1}^{(k)}$ kezdőértékkel az alábbi sorozatot.*

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + F_{n-2}^{(k)} + \cdots + F_{n-k}^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} F_{n-i}^{(k)},\ \textit{ahol}\ (n \geq k)$$

3.6. Catalan-számok

A leggyakrabban úgy szokták bevezetni a Catalan számokat, hogy hányféleképpen zárójelezhető egy (n+1) tényezős szorzat (n-1) zárójelpár felhasználásával. Jelöljük ezeket a számokat C_n-nel. Nézzünk rá pár példát, hogy mit is jelent ez tulajdonképpen.

Legyen n=1, ezt egyféleképpen lehet zárójelezni $(a \cdot b)$. Legyen $n = 2$ ekkor két lehetőség van $(a \cdot b) \cdot c$ és $a \cdot (b \cdot c)$, azaz $C_2 = 2$. Ha n=3, akkor $((a \cdot b) \cdot c) \cdot d$, $(a \cdot (b \cdot c)) \cdot d$, $a \cdot ((b \cdot c) \cdot d)$, $a \cdot (b \cdot (c \cdot d))$ és $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d)$, azaz $C_3 = 5$.
Így a Catalan számok sorozata a következő: $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, C_6 = 132, ...$

3.7. Tétel. *$C_1 = 1$ és $n \geq 2$ egész szám, akkor*

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$$

Bizonyítás. Megfigyelhető, hogy egy szorzásjel mindig a zárójelen kívül esik. Ha ez a szorzásjel a k-adik és a (k+1)-dik tag közé esik, akkor az előtte lévő változók pontosan C_k-féleképpen zárójelezhetőek még az utána lévő (n-k) tag pedig C_{n-k-1}-féleképpen. Így a lehetőségek száma k-ra összegezve $\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$

□

3.8. Tétel. *A Catalan számokat a következőképpen írhatjuk fel:*

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Bizonyítás. Legyen a $c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$.

Ezt a kifejezést négyzetre emelve $(c(x))^2 = C_1 C_1 x^2 + (C_2 C_1 + C_1 C_2) x^3 + ... = c(x) - x$. Ebből $c(x)$-et kifejezve, figyelembe véve, hogy $c(x)$-ben konstans tag nem szerepel.

$$c(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

Newton általánosított binomiális tétele alapján felírható, hogy

$$\sqrt{1 - 4x} = (1 - 4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4x)^k$$

Ezt visszahelyettesítve $c(x)$-be:

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{1}{2x}\left[1-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-4x)^k\right] \\ &= -\frac{1}{2x}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-4)^k(x)^k \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-4)^k(x)^{k-1} \end{aligned}$$

Az $n = k - 1$ helyettesítéssel az alábbi képletet kapjuk $c(x)$-re:

$$c(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4)^n x^n$$

Alakítsuk át a binomiális együtthatót

$$\binom{\frac{1}{2}}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right) = (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}$$

Ahhoz, hogy a számlálóban $(2n)!$ állhasson, ahhoz el kell osztani $2\cdot 4\ldots(2n)$-el, mert így nem változtatunk a tört értékén.

$$(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{n+1}(n+1)!\cdot 2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)} =$$

Emeljük ki a $2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots 2n$ mindegyik tagjából a 2-t.

$$(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{n+1}(n+1)!2^n(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n)} = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n+1)!n!} =$$

Alakítsuk szorzattá a törtet és az $(n+1)!$ helyett írjunk $(n+1)*n!$-t

$$(-1)^n\frac{1}{2^{2n+1}(n+1)}\frac{2n!}{n!\cdot n!}$$

Ebből az alábbi egyenlőség adódik:

$$\binom{\frac{1}{2}}{n+1} = \frac{1}{2\cdot(-4)^n(n+1)}\binom{2n}{n}$$

Ezt visszahelyettesítve $c(x)$-be

$$c(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\cdot(-4)^n(n+1)}\binom{2n}{n}(-4)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$$

Tehát az x^n-nek az együtthatója pontosan a C_n képlete.

□

Tulajdonságok.

1. **Állítás.** C_n kiszámításának alternatív módja:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, \text{ ahol } n \geq 1.$$

Bizonyítás. A binomiális eggyüttható faktorizációs alakjából induljunk ki.

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)! \cdot (n+1)!}$$

Hozzuk közös nevezőre és emeljük ki a számlálóban a (2n)!.

$$\frac{(n+1)\cdot(2n)! - n\cdot(2n)!}{n! \cdot (n+1)!} = \frac{(n+1-n)\cdot(2n)!}{(n+1)\cdot n! \cdot n!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Ez a definíció alapján éppen a C_n.

□

2. **Állítás.** Felírható a következő rekurzív sorozattal: $C_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$

Bizonyítás. A bizonyítást két részre fogom bontani, az első részben bebizonyítom a Vandermonde-azonosságot, a második részben pedig megmutatom, hogy következik belőle az állítás.

(a) **Vandermonde-azonosság.** $0 \leq r$, $r \leq m$ és $r \leq n$

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{r-2} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}.$$

Vandermonde-azonosság bizonyítása. Vegyünk egy A és egy B halmazt, amelyeknek az elemszáma m és n. Legyen az $A \cap B = \emptyset$. Számoljuk meg, hogy hány r elemű részhalmaza van $A \cup B$-nek? Egyrészt az $A \cup B$ elemszáma $m+n$, melyből kiválasztunk r elemű részhalmazt, ami $\binom{m+n}{r}$. Másrészt, minden r elemű részhalmazt megkapunk úgy, hogy vegyük az A-nak az összes lehetséges módon a k elemű részhalmazát, B-nek egy r-k elemű részhalmazát és képezzük ezek unióját, ahol $0 \leq k \leq r$. A lehetőségek száma éppen a bal oldali összeg.

(b) A Vandermonde-azonosságban legyen m=n, r=n és használjuk a binomiális együtthatók szimmetria-tulajdonságát($\binom{n}{k} = \binom{m-k}{n}$).

Így azt kaptuk, hogy $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Ezzel a helyettesítéssel $C_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

$\square$

3. **Állítás.** A Catalan-számok egy kiszámítási módja:

$$C_0 = 1 \text{ és } C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n.$$

Bizonyítás. Induljunk ki a Catalan-számok definíciójából.

$$C_{n+1} = \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{1}{n+2}\frac{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!}{(n+1)\cdot n!\cdot(n+1)\cdot n!}$$

Egyszerűtítés után már könnyen látható, hogy az állítás igaz.

$$C_{n+1} = \frac{1}{n+2}\frac{2\cdot(2n+1)\cdot(2n)!}{(n+1)\cdot n!\cdot n!} = \frac{2\cdot(2n+1)}{n+2}\frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = \frac{2(2n+1)}{n+2}C_n.$$

$\square$

4. Azok a Catalan-számok páratlanok, ahol igaz, hogy $n = 2^k - 1$, a többi páros.

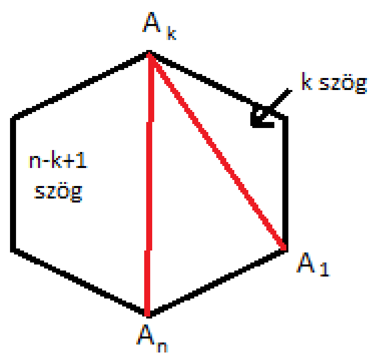
5. A Catalan-számoknak egy integrálos reprezentációja:

$$C_n = \int_0^4 x^n \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4-x}{x}}dx.$$

A Catalan számokat leginkább a kombinatorikában használják. Az alábbi feladatokban megmutatom két lehetséges felhasználását.

1.Feladat. Egy n oldalú konvex sokszöget, hányféleképpen lehet felbontani háromszögekre az átlóival úgy, hogy az átlók nem metszik egymást?

Megoldás. A keresett számot jelölje E_n és megállapodás szerint az E_2 legyen 1. A háromszögnek nincs átlója így 1-féleképpen lehet háromszögekre bontani, tehát $E_3 = 1$. A négyszögeknek két átlójuk van és ezeket behúzva 2-féleképpen lehetséges háromszögekre bontani, azaz $E_4 = 2$. Tekintsünk egy n oldalú sokszöget,melynek csúcsai legyenek $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Húzzuk be az A_1A_k és A_kA_n átlókat, ekkor az átlók az n-szöget három részre bontják, egy $A_1, A_2, \ldots, A_k$ k-szögre, egy $A_1A_kA_n$ háromszögre és egy $A_kA_{k+1}\ldots A_n$ (n-k+1)-szögre.



Mivel a k-szöget E_k-féleképpen, az (n-k+1) szöget E_{n-k+1}-féleképpen bonthatjuk fel háromszögekre, ezért az $A_1A_kA_n$ háromszöget tartalmazó háromszögekre bontások száma E_kE_{n-k+1}, ahol $2 \leq k \leq n-1$.
Tekintsük az összes lehetséges háromszögekre bontást: $\sum_{k=2}^{n-1} E_kE_{n-k+1}$, ahol $n \geq 3$.

Ha feladatban n oldalú sokszög helyett (n+2) oldalú sokszöget tekintünk, akkor azt kapjuk, hogy $E_{n+2} = \sum_{k=2}^{n+1} E_kE_{n-k+3}$. Legyen $E'_n = E_{n+2}$, ebben az esetben a következőképpen alakul a szumma:

$$E'_n = \sum_{k=2}^{n+1} E'_{k-2}E'_{n-k+1} \text{ ,azaz}$$

$$E'_n = \sum_{j=0}^{n+1} E'_jE'_{n-j-1}$$

ami nem más mint a Catalan számok definíciója. Tudjuk, hogy a kezdeti érték $E'_1 = 1 = E_3 = C_1$ ebből következik, hogy az $E'_n = C_n$-el $\forall\ n \geq 1$-re.
Tehát az n oldalú sokszög háromszögekre bontására a következő képletet kapjuk:

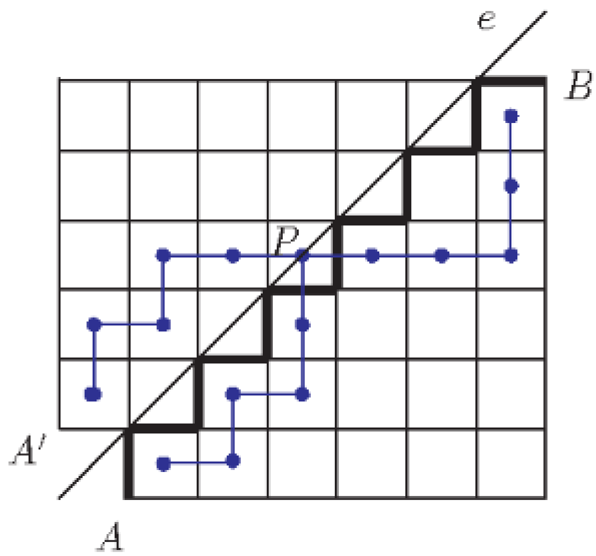
$$E_n = C_{n-2} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}, n \geq 3$$

2.Feladat Egy nxn-es sakktáblán, hányféleképpen juthatunk el a bal alsó sarokból a jobb felső sarokba úgy, hogy egyszerre egyet léphetünk jobbra vagy felfelé és a mellékátló (a bal alsó sarkot és a jobb felső sarkot összekötő vonal) fölé nem léphetünk?

Megoldás. Jelölje a_n az összes lehetséges utak számát és b_n a mellékátló alatt maradó utak számát. Kicsi n-ekre könnyen látszik,hogy $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 10, \ldots$ és a $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 5, \ldots$.

Legyen a bal alsó sarok A és a jobb felső sarok B. Számoljuk meg a_n-t, azaz az összes olyan út számát, amely A-ból B-be megy. Ez pontosan $a_n = \binom{2n-2}{n-1}$, mert $2n-2$ lépésre van szükség ahhoz, hogy eljussunk A-ból B-be, és ebből $n-1$-et jobbra és $n-1$-et felfelé teszünk meg. A $2n-2$-ből ki kell választani $n-1$-et, amikor jobbra lépünk.

A jó utak megszámolása egyszerűbb, ha úgy számoljuk, hogy az összes utak száma mínusz a rossz utak száma. Minden rossz út a mellékátló fölé kerül, tehát az ábrán látható e egyenest metszi. Egy rossz út első metszéspontja legyen P, így egy rossz út az A-P és a P-B részekből áll. Tükrözzük az A-P törött vonalat az e egyenesre, melynek a tükörképe A'-P. Ekkora az A'-B utat az A'-P és a P-B alkotja. Bijektív megfeleltetés van az A-B rossz utak és az A'-B utak között. Az A'-ből B-be menő utak száma $\binom{2n-2}{n}$, mert 2n-2 lépésből megadjuk azt az n-et, amikor jobbra lépünk.



Így a jó utak száma: $b_n = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} = C_{n-1}$

Ez az első tulajdonság alapján pontosan megeggyezik a (n-1)-edik Catalan-számmal.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Ágoston Istvánnak, aki szakértelmével és hasznos tanácsaival segítette a szakdolgozatom elkészülését.

Hálával tartozom továbbá családomnak és barátaimnak, hogy megértéssel és türelemmel segítettek az egyetemi éveim alatt, minden helyzetben mellettem álltak és tartották bennem a lelket a legnehezebb helyeztekben.
Köszönöm mindenkinek!

Irodalomjegyzék

[1] Steven R. Finch: Mathematical Constans, Cambridge University Press, 2003.

[2] Freud Róbert, Gyarmati Edit: Számelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.

[3] Sain Márton: Nincs királyi út!, Gondolat Budapest, 1986

[4] Szakács Erzsébet: Arany arány, elektronikus jegyzet, amely megtekinthető: http://szrg.hu/wp-content/uploads/files/aranymetszes.pdf

[5] http://hu.wikipedia.org/wiki/Aranymetszés

[6] Buzás Ferenc: Az aranymetszés vizuális világa, 2010. (letölthető könyv)

[7] Gerőcs László: A Fibonacci-sorozat általánosítása, Scolar Kiadó, 1998.

[8] Katona Gy. - Recski A. - Szabó Cs. : A számítástudomány alapjai, Typotex Kiadó, 2006.

[9] http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number

[10] Király Balázs, Tóth László: Kombinatorika jegyzet és feladatgyűjtemény, elektronikus jegyzet, amely megtekinthető: http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/Kombinatorika_kesz_jav3_final.pdf

[11] Pelikán József 2006. november 23-ai előadása nyomán készített jegyzet Török Lajos és Hraskó András által. Megtalálható: http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2006/eloadas_2006_11_21_pelikan.pdf

[12] http://hu.wikipedia.org/wiki/Catalan-állandó

[13] http://en.wikipedia.org/wiki/Euler-Mascheroni_constant

[14] http://hu.wikipedia.org/wiki/Brun-konstans

[15] http://asgarli.wordpress.com/2012/07/02/existence-of-euler-mascheroni-constant/

[16] http://hu.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-számok

[17] http://en.wikipedia.org/wiki/Coupon_collector's_problem

[18] Hajós György: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, 1972.