Az analízis alapjai és üzleti alkalmazásai

Szakdolgozat

Írta: Komjáti Dóra
Matematika Bsc szak
Matematikai elemző szakirány

Témavezető:
Mincsovics Miklós Emil, óraadó
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
Eötvös Lóránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2013.

Nyilatkozat

Név: Komjáti Dóra

ELTE Természettudományi kar, szak: Matematika Bsc

Neptun kód: HKH82G

Szakdolgozat címe: Az analízis alapjai és üzleti alkalmazásai

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2013.12.17

Komjáti Dóra

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A szakdolgozatom témaválasztásánál két kritériumot vettem figyelembe. Az első célom az volt, hogy a három év alatt tanultakból kiválasszam azt az anyagrészt, amit a legjobban el tudtam sajátítani, valamint a tanulása élvezettel töltött el. A második az volt, hogy a matematika elvont világában rámutassak a gyakorlatban alkalmazható részére. Tapasztalataim, amiket egyetemisták korrepetálásából nyertem, bebizonyították, hogy az analízis egy ilyen ága a matematikának. Dolgozatommal nekik is segítséget akarok nyújtani, hogy a későbbiekben ne okozzon ekkora nehézséget és ne tekintsék a matematikát egy lehetetlen küldetésnek a tanulmányaik során. Próbáltam az ő tematikájuk szerint feldolgozni ezt a témát. Elsőként alapfogalmakat ismertetek, mint például a folytonosság, határérték. Majd bevezetem a deriválást, tételekkel, definíciókkal és példákkal.

A dolgozat második felében a gyakorlatra helyeztem a hangsúlyt. Bemutatok egy teljes függvény vizsgálatot, valamint az analízis közgazdaságtani alkalmazását vezetem be, kitérve a különböző ehhez kapcsolódó fogalmakra. Választ keresek például arra, hogy, hogyan hat valamely termék árának megváltozása a termék iránti keresletre vagy hogy hogyan tudunk költséget minimalizálni.

Mivel a téma teljes bemutatására nem lenne elegendő egy szakdolgozat, így próbáltam kiválasztani egy kis szeletét az analízisnek, amivel a legjobban tudom prezentálni a feladatok megoldását és a téma gyakorlati hasznát, különösen a közgazdaságtanban.

1. <u>Függvények határértéke és folytonosság</u>

A határérték az analízis alapvető fogalma. Egy görbe érintőjének meredekségét vagy egy test pillanatnyi sebességét egyaránt határértékként határozhatjuk meg, összességében a változások leírására használjuk. Bizonyos függvények esetében ez a változás folytonos: az x független változó kicsiny megváltozása az *f(x)* függvényértékben is csak kicsiny változást idéz elő. Más függvények esetében különféle szakadások, ugrások is előfordulnak. A határérték fogalmának segítségével ezek a jelenségek pontosan megmagyarázhatók. A határértéket a geometriában a görbék érintőjének meghatározására használjuk, ez pedig természetes módon vezet a függvény deriváltjának fogalmához. A derivált a függvények változásának sebességéről ad számszerű jellemzést.

1.1. <u>A határérték fogalma</u>

1.1.1. <u>A határérték intuitív fogalma</u>

Legyen $\boldsymbol{x_0}$ egy nyílt intervallum egy pontja és tegyük fel, hogy az *f* függvény értelmezve van ezen az intervallumon, kivéve esetleg magát az x_0 helyet. Ha az *f(x)* függvényértékek tetszőlegesen közel kerülhetnek egy **L** számhoz, amennyiben az *x* értékek eléggé megközelítik x_0-t, akkor azt mondjuk, hogy *f* függvény az **L** számhoz tart, miközben *x* tart x_0-hoz. Szokásos jelöléssel írva így fejezzük ki. $\lim_{x\to x0} f(x) = L$, azaz f határértéke az x_0 pontban **L.**

1.1.2. <u>A függvény határérték egzakt fogalma</u>

Legyen f valós változós, valós értékű függvény, továbbá $x \in D_f, x_0 \in \boldsymbol{R}$ *;* $\varepsilon, \delta \in R^+$*;* $L \in \boldsymbol{R}$

Azt mondjuk, hogy az *f* függvénynek az x_0 helyen határértéke L, ha bármely pozitív $\varepsilon - hoz$ létezik olyan ε-tól függő pozitív δ, amelyre valahányszor $|x - x_0| < \delta$, mindannyiszor $|f(x) - L| < \varepsilon$.

A függvényhatárérték szemléltetéséhez álljon itt egy elemi példa.

Legyen f valós változójú valós értékű függvény: $f(x) = \frac{x2-1}{x-1}$,

ahol *x* jelöli a független változót.

Az *f* függvény értelmezési tartománya az összes valós szám halmaza, kivéve az x = *1* pontot, hiszen *0*-val nem lehet osztani. A függvény egyszerűsítés után így írható:

$$f(x) = \frac{(x-1)*(x+1)}{(x-1)} = x + 1, \text{ ha } x \neq 1$$

1. *táblázat (forrás: saját szerkesztés)*

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
f(x)	1,9	1,99	1,999	1,9999	#ZÉRÓOSZTÓ!	2,0001	2,001	2,01	2,1

A táblázat alapján belátható, hogy ezen *f(x)* függvény grafikonja egy olyan egyenes, amely áthalad azokon a pontokon, amelyek koordinátái a táblázatban felvett (*x*, *f(x)*) rendezett számpárok.

Ezen egyenes szakadásmentes, kivéve az *x = 1* helyet, ahol a függvény nincs értelmezve.

Eszerint tehát az *f(x)* függvény határértéke, amint *x* tart *1*-hez, *2*-vel egyenlő:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to x0} \frac{(x-1)*(x+1)}{(x-1)} = 2$$

Megjegyzés:

Amennyiben a valós értékű f függvény értelmezési tartománya $D_f = N$ természetes számhalmaz, akkor a valós értékű függvényt valós számsorozatnak nevezzük. Ezen valós értékű számsorozatok határértékének definiálására a tetszőleges $\varepsilon \in R^+$ számhoz $\delta \in R^+$ ε-tól függő környezet sugár helyett $M \in N$ ε-tól függő küszöbszámot adunk meg. Ennek segítségével valós számsorozat végtelenben vett határértékének definiálására a következő közismert Cauchy-féle definíció adható:

Legyen $(\boldsymbol{a_n})$ valós számsorozat, $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{M} \in \boldsymbol{N}$; $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{R^+}$.)

Akkor mondjuk, hogy (a_n) valós számsorozatnak van határértéke, azaz a sorozat konvergens, ha bármely pozitív $\boldsymbol{\varepsilon}$ -hoz létezik olyan $M(\boldsymbol{\varepsilon})$ küszöbszám, amelyre minden *n* esetén:

valahányszor $M < n$, mindannyiszor $|a_n - A| < \varepsilon$.

Ezen definíció alapján adott pozitív $\boldsymbol{\varepsilon}$ –hoz meghatározható ε-tól függő küszöbszám. Erre bemutatunk egy példát.

Legyen $a_n = \frac{2n}{n+1}$ és $\varepsilon = 0{,}01$.

Határozzuk meg azt a *M* küszöbszámot, amelynél nagyobb indexű sorozattagok már a

$\lim_{n\to\infty} a_n = A = 2$ határérték $\varepsilon = 0{,}01$ sugarú környezetébe esnek.

Feltétel szerint $\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \frac{1}{100}$. Ekvivalens átalakítás után az abszolút érték tulajdonságai alapján $\frac{|-2|}{n+1} < \frac{1}{100}$. Az abszolút érték értelmezése, valamint a pozitív racionális számok közötti egyenlőtlenség ekvivalens átírása után $200 < n + 1$ írható. Innen $M = 199 < N$ adódik. Vagyis a 200. tagtól kezdve a fenti (a_n) sorozat tagjai a $A = 2$ határérték $\varepsilon = 0{,}01$ sugarú környezetbe esnek.

1.1.3. A határérték kiszámítására vonatkozó tételek

Legyenek f és g valós változójú, valós értékű függvények, továbbá x jelölje az értelmezési tartomány tetszőleges elemét.

1. **Tétel: Határérték és algebrai műveletek**

   Legyenek L, M, c és k valós számok; tegyük fel, hogy

   $\lim_{x\to c} f(x) = \mathrm{L}$ és $\lim_{x\to c} g(x) = \mathrm{M}$

   Ekkor fennállnak a következők.

   - **ÖSSZEG:**

   $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = \mathrm{L} + \mathrm{M}$, két függvény összegének határértéke a határértékek összege.

   - **KÜLÖNBSÉG:**

   $\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = \mathrm{L} - \mathrm{M}$, két függvény különbségének határértéke a határértékek különbsége.

   - **SZORZAT:**

   $\lim_{x\to c}(f(x) * g(x)) = \mathrm{L} * \mathrm{M}$, két függvény szorzatának határértéke a határértékek szorzata.

   - **KONSTANSSAL VALÓ SZORZÁS:**

   $\lim_{x\to c}(\mathrm{k} * f(x)) = \mathrm{k} * \mathrm{L}$, egy függvény konstansszorosának határértéke a függvény határértékének konstansszorosa.

   - **HÁNYADOS:**

   $\lim_{x\to c}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}$, (amennyiben $\mathrm{M} \neq 0$), két függvény hányadosának határértéke a határértékek hányadosa (feltéve, hogy a nevező határértéke nem 0).

   - **RACIONÁLIS KITEVŐJŰ HATVÁNYOZÁS:**

   Ha r és s relatív prím egész számok, továbbá $s \neq 0$, akkor $\lim_{x\to c} \mathrm{f(x)}^{\mathrm{r/s}} = \mathrm{L}^{\mathrm{r/s}}$ feltéve, hogy $L^{r/s}$ valós szám (ha s páros, akkor fel kell tennünk, hogy $L > 0$); egy függvény racionális kitevőjű hatványfüggvénnyel vett kompozíciójának határértéke a függvény határértékének adott kitevőjű hatványával egyenlő, amennyiben ez a hatvány valós szám.

2. **Tétel:** Legyen P valós változós és valós értékű polinom függvény

   $\mathrm{P(x)} = \mathrm{a_0x^n} + \mathrm{a_1x^{n-1}} + \mathrm{a_2x^{n-2}} + \cdots + \mathrm{a_{n-2}x^2} + \mathrm{a_{n-1}x^1} + \mathrm{a_nx^0}$**,** akkor

   $$\lim_{x\to c} P(x) = \mathrm{a_0c^n} + \mathrm{a_1c^{n-1}} + \mathrm{a_2c^{n-2}} + \cdots + \mathrm{a_{n-2}c^2} + \mathrm{a_{n-1}c^1} + \mathrm{a_nc^0}$$

3. Tétel: Legyen P és Q valós változós és valós értékű polinom függvény.

Ekkor ha $Q(c) \neq 0$, akkor $\lim_{x \to c}(\frac{P(x)}{Q(x)}) = \frac{P(c)}{Q(c)}$.

4. Tétel: Rendőr elv

Tegyük fel, hogy valamely, a *c* pontot tartalmazó nyílt intervallum minden (de legalábbis *c* kivételével minden) *x* elemére teljesül $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

A rendőr-elv alkalmazásánál két olyan ismert konvergens sorozatot keresünk, amelyek segítségével korlátok közé tudjuk szorítani vizsgálandó sorozatunkat. Ha az alsó illetve felső „rendőr"- sorozat konvergens és mindkettőnek ugyanaz a határértéke, akkor a közbefogott függvény is konvergens és limesze megegyezik a minoráló és majoráló függvény közös határértékével, azaz ha

$\boldsymbol{lim_{x \to c}\, g(x) = lim_{x \to c}\, h(x) = L}$, akkor $\boldsymbol{lim_{x \to c}\, f(x) = L}$ is.

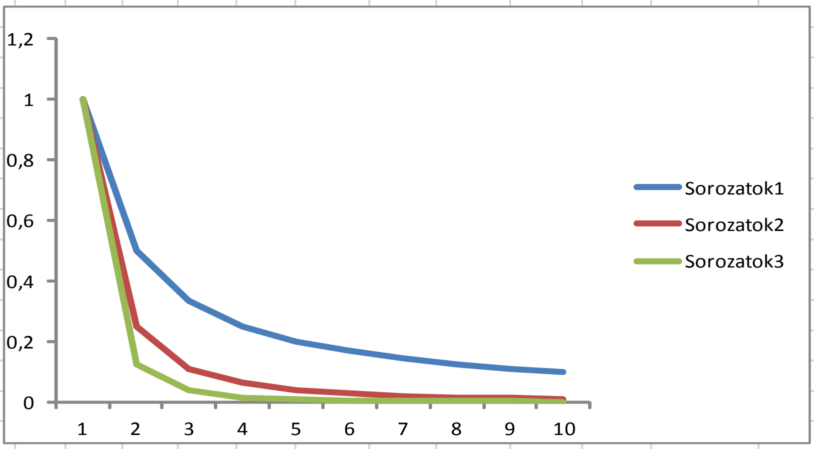
Amennyiben a *f, g, h* sorozatok értelmezési tartományát leszűkítjük a természetes számok halmazára, akkor *f, g, h* valós tagú sorozatok.

Az alábbiakban egy egyszerű példán keresztül kerül bemutatásra a rendőr-tétel. Az alábbi táblázatban szereplő független változók természetes számok, így *f, g, h* értékei sorozat értékek. $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, ahol $h(x) = \frac{1}{x}$; $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $g(x) = \frac{1}{x^3}$

Az alábbi táblázatban foglalható össze a függvények értékei. A függvények grafikus ábrázolásánál jól látszik, hogy a nevezett függvények tartanak a 0-hoz, és hogy a két szélső függvény közre veszi a középső függvényt.

2. táblázat (forrás: saját szerkesztés)

Függvény	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h(x)	1	0,5	0,3	0,25	0,2	0,167	0,143	0,125	0,1	0,1
f(x)	1	0,25	0,11	0,06	0,04	0,028	0,02	0,016	0,012	0,01
g(x)	1	0,13	0,04	0,02	0,01	0,005	0,003	0,002	0,001	0,001



1. ábra: Rendőr-elv gyakorlati példán keresztül (Forrás: saját szerkesztés)

1.1.4. Hogyan keressük meg az f, L,x_0 és $\epsilon > 0$ négyesnek megfelelő δ -t?

Alábbiakban szükségünk lesz a függvény határérték **1.1.2.** egzakt definíciójára.

Definíció: Függvény határértéke

Legyen f valós változós és valós értékű függvény. $x_0; L \epsilon R$.

Tegyük fel, hogy az *f(x)* függvény értelmezve van valamely, az x_0 tartalmazó nyílt intervallum – esetleg x_0 kivételével – minden pontjában.

Azt mondjuk, hogy *f(x)* tart *L*-hez, amint *x* tart x_0- hoz (*f(x)* határértéke az x_0 helyen *L*), szimbolikusan $\lim_{x \to x0} f(x) = L$.

ha bármely $\epsilon > 0$ számhoz van olyan δ > 0 szám, hogy minden *x* esetén

$|x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$.

Azt a δ -t, amelyre teljesül, hogy tetszőleges *x* esetén $|x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$ két lépésben keressük meg.

1. Az $|f(x) - L| < \epsilon$ egyenlőtlenség megoldásával keressünk egy (*a*,*b*) intervallumot, amelynek minden x_0-tól különböző elemére teljesül az egyenlőtlenség.
2. Adjunk meg egy δ > 0 számot, amelyre teljesül, hogy az x_0 középpontú (x_0– δ, x_0+ δ) nyílt intervallum az (*a*,*b*) intervallum belsejébe esik. Az $|f(x) - L| < \epsilon$ egyenlőtlenség természetesen az így megadott δ – intervallum x_0-tól különböző elemeire is teljesül.

Példa:

Legyen $\boldsymbol{f(x) = 5x - 3}$, *valós változójú valós értékű függvény.*

Igazoljuk, hogy $\boldsymbol{lim_{x \to 1}\, 5x - 3 = 2}$

Esetünkben x_0 =1, *f(x)=5x-3* és *L=2.* Be kell látnunk, hogy bármely $\epsilon > 0$ esetén megadható egy δ > 0, amelyre teljesül, hogy minden 1-től különböző, de x_0 -tól δ távolságon belül elhelyezkedő, vagyis az $|x - 1| < \delta$, kielégítő *x*-ek esetén a megfelelő *f(x)* függvényértéknek az *L=2* számtól való távolsága kisebb, mint ϵ, azaz teljesül az $|f(x) - L| < \epsilon$ egyenlőtlenség. A kívánt δ az ϵ-ra vonatkozó egyenlőtlenségből határozható meg.

$|f(x) - L| < \epsilon$, azaz

$|(5x - 3) - 2| < \epsilon$, ebből következik$|5x - 5| < \epsilon$,

Az abszolút érték definíciója alapján átfogalmazva egyenlőtlenségünk így írható:

$5 - \varepsilon < 5x < 5 + \varepsilon$, ahonnan az egyenlőtlenség 1/5-el való átszorzása után

$1 - \frac{\varepsilon}{5} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{5}$ egyenlőtlenséghez jutunk. Innen az abszolút érték definíciója alapján a következő feltétel adódik: $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}$. Itt már látszik, hogy $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, a függvényhatárérték definíciójában megkövetelt ε-tól függő pozitív δ. Mivel pedig bármely pozitív ε-hoz létezik $\delta = \epsilon/5$, így beláttuk, hogy az $f(x) = 5x - 3$ függvénynek az $x_0 = 1$ helyen valóban $L = 2$ határértéke, vagyis $\lim_{x \to 1}(5x - 3) = 2$

1.1.5. Jobb és bal oldali határérték, határérték a végtelenben

Ahhoz, hogy egy *f* függvénynek létezzen a c pontbeli határértéke, *f*-nek a c mindkét oldalán értelmezve kell lennie, és az *f(x)* függvényértékeknek mindenképpen az L határértékhez kell közelíteniük, függetlenül attól, hogy az *x* jobb vagy bal oldalról közelít *c*-hez.

Attól, hogy az *f* függvénynek a *c* helyen nem létezik a kétoldali határértéke, még létezhetnek azok a határértékek, amelyekhez a függvényértékek akkor közelítenek, amikor a független változó értékei az egyik oldalról tartanak *c*-hez. Ilyenkor jobb, illetve bal oldali határértékről beszélünk attól függően, hogy x jobbról (a c-nél nagyobb számokon keresztül) vagy balról (a c-nél kisebb számokon keresztül) közelít *c*-hez.

Az $f(x) = \frac{x}{|x|}$ függvény bal oldali határértéke a 0 helyen -1, jobb oldali határértéke pedig 1. A két határérték nem egyezik meg, így nincs egyetlen olyan szám, amelyhez a függvényértékek tartanának, amint *x* tart *0*-hoz, *f*-nek tehát 0-ban (kétoldali) határértéke van.

Összefoglalva: Igaznak látszik a következő

Tétel:

Legyen f valós változójú valós értékű függvény $x_0; L \in R$.

$\lim_{x \to x0} f(x) = L$ akkor és csak akkor, ha az f függvénynek az x_0 helyen létezik jobb oldali határértéke, és létezik baloldali határértéke és ezek az értékek egyenlők.

A tétel belátása céljából egzakt definíciót adunk a jobb oldali és a baloldali függvény határérték fogalmára.

1.1.5.1. Definíciók: Jobb és bal oldali határérték

Legyen f valós változójú valós értékű függvény $x_0; L \in R$ *, továbbá* $\varepsilon; \delta \in R^+$.

Azt mondjuk, hogy az *f* függvény **jobb oldali határértéke** az x_0 helyen az *L* szám, azaz $\lim_{x \to x0+} f(x) = L$, ha bármely $\epsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $\delta > 0$ valós szám, amelyre teljesül a következő feltétel:

minden *x*-re : $x_0 < x < (x_0 + \delta)$ $esetén$ $|f(x) - L| < \epsilon$

Továbbá azt mondjuk, hogy az f függvény **bal oldali határértéke** az x_0 helyen az L szám, azaz $\lim_{x\to x0-} f(x) = L$, ha bármely ϵ >0 valós számhoz létezik olyan δ > 0 valós szám, amelyre teljesül a következő feltétel:
minden x-re $(x_0 - \delta) < x < x_0\ esetén\ |f(x) - L| < \epsilon$

Ezen definíciók birtokában a függvény határérték definíciójában szereplő minden x-re $|x - x_0| < \delta$ feltételt vizsgáljuk meg részletesen.
$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \delta$ feltétel **ekvivalens** $(\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{\delta}) < x < (\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{\delta})$ feltétellel.
Ez utóbbi pedig feltétel rendszer alakba is írható:

$$(\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{\delta}) < x < \boldsymbol{x_0} \text{ és } \boldsymbol{x_0} < x < (\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{\delta})$$

E feltételpár alapján az egyenlőtlenség tranzitivitása folytán $(\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{\delta}) < x < (\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{\delta})$
Ha tehát az $f(x)$ függvénynek x_0 pontban létezik jobboldali határértéke és ez L, valamint létezik baloldali határértéke és ez is L, akkor ez elegendő feltétele a határérték létezésének, hiszen minden x esetén $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \delta$ feltételből $|f(x) - L| < \epsilon$ következik.
Ha viszont a függvénynek létezik x_0-ban határértéke és az L, akkor $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \delta$ feltétel a fenti feltételpárrá átírva mutatja, hogy szükségképp van az f függvénynek x_0-ban jobboldali és baloldali határértéke is és a kettő azonos.

1.1.5.2. Definíció: Határérték a végtelenben

Legyen f valós változójú valós értékű függvény, továbbá $x_0; L; M; N \in R$ *és* $\varepsilon \in R^+$.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a végtelenben L, azaz $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, ha bármely ϵ >0 valós számhoz létezik olyan M valós szám, amelyre teljesül a következő feltétel:
  minden x-re valahányszor $M < x, mindannyiszor\ |f(x) - L| < \epsilon$

- Továbbá azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a negatív végtelenben L, azaz $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$-, ha bármely ϵ >0 valós számhoz létezik olyan N valós szám, amelyre teljesül a következő feltétel:
  minden x-re valahányszor $x < N, mindannyiszor\ |f(x) - L| < \epsilon$

Megjegyzés

Legyen f valós változójú és valós értékű függvény, $x_n \in D_f$ $és\ x_0 \neq x_n$. A függvényhatárérték definíciójában szereplő Cauchy-féle feltétellel egyenértékű feltételt adott meg Heine a következőképpen:

Az x_0 helyen f folytonos és határértéke A, ha minden D_f -beli (x_n) valós sorozatra $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ esetén $\lim_{x\to\infty} f(x_n) = A$.
A Heine feltétel analóg módon alkalmazható a jobboldali függvényhatárérték, valamint a baloldali határérték definiálására is.

1.2. Folytonosság

Szükségünk lesz a **környezet** és a **belső pont** fogalmára. Ezeket a következőképpen értelmezzük:
Legyen $x_0; x \in R$ és $\varepsilon \in R^+$.
Az x_0 valós szám ε sugarú környezetén az$]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ nyitott intervallumot értjük, amely a következő halmazzal egyenlő

$$]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[= \{x\epsilon R|\, x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}.$$

Legyen H részhalmaz $\boldsymbol{R}$-nek és $x_0 \in H$. Azt mondjuk, hogy az x_0 **belsőpontja** H-nak, ha létezik olyan ε, amelyre $]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ is részhalmaza H-nak.

Legyen f valós változójú valós értékű függvény, továbbá $c; x; L \in R$ és $\varepsilon \in R^+$.
Definíció:

Adott belsőpontban folytonos függvény
Azt mondjuk, hogy az f függvény c belső pontban folytonos, ha $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

A végpontban folytonos függvény: Legyen $a; b; c \in R$ és $D_f = [a; b]$ és $a \le c \le b$.
Azt mondjuk, hogy az f függvény értelmezési tartománya bal oldali a, illetve jobb oldali b végpontjában folytonos, ha $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$ illetve ha $\lim_{x\to b+} f(x) = f(b)$.

Ha egy f függvény a c pontban nem folytonos, akkor azt mondjuk, hogy f-nek c-ben szakadása van, a c pontot ilyenkor f szakadási pontjának nevezzük. [1]
Az f függvény a c helyen jobbról folytonos, ha $\lim_{x\to c+} f(x) = f(c)$, illetve balról folytonos, ha $\lim_{x\to c-} f(x) = f(c)$.
Egy függvény tehát pontosan akkor folytonos az értelmezési tartománya bal oldali a végpontjában, ha az a pontban jobbról folytonos, és pontosan akkor folytonos az értelmezési tartománya jobb oldali b végpontjában, ha a b pontban balról folytonos.

[1] Meg kell jegyezni, hogy c szakadási pont nem feltétlenül eleme f értelmezési tartományának.

A fenti definíciót a gyakorlat számára kedvezőbb átláthatóság kedvéért így is megfogalmazhatjuk:

<u>Tétel</u>

A pontbeli folytonosság feltételei

Az f függvényt az x_0 pontban folytonosnak nevezzük, ha a függvény

- *az x_0 pontban és annak egy környeztében értelmezve van,*
- *az x_0 pontban létezik határértéke, és*
- *az x_0-beli határérték egyenlő a helyettesítési értékével.*

Ha az x_0 pontban értelmezett f függvénynek a bal oldali határértéke létezik és ez egyenlő a helyettesítési értékkel, akkor balról folytonosnak ha a jobb oldali határértéke létezik és ez egyenlő a helyettesítési értékkel, akkor jobbról folytonosnak nevezzük ott.

Az egyik oldali folytonossághoz elegendő a megfelelő oldali környezetében értelmezni a függvényt

Összefoglalva kimondható a következő tétel.

<u>Tétel</u>:

Legyen f valós változójú valós értékű függvény $a; b; c \in R$ és$D_f = [a; b]\ vagy\ ]a; b[$.

Az függvény akkor és csak is akkor folytonos egy pontban, ha ott balról és jobbról is folytonos.

Olyan pontban ahol nincs értelmezve az f függvény, nem is lehet folytonos. A folytonosság erősebb megkötés, mint a határérték létezése, vagyis, ha egy függvény folytonos egy pontban, akkor ott van határértéke. Míg ha csak azt tudjuk, hogy létezik a határértéke, akkor vagy folytonos, vagy sem.

<u>Megjegyzés</u>

A folytonosság fogalma közvetlenül sorozatokkal megadható:

Legyen f az x_0 valamely adott környezetében értelmezett függvény.

Az f függvény akkor és csak akkor folytonos az x_0 pontban, ha minden $x_n \to x_0; x_n \epsilon D_f$ esetén $f(x_n) \to f(x_0)$. Itt az $x_n \neq x_0$ feltételre azért nincs szükség, mert ha a határérték $A = f(x_0)$, akkor az $x_n = x_0$ egyenlőség mindössze a határértéket szerepelteti az $f(x_n)$ sorozat tagjai között. Ez pedig nem változtat az $f(x_n) \to f(x_0)$ határértéken.

Legyen f és g valós változójú és valós értékű függvény, és $D_f = D_g = [a; b]\ vagy\ ]a; b[\ vagy [a; b[\ vagy]a; b]|a; b; \in R$

Definíció:

Azt mondjuk, hogy $a \epsilon D_f$pontban az f függvénynek **szakadási helye** van, ha f függvény az a pontban nem folytonos.

Az *f* függvényt **folytonos** függvénynek nevezzük, ha *f* minden $a \epsilon D_f$pontban folytonos.

Tétel: Folytonos függvények és algebrai műveletek

Legyen f és g valós változójú és valós értékű függvény.

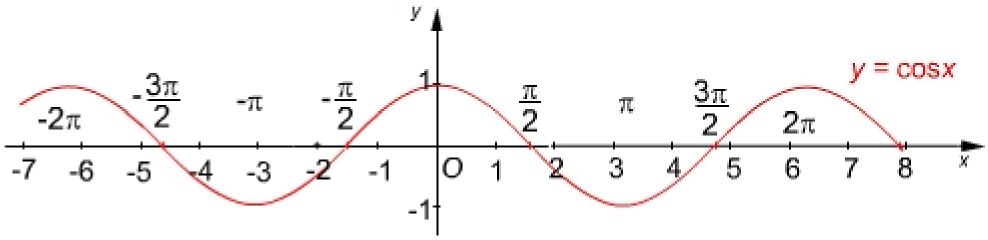
Ha az *f* és a g függvény egyaránt folytonos a $c \epsilon D_f$ helyen, akkor

I. $f + g\,; f - g; f * g; k * f$, k konstans ; $\frac{f}{g}$, amennyiben$g(c) \neq 0$; $f^{\frac{r}{s}}$, {ha f értelmezett egy c-t tartalmazó nyílt intervallumon, *r* és *s* pedig relatív prím egész számok, *s* ≠ 0, és ha *s* páros, akkor fel kell tennünk, hogy *f(c)*>0.} függvények is folytonosak a $c \epsilon D_f$ pontban.

II. Legyen a g függvény folytonos a $c \epsilon D_g$pontban, továbbá *f* folytonos *g(c)* pontban. Ekkor $f°g$ is folytonos a *c* pontban.

Tétel Bolzano- tétel

Ha az *f* függvény folytonos az [*a*,*b*] zárt intervallumon, akkor itt fölvesz minden *f(a)* és *f(b)* közötti értéket, azaz tetszőleges, *f(a)* és *f(b)* közötti *y₀* valós számhoz létezik olyan$c \epsilon [a; b]\ amelyre\ f(c) = y_0$



2. ábra: cosinus fv.(forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu)

Megjegyzés:

A cosinus függvény esetében $D_f = R; R_f = [-1; +1]$. Az ábrán ennek a függvénynek egy leszűkítése került ábrázolásra a $[-2\pi; 2\pi;]$ intervallumon. Jól látható, hogy ez a függvény folytonos a leszűkítési intervallum egésze felett.

E függvény ezen a zárt intervallumon felveszi szélső értékeit és minden közbenső értéket a $[-1; +1]$ zárt intervallumban, $cos(-2\pi) = cos(0) = cos(2\pi) = 1$. Ezek **a függvény maximumai** a leszűkítési intervallumon.

Továbbá $cos(-\pi) = cos(\pi) = -1$. Ezek **a függvény minimumai** az adott leszűkítési zárt intervallumon.

Továbbá $cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$. Ezek **a függvény zérus helyei**.

Következményei:

I. *Összefüggőség:* a tétel magyarázata, hogy adott intervallumon folytonos függvény grafikonjának nem lehetnek ugrásai, mint például az egészrész függvénynek és nem szakadhat két ágra, mint az *1/x* függvény grafikonja.

II. *Zérushelyek megkeresése*: Az *f(x)=0* egyenlet megoldásait az f függvény zérus helyeinek nevezzük. A tétel alapján belátható, hogy ha egy folytonos függvény egy adott intervallumon előjelet vált, akkor abban az intervallumban van legalább egy zérus helye.

2. A differenciálhatóság

2.1. A differenciál hányados és derivált függvény

Definíció I.: Legyen f valós változójú valós értékű folytonos függvény, $c \epsilon D_f$, $x \epsilon D_f$ és $x \neq c$.

Ekkor az $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ hányadost **differencia hányadosnak** nevezzük.

Definíció II.: Legyen f folytonos függvény és legyen értelmezve a c pont egy környezetében, c belső pontja D_f -nek. Azt mondjuk, hogy az f függvény a c pontban differenciálható, ha a $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ **véges határérték létezik**.

A fenti határértéket az f függvény c pontbeli **differenciálhányadosának** nevezzük.

Amennyiben D_f nyílt halmaz és f D_f minden pontjában differenciálható, akkor f **differenciálható függvény**nek nevezzük.

Definíció III.: Legyen f valós változójú, valós értékű folytonos függvény, amely D_f minden belső pontjában differenciálható. Jelöljük D-vel D_f belső pontjainak ezen halmazát. Ekkor az f függvényből a differenciálhányadosok a D pontjaiban képzett differenciálhányadosok felhasználásával egy új függvény származtatható a következőképpen. D minden c pontjához rendeljük hozzá a $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ **differenciálhányados** értéket. Azt a függvényt, amely D minden c pontjához a $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ differenciálhányados értéket rendeli hozzá, **derivált függvénynek** nevezzük.

Megjegyzés:

A folytonosság a differenciálhatóság szükséges feltétele. Ám ez a feltétel nem elégséges feltétlenül. Jó példa erre az abszolút érték függvény, amely értelmezési tartományának minden pontjában folytonos. Azonban az értelmezési tartomány zéruspontjában a függvény mégsem differenciálható, mert a $\frac{|x|-|0|}{x-0}$ differenciahányados függvénynek a 0 helyen nincs határértéke:

$\lim_{x \to 0-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$, de $\lim_{x \to 0+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = +1$. Mivel nem egyezik meg a jobb és baloldali határérték a $\frac{|x|-|0|}{x-0}$ differenciahányados esetében a 0 helyen, ezért nem létezik 0 pontbeli differenciálhányados.

Jelölés: A c pontbeli differenciálhányadost leggyakrabban. $f'(c)$-val jelöljük.

Az f függvény grafikonja a $(c ; f(c))$ koordinátájú pontbeli érintőjének meredeksége $f'(c)$.

Ezen **érintő egyenlete** $y - f(c) = f'^{(c)} * (x - c)$ alakban írható!

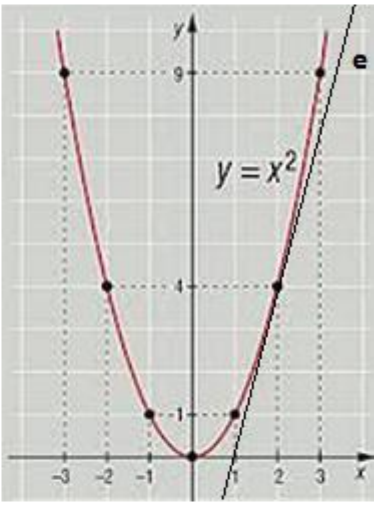
Az *f'(c)* differenciálhányados szemléletes jelentése tehát a graph *f (c ; f(c))* pontbeli érintőjének meredeksége.

Példa:

Az $f(x) = x^2$függvény differenciálható minden *c* helyen és $f'(c) = 2c$.

Ugyanis $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{x^2-c^2}{x-c} = x + c$, és ezért $f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = 2c$.

Így az érintő definíciója szerint az $y = x^2$egyenletű parabola $(c;\ c^2)$ pontbeli érintője az $y - c^2 = 2c * (x - c)$ egyenletű egyenes. Mivel ez az érintő egyenes átmegy a $\left(\frac{c}{2}; 0\right)$ ponton, ezért az érintőt úgy szerkeszthetjük meg, hogy a $\left(\frac{c}{2}; 0\right)$ pontot összekötjük a $(c;\ c^2)$ponttal.



3. ábra: A normál parabola grafikonja és annak (2;4) pontbeli érintője(Forrás: www.mozaweb.hu)

Tétel:

Legyen f valós változójú, valós értékű függvény és $c\epsilon D_f$.

Ha létezik $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$**, akkor *f* folytonos *c*-ben.**

Ezen állítás igazsága abból következik, hogy minden $c \neq x\epsilon D_f$ pontban érvényes a következő azonosság: $f(x) - f(c) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} * (x - c)$.

Mindkét oldal határértékét képezve a határértékre kimondott tételek alapján

$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) + \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} * \lim_{x\to c}(x - c)$.

Felhasználva, hogy $\lim_{x\to c}(x - c) = 0$ és hogy a 0-val való szorzás 0-t eredményezz, azt kapjuk, hogy $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, vagyis *f* folytonos *c*-ben.

Tehát a folytonosság a differenciálhatóságnak szükséges feltétele.

Ám a folytonosság nem elegendő differenciálhatósághoz, a XIX. sz. végén és a XX. sz. elején találtak a kutató matematikusok olyan valós függvényeket is, amelyek minden pontban folytonosak, de sehol sem differenciálhatóak. Fentebb már megvizsgáltuk az abszolút érték függvényt, amely értelmezési tartományának null pontjában nem differenciálható, noha ott folytonos.

Az abszolút érték függvényen kívül az $f(x) = \sqrt[3]{x}$, az $x=0$ helyen nem differenciálható, mivel a differenciálhányadosa plusz végtelenné válik. Azaz nem véges. Már pedig a differenciálhányados véges értéke definícióbeli feltétel.

Van olyan függvény, amely mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható.

Bebizonyítható, hogy az $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left|\{10^k * x\} - \frac{1}{2}\right|}{10^k}$ valós változójú, valós értékű függvény ilyen tulajdonságú.

A függvény definíciójában szereplő $\{10^k * x\}$kifejezés a $10^k * x$ törtrészét jelöli. Az *x* valós szám törtrészét a $\{x\} = x - [x]$ egyenlőséggel értelmezzük, ahol $[x] = k \in Z$, ha $x \in [k; k+1[$.

Létezik olyan függvény, amely egy adott pontban differenciálható, de semmilyen más helyen nem is folytonos.

Példa:

Legyen f valós változójú, valós értékű függvény.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, ha\ x \in Q \\ -x^2, ha\ x \ \in R - Q \end{cases}$$

Ez a függvény *x = 0* helyen differenciálható, ugyanakkor az *f(x)* függvény egyetlen *x≠0* helyen sem folytonos. Állításunk könnyen belátható.

2.2. Differenciálási szabályok

Legyen *f* és g valós változójú és valós értékű differenciálható függvény az $x = c$ pontban, ahol $x, c, k \in R$. Igazak a következő egyenlőségek.

I. Bármely *k* esetén *k*f* is differenciálható a *c* pontban és $(k * f)'(c) = k * f'(c)$.

II. *f*+g is differenciálható *c* pontban és $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.

III. *f**g is differenciálható *c* pontban és $(f * g)'(c) = f'(c) * g'(c)$.

IV. $g(c) \neq 0$ esetén $\frac{1}{g}$ is differenciálható a *c* pontban és $\left(\frac{1}{g}\right)'(c) = -\frac{g'(c)}{g^2(c)}$.

V. $g(c) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is differenciálható a *c* pontban és $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = -\frac{f'(c)*g(c) - f(c)*g'(c)}{g^2(c)}$.

2.3. Elemi függvények deriváltjai

Egyes elemi függvények differenciálhatósága könnyen belátható és egyszerűen kiszámítható ezek derivált függvénye is. Ilyenek például a polinomok, a trigonometrikus és logaritmusfüggvények. Az alábbiakban bemutatom az alkalmazható szabályokat és az elemei függvények deriváltjait ami segítséget nyújthat egy összetett, bonyolultabb feladat megoldásában.

2.3.1. Differenciálási szabályok

*Ha az f és g függvények differenciálhatók a-ban, akkor c*f (ce**R**), f+g, f·g is differenciálható a-ban, és*

$(c * f)'(a) = c * f'(a)$

$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

$(f * g)'(a) = f'(a) * g'(a)$

Ha g(a)≠ 0, akkor 1/g és f/g is differenciálható a-ban, és

$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{g'(a)}{g^2(a)}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) * g(a) - f(a) * g'(a)}{g^2(a)}$$

Az inverz függvény differenciálási szabálya. Legyen f valós változójú, valós értékű függvény. Szigorúan monoton és folytonos a $c \in D_f$ valamely környezetében, továbbá c-ben f differenciálható, de $f'(c) \neq 0$. Ekkor f^{-1}inverz függvény értelmezve van, szigorún monoton és folytonos, $b = f(c)$ egy környezetében és $b = f(c)$-ben differenciálható is. Ekkor $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(c)}$.

A lánc-szabály: *Legyen f, g valós változójú, valós értékű függvény Az összetett függvény differenciálási szabályát hagyományosan így nevezik.*

Legyen $t = g(x)$ differenciálható a-ben és$y = f(t)$ differenciálható $b = g(a)$.

Ekkor $h = f \circ g$ is differenciálható a-ban és $h'(a) = f'\big(g(a)\big) * g'(a)$.

A fenti differenciálási szabályok ismeretében sikerrel határozhatók meg az elemi függvények derivált függvényei.

2.3.2. Az elemi függvények derivált függvényei

Tétel:

Tetszőleges n pozitív egészre az x^n függvény mindenütt differenciálható R-ben és $(x^n)' = n * x^{n-1}$ minden x-re.

Bizonyítás:

Minden a-ra $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}*a+\cdots+x*a^{n-2}+a^{n-1})=n*a^{n-1}$, mivel $x^n-a^n=(x-a)*(x^{n-1}+x^{n-2}*a+\cdots+x*a^{n-2}+a^{n-1})$.

Tétel:

A sin(x) és cos(x) függvények mindenütt differenciálhatóak R-ben, továbbá

$(sin(x))'=cos(x)$ és $(cos(x))'=-sin\,(x)$*minden x-re.*

Tétel:

Az exp. fv. differenciálható sin(x) és cos(x) függvények mindenütt differenciálhatóak R-ben, továbbá

$(\exp)'=exp, azaz\ (e^x)'=e^{x'}$*minden x-re.*

Az eddigiekből a differenciálászi szabályok továbbá az exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus azonosságok felhasználásával további derivált függvények nyerhetők.

Tétel:

Ha a>0 és a≠1, akkor a $log_a x$ *függvény minden x>0 pontban differenciálható, és* $(log_a x)'=\frac{1}{xlna}$

Tétel:

Legyen $a\in R^+, x\in R;\ ((a)^x)'=lna*a^x$.

Tétel:

A tg(x) és ctg(x) függvények mindenütt differenciálhatóak R-ben, továbbá

$(tg(x))'=\frac{1}{(\cos(x))^2}$ $\quad (ctg(x))'=-\frac{1}{(\sin(x))^2}$ *minden x-re.*

3. Teljes függvényvizsgálat

Vizsgáljuk meg a következő függvényt:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$$

.

Megoldás:

I. $D_f = R - \{-1\}$, $R_f = R - (R^- \cup \{1\})$

II. Az *f* zérust *x=0* helyen veszi fel, tehát az y tengelyt is itt metszi.

III. Se nem páros, se nem páratlan az *f* függvény.

IV. Értelmezési tartományának *x* = *-1* pontjában plusz végtelen szakadása van.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1$$

$$\lim_{x\to--1-} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to--1+} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \infty$$

V. Az első derivált *x* szerint

$$f'(x) = \frac{2x}{(x+1)^3} = 0, ha\ x = 0$$

x	$]-\infty;-1]$	*-1*	$]-1;0]$	$]0;\ +\infty[$
f'(x)	+	*szakadási hely*	+	+
f(x)	*Szigorúan monoton növekvő*		*Szigorúan monoton csökkenő*	*Szigorúan monoton növekvő*

VI. A második derivált *x* szerint

$$f''(x) = \frac{2-4x}{(x+1)^4} = 0, ha\ x = \frac{1}{2}$$

Ennek egyetlen zérushelye *x* = *0,5*-nél van, tehát itt lehet **inflexiós pontja** a függvénynek.

A kifejezés egyes intervallumokon vett előjelét a tört számlálójának és nevezőjének összehasonlításával kapjuk.

x	$]-\infty;-1]$	*-1*	$]-1;0[$	*0*	$]0;0{,}5]$	*0,5*	$[0{,}5;\ \infty[$
f'(x)	+	*póIushely*	-	*0*	+	*0*	+
f''(x)	- *alulról konvex*	*x*	+ *alulról konvex*	*min*	+ *alulról konvex*	*Inflexiós pont*	- *alulról konkáv*

VII. A függvény képe egy olyan két ívből álló görbe, amely a plusz végtelenben alulról aszimptotikusan közelíti meg az *y =1* egyenletű egyenest, a mínusz végtelenben pedig felülről közelíti meg aszimptotikusan az *y = 1* egyenletű egyenest. Az egész görbe a koordináta sík felsőkét negyedében helyezkedik el, ugyanakkor a görbe két íve az *x = 1* egyenletű egyenest jobbról is és balról is a plusz végtelenben közelíti meg aszimptotikusan.

4. Gazdasági problémák megoldása matematikai módszerekkel

Eddig a deriváltat a függvény grafikonjához az adott pontban rajzolt érintő meredekségeként értelmeztük. A közgazdaságtanban más értelmezést kap: a változás mértéke.

- $f'(a)$ az f pillanatnyi megváltozása az a pontban.
- $\frac{f'(a)}{f(a)}$ az f arányos megváltozása az a pontban.

Gyakorlati példa:

Jelölje *N(t)* az egyedek számát a *t* időpillanatban egy (emberi, állati vagy növényi) populációban. Miközben az idő *t*-ről *(t+h)*-ra változik, a népesség változása $N(t+h) - N(t)$.

Tehát a népesség átlagos változása $\frac{[N(t+h)-N(t)]}{h}$.

A határértéket véve, amíg h 0-hoz tart, $N'(t) = \frac{\partial N}{\partial t}$ adódik a népesség változásának mértékére a t időpillanatban.

P Európa lakosságát jelöli (milliókban). P nagyságát a következő egyenlet adja:

$$P = 6{,}4t + 641$$

, ahol *t* az 1960 óta eltelt évek számát jelöli.

Ebben a változás mértéke ugyanaz minden *t*-re:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 6{,}4 \text{ millió évenként.}$$

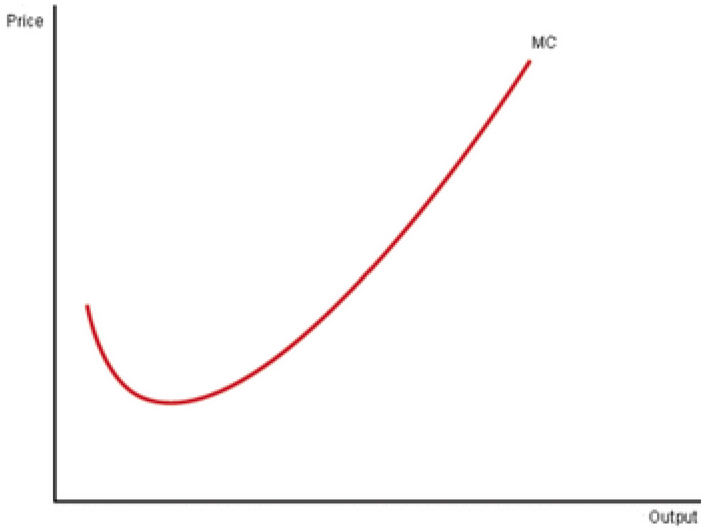
A gazdasági életben gyakran kerülünk szembe olyan problémákkal, amikor különböző a közgazdaságban használt függvényeknél kell megkeresnünk azokat a pontokat, amikor a legkisebb az összköltség, vagy legnagyobb az árbevétel, stb. Az ilyen és ehhez hasonló feladatokat, - amikor valamit úgy kell megterveztünk, hogy bizonyos mennyiség minimális vagy maximális legyen, - szélsőérték feladatoknak nevezzük.

4.1. Analóg fogalmak

A közgazdaságtudomány a derivált elnevezés helyett **a határ (Margin)** terminológiát használja. Az alábbi függvényekkel találkozhatunk, mint például:

- **határköltség** MC(q): a q mennyiségű áru előállításának költségét meghatározó TC(q) költségfüggvény deriváltja. A **határköltség** megmutatja hogyan változik az összköltség, ha a termelést egy egységgel növeljük. Eleinte a határköltség csökken, majd a minimum pontot

elhagyva elkezd növekedni, ennek köszönhetően lesz "U"-, vagy "pipa"-alakú a függvénye. Magát a függvényt pedig a termelési függvény fogja meghatározni.
Jele: **MC** (marginal cost)



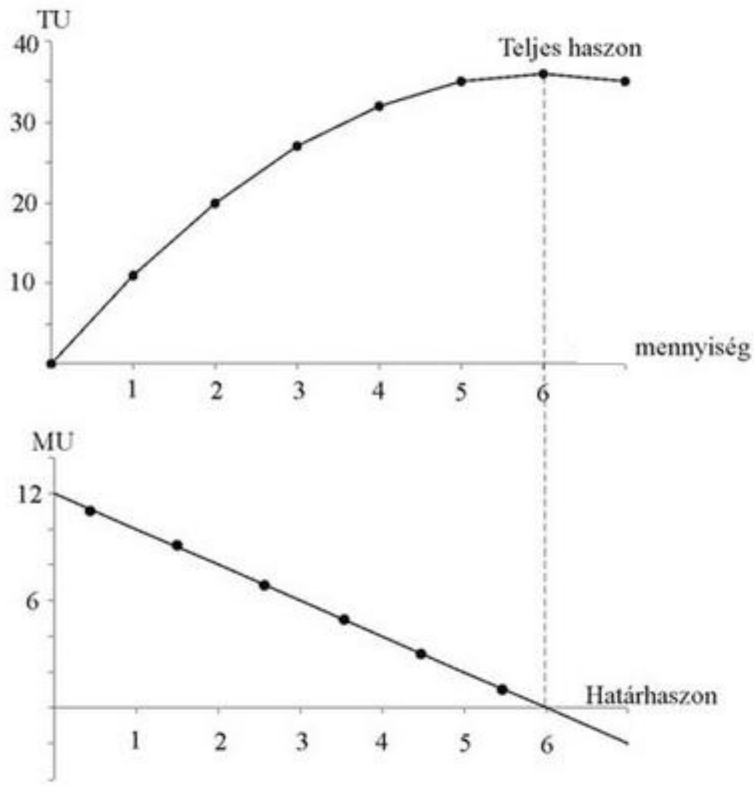
4. ábra: Határköltség ábrázolása (forrás: www.ecopedia.hu)

- **határbevétel** MR(q): a q mennyiségű áru eladási értékét meghatározó TR(q) árbevétel függvény deriváltja. A **határbevétel** azt mutatja meg, hogy miként változik a bevétel, ha az eladásokat egy egységgel emeljük. A függvénye állanó meredekségű, ha minden terméket ugyanannyiért lehet eladni, ha pedig csökkenteni kell az árat, hogy növekedjen az eladás, akkor csökken a függvény meredeksége. Jele: **MR**(marginal revenue)[2]

- **határhaszon** MU(x): az x terméknek a fogyasztó által megállapított értékét meghatározó TU(x) hasznossági függvény deriváltja, A **határhaszon** megmutatja, hogyan változik egy fogyasztó **összhaszna** egy adott jószágból, ha egy egységgel növeli a fogyasztását. Rendszerint az első egység elfogyasztása jár a legnagyobb haszonnal, az ezután következő egységek már kevésbé hasznosak, így kisebb mértékben növelik az összhasznot. Előfordulhat, hogy egy n-edik egység fogyasztása már csökkenti az összhasznot. Ezt hívják **csökkenő határhaszon elv**ének (vagy Gossen I. törvényének), mely szerint az egymást követő egységek fogyasztásakor a teljes haszon egyre kisebb mértékben nő. A határhaszon jele **MU** (marginal utility), a teljes, vagy összhaszon jele pedig **TU** (total utility).Az alábbi példában jól látszik, hogy 6 egységig folyamatos nő az összhaszon, de egyre csökkenő haszonnal. A 7. egység elfogyasztása pedig már negítv határhaszonnal jár,

[2] www.ecopedia.hu Letöltés 2014.01.01.

ami csökkenti az összhasznot is.



5. ábra: Határhaszon ábrázolása (forrás: www.ecopedia.hu)

- **határprofit** MΠ(q): az árbevétel és a költségfüggvények különbségeként adódó Π(q) profit függvény deriváltja. **Határprofit**: a teljes profit növekménye, ha a termelést egységnyivel növeljük. A **határprofit** az eladásváltozás egységére jutó profit.

  Képletben: **M = T / Q = MR - MC**. ***Ezt nevezik a vállalat optimális döntésének is***.

  *Amennyiben egy újabb termék megtermelése és eladása esetén a határköltség nagyobb, mint a határbevétel, akkor már nem érdemes megtermelni azt a terméket, hiszen összességében veszítünk rajta (a **határprofit** negatív)*

  ***Határprofit**-elemzés: azon a közgazdasági elven alapul, hogy addig érdemes növelni a kiskereskedelmi kommunikációs kiadásokat, amíg a kiadások pótlólagos árbevétel- és nyereségnövekedést generálnak*.

4.2. Közgazdasági tételek matematikai modellben

4.2.1. Határprofit elemzés, termelési optimum elemzés, fedezeti pont

Az alábbiakban nézzünk egy példát a határprofit elemzésen alapuló optimális termelési mennyiség meghatározására.

Egy vállalkozás éves nyereségét (profitját) a $\pi(q)$ függvény adja meg (euróban), ahol q a legyártott és értékesített termékek darabszámát jelenti:

$$\pi(q) = 2q^3 - 240q^2 + 7200q - 25000, q \in [0; 35].$$

Milyen intervallumban pozitív, illetve negatív a határprofit értéke? Adja meg a nyereség (profit) maximumát!

Megoldás:

$\pi(q) = 2q^3 - 240q^2 + 7200q - 25000, q \in [0; 35]$

$\partial\pi(q) = 6q^2 - 480q + 7200 = 0$

Másodfokú egyenlet megoldó képletével a gyökök könnyen meghatározhatóak:

$$q_{1,2} = \frac{-(-480) \pm \sqrt{(-480)^2 - (4 * 6 * 7200)}}{12} = \frac{480 \pm 240}{12}$$

$q_1 = 20$ és $q_2 = 60, mivel\ q \in [0; 35]$, ezért a helyes megoldás q_1.

Az optimális termelés mennyisége 20 egység.

	$0<q<20$	$q=20$	$20<q<35$
$\Pi'(q)$	+	0	-
$\Pi(q)$	nő	lokális maximum	csökken

A határprofit [0;20] intervallumon pozitív, és [20;35] intervallumon negatív.

Π(20)=39000

Nyereség (profit) maximuma: 39000 euró

A következő példa szintén a termelési optimumot vizsgálja.

Egy vállalat termelésének összköltségét a $TC(q) = 0{,}01q^2 + 10q + 4000$ ***függvény adja meg a minimális átlagköltséget abban az esetben, ha legfeljebb 5000 darabot tudnak gyártani, valamint a piaci árat és határbevételt, ha a vállalat tökéletes versenyű piacon tevékenykedik.***

Megoldás:

Teljes költség[3] $TC(q) = 0{,}01q^2 + 10q + 40000$

Átlagköltség[4] azt jelenti, hogy az összes termelési költséget fajlagosan egy termelési egységre vonatkoztatjuk, azaz az összes költség hányadosa a termelt mennyiséggel.

$$AC(q) = \frac{TC(q)}{q} = \frac{0{,}01q^2 + 10q + 4000}{q} = 0{,}01q + 10 + \frac{40000}{q}$$

$AC'(q) = 0{,}01 - \frac{40000}{q^2} = 0 \rightarrow q = 2000.$

[3] Total Cost angol elnevezés.

[4] Avarage Cost angol elnevezés

	0< q <2000	q=2000	q>2000
AC'(q)	-	0	+
AC(q)	csökken	min.	nő

Ha maximum 5000 db-t tudunk gyártani, akkor *q=2000* db esetén minimális az átlagköltség.

$AC(2000) = 50$

A piaci ár meghatározásához meg kell határoznunk a határköltség nagyságát, valamint a határbevétel nagyságát is.

Tétel 1.: *Tökéletes versenyű piacon a vállalat kínálati magatartása megegyezik a határköltség görbével.*

Tétel 2.: *Az átlag költség görbét határköltség görbe annak minimum pontjában metszi (***Fedezeti pont)**.

$TC'(q) = MC = 0{,}02q + 10 = AC(q)_{min} = 50$

$AC(q)_{min} = 50 = MC = 0{,}02q + 10 = 0{,}01q + 10 + \frac{40000}{q} \to 0{,}01q^2 = 40000 \to q = 2000$

A piaci ár tehát 50 Ft.

$\mathrm{TR}(2000) = 2000 * 50 = 100000$
$\mathrm{TC}(2000) = 0{,}01 * 2000^2 + 10 * 2000 + 40\,000 = 100000$
$T\pi(2000) = 1000000 - 100000 = 0$, tehát a vállalat fedezeti pontban termel.

Legyen *r, c, p* valós értékű, valós változójú differenciálható függvények.

r(x) = *x* darab árucikk eladásából származó bevétel

c(x)= *x* darab árucikk előállításának költsége

p(x) = *r(x)* – *c(x)* = *x* darab árucikk előállításával és eladásával elérhető profit

x árucikk előállítása és eladása **határbevételének, határköltségének és határprofitjának** nevezzük a következő mennyiségeket:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \text{határbevétel}, \frac{\partial c}{\partial x} = \text{határköltség}, \frac{\partial p}{\partial x} = \text{határprofit}.$$

Ha *r(x)* és *c(x)* minden *x>0* esetén differenciálható, a $\boldsymbol{p(x) = r(x) - c(x)}$ függvénynek pedig van maximális értéke, akkor az csak olyan termelési szinten állhat elő, amelyre $p'(x) = 0$.

Mivel $\boldsymbol{p'(x) = r'(x) - c'(x)}$, a $\boldsymbol{p'(x) = 0}$ egyenlőségből az következik, hogy $\boldsymbol{r'(x) - c'(x)}$=0, vagyis $\boldsymbol{r'(x) = c'(x)}$.

Maximális profitot biztosító termelés esetén a határbevétel egyenlő a határköltséggel.

A következőben nézzünk át egy példát a fentiek alkalmazásra.

Legyen r, c, p valós értékű, valós változójú differenciálható függvények, amikor is $r(x) = 9x$ és $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ahol x-et ezres egységekben adjuk meg.
Van-e olyan termelési szint, amely maximalizálja a nyereséget? Ha igen, mi az?

<u>Megoldás</u>:
$r'(x) = 9$ és $c'(x) = 3x^2 - 12x + 15$
$9 = 3x^2 - 12x + 15 \rightarrow 3x^2 - 12x + 6 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 2$
<u>A másodfokú egyenlet két megoldása:</u>

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{12 + \sqrt{144 - 4 * 3 * 6}}{6} = \frac{12 + \sqrt{72}}{6} = \frac{2 * 6 + 6 * \sqrt{2}}{6} = \mathbf{2 + \sqrt{2}}$$
$$\boldsymbol{x_2} = \frac{12 - \sqrt{144 - 4 * 3 * 6}}{6} = \frac{12 - \sqrt{72}}{6} = \frac{2 * 6 - 6 * \sqrt{2}}{6} = \mathbf{2 - \sqrt{2}}$$

A nyereségmaximum x_1 és x_2 ezer darab termék előállítása esetén lehetséges.
A $\boldsymbol{p(x) = r(x) - c(x)}$ függvény második deriváltja:$p''(x) = -c''(x)$, hiszen r"(x) minden x-re 0. Így $\boldsymbol{p''(x) = 6x - 12}$, ez a függvény $x < 2$ esetén negatív, és $x > 2$esetén pozitív. A második derivált teszt szerint maximális profit az x_1 érték körül figyelhető meg (ahol a bevétel meghaladja a költségeket), a legnagyobb veszteség pedig ezer darab termék előállítása esetén éri a társaságot.

<u>A költségek minimalizálása[5]</u>

Egy bútorasztalos egy mahagóni ültetvényről szerzi be a munkájához szükséges alapanyagot. Naponta 5 bútort készít el. A beszállítói egy konténernyi fát 5000 dollárért juttatnak el hozzá (függetlenül attól, hogy mennyi fa van a konténerben). A raktározási költség 10 dollár egységenként és naponta, ahol az egység az egy bútor elkészítéséhez szükséges alapanyag mennyisége.
Mennyi faanyagot rendeljen egy-egy alkalommal, és milyen gyakran kérje a kiszállítást annak érdekében, hogy minimalizálni tudja a költségeket?
<u>Megoldás:</u>

Ha naponként kér szállítást, akkor annyi mennyiségű alapanyagot kell rendelnie, hogy a rendelési ciklusban mindvégig elegendő anyaga legyen. Az átlagosan raktározott mennyiség hozzávetőleg a

[5] Valós értelmezésű és értékű differenciálható függvények a gyakorlatban. Mindegyik példában az x darabszámot pozitív valós számnak vettük. A valóságban általában csak a pozitív egész x értéknek van értelme.

rendelt mennyiség fele, vagyis *5x/2*.

Ezért egy-egy ciklusban a szállítási és a raktározási költség együttesen:

egy ciklusbeli költség = szállítási költség + raktározási költség;
***raktározási költség* = *5x/2* raktározási egység*10$/egység napi díj*raktározási napok száma**

A *c(x)* átlagos napi költséget úgy számítjuk ki, hogy a ciklusra eső költséget elosztjuk a ciklusban levő napok számával, *x*-szel:

$$c(x) = \frac{5000}{x} + 25x\,; x \neq 0$$

Ha $x \to 0$ vagy $x \to \infty$, az átlagos napi költség nagyon nagy lesz. Keressük a szélsőértéket!
Az egyes rendelések közt eltelt napok számát úgy kell meghatároznunk, hogy ott a költségfüggvénynek abszolút minimuma legyen.
A deriváltat nullával egyenlővé téve határozzuk meg a kritikus pontokat:

$$c'(x) = -\frac{5000}{x^2} + 25 = 0 \to x = \sqrt{200} \cong 14{,}14$$

A két kritikus pont közül csak $\sqrt{200}$esik $c(x)$értelmezési tartományába. Az átlagos napi költség kritikus pontbeli értéke:

$$c(\sqrt{200}) = \frac{5000}{\sqrt{200}} + 25 * \sqrt{200} \cong 707{,}107$$

Megjegyzés:
c(x) a $[0; +\infty[$nyílt intervallumon van értelmezve, és $c''^{(x)} = -\frac{10000}{x^3} \neq 0$, ezért az $x = \sqrt{200} = 14{,}14$ nap értékénél a költségfüggvénynek **abszolút minimum** van.

4.2.2. További üzleti alkalmazások

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan hat valamely termék árának megváltozása a termék iránti keresletre. Kérdezhetjük, hogy hány darabbal változik meg a termék iránti kereslet, ha az ára 10 Ft-tal nő. Az így kapott szám több szempontból sem megfelelő az ár keresletre gyakorolt hatásának a mérésére. Például egy kifli 10 Ft-os árnövekedése jelentős, míg egy televízió 10 Ft-os árnövekedése jelentéktelen.
A problémát kiküszöbölhetjük, ha relatív változásokat használunk. Azt vizsgáljuk, hogy hány százalékkal változik a kereslet, ha az ár 1%-kal nő. Az így kapott szám, amelyet a kereslet ár-elaszticitásának árrugalmasságnak nevezünk, független lesz attól, hogy milyen mértékkel mértük a kereslet mennyiségét és a termék árát. Adott ponthoz tartozó elaszticitást (rugalmasságot)

tetszőleges *f(x)* függvény esetében vizsgálhatunk.

A pontbeli elaszticitás megadja, hogy az x-nek az x_0-róltörténő 1%-os növekedéséhez az f(x) hány %-os változása tartozik.

Ezt képlettel a következőképpen fejezhetjük ki:

$$E_{x0} = \lim_{x \to x0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{x - x_0}{x_0}} = \frac{x_0}{f(x_0)} * f'(x_0)$$

Az így kapott szám megadja egy *f(x)* függvény esetében, hogy az *x* változó x_0-ról történő egy százalékos növekedése a függvényérték hány százalékos változását eredményezi. Pozitív érték esetén növekedésről, negatív esetén pedig csökkenésről beszélünk.

Tegyük fel, hogy valamely termék iránti kereslet nagyságát a $D(p) = 8000 * p^{-1,5}$formula adja meg. *Számítsuk ki D(p) elaszticitását, és határozzuk meg pontosan, hány százalékkal változik, a kereslet, ha az ár p=4-ről 1%-kal nő.*

Megoldás:

Mivel $\frac{\partial D}{\partial p} = 8000 * -1,5 * p^{-2,5} = -12000 * p^{-2,5}$

D(p) p szerinti elaszticitása $\frac{p}{D(p)} * \frac{\partial D(p)}{\partial p} = \frac{p}{8000*p^{-1,5}} * 12000 * p^{-2,5} = 1,5$

Az elaszticitás tehát azonosan, -1,5, így 1%-os árnövekedés a kereslet nagyságának 1,5%-os csökkenését eredményezi.

Ebben az esetben a kereslet csökkenését pontosan meg tudjuk határozni. Ha az ár 4, akkor a kereslet nagysága $D(4) = 8000 * 4^{-1,5} = 1000$.

Ha az árat 1%-kal növeljük, az új ár $4 * 1,01 = 4,04$, így a kereslet megváltozása

$D(4,04) = 8000 * 4,04^{-1,5} = 985,185$

$D(4,04) - D(4) = 985,185 - 1000 = -14,81$, tehát a kereslet 1%-os változása -1,48% változást okoz!

Eddig egy változós függvényeket vizsgáltunk, pontosabban olyan függvényeket, amelyek értelmezési tartománya és értékkészlete is a valós számok részhalmaza. Számos közgazdasági jelenség leírásához azonban nagy számú változó együttes vizsgálatára van szükség. Így például valamely jószág iránti kereslet többek között függ a fogyasztók ízlésétől, a jószág árától, az egyes fogyasztók jövedelmétől és a kiegészítő illetve helyettesítő jószágok áraitól. Ebben az esetben egy többváltozós függvényt kell vizsgálnunk.

Példa:

R. Frisch és T. Haavelmo a tej keresletére vonatkozó tanulmányukban az alábbi összefüggést adták:

$x = A * \frac{r^{2,08}}{p^{1,5}}$, ahol A pozitív állandó.

A képletben x a tej fogyasztása, p a tej relatív ára és r egy család jövedelme. Ez az egyenlőség x-et p és r függvényeként adja meg. A tej fogyasztása nő, ha az r jövedelem nő, és csökken - ha a tej ára növekszik.

Példa:

A következő kétváltozós függvény számos közgazdasági modellben szerepel:

$\boldsymbol{F, S, E = Ax^a y^b}$, ahol A, a, és b állandók

Általában feltesszük, hogy F csak $x, y \geq 0$ mellett van értelmezve.

F-et rendszerint **Cobb-Douglas-függvénynek** hívják.

Ilyen függvény az előző példában szereplő függvény is. Egy másik példa Cobb-Douglas függvényre egy rákok halászatával foglalkozó cég becsült termelési függvénye:

$\mathbf{F, S, E = 2,26x^{0,44}y^{0,48}}$**,** ahol S a rákok száma (amiket még ki kell fogni), E a kifogásukra fordított erőfeszítés és $F(S,E)$ a fogás.

Példa:

Tekintsük az $Y = F(K, L, T)$ mezőgazdasági termelési függvényt, ahol Y a megtermelt jószág mennyisége, K a befektetett tőke, L a felhasznált munkaerő, T a termőföld mérete. Ekkor a $\frac{\partial Y}{\partial K} = F'K$ parciális deriváltat a tőke határtermelékenységének hívják. Ez az Y kibocsátás változásának üteme K változtatása mellett, mialatt L és T rögzítettek.

Ugyanígy $\frac{\partial Y}{\partial L} = F'L$ és $\frac{\partial Y}{\partial T} = F'T$ a munka és a termőföld határtermelékenységei.

Például ha K a tőke javak dollárértéke és $\frac{\partial Y}{\partial K} = 5$ akkor a tőkeállomány egységnyi növelése a kibocsátást körülbelül 5 egységgel növeli.

Tegyük fel, hogy F Cobb-Douglas függvény,

$F(K, L, T) = A * K^a * L^b * T^c$, ahol *A, a, b, c* pozitív állandók.

Határozzuk meg a határmennyiségeket és a másodrendű parciális deriváltakat!

Vizsgáljuk meg az előjeleket.

Megoldás:

A határmennyiségek:

$F'(K) = A * a * K^{a-1} * L^b * T^c$

$F'(L) = A * K^a * b * L^{b-1} * T^c$

$F'(T) = A * K^a * L^b * c * T^{c-1}$

Feltéve, hogy K,L és T pozitívak, a határmennyiségek is pozitívak, így a tőke, a munka, vagy a föld mennyiségnek növelése növeli a kibocsátást.

A vegyes parciális deriváltak:

$F''^{(KL)} = A * a * K^{a-1} * b * L^{b-1} * T^c$

$F''(LT) = A * K^a * b * L^{b-1} * c * T^{c-1}$

$F''(TL) = A * K^a * b * L^{b-1} * c * T^{c-1}$

Ezek a parciális deriváltak pozitívak. Az ilyen termelési tényezőket kiegészítőknek hívjuk, mert az egyik növelése növeli a másik határtermelékenységét.

A további másodrendű deriváltak:

$F''^{(KK)} = A * a * (a - 1) * K^{a-2} * L^b * T^c$

$F''^{(LL)} = A * K^a * b * (b - 1) * L^{b-2} * T^c$

$F''^{(TT)} = A * K^a * L^b * c * (c - 1) * T^{c-2}$

F”(KK) például a tőke határtermelékenységének *F’(K)* K szerinti deriváltja. Ha *a<1*, akkor *F”(KK)<0* és a tőke határtermelékenysége csökkenő – a tőkeállomány kis növelése csökkenti a tőke határtermelékenységét.

Hasonló a helyzet a munka (*ha b <1*) és a föld (*ha c<1*) esetén.

Példa:

Tekintsük a következő makroökonómiai modellt, amely a nemzetközi jövedelem meghatározására szolgál egy zárt gazdaságban:

$$(\mathbf{1})\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{I}\,;(\mathbf{2})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})$$

Itt (*2*) fogyasztási függvény, míg (*1*) azt állítja, hogy az *Y* nemzeti jövedelemből *C* fordítódik fogyasztásra és *I* beruházásra.

Feltesszük, hogy f'(Y), a fogyasztási határhajlandóság, 0 és 1 között van.

a) Tegyük fel, először, hogy $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}) = \mathbf{95{,}05} + \mathbf{0{,}712}\boldsymbol{Y}$ és használjuk (1)-et és (2)-t Y-nak I függvényeként való felírásához. Határozzuk meg Y megváltozását, ΔY-t, ha I ΔI egységnyit változik.

b) Az (1) és (2) egyenletek Y-t, mint I differenciálható függvényét definiálják. Határozzuk meg dY/dI-t.

Megoldás:

a) Ebben az esetben azt kapjuk, hogy $Y = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{I} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{I} = \mathbf{95{,}05} + \mathbf{0{,}712}\boldsymbol{Y}$

Ebből $Y \cong 3{,}471 + 330{,}03$ adódik.

Tegyük most fel, hogy *I* Δ*I*-vel megváltozik. Az *Y* mennyiség ehhez tartozó Δ*Y* megváltoztatására a $Y + \Delta Y \cong 3{,}47 * (I + \Delta I) + 330{,}03$ teljesül.

Ebbe behelyettesítve az előző egyenletet $\Delta Y \cong 3{,}47 * \Delta I$ adódik.

Speciálisan, ha *I* egy egységgel (például 1 milliárd $-ral) változik, azaz ha Δ*I=1*, akkor a nemzeti jövedelem megfelelő változása Δ*Y≈ 3,47(milliárd).*

b) *C*-re (*2*)-ben szereplő kifejezést (*1*)-be írva kapjuk, hogy $Y = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{I}$

Tegyük fel, hogy ez az egyenlet *Y*-t mint *I* differenciálható függvényét definiálja.

Az egyenlőséget a láncszabály alapján differenciálva

$\frac{\partial Y}{\partial I} = f'(Y) * \frac{\partial Y}{\partial I} \rightarrow \frac{\partial Y}{\partial I} * \left(1 - f'(Y)\right) = 1$ adódik, ahonnan $\frac{\partial Y}{\partial I} = \frac{1}{1-f'(Y)}$

Például, ha *f '(Y) = ½,* akkor *dY/dI=2* és *f '(Y)=0,712-ből dY/dI=3,47* következik. Általában látható, hogy mivel *f ' (Y)* 0 és 1 között van, ezért *1- f ' (Y)* is 0 és 1 között van. Ezért *1/(1-f ' (Y))* mindig nagyobb 1-nél. Tehát ebben a modellben 1 milliárd $-nyi beruházás-növekedés a nemzeti jövedelemnek mindig több mint 1 milliárd $-ral való növekedéséhez vezet.

Minél nagyobb *f ' (Y),* azaz a fogyasztási határhajlandóság, annál nagyobb *dY/dI.*

Összefoglalás

Matematika szakos egyetemi hallgatóként bsc fokozat elnyerése céljából a matematika közgazdasági alkalmazásai témakörből készítettem szakdolgozatomat. Dolgozatom matematikai alapja a határérték, és a folytonosság elméletre épülő differenciálszámítás. E hatalmas tudományterületnek csak azokat a minimális elemit vettem sorba a közgazdasági alkalmazásokhoz, amelyek nélkülözhetetlenek a modern közgazdaságtan elemi fogalmainak a matematikai analízisre épülő fogalmainak megértéséhez. Ilyenek pl. határköltség, határbevétel, határhaszon, stb. az un. marginális elmélet. Bár a határérték-elmélet nyomai már Archimedesnél fellelhetőek, mégis a modern határérték szemlélet Newton munkásságára vezethető vissza. A XVII. században Newton és Leibniz munkásságában kialakult határérték-elmélet továbbfejlesztésre kerül Euler, Cauchy, Heine és Weierstrass munkásságában. A számunkra szükséges minimum szint megértéséhez a közgazdasági alkalmazások számára elegendőnek bizonyulnak a Cauchy-féle egzakt határérték-elmélet definíciói. A határérték-elmélet egzakt szintet Cauchy munkásságában érte először a XIX. század első felében. Az ipari forradalom időszakában megnövekedett az igény a határérték-elmélet és a differenciál-számítás műszaki alkalmazásaira, majd ezt követte a matematikai analízis további alkalmazásaként a piacgazdaság szükségleteinek kielégítésére a modern közgazdaságtan alapfogalmainak határérték-elméletre és differenciál-számításra alapozott tárgyalása. Szakdolgozatomban elsősorban rövid összefoglalását és áttekintését adtam a határérték-elmélet, a folytonosság-elmélet és a differenciál-számítás eleminek. Ezután rátértem a közgazdasági alkalmazásokra. A matematikai analízis elemeinek közgazdasági alkalmazásait gyakorlati példákon keresztülmutattam be.

Ez a dolgozat egy bevezetőjét képezi majdani master fokozat eléréséhez szükséges szakdolgozat anyagának. Utóbbiban már figyelembe kell venni a matematikai analízisben a XX. század elején bekövetkezett forradalmi változásokat. Elkerülhetetlenül topológiai szemléletet kell érvényesíteni, amennyiben a halmazelméleti topológia a folytonossági struktúrák elméletévé vált a XX. század közepére, továbbá az analízis továbbfejlődését a funkcionál-analízis irányába sem lehet manapság figyelmen kívül hagyni a közgazdasági alkalmazások posztmodern tárgyalásának időszakában

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet nyilvánítani témavezetőmnek Mincsovics Miklós Emil tanár úrnak, hogy támogatta a munkámat és hasznos tanácsokkal látott el. Hálás vagyok a családomnak, amiért lehetővé tették a tovább tanulásomat és nem utolsó sorban a barátaimnak akikkel együtt küzdöttünk, hogy eljuthassunk idáig.

Felhasznált szakirodalom

- www.ecopedia.hu Letöltés ideje:2014.01.01.
- www.tudasbazis.sulinet.hu Letöltés ideje 2014.01.01
- www.mozaweb.hu Letöltés ideje 2014.01.01
- Lackovich Miklós, T. Sós Vera: Analízis I., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006
- George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano: Thomas-féle KALKULUS 1., TYPOTEX, 2008
- Dr. Csernyák László, Horváth Jenőné dr., dr Molnár Sándor, Szentelekiné dr. Páles Ilona, dr. Zimányi Krisztina: ANALÍZIS- Matematika a közgazdasági alapképzés számára., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006
- Szentelekiné Dr. Páles Ilona: Analízis példatár, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2010
- Peter I. Hammond, Knut Sydsaeter: Matematika közgazdászoknak, Aula Kiadó, 2006
- Gémes Margit: Kalkulus 1 órai jegyzet, 2010/11/1. félév
- Kis Márta: Gazdasági matematika I. Analízis, Oktatási segédanyag, Dr. T.O.P. Kft., Budapest, 2009

Ábrajegyzék

Táblajegyzék