Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Nevezetes sorozatok és sorok
(az e és a π előállításai)

Szakdolgozat

Készítette:
Pirka Ágnes
Matematika Bsc
Matematikai elemző szakirány

Témavezető:
Mezei István
Alkalmazott Analízis és
Számításmatematikai Tanszék

Budapest
2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatomban a matematika két legszebb számának az e-nek és a π-nek az előállításait fogom bemutatni végtelen sorozatok és sorok segítségével. Sorozatnak nevezzük az olyan függvényeket, amelyeknek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza. A sorozatok megadhatók explicit és implicit módon is. Végtelen sorok elnevezés alatt egy adott a_n számsorozat tagjaiból képzett összeget értünk$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots)$.
Az első fejezetben e előállításával foglalkozok. Először alulról majd felülről fogom közelíteni sorozatokkal. Ezután megmutatom hogyan áll elő végtelen sor összegeként, majd mutatok még pár előállítási módot és két példát, hogy hogyan lehet alkalmazni. A további fejezetekben π előállításaival foglalkozom. Bemutatom az Euler-sort, a Leibniz-sort majd végtelen szorzatok segítségével belátom a Wallis-formulát és a Viete-képletet. Legvégül pedig a matematika három legfontosabb állandóját tartalmazó Euler-formulát fogom megmutatni.

1. fejezet

Az e értelmezése

Leonhard Euler(1707-1783) a matematika egyik legjelentősebb alakja volt. Munkássága a matematika számos ágára kiterjedt. Az analízis mellett maradandót alkotott a számelméletben, a geometriában és a gráfelméletben, de foglalkozott még csillagászattal, fizikával és mechanikával is. Az ő nevéhez fűződik az e elnevezése is, melyet Euler-féle számként is szoktak nevezni. Ez a szám az alapja a természetes logaritmusnak. Elsőként Lambert bizonyította be, hogy e irracionális, tehát nem írható fel két egész szám hányadosaként. Később Hermite látta be, hogy transzcendens, azaz egyetlen egész együtthatós polinomnak sem gyöke. e az első 30 tizedesjegyéig megadva

$$e = 2,718281828459045235360287471352\ldots$$

Ez az érték megadható sorozatok és végtelen sorok összegenként, továbbá felírható lánctört alakban is $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, \ldots, 2n, 1, 1, \ldots]$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}$$

1.1. Az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat

1.1. Definíció. *Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok.*
Számtani közepüknek az

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

mértani közepüknek a

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

harmonikus közepüknek a

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

számot nevezzük.

A fenti közepek között az alábbi összefüggések állnak fenn: $H \leq G \leq A$ és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

1.2. Definíció. *Az s_n sorozatot monoton növekedőnek nevezzük, ha*

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots$$

Amennyiben itt $\leq$ helyett $\geq$ áll, a sorozatot monoton csökkenőnek, ha $<$, illetve $>$ áll, szigorú monoton növekedőnek illetve szigorú monoton csökkenőnek nevezzük. Az a_n sorozatot monoton sorozatnak nevezzük, ha a fenti esetek valamelyike áll fenn.

1.3. Definíció. *Az s_n valós sorozatról, akkor mondjuk, hogy konvergens és határértéke a, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan N természetes szám, hogy a sorozat minden N-nél nagyobb indexű tagja az a szám ε sugarú környezetébe esik.*

Azt, hogy az a_n sorozat konvergens és határértéke a, így fogjuk jelölni:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a;$$

néha röviden az $a_n \to a$ jelölést is használjuk.

1.4. Tétel. *Az $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ sorozat szigorú monoton növekedő és korlátos, tehát konvergens.*

1.5. Bizonyítás. *A tétel bizonyítása teljes indukcióval fog történni.*
Az $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatról meg fogjuk mutatni, hogy szigorú monoton növekedő. Felhasználva a számtani-mértani közepek közti összefüggést, a következőt kapjuk:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1} < \frac{(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{1}{n})+\ldots+(1+\frac{1}{n})+1}{n+1} =$$
$$= \frac{(1+\frac{1}{n})\cdot n+1}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

Miután mindkét oldat $n+1$-edik hatványra emeljük azt kapjuk, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

ahol $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e_{n+1}$-gyel és ezzel meg is mutattuk, hogy $e_n < e_{n+1}$. A tétel második felének bizonyítása, azaz, hogy e_n felülről korlátos szintén a számtani-mértani közepek közötti összefüggésekből adódik. Beszorozva az e_n sorozatot $\frac{1}{4}$-del, majd rövid átalakítás után a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{4}\cdot e_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Ez alapján felírva a számtani-mértani közepek közötti összefüggést, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n\cdot(1+\frac{1}{n})}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{1+n+1}{n+2}\right)^{n+2} = 1$$

Végül leosztunk $\frac{1}{4}$-del

$$\frac{1}{4} \cdot e_n < 1$$
$$e_n < 4$$

Ezzel beláttuk, hogy e_n amellett, hogy szigorú monoton növő sorozat még felülről korlátos is, azaz konvergens, ami pont a bizonyítandó tétel volt.

1.6. Definíció. *Az* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *sorozat határértékét e-vel jelöljük, tehát*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

1.7. Megjegyzés. *Mivel a sorozat szigorú monoton nő, ezért az első tagját tekinthetjük alsó korlátjának. Ez alapján a sorozat alsó korlátja a 2 lesz, hiszen $n = 1$-re nézve a sorozat $(1+1)^1 = 2$.*

1.2. Az $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$ sorozat

A következőkben megmutatjuk, hogy az $f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat szigorú monoton csökkenő sorozat.
Írjuk fel a következő alakban:

$$f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1$$

Így egy $n+2$ tényezős szorzatot kaptunk, amelyre alkalmazva a mértani és a harmonikus közepek közti egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy:

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1} > \left(\frac{n+2}{\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}+\ldots+\frac{n}{n+1}+1}\right)$$

$n+2$-edik hatványra emelve mindkét oldalt, valamint a jobb oldalon lévő tört nevezőjét egyszerűbb alakban írva, azt kapjuk, hogy:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1 > \left(\frac{n+2}{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}\right)^{n+2}$$

Egyszerűsítve a jobb oldalon, majd egy kis átalakítást végezve könnyen kihozható a következő:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+2} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

Ha $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$-ben n helyébe $n+1$-et írunk, akkor $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$-t kapunk,ami az egyenlőtlenség jobb oldalán is áll, vagyis az előbb bizonyítottuk be, hogy $f_n > f_{n+1}$. A sorozat szigorú monoton fogyó és alulról korlátos, hiszen $1 < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ teljesül ezért konvergens. Az $f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ határértéke a következő:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

Ugyanis, ha $n\to\infty$, akkor $(1+\frac{1}{n})^n \to e$ és $(1+\frac{1}{n}) \to 1$, így a szorzatuk e-hez tart.

Az eddigiekben megmutattuk, hogy az e_n sorozat alulról az f_n sorozat pedig felülről tart e-hez, így

$$0 < e-e_n < f_n-e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left[1+\frac{1}{n}-1\right] = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{1}{n} < 4\cdot\frac{1}{n}$$

1.3. Egy e-hez gyorsan konvergáló sorozat

A binomiális tétel felhasználásával igazoljuk, hogy ha $n > 1$ természetes szám, akkor $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$.

Mielőtt nekiállnánk a feladatnak, foglalkozzunk a binomiális tétellel.

1.8. Definíció. *Ha $0 \le k \le n$ egészek, akkor az $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ számot $\binom{n}{k}$-val jelöljük, ahol a $0!$ számot 1-nek értelmezzük.*

Ebből a definícióból következik, hogy $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ minden n-re. Továbbá minden $n \ge 2$ és $k = 1,\ldots,n-1$ esetén igaz, hogy

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

1.9. Tétel. *(binomiális tétel)*
Fennáll a következő azonosság:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

1.10. Bizonyítás. *A tétel bizonyítása teljes indukcióval fog történni. Az állítás $n=1$-re igaz. Ha n-re igaz, akkor*

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n\cdot(a+b) = \left[a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n\right]\cdot(a+b)$$

Miután mindkét oldalt beszorozzuk $(a+b)$-vel és elvégezzük a jobb oldalon a kiemelést, a következőt kapjuk:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \left[1+\binom{n}{1}\right]a^nb + \ldots +$$
$$\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]a^{n-k}b^{k+1} + \ldots + \left[\binom{n}{n-1}+1\right] + b^{n+1}.$$

Itt az $a^{n-k}b^{k+1}$ tag együtthatója éppen $\binom{n+1}{k}$. Ezzel kész is a bizonyítás.

Visszatérve a feladathoz felírható a binomiális tétel alapján a következő:

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \frac{1}{n^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \frac{1}{n^k}$$

Részletesen kifejtve a jobb oldat, majd használva a definíciót a következőt kapjuk:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n^1} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

Egyszerűsítve a törteket

$$1 + 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots +$$
$$+ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

majd tovább egyszerűsítve a törteket n-nel, a nevezőben lévő n-es tagok kitevője eggyel csökkenni fog.

$$1 + 1 + \frac{n-1}{2!} \cdot \frac{1}{n} + \ldots + \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + \ldots +$$
$$+ \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^{n-1}}$$

Megcserélve a szorzatokban lévő törtek számlálóit

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \ldots + \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^{k-1}} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!} \cdot \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{n^{n-1}}$$

majd egy kis átalakítás elvégzése után a zárójelben lévő szorzótényezőket felülről tudjuk becsülni eggyel, mivel mindegyikben egy 1-nél kisebb szám áll. Így a következőképp alakul a reláció:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{n!} = y_n$$

Ezzel igazoltuk a feladatban szereplő állítást.

1.4. Az e egy végtelen sor összegeként

Igazoljuk, hogy minden rögzített $k \in \mathbb{N}$-re igaz az $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} \leq e$ egyenlőtlenség.

Rögzítsünk egy k természetes számot, majd válasszunk hozzá egy n-et úgy, hogy a $k < n$ teljesüljön.
Továbbra is legyen $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, viszont most van egy felső korlát, hogy $e_n < e$.
Az előző feladat alapján ismét felírhatjuk, hogy

$$e_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \\ + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

viszont itt $n > k$-ra a sorozat tagjai kisebbek e-nél.

$$e > 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

Ha a jobb oldalnak vesszük a végtelenben vett határértékét, akkor

$$\lim_{n \to \infty} \left[1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] = \\ = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} \leq e$$

$$e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} = y_k$$

Tehát, minden $k \in \mathbb{N}$-re $e \geq y_k \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ e \geq y_n$. Tudjuk, hogy $e_n < y_n$, így felírható, hogy $e_n < y_n \leq e$, viszont $e_n \to e$-hez, így a rendőr-elv miatt

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e$$

1.5. Az $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ sorozat is e-hez tart

1.11. Definíció. *Legyen (a_n) egy pozitív tagú sorozat, vagyis $a_n > 0$ minden n-re. Képezzük ekkor (a_n)*

- *számtaniközép-sorozatát mint*

$$A_n := \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}^+$$

- *mértaniközép-sorozatát mint*

$$G_n := \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}, \qquad n \in \mathbb{N}^+$$

- *harmonikusközép-sorozatát mint*

$$H_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}, \qquad n \in \mathbb{N}^+$$

1.12. Tétel. *Ha $a_n \to A (A \in \overline{\mathbb{R}})$, akkor a fent definiált közép-sorozatai is mind A-hoz tartanak, tehát*

$$A_n \to A, G_n \to A, H_n \to A.$$

1.13. Tétel.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

1.14. Bizonyítás. *Vegyük az $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatot és írjuk fel a belőle képzett mértaniközép-sorozatot(e-hez tart).*

$$G_n(x) = \sqrt[n]{e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots \cdot e_n} = \sqrt[n]{\frac{2}{1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}}$$

A kapott $G_n(x)$-et szorozzuk meg $\frac{n}{n+1}$-gyel (1-hez tart)

$$\frac{n}{n+1} G_n(x) = \frac{n}{n+1} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

1.6. Az $(1 - \frac{1}{n})^n$ sorozat

Most nézzünk egy a korábbiakban vizsgált sorozatra nagyon hasonló sorozatot és vizsgáljuk meg a határértékét. Ez a sorozat nem más, mint az $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.
A határértékének kiszámításához használjuk fel az alábbi azonosságot

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

innét $n > 1$-re

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Mivel $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e > 0$ és $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \to 1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Ezután megmutatjuk, hogy a sorozat szigorú monoton növekvő, mégpedig a jól ismert számtani-mértani közepek közti összefüggésekkel.

$$\sqrt[n+1]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát $(n+1)$-edik hatványra emeljük, akkor azt kapjuk, hogy $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, amit bizonyítani akartunk.

1.7. Fixpontok valószínűsége

A valószínűségszámításból jól ismert, hogy annak a valószínűsége, hogy $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt saját magára történő bijektív leképezésnek legyen legalább egy fixpontja (az $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ estén létezik $k \in 1, 2, \ldots, n$ olyan, amelyre $f(k) = k$) éppen

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

Ha minden határon túl növeljük az n értékét, akkor legyen

$$p = \lim_{n \to \infty} p(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

E sor összegének meghatározásához szükségünk van e hatványsorára, ami nem más, mint

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Ha az $x = -1$ helyettesítést alkalmazzuk és mindkét oldalból kivonunk 1-et, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1$$

adódik majd ezután megszorozva mindkét oldalt (-1)-gyel kapjuk meg a fent említett sor összegét, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} = 1 - \frac{1}{e}$$

1.8. Egyéb e-hez tartó sorozatok

Napjainkban is igyekeznek matematikusok olyan sorozatokat előállítani, amelyeknek határértéke e, vagy olyan összegeket felírni, amelyekben szerepel e. Ilyen sorozat például

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} - \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \right] = e$$

Ezenkívül létezik az úgynevezett Pippenger szorzat(mely a π-t előállító Wallis-formulához hasonlítható), viszont ez csak a felét állítja elő e-nek

$$\frac{e}{2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{8}} \cdots$$

A következő, az előzőre nagyon hasonlító végtelen szorzat viszont már e-t adja eredményül

$$e = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{1}} \left(\frac{2^2}{1 \cdot 3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2^3 \cdot 4}{1 \cdot 3^3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2^4 \cdot 4^4}{1 \cdot 3^6 \cdot 5}\right)^{\frac{1}{4}} \cdots$$

Végül pedig következzen Gosper által megadott összeg, amelyben e és π is szerepel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{9}{n\pi + \sqrt{n^2\pi^2 - 9}}\right) = -\frac{\pi^2}{12e^3} = -0,040948222\ldots$$

2. fejezet

e néhány alkalmazása

Ebben a fejezetben megismerkedhetünk az e néhány alkalmazásával, amiből látni fogjuk, hogy akár a mindennapokban is használjuk például, amikor pénzünk kamatját számoljuk egy párhónapos lekötés többszöri megújítása során.

2.1. Kamatszámítás

Ha beteszünk a bankba 1 Ft-ot évi $p\%$-os kamatra, akkor egy év alatt $1 + \frac{p}{100}$ Ft-ra fog felnövekedni. Nagyobb lesz a felnövekedett összeg ugyanazon $p\%$-os kamat mellett, ha az esedékes kamatokat félévenként csatoljuk a tőkéhez, ugyanis ekkor a második félév folyamán már a felnövekedett tőke kamatozik. A felnövekedett összeg ekkor így alakul $\left(x = \frac{p}{100}\right)$

	esedékes kamat	felnövekedett összeg
az I. félév végén	$\frac{x}{2}$	$1 + \frac{x}{2}$
a II. félév végén	$\frac{x}{2}(1 + \frac{x}{2})$	$(1 + \frac{x}{2}) + \frac{x}{2}(1 + \frac{x}{2}) = (1 + \frac{x}{2})^2$

Ha az esedékes kamatot egyre sűrűbb időközönként csatoljuk a tőkéhez(például $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ évente), akkor az év végéig felnövekedett összeg egyre nagyobb lesz. Mekkora lehet vajon az így elérhető legnagyobb összeg? Ha az $\frac{1}{n}$ időszakot vesszük, ahol $n = 2, 3, \ldots$, akkor a felnövekedett összeg a következőképp alakul $\left(x = \frac{p}{100}\right)$

	esedékes kamat	felnövekedett összeg
az első időszak végén	$\frac{x}{n}$	$1 + \frac{x}{n}$
a második időszak végén	$\frac{x}{n}(1 + \frac{x}{n})$	$(1 + \frac{x}{n}) + \frac{x}{n}(1 + \frac{x}{n}) = (1 + \frac{x}{n})^2$
a harmadik időszak végén	$\frac{x}{n}(1 + \frac{x}{n})^2$	$(1 + \frac{x}{n})^2 + \frac{x}{n}(1 + \frac{x}{n})^2 = (1 + \frac{x}{n})^3$

Ebből viszont már látszik, hogy az év végéig felnövekedett összeg $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ lesz. Ez viszont pont az $e^x\left(x = \frac{p}{100}\right)$ érték lesz, amelyet az 1 Ft felnövekedett értéke $p\%$-os kamat mellett tetszőleges pontossággal megközelít, ha az $\frac{1}{n}$ időszakot elég kicsire választjuk.

Ha 1 Ft-ot évi 100%-os kamatra teszünk be a bankba és az esedékes kamatokat n egyenlő időközönként ($\frac{1}{n}$ évente)csatoljunk a tőkéhez, akkor év végén $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ Ft lesz a felnövekedett összeg.

2.2. Radioaktív bomlás

Tegyük fel, hogy egy radioaktív anyag a $t = 0$ időpillanatban m_0 tömegű. Az idő előrehaladtával a $t > 0$ idő pillanatban jelölje $m(t)$, a $t + \Delta t$ időpillanatban pedig $m(t+\Delta t)$ a sugárzó anyag tömegét. Továbbá feltesszük, hogy a t és a $t+\Delta t$ időpont közötti $\Delta m = m(t+\Delta t) - m(t)$ tömegváltozás egyenesen arányos a t időpontbeli $m(t)$ tömeggel és az eltelt Δt idővel:$\Delta m \sim m(t)\Delta t$. Mivel sugárzásról beszélünk, ezért $\Delta t > 0$ esetén $\Delta m < 0$. Vezessünk be egy $k > 0$ arányossági tényezőt , így $\Delta m = -km(t)\Delta t$, azaz

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -km(t)$$

egyenlőséget kapjuk. Ha $\Delta t \to 0$, akkor

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt} = -km(t)$$

differenciálegyenletet kapjuk. Mivel ez egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet át tudjuk írni úgy, hogy

$$\frac{dm}{m} = -kdt.$$

Ezután integrálva mindkét oldalt

$$\ln m = -kt + c,$$

amelynek, ha vesszük mindkét oldalon az e alapú hatványát kapjuk meg, hogy

$$m = e^{-kt+c} = e^{-kt}e^{+c}.$$

A kezdeti feltételből $m_0 = m(0) = e^0 e^c = e^c$, így a megoldás minden $t > 0$ esetén

$$m(t) = m_0 e^{-kt}.$$

A sugárzó anyagok egyik jellemzője a T felezési idő, amely megadja, hogy mennyi idő alatt tűnik el az anyag tömegének a fele. A T felezési idővel meg tudjuk adni a k bomlási állandót.

$$\frac{m_0}{2} = m(T) = m_0 e^{-kT},$$

amiből kifejezhető, hogy

$$k = \frac{\ln 2}{T}.$$

Most nézzük meg az imént leírtaknak egy alkalmazását.

Kutatásokkal bizonyított, hogy az élő növényi szervezetben a szén 14-es izotópjának a koncentrációja állandó, mivel a szétsugárzódó C^{14} pótlódik a légkörből az asszimiláció során. Azonban, ha egy fa elpusztul, akkor többet nem épül be C^{14}, ezért csökken a fa anyagában a koncentrációja. Találtak egy korhadt fatörzset, amelyben a C^{14} térfogategységre eső mennyisége csak a 90%-a a szokásosnak. Hány évvel ezelőtt pusztult el a fa, ha tudjuk, hogy a C^{14} felezési ideje 5370 év?

A C^{14} mennyiségét a fa elpusztulásától számított t-edik időpillanatban az

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5370}t}$$

képlet adja meg. Jelenleg a fa anyagában lévő C^{14} mennyisége $0,9m_0$, ezért a keresett időt a

$$0,9m_0 = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5370}t}$$

egyenletből kapjuk meg. Leosztva m_0-al és mindkét oldal logaritmusát véve

$$\ln 0,9 = -\frac{\ln 2}{5370}t,$$

melyből

$$t = -5370\frac{\ln 0,9}{\ln 2} = 816$$

Tehát a fa 816 évvel ezelőtt pusztult el. Ezzel a példával lehet illusztrálni a C^{14} kormeghatározás módszerét.

3. fejezet

A mindenki által ismert π

Már időszámításunk előtt is foglalkoztatta az embereket az a szám, amely a kör kerületének és átmérőjének hányadosa. Bár két szám hányadosa, mégsem racionális, sőt e-hez hasonlóan transzcendens szám. Rengetegféleképpen próbálták megközelíteni π értékét, volt ahol 3-nak vették értékét, de a tudomány fejlődésével már egyre jobb közelítéseket tudtak rá adni. π az első 30 tizedesjegyig megadva

$$3,141592653589793238462643383279$$

A következőkben megnézzük π néhány előállítását, előtte írjuk fel e-hez hasonlóan lánctört alakban

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \frac{3^2}{6+\frac{5^2}{6+\frac{7^2}{6+\dots}}}}$$

3.1. Euler-sor

3.1. Tétel. *Euler-sor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

A tétel bizonyításához írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvény Fourier-sorát a $[-\pi, \pi]$ intervallumon!
Mielőtt bármiféle számolásba kezdenénk, definiáljunk néhány dolgot a Fourier-sorokkal kapcsolatban, valamint a számolás közben alkalmazandó parciális integrálást határozott integrálokra.

3.2. Definíció. *Ha* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$*, akkor*

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

neve trigonometrikus polinom.

3.3. Definíció. *A* $P_n(x)$ *polinom a legjobb közelítése az* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *integrálható függvénynek az olyan trigonometrikus polinomok körében, melyekben* $\sin(kx), \cos(kx), k \leq n$ *szerepel, ha*

3.2. Leibniz-sor

3.7. Tétel. *Leibniz-sor*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

Először nézzünk pár definíciót, amelyekre a számolás során szükségünk lesz.

3.8. Definíció. *Azt az $\{s_n\}$ sorozatot, amelynek tagjai*

$$\begin{gathered} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 \\ \vdots \\ s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \end{gathered}$$

a végtelen sor részletösszegeinek nevezzük; s_n a sor n-edik részletösszege.

Mértani sornak nevezzük az

$$a + ar + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

alakú végtelen sorokat, amelyekben a és r valós számok, és $a \neq 0$.

3.9. Definíció. *Ha $|r| < 1$, akkor az $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ mértani sor az $\frac{a}{1-r}$ számhoz konvergál:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \qquad |r| < 1$$

Ha $|r| \geq 1$, akkor a sor divergál.

3.10. Tétel. *(Leibniz-kritérium) Ha az (a_n) sorozat monoton csökkenfi és nullához tart, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ sor konvergens.*

3.11. Tétel. *(Abel tétel) Ha az*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

hatványsor konvergencia-sugara $R \neq 0$, továbbá a sor az $x = R$ helyen konvergens és összege itt s, vagyis

$$s = c_0 + c_1 R + \ldots + c_n R^n + \ldots,$$

akkor

$$\lim_{x=R-0} f(x) = s.$$

A tétel belátásához tekintsük a következő hatványsort:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

Észrevehető, hogy ez nem más, mint a $r = x$ hányadosú mértani sorozat összege. Ha $|x| < 1$, akkor az első n elem összege a mértani sorozat összegképlete alapján meghatározható az

$$S_n = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$$

képlettel, ugyanis jelenleg $a = 1$.

Behelyettesítünk $x = -t^2$-et ($|t| < 1$)

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^n t^{2n} + \ldots = \frac{1}{1-(-t^2)} = \frac{1}{1+t^2}$$

és ezután integráljuk mindkét oldalt

$$\int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^n t^{2n} + \ldots) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$
$$\int_0^x 1dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt - \int_0^x t^6 dt + \ldots + (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt + \ldots = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$
$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \arctan(x) \qquad -1 < x < 1$$

Ha $x = 1$, akkor

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots$$

a Leibniz tétel miatt konvergens. Az $\arctan(x)$ függvény folytonos 1-ben, ezért felírható az

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots = \arctan 1$$
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

Ezzel beláttunk a Leibniz-sort.

4. fejezet

Végtelen szorzatok

Folytatva a π előállításainak bemutatását, most a végtelen szorzatokkal való felírását fogjuk megnézni. Két nevezetes szorzatról fog szó esni, az egyik a Wallis-formula a másik pedig a Viete képlet.
Ha adott egy $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ számsorozat, akkor az elemeiből képzett

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

szimbólumot végtelen szorzatnak nevezzük. A végtelen szorzat értékét a végtelen sorhoz hasonlóan a részletszorzatok sorozatának vizsgálatával célszerű definiálni. A $p_n = a_1 a_2 \ldots a_n$ definícióval megadott sorozat tagjait a $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen szorzat részletszorzatainak nevezzük. A definícióból nyilvánvaló, hogy ha valamely k-ra $a_k = 0$, akkor $n \geq k$-ra $p_n = 0$ is fennáll. Célszerű olyan végtelen szorzatokat vizsgálni, amelyeknek egyik tényezője sem 0. A továbbiakban kikötjük, hogy $a_n \neq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$. Amennyiben a $p = \lim_{n\to\infty} p_n$ véges határérték létezik és $p \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy a $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen szorzat konvergens és határértéke p, ellenkező esetben divergens.

4.1. Wallis-formula

4.1. Tétel.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \ldots (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \ldots (2n-1) \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} \right) = \frac{\pi}{2}$$

4.2. Bizonyítás. *A tétel bizonyításához számítsuk ki az alábbi határozott integrált*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$$

Ez megegyezik $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$*-szel, mert* $y = \sin^n(x)$ *görbe az* $y = \cos^n(x)$ *görbe tükör-*

képe az $x = \frac{\pi}{4}$ egyenesre nézve. Nézzük a parciális integrált.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x)\sin(x)dx =$$

$$\left[-\cos(x)\sin^{n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)(n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)dx =$$

A kiintegrált rész 0 lesz, mert $x = \frac{\pi}{2}$-ben a $\cos(x)$, $x = 0$-ban pedig a $\sin(x)$ vesz fel 0-t, így tovább folytatva az integrált

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)(1-\sin^2(x))dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$$

Rendezve a kapott egyenletet az

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)dx$$

rekurziós formulát kapjuk, melynek ismételt alkalmazásával
páros n esetén

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1(x)dx \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots),$$

páratlan n esetén

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots),$$

ahol

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1(x)dx = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = 1$$

tehát felírható, hogy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx = \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot n}\frac{\pi}{2} & \text{, ha } n \text{ páros} \\ \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-1)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} & \text{, ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Mivel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, így

$$\sin^{n+1}(x) < \sin^n(x) < \sin^{n-1}(x)$$

ugyanis $0 < \sin(x) < 1$, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tehát

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x)dx$$

Az előző képlet alapján

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)dx = \frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x)dx = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n}(x)dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x)dx = \frac{n-2}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-3}(x)dx = \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$$

Ha páros n-re nézzük, és $n = 2\nu$ alakban írjuk fel, akkor

$$\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2\nu}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\nu+1)} < \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2\nu}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2\nu-2)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)}$$

Végigszorozva $\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2\nu}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)}$-vel

$$\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{(2\nu)^2}{(2\nu-1)\cdot(2\nu+1)} < \frac{\pi}{2} < 2\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2\nu-2)\cdot 2\nu}{(2\nu-1)^2}$$

Vizsgáljuk meg az alsó és a felső korlátot

$$\frac{(2\nu)^2}{(2\nu-1)\cdot(2\nu+1)} = \frac{4\nu^2}{4\nu^2-1} > 1$$

valamint

$$\frac{(2\nu-2)\cdot 2\nu}{(2\nu-1)^2} = \frac{4\nu^2-4\nu}{4\nu^2-4\nu+1} < 1$$

Ha ν-t elkezdjük növelni az alsó korlát nő, míg a felső csökken, azaz a különbségük folyamatosan csökken, és 0-hoz tart, mert

$$\left(\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2\nu}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)}\right)^2\frac{1}{2\nu} - \left(\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2\nu}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)}\right)^2\frac{1}{2\nu+1} =$$
$$= \left(\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2\nu}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)}\right)^2\frac{1}{(2\nu+1)(2\nu)}$$

Ebből látszik, hogy a különbségük $\frac{1}{2\nu}$-szöröse az alsó korlátnak, tehát

$$\left(\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2\nu}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)}\right)^2\frac{1}{(2\nu+1)(2\nu)} < \frac{\pi}{4\nu},$$

tehát az alsó és a felső korlát is $\frac{\pi}{2}$-höz tart, amit $\nu\to\infty$.

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{(2\nu)^2}{(2\nu-1)\cdot(2\nu+1)} = \frac{\pi}{2} =$$
$$\lim_{\nu\to\infty} 2\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2\nu-2)\cdot 2\nu}{(2\nu-1)^2}$$

Ezt felírhatjuk úgyis, hogy

$$\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{(2\nu)^2}{(2\nu-1)\cdot(2\nu+1)}\ldots = \frac{\pi}{2} = 2\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2\nu-2)\cdot 2\nu}{(2\nu-1)^2}\ldots$$

és ilyenkor azt mondjuk, hogy a két végtelen szorzat konvergens és értékük $\frac{\pi}{2}$.

4.3. Megjegyzés. *A Wallis-formula felírható úgy is, ha vesszük a* $\sin(x)$ *végtelen szorzat alakját*

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

és
$x = \frac{\pi}{2}$ *helyettesítést választunk*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n)^n}{(2n-1)(2n+1)}\right)$$

4.2. Viete képlet

A Viete képlet az első analitikus formula a π számra, mely végtelen szorzatként állítja elő a $\frac{2}{\pi}$ számot.

4.4. Tétel. *Viete képlet*

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots$$

Valószínűleg ez az első végtelen szorzat, ami alatt azt értjük, hogy

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \ldots \cdot a_n,$$

ha létezik a határérték.

4.5. Bizonyítás. *Ha* n*-szer alkalmazzuk a* $\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ *képletet, akkor azt kapjuk, hogy*

$$\sin(x) = 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^i}\right)$$

Helyettesítsünk a $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ *képletbe* $t = \frac{x}{2^n}$

$$1 = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{x} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = x.$$

Most vegyük mindkét oldal határértékét, ha $n \to \infty$*, és az előzőek alapján fel tudjuk írni, hogy*

$$\sin(x) = \lim_{n\to\infty} \left(2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^i}\right)\right) = x \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

x *helyébe* $\frac{\pi}{2}$*-t helyettesítve és átrendezve az egyenletet az adódik, hogy*

$$\frac{2}{\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) \cdot \ldots \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \cdot \ldots$$

Felhasználva, hogy $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ *esetén* $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(x)}$, *kapjuk, hogy*

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}, \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}, \ldots$$

amit, ha behelyettesítünk az előző képletbe, akkor a bizonyítandó állítást kapjuk.

4.3. Egyéb π-t előállító formulák

Rengeteg olyan összegképlet van, amelyben szerepel π. Az egyik ilyen Abraham Sharp által megadott

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k 3^{\frac{1}{2}-k}}{2k+1}$$

Másik, talán sokak által ismert Machin-féle képlet is π-t állítja elő

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\frac{1}{5^7} + \frac{1}{9}\frac{1}{5^9} - \frac{1}{11}\frac{1}{5^{11}} + \ldots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\frac{1}{239^3} + \ldots\right)$$

π felírására Srinivaza Ramanujan is tett egy kísérletet a

$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \ldots = \frac{2}{\pi}$$

képlettel, mely összegként a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4n+1)\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\right)^3 = \frac{2}{\pi}$$

alakban írható fel, bizonyítása azonban nem elemi módszerekkel történik. Ramanujan egyik legszebb formulája, egy végtelen összeget és egy végtelen lánctörtet összekapcsoló

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{1 + \ldots}}}}} = \sqrt{\frac{\pi e}{2}}$$

Megdöbbentő, hogy sem a végtelen összeg sem a végtelen lánctört nem fejezhető ki az ismert π és e konstansokkal, és összegük mégis a $\sqrt{\frac{\pi e}{2}}$ konstanssal egyenlő.

4.4. Egy kevésbé ismert sorozat

Létezik egy úgynevezett Pochammer-szimbólum nevű sorozat, mely talán sokak számára ismeretlen, azonban már nagyon régóta jelen van a matematikában. Képlete a következő

$$x_n = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^i}\right)$$

A sorozat mindegyik tagja kisebb 1-nél, így a sorozat monoton fogy, viszont a 0 alsó korlátja neki, ezért konvergens.

5. fejezet

Hatványsorok

A végtelen sorok fontos osztályát képezik a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alakú sorok, amelyeknek az összegét x különböző értékeinél vizsgálunk. Ezeket a sorokat hatványsoroknak nevezzük. Az a_n állandók a hatványsor együtthatói.

5.1. Tétel. *(Cauchy-Hadamard-tétel) A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsorhoz rendeljük hozzá az $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ számot, és legyen*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{l} & \text{, ha } 0 < l < \infty \\ 0 & \text{, ha } l = \infty \\ \infty & \text{, ha } l = 0 \end{cases}$$

A hatványsor az R sugarú és az $x = 0$ középpontú kör belsejében konvergens, a körön kívül pedig divergens.

Nézzük a $\sum x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ hatványsort és írjuk fel a konvergencia-sugarát

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{1}} = 1$$

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tagonkénti deriválásával kapott

$$c_1 + 2c_2 + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots$$

hatványsornak ugyanaz a konvergencia-sugara, mint az eredeti hatványsornak.

Vegyük az

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

feltéve, hogy $|x| < 1$. Alkalmazzuk az $x = -t$ helyettesítést, így

$$1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots = \frac{1}{1+t}$$

ha $|t| < 1$. Deriválva mindkét oldalt

$$-1 + 2t - \ldots + (-1)^n n t^{n-1} + \ldots = \frac{-1}{(1+t)^2}$$

kapjuk, majd ha végigszorozzuk $(-t)$-vel az egyenletet

$$t - 2t^2 + \ldots + (-1)^{n+1} n t^n + \ldots = \frac{t}{(1+t)^2}$$

Ha $t = \frac{1}{2}$ helyettesítést választunk, akkor

$$\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2^2} + \ldots + (-1)^{n+1} n \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{3}{2})^2} = \frac{2}{9}$$

Most deriválás helyett integráljuk a $[0, x]$ intervallumon. Ekkor

$$\int_0^x 1dt - \int_0^x tdt + \int_0^x t^2 dt - \ldots + (-1)^n \int_0^x t^n dt + \ldots = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$$
$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \ln(1+x)$$

Helyettesítsünk $x = 1$-et így megkapjuk a váltakozó előjelű harmonikus sort

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \ldots = \ln 2$$

Tehát az $\ln 2$ felírható hatványsor összegeként a következő képlettel

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \ln 2$$

Ha $x = -t^2$ helyettesítést választunk, akkor

$$1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^n t^{2n} + \ldots = \frac{1}{1+t^2}$$

adódik, amit integráljunk a $[0, x]$ intervallumon.

$$\int_0^x 1dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt - \ldots + (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt + \ldots = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \arctan(x)$$

$x = 1$-ben

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

Azaz a $\frac{\pi}{4}$ hatványsora a következő

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

ami megegyezik a 3.2. fejezetben bemutatott Leibniz-sorral.

5.1. Euler-formula

Ebben az alfejezetben a matematika egyik legszebb képletét fogjuk megnézni, ez pedig nem más mint az Euler-formula. Ismert, hogy az akárhányszor folytonosan differenciálható függvények Taylor-sorba fejthetők. A levezetéshez írjuk fel az e^x a $\sin(x)$ és a $\cos(x)$ Taylor-sorát, amik a következőek

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

Ezek a sorok bármely $x, t \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergensek. Az első sor segítségével könnyen értelmezhető a komplex exponenciális függvény. Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor legyen

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Legyen $t \in \mathbb{R}$ és $z = it$, ekkor

$$e^{it} = 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{(it)^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}$$

Szorozzuk meg a második sort i-vel és adjuk össze a harmadik sorral. Az abszolút konvergencia miatt az összeadást akármilyen sorrendben végezhetjük, a konvergencia megmarad és az összeg sem változik.

$$\cos(t) + i\sin(t) = 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + i\frac{t^5}{5!} - \ldots + \frac{(it)^n}{n!} + \ldots = e^{it}$$

Ezzel elő is állítottuk a nevezetes Euler-formulát.

5.2. Állítás. *Minden valós t-re* $\cos(t) + i\sin(t) = e^{it}$

Ha $t = \pi$ helyen írjuk fel az Euler-formulát, akkor

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$$

tehát

$$e^{i\pi} = -1$$

amely a matematika minden érdekes számát tartalmazza.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Mezei Istvánnak, hogy segítségével, hasznos tanácsaival és rendszeres konzultációival hozzájárult szakdolgozatom elkészítéséhez.

Irodalomjegyzék

[1] Laczkovich Miklós, T.Sós Vera: *Analízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, (2005).

[2] Laczkovich Miklós, T.Sós Vera: *Analízis II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, (2007).

[3] Dr. Máté László: *Rekurzív sorozatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, (1980).

[4] Szemjon Grigorjevics Gingyikin: *Történetek fizikusokról és matematikusokról*, Typotex, Budapest, (2003).

[5] Balázs Márton, Kolumbán József : *Matematikai analízis*, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, (1978).

[6] szász Pál: *A differenciál- és integrálszámítás elemei I-II.*, Typotex, Budapest, (2009).

[7] Urbán János: *Határérték-számítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1975).

[8] Mezei István, Faragó István, Simon Péter: *Bevezetés az analízisbe*, Typotex, (2013) http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/_Mezei_Bev_Anal.pdf.

[9] George B. Thomas, Jr., Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano: *Thomas-féle Kalkulus III.*, Typotex, Budapest, (2007).

[10] Pfeil Tamás: *Fejezetek az analízisből órai jegyzet* (2012/2013/2.félév).

[11] *http://en.wikipedia.org/wiki/E_(mathematical_constant)*

[12] *http://mathworld.wolfram.com/e.html*

[13] *http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html*

[14] *http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0038_matematika_Balka_Richard_Egri-Nagy_Attila_Juhasz_Tibor-Matematikatortenet_problemakon_keresztul/ch04s03.html*

[15] Sikolya Eszter: *Bsc Analízis I. előadásjegyzet* http://bolyai.cs.elte.hu/$\sim seszter/oktatas/$2009_10_1$/BSc_ea/BSc_analizis_I_eloadas.pdf$.

Nyilatkozat

Név: Pirka Ágnes
ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc
Neptun azanosító: YV0Y1I
Szakdolgozat címe: Nevezetes sorozatok és sorok(az e és a π előállításai)

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2014.05.30.

a hallgató aláírása