EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR
SZÁMÍTÓGÉPTUDOMÁNYI TANSZÉK

ADOTT BŐSÉGŰ REGULÁRIS GRÁFOK

BSc Szakdolgozat

Tinku Krisztina

Matematika BSc
Elemző szakirány

Témavezetők:
Szőnyi Tamás
egyetemi tanár

Héger Tamás
tudományos segédmunkatárs

Budapest
2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A szakdolgozatomban extremális gráfelmélettel, azon belül is adott bőségű, reguláris gráfokkal fogok foglalkozni. Ezen gráfok közül a minimális csúcsszámúakat kalitkagráfoknak nevezzük. Az 1960-as években kezdték el kidolgozni a gráfelmélet ezen ágát. Ebben a témakörben olyan matematikusok kutattak, mint például Robertson, Wong, Sachs vagy éppen Erdős Pál.

Elsőként gráfelméleti alapismerekről fogok írni. Majd a második fejezetben a reguláris gráf fogalmát fogom bevezetni. Az utolsó témakörben a regularitás mellett adott bőségű gráfokat fogok vizsgálni. Ezen belül egy speciális alosztályt, a Moore-gráfokat fogom bemutatni.

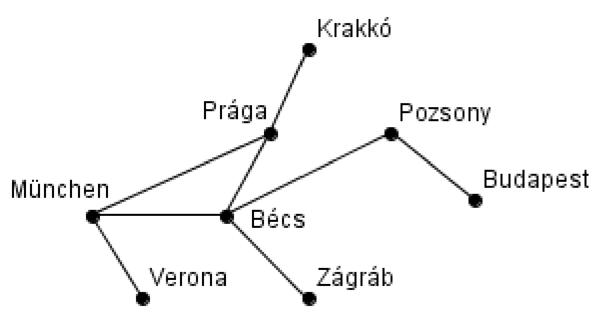
Azért választottam ezt a témát, mert még a mai napig is nagyon sok megválaszolatlan kérdést tartalmaz, hiszen nagy bőség és fokszám mellett nagyon keveset tudunk a kalitkagráfokról, illetve Moore-gráfokról. Ezen nyitott kérdéseket a szakdolgozatom végén foglalom össze.

1. fejezet

Gráfelméleti alapismeretek

1.1. Definíció (Egyszerű gráf). *Vegyünk egy $V(G)$ halmazt, ezt nevezzük a csúcsok halmazának, illetve vegyük a $V(G)$ halmaz kételemű részhalmazainak egy tetszőleges $E(G)$ halmazát (ezt nevezzük az élek halmazának). Ekkor a $(V(G), E(G))$ párt egyszerű gráfnak nevezzük.*

Nézzük a csúcsokat mint helyszíneket, míg az élek összeköttetést jelentenek a különböző helyek között.



1.1. ábra. A városok és a közöttük lévő összeköttetések

Megkülönböztetünk irányított és irányítatlan gráfokat. Irányítatlan esetben a csúcsok közti kapcsolat szimmetrikus, míg írányított gráfoknál ez nem mindig áll fenn. A dolgozatban lényegében egyszerű gráfokról beszélek, de megemlítem a hurokél és a párhuzamos élek szemléletes definícióját is. A definíciók leírásánál az [5] és a [4] tárgyalásmódját követem.

1.2. Definíció (Párhuzamos él). *Legyen v_1 és v_2 a G gráf két csúcsa. Ha v_1-et és v_2-t egynél több él köti össze, akkor azokat többszörös éleknek, vagy párhuzamos éleknek nevezzük.*

1.3. Definíció (Hurokél). *Egy élt hurokélnek hívunk, ha a kezdőpontja és a végpontja megegyezik.*

Általában egy gráfban megengedünk párhuzamos és hurokéleket is (az egyszerű gráfoktól eltérően).

1.4. Definíció (Fokszám). *A csúcs fokszáma a belőle kiinduló élek száma. Ha egy adott csúcsban egy hurokél van, akkor az a fokszámot kettővel növeli meg.*

Ám a városok között nemcsak közvetlen összeköttetésről beszélhetünk.

1.5. Definíció (Séta). *Egy csatlakozó élsorozatot sétának nevezünk. Vagyis a séta egy olyan $v_1e_1v_2e_2\dots v_s$ sorozat, ahol $v_i \in V(G)$, $e_i \in E(G)$, és e_i a v_i és v_{i+1} csúcsok között megy. A felhasznált élek számát a séta hosszának nevezzük.*

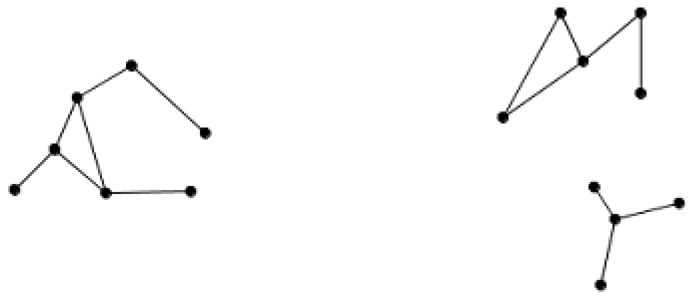
1.6. Definíció (Vonal, út). *Ha a sétában minden él különböző, akkor vonalnak, ha pedig semelyik él és semelyik csúcs sem szerepel kétszer egy sétában, akkor útnak nevezzük.*

1.7. Definíció (Körséta, körvonal, kör). *Az olyan sétákat, ahol a kezdőpont és a végpont megegyezik (azaz $v_1 = v_s$) körsétának hívjuk. Körvonalnak nevezzük azokat a sétákat, ahol az élek különbözőek és $v_1 = v_s$. Ha minden él, és a kezdőpontot és a végpontot kivéve minden csúcs különböző, akkor körről beszélünk.*

1.8. Definíció (Összefüggő gráf). *G összefüggő, ha tetszőleges v_i, v_j csúcspárra létezik $v_i \to v_j$ séta.*

1.9. Definíció (Részgráf). *Vegyük a $G(V, E)$ gráfot. Ekkor $G'(V', E')$ részgráfja G-nek, ha $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, továbbá $\forall$ $\{u, v\} \in E'$ esetén $u, v \in V'$.*

1.10. Definíció (Komponens). *A maximális összefüggő részgráf neve összefüggőségi komponens. Maximális abban az értelemben, hogy sem több csúcsot, sem több élt nem vehetünk hozzá úgy, hogy összefüggő maradjon.*



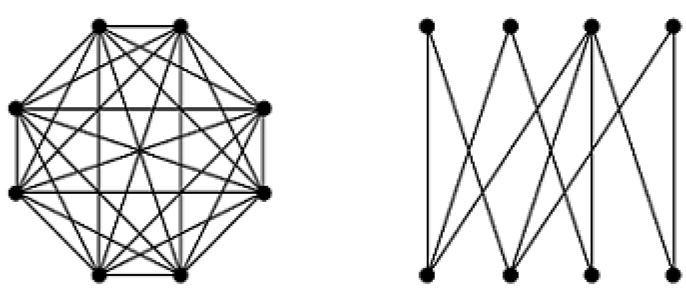
1.2. ábra. Összefüggő és nem összefüggő gráf

Egy nem összefüggő gráf csúcsdiszjunkt komponensek uniója, vagyis él csak a komponenseken belül futhat, azok között nem. Az 1.2. ábrán a második gráf két komponensből áll.

1.11. Definíció (Átmérő). *Legyen d azon legkisebb pozitív szám, melyre a gráf bármely v csúcsából van legfeljebb d hosszúságú út a gráf bármely w csúcsába. Ekkor d a gráf átmérője.*

1.12. Definíció (Teljes gráf). *Legyen G egyszerű gráf. Ekkor G teljes, ha mindegyik csúcs mindegyikkel össze van kötve, azaz minden él be van húzva. Az n csúcsú teljes gráf jelölése: K_n.*

Például az n csúcsú teljes gráfok átmérője 1, míg az n csúcsú kör átmérője $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Vegyük észre, hogy K_n-nek $\binom{n}{2}$ éle van.



1.3. ábra. A 8 csúcsú teljes gráf és egy páros gráf

1.13. Definíció (Páros gráf). *Ha egy gráf csúcsai két osztályba sorolhatóak úgy, hogy élek csak a két osztály között mennek, akkor a gráfot páros gráfnak nevezzük.*

1.14. Definíció (Teljes páros gráf). *Legyen G egyszerű. Ekkor ha G páros gráf és minden él be van húzva a két osztály között, akkor teljes páros gráfnak nevezzük. Jelölése: $K_{n,m}$, ahol az egyik osztály csúcsainak száma n, míg a másik osztályé m.*

1.1. Gráfok megadása

Bármely gráfot többféleképpen is meg lehet adni az élei és csúcsai segítségével. Legyen $V(G)$ a csúcsok, $E(G)$ pedig az élek véges halmaza. Ekkor a gráfunk: $G(V, E)$. A legegyszerűbb megoldás a csúcsok és az élek felsorolása, de ez nagy gráfoknál igen hosszú lenne. Nézzük meg az 1.1. ábrán látható gráf megadását ezzel a megoldással!

Csúcsok: Verona, München, Bécs, Zágráb, Prága, Krakkó, Pozsony, Budapest
Élek: Verona-München, München-Bécs, München-Prága, Bécs-Zágráb, Bécs-Prága, Bécs-Pozsony, Pozsony-Budapest, Prága-Krakkó

Látszik, hogy ez valóban hosszadalmas, ezért ehelyett előállíthatjuk a gráf adjacencia (avagy szomszédsági) mátrixát, melynél a mátrix sorait és oszlopait a csúcsoknak feleltetjük meg. Legyen a_{ij} a mátrix i-edik sorának j-edik eleme. Ekkor $a_{ij} = 0$, ha az i-edik csúcs nincs összekötve a j-edikkel, míg $a_{ij} = 1$, ha i-t és j-t él köti össze. Látszik, hogy az adjacencia mátrix mindig négyzetes. Ha a gráf irányítatlan, akkor a szomszédsági mátrix szimmetrikus, ez irányítatott esetben nem mindig igaz. Lássuk a példát adjacencia mátrixszal megadva! A városokat rakjuk ábécé sorrendbe, majd így készítsük el a mátrixot!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Egy másik megadási mód az éllista. Ekkor felsoroljuk a csúcsokat egymás alatt, és mindegyik mellé odaírjuk azon csúcsokat, melyekkel él köti össze.

Bécs: München, Pozsony, Prága, Zágráb
Budapest: Pozsony
Krakkó: Prága
München: Bécs, Prága, Verona
Pozsony: Bécs, Budapest
Prága: Bécs, Krakkó, München
Verona: München
Zágráb: Bécs

1.2. Gráfok színezése

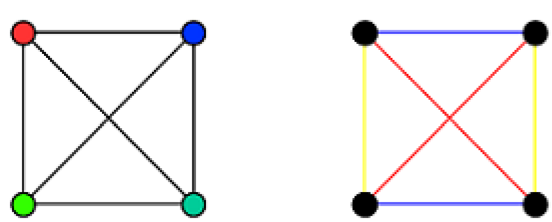
A gráfok éleit és csúcsait tudjuk színezni. A csúcsoknál jó színezésről akkor beszélhetünk, ha egy él két végpontja minden esetben különböző színű. Éleknél a jó színezés az, ha bármely, egy csúcsból induló élek különböző színűek.

1.15. Definíció (Kromatikus szám). *Egy G gráf kromatikus száma a legkisebb színszám, amellyel a csúcsok jól színezhetőek. Jele:* $\chi(G)$.

1.16. Definíció (Élkromatikus szám). *A gráf élkromatikus száma a legkisebb színszám, amellyek az élek jól színezhetőek. Jele:* $\chi'(G)$.

Legyen K_s az s csúcsú teljes gráf. Ekkor

$$\chi(K_s) = s.$$



1.4. ábra. A K_4 csúcs- és élszínezése

Vagyis az s csúcsú teljes gráf csúcsait s színnel tudjuk jól kiszínezni, kevesebbel nem. Ez triviális, hiszen mindegyik csúcs mindegyikkel össze van kötve.

Az élkromatikus számáról pedig tudjuk, hogy

$$\chi'(K_s) = \begin{cases} s-1 & \text{ha } s \text{ páros} \\ s & \text{ha } s \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Az n hosszú körök kromatikus és élkromatikus számát könnyű megvizsgálni.

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{ha } n \text{ páros} \\ 3 & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ha n páros, akkor elég mindössze két szín, hiszen felváltva tudjuk színezni a csúcsokat. Ha n páratlan, akkor két szín nem elég, hiszen az utolsó csúcs színezésekor ütközés lenne, így kell még egy harmadik szín is. Hasonlóképpen belátható, hogy ez igaz az élkromatikus számra is. Vagyis ha n páros akkor az egymás után következő éleket felváltva színezhetjük két színnel, míg ha n páratlan akkor ez a színezés működik az utolsó előtti élig, majd az utolsót egy új színnel kell kiszíneznünk. Vagyis

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{ha } n \text{ páros} \\ 3 & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

1.1. Állítás. *Ha H részgráfja G-nek, akkor*

$$\chi(H) \leq \chi(G)$$

$$\chi'(H) \leq \chi'(G).$$

Ebből következik, hogy ha K_s részgráfja G-nek, akkor

$$\chi(K_s) \leq \chi(G).$$

De tudjuk, hogy $\chi(K_s) = s$, vagyis azt kapjuk, hogy

$$s \leq \chi(G).$$

Amennyiben G-nek C_n a részgráfja, és n páratlan, az előző állítások alapján következik, hogy

$$\chi(C_n) \leq \chi(G)$$

$$3 \leq \chi(G).$$

Vegyük észre, hogy egy gráf pontosan akkor páros, ha a kromatikus száma legfeljebb 2. Ez könnyen belátható, hogy egyenértékű azzal, hogy a gráfban nincsenek páratlan hosszú körök (lásd például [4]).

1.3. Hamilton-út és Hamilton-kör

1.17. Definíció (Hamilton-út). *Legyen G egyszerű. A Hamilton-út olyan út a gráfban, amely G minden csúcsán pontosan egyszer megy át.*

1.18. Definíció (Hamilton-kör). *Olyan kör a gráfban, mely minden csúcsot pontosan egyszer tartalmaz.*

1.2. Állítás. *Ha G gráfban van Hamilton-kör, akkor egy tetszőleges csúcsot törölve a gráfban biztosan lesz Hamilton-út, és így összefüggő marad.*

1.3. Állítás (Szükséges feltétel Hamilton-kör létezésére). *Ha G-ben van Hamilton-kör, akkor a gráfból tetszőleges k darab csúcsot törölve akárhogyan, a gráf legfeljebb k darab komponensre esik szét.*

Bizonyítás. Színezzük meg a gráf éleit! Legyenek azon élek zöldek, melyek szerepelnek a Hamilton-körben, a maradék pedig kék. Egy csúcs törlésével a gráfban biztosan lesz Hamilton-út, ha eredetileg volt benne Hamilton-kör, továbbá a gráf biztosan összefüggő marad. Nézzük mi történhet, ha egy újabb csúcsot kitörlünk! Ha a Hamilton-út végéről töröljük ki az adott csúcsot, akkor eggyel rövidebb Hamilton-utat kapunk. Ha közbenső csúcsot törlünk ki, akkor a gráf legrosszabb esetben két részre eshet szét. Persze maradhat összefüggő is, hiszen bár a Hamilton-utat ketté vágtuk, a két komponenst összeköthetik kék élek. Vagyis akárhányszor törlünk egy tetszőleges csúcsot, legfeljebb egy zöld utat tudunk legfeljebb két részre osztani, tehát minden új törléssel maximum egy új komponenst tudunk létrehozni. $\square$

1.4. Állítás (Szükséges feltétel Hamilton-út létezésére). *Legyen G-ben Hamilton-út. Ekkor G-ből tetszőleges k csúcsot törölve a gráf legfeljebb $k+1$ komponensre esik szét.*

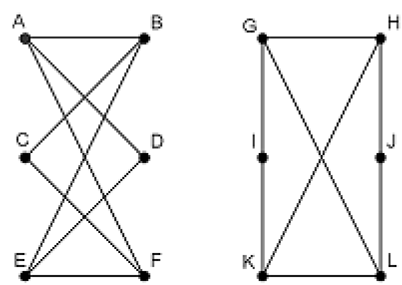
1.4. Izomorfizmus, automorfizmus

Vizsgáljuk meg, hogy mikor tekintünk két egyszerű gráfot egyformának! Vagyis arra a kérdésre szeretnénk választ kapni, hogy két gráf mikor izomorf. Vegyük $G(V,E)$ és $G'(V',E')$ (egyszerű) gráfokat.

1.19. Definíció (Izomorfizmus). *Tegyük fel, hogy a G és G' gráfok között megadható egy $V \leftrightarrow V'$ kölcsönösen egyértelmű leképezés úgy, hogy bármely $v_1, v_2 \in V$ csúcsokra igaz, hogy ha v_1, v_2 között van él G-ben, akkor a neki megfelelő $v'_1, v'_2 \in V'$ csúcsok között is fut él G'-ben, míg ha v_1, v_2 nincs összekötve, akkor v'_1, v'_2 között sem fut él. Ekkor a leképezést izomorfizmusnak nevezzük.*

1.20. Definíció (Izomorf gráfok). *Két gráfot izomorfnak nevezünk, ha van köztük izomorfizmus.*

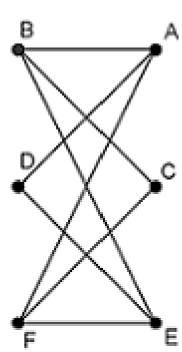
Az alábbi képen két izomorf gráfot látunk, melyekre például az alábbi f leképezés lesz izomorfizmus: $f(A) = G$, $f(B) = H$, $f(C) = J$, $f(D) = I$, $f(E) = K$, $f(F) = L$.



1.5. ábra. Izomorf gráfok

1.21. Definíció (Automorfizmus). *A gráf automorfizmusa az önmagával vett izomorfizmusát jelenti. Azaz $G(V, E)$ esetén az $f : V \to V$ bijektív leképezés automorfizmus, ha $\{v_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow \{f(v_i), f(v_j)\} \in E$.*

Vegyük például az alábbi ábrát, melyre az f automorfizmust adtuk meg: $f(A) = B$, $f(B) = A$, $f(C) = D$, $f(D) = C$, $f(E) = F$, $f(F) = E$.



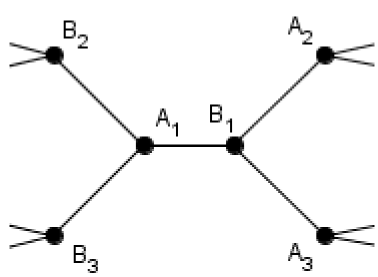
2. fejezet

Reguláris gráfok

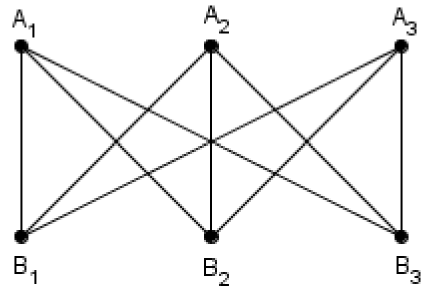
2.1. Definíció (k-reguláris gráf). *Egy G gráfot akkor nevezünk regulárisnak, ha minden csúcsának fokszáma azonos. Ha a közös fokszámot k-val jelöljük, akkor beszélünk k-reguláris gráfról.*

2.1. Feladat. *Egy egyetem minden oktatója három másik kollegájával levelezik. Az egyetemnek legalább hány oktatója van, ha nincs három olyan tanár, akik közül mindenki mindenkivel levelezik?*

Induljunk ki onnan, hogy van két oktató, akik leveleznek egymásssal. Legyenek ők A_1 és B_1. A feladat szerint ekkor még mindkettejüknek további két másik kollegájukkal kell levelezniük. Vegyük fel tehát az A_2, A_3, B_2 és B_3 pontokat, és A_1-et kössük össze B_2-vel és B_3-mal, míg B_1-ből menjen út A_2-be és A_3-ba. Ha az eddig felvett pontok között lenne kettő azonos, akkor lenne három olyan oktató, akik közül mindenki mindenkivel levelezne, de ez ellent mondana a feladatnak. Így tehát azt kaptuk, hogy az egyetemnek legalább hat oktatója biztosan kell, hogy legyen.



Előfordulhat azonban, hogy az egyetemnek pontosan hat oktatója van. Nézzük azt az esetet, amikor B_2 levelezik még A_2-vel, A_3-mal, illetve B_3 is levelezik A_2-vel és A_3-mal is.



Fordítsuk le mindezt a gráfelmélet nyelvére. Ekkor az eredeti feladat úgy szól, hogy tekintsük azt a G gráfot, melynek minden csúcsának a foka három. Legalább hány pontja lehet G-nek, ha nincsen benne háromszög? Ahogy a képekről leolvasható a csúcsoknak a tanárok felelnek meg, és két csúcs között él megy, ha a nekik megfelelő oktatók leveleznek egymással.

A feladat során az [1] gondolatmenetét követtem.

2.1. Reguláris gráfok kis fokszámmal

0-reguláris gráfok

Ekkor nyilvánvalóan a gráf nem tartalmaz éleket, hiszen minden csúcs foka 0. Vagyis a gráf csupa izolált pontból áll.

1-reguláris gráfok

Ha a gráf minden csúcsának foka egy, akkor csak egy-egy éllel összekötött csúcspárokat tartalmaz. Triviális megfigyelés, hogy az 1-reguláris gráfok csúcsszámára igaz, hogy párosnak kell lennie.

2-reguláris gráfok

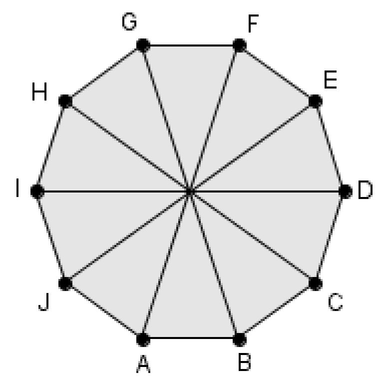
Azon gráfok, melyekben minden csúcsnak a foka kettő, csúcsidegen körökből állnak.

3-reguláris gráfok

Nézzünk ismét egy feladatot!

2.2. Feladat. *Egy tíz fős társaságban vizsgáljuk meg, hogy lehet-e, hogy mindenki pontosan három másik embert ismerjen? És ha a társaságnak tizenegy tagja van?*

Nézzük először azt az esetet, amikor a társaságnak tíz tagja van. Az embereket ültessük egy körasztal köré, majd válasszuk ki egy kitüntetett embert, legyen *ő* x. Először x-et mutassuk be annak a két embernek, aki mellett ül, illetve annak, aki pontosan szemközt ül vele az asztalnál. Így x pontosan három különböző embert ismer. Ha ezt minden csúcsra elvégezzük, akkor minden ember pontosan másik három tagot fog ismerni, vagyis a kérdésre a válasz igen.



Nézzük most azt az esetet, amikor a társaság tizenegy főből áll. Nyilvánvalóan az előző megközelítés most nem fog segíteni, hiszen nem lehet megkonstruálni a fentieknek megfelelő gráfot. Most ahelyett, hogy megpróbálunk egy elégséges példát létrehozni, bizonyítsuk be, hogy a 3-reguláris gráf csúcsszáma mindig páros kell legyen. Ha a tagok száma tizenegy és mindenki három másik tagot ismer, akkor összesen a társaságban 33 ismeretségnek kell lennie. Ám ekkor mivel az ismeretség kölcsönös, minden kapcsolatot duplán vettünk, hiszen mindkét résztvevő félnél megszámoltuk. Így az ismertségek száma: $\frac{11 \cdot 3}{2}$. De ez nem egész szám, vagyis ha a társaság tizenegy főből áll, akkor nem lehet olyan, hogy minden tag pontosan három másik tagot ismer. Vagyis igaz az alábbi állítás.

2.1. Állítás. *Legyen n a gráf csúcsainak száma. Ekkor ha n páros, akkor van n pontú 3-reguláris gráf, ha n páratlan, akkor nincs.* ($n \geq 4$)

Bizonyítás. Ha n páros, akkor a fennt említett módszert alkalmazzuk. A csúcsokat körbe rakjuk, veszünk egy kitüntetett csúcsot, és összekötjük a mellette lévő két csúccsal és a vele szemköztivel, majd ezt minden csúcsra megismételjük. Ha n páratlan, akkor a fenti számolásból általánosságban az ismeretségek számára kapjuk, hogy: $\frac{n \cdot 3}{2}$. Ha n páratlan, akkor a nevező biztosan páratlan, így a tört értéke sosem lesz egész. Vagyis ilyen gráf nem létezik. $\square$

3. fejezet

Kalitkagráfok

3.1. Definíció (Gráf bősége). *Egy G gráf bősége g, ha G-ben lévő legrövidebb kör g hosszú.*

A bőséget másnéven girth-paraméternek vagy kerületnek szokás nevezni. Ha egy gráfban nincs kör (például fa), akkor a bősége végtelen.

3.2. Definíció ((k, g) gráf). *Egy k-reguláris, g bőségű gráfot (k, g) gráfnak nevezünk.*

3.3. Definíció (Kalitkagráf). *Egy reguláris gráfot kalitkagráfnak nevezünk, ha adott bőség és fokszám mellett a lehető legkevesebb csúcsa van.*

A (k, g) gráf egy olyan gráf, ahol minden csúcs foka k és a gráfban nincsen g-nél rövidebb kör, a legrövidebb kör hossza viszont g. A kalitkagráfokkal intenzíven az 1960-as évektől kezdve foglalkoznak, amikor Erdős és Sachs megmutatta, hogy minden $k \geq 2$ és $g \geq 2$ esetén létezik k-reguláris g bőségű gráf. Ezt később bizonyítjuk. A téma korábban is népszerű volt, de ma is intenzíven kutatják. Ezt mutatja például Wong 1982-es cikke [6], továbbá Exoo és Jajcay napokban is frissülő [3] összefoglaló cikke. Ezenkívül magyar nyelven is jelent meg a témában könyvfejezet [1]. $I(k, g)$ jelöli a (k, g) kalitkagráf csúcsszámát. Adott k és g mellett több kalitkagráf is létezhet.

3.1. Ismert kalitkagráfok

Nézzük meg az ismert kalitkagráfok csúcsainak számát egy táblázatban összesítve!

g	$I(3,g)$	$I(4,g)$	$I(5,g)$	$I(6,g)$	$I(7,g)$
3	4	5	6	7	8
4	6	8	10	12	14
5	10	19	30	40	50
6	14	26	42	62	90
7	24	67	152	294	
8	30	80	170	312	
9	58	275			
10	70	384			
11	112				
12	126	728	2730	7812	

Tetszőleges g esetén:

- $k = 1$: ha minden csúcs fokszáma 1, akkor a gráf nem tartalmazhat kört, azaz bősége végtelen.
- $k = 2$: ekkor a gráf körök uniója lehet csak, de tudjuk, hogy a gráf bősége a legrövidebb kör hossza és csúcsszáma minimális, ezért a $(2, g)$ kalitkák g hosszú körök.

Tetszőleges k esetén:

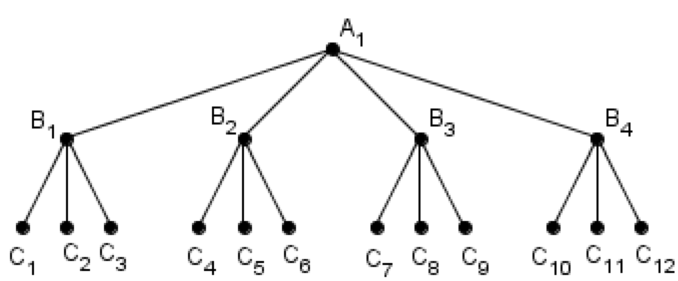
- $(k, 3)$: a K_{k+1} teljes gráf
- $(k, 4)$: a $K_{k,k}$ teljes páros gráf
- $(3, 5)$: Petersen gráf
- $(3, 6)$: Heawood gráf
- $(3, 7)$: McGee gráf
- $(3, 8)$: Levi gráf, Tutte–Coxeter gráf
- $(3, 9)$: Biggs és Hoare gráf (18 darab ilyen gráf van)

- $(3, 10)$: Balaban 10 kalitkagráf, Harries–Wong gráf, Harries gráf
- $(3, 11)$: Balaban 11 kalitkagráf
- $(3, 12)$: Benson gráf
- $(4, 5)$: Robertson gráf
- $(4, 6)$: Wong gráf
- $(5, 5)$: Wong gráf, Foster kalitkagráf, Meringer gráf, Robertson–Wegner gráf
- $(7, 5)$: Hoffman–Singleton gráf

Nézzünk most két olyan feladatot, ahol a gráf csúcsszámára adunk alsó korlátot! Először olyan példát nézünk, ahol bőség páratlan, majd olyat, ahol páros, és látni fogjuk, hogy a bőség paritásától függően a gráfot máshogyan kell felépíteni. A feladatoknál az [1] tárgyalásmódját követtem.

3.1. Feladat. *Legalább hány csúcsa van egy* 4*-reguláris,* 5*-bőségű gráfnak?*

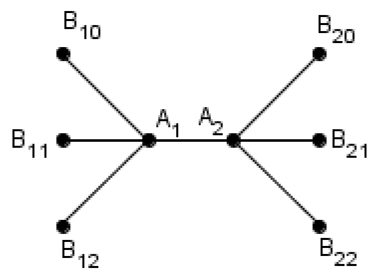
Induljunk ki egy csúcsból! Nevezzük el A_1-nek! Ennek a csúcsnak biztosan lesz négy különböző szomszédja, legyenek ezek B_1, B_2, B_3 és B_4. A B_i csúcsok között nem mehetnek élek, hiszen ekkor a gráfunkban 3 hosszú kör lenne, ez pedig nem teljesítené a kalitkagráf definícióját. Vagyis minden B_i csúcshoz még be kell húznunk három új csúcsot. Legyenek ezek C_j-k, $j = 1 \dots 12$. A C_j csúcsok között már mehetnek élek, tehát egy alsó korlát megállapításához nincs szükség további csúcsok felvételére. Vagyis egy $(4, 5)$ gráfnak legalább 17 csúcsa van.



Ám ha a gráfot be szeretnénk fejezni, azaz a maradék éleket is be akarjuk húzni, akkor 17 csúcs nem lesz elegendő, de még 18 sem, a legkisebb csúcsszám a 19, amelyre a gráfot meg tudjuk konstruálni.

3.2. Feladat. *Most adjunk alsó korlátot a* $(4,4)$ *kalitkagráf csúcsszámára!*

Induljunk ki két csúcsból, A_1-ből és A_2-ből. Az előzőhöz hasonló módon építjük a gráfunkat, vagyis sorra vizsgáljuk az egymás után következő szinteket. Az A_1 csúcshoz és az A_2 csúcshoz is húzunk három-három különböző csúcsot. Legyenek ezek rendre B_{1i}, $0 \le i \le 2$, illetve az A_2-be húzott új pontok legyenek B_{2j}-k, $0 \le j \le 2$. Ekkor látjuk, hogy B_{1i}-ből már húzhatunk élt B_{2j}-be, hiszen az négy hosszú kört eredményezne. Vagyis a $(4,4)$ kalitkagráfnak legalább 8 csúcsa van.



Az előző példákból látszik, hogy ha a bőség páros, akkor két szomszédos csúcsból kell kiindulni, ha páratlan, akkor egyből.

Az előző feladatok alapján próbáljunk meg egy általános alsó becslést adni a gráfok csúcsszámára! Emlékezzünk vissza, hogy $I(k,g)$ jelöli azt a legkisebb pozitív egész számot, ahány csúcsa legalább van a k-reguláris, g bőségű gráfnak. Nem nyilvánvaló, hogy minden k, g párra értelmezve van $I(k,g)$, ezt később bizonyítjuk be. Az alábbi bizonyítás az [1] gondolatmenetét követi.

3.1. Állítás.

$$I(k,g) \ge \begin{cases} 2\cdot\left(1+(k-1)+(k-1)^2+\ldots+(k-1)^{\frac{g}{2}-1}\right) & \textit{ha } g \textit{ páros,}\\ 1+k+k\cdot(k-1)+k\cdot(k-1)^2+\ldots+k\cdot(k-1)^{\frac{g-3}{2}} & \textit{ha } g \textit{ páratlan.}\end{cases}$$

Az összegképlet alapján tudjuk, hogy

$$2\cdot\left(1+(k-1)+(k-1)^2+\ldots+(k-1)^{\frac{g}{2}-1}\right) = 2\cdot\frac{(k-1)^{\frac{g}{2}}-1}{k-2}$$

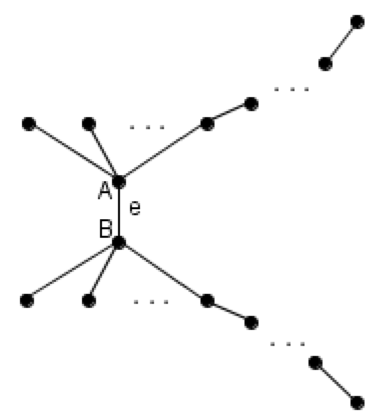
továbbá:

$$1+k+k\cdot(k-1)+k\cdot(k-1)^2+\ldots+k\cdot(k-1)^{\frac{g-3}{2}}) = 1+k\cdot\frac{(k-1)^{\frac{g-1}{2}}-1}{k-2}$$

Az egyszerűség végett nevezzük el az állításban szereplő képlet jobb oldalát $I'(k,g)$-nek. Ekkor

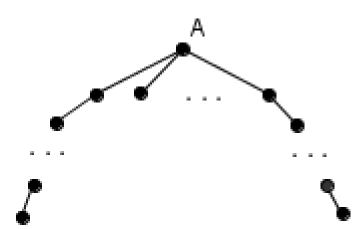
$$I'(k,g)=\begin{cases} 2\cdot\frac{(k-1)^{\frac{g}{2}}-1}{k-2} & \text{ha } g \text{ páros,}\\ 1+k\cdot\frac{(k-1)^{\frac{g-1}{2}}-1}{k-2} & \text{ha } g \text{ páratlan.}\end{cases}$$

Bizonyítás. Nézzük először azt az esetet, amikor g páros! Kiindulunk két csúcsból, A-ból és B-ből, melyeket az e él köt össze. Próbáljuk meg megszámolni, hogy egy szinten hány csúcs van, és eközben megnézzük, hogy a gráfunk hány szintből fog állni.



Ha az ábrán látható módon az A és B csúcs alkotja a nulladik szintet, akkor összesen $\frac{g-2}{2}$, azaz $\frac{g}{2}-1$ szintet lépünk a levelek felé, hiszen g bőségű gráfot szeretnénk létrehozni.

Ekkor a nulladik szinten két csúcs van, A és B, az elsőn már $2\cdot(k-1)$, hiszen A-nak és B-nek ennyi szomszédja van, a másodikon pedig már $2\cdot(k-1)^2$ és így tovább egészen az utolsó szintig, ahol már $2\cdot((k-1)^{\frac{g}{2}-1})$ csúcs van. Figyelembe véve, hogy párhuzamosan indultunk ki A-ból és B-ből, a gráfban lévő csúcsok minimális száma $2\cdot\left(1+(k-1)+(k-1)^2+\ldots+(k-1)^{\frac{g}{2}-1}\right)$. Pontosan ezt szerettük volna belátni. (Ezeken a szinteken a csúcsok páronként különbözőek, hiszen ha lenne egybeesés, akkor volna g-nél rövidebb kör.)



Hasonló gondolatmenettel látjuk be azt az esetet, amikor g páratlan. Ekkor egy csúcsból indulunk ki, legyen ez A. A alkotja a nulladik szintet. Az első szinten A szomszédai vannak, tehát összesen k csúcs. A második szinten ezek szomszédai találhatóak, vagyis itt $k \cdot (k-1)$ és így tovább. Így összesen $\frac{g-1}{2}$ szintet lépünk lefelé, tehát az utolsó szinten a csúcsok száma $k \cdot (k-1)^{\frac{g-1}{2}-1}$. Így összesen a gráfban $1 + k + k \cdot (k-1) + k \cdot (k-1)^2 + \ldots + k \cdot (k-1)^{\frac{g-3}{2}})$ csúcs van. $\square$

3.4. Definíció (Moore gráf). *Azon g bőségű és k-reguláris gráfokat, melyeknek pontosan $I'(k,g)$ csúcsuk van, Moore-gráfoknak nevezzük.*

Nézzük meg az egyes eseteket g szerint! Nyilvánvalóan a $g = 1$ eset azt jelenti, hogy a gráfban hurokél található. A $g = 2$ esetben arról van szó, hogy párhuzamos élek vannak két adott csúcs között.

Ha $g = 3$ akkor, az előbbiek szerint egyszerű gráfról beszélünk, melyben van háromszög. Az ilyen tulajdonságú, k-reguláris gráfok közül a legkisebb csúcsszámú nyilvánvalóan a $k+1$ csúcsú teljes gráf, azaz K_{k+1}.

A $g = 4$ esetben $I(k,4) = 2 \cdot k$. Vagyis a gráf csúcsai két osztályba sorolhatóak úgy, hogy az egy osztályon belüli csúcsok között nem megy él, illetve a két osztály közötti összes él be van húzva. Ezt a gráfot neveztük teljes páros gráfnak, $K_{k,k}$-nak. Vagyis a gráf minden k-ra megszerkeszthető.

A $g = 5$ eset alaperedménye a Hoffman–Singleton-tétel. Idézzük fel, hogy a Moore-korlát ebben az esetben $I'(k,5) = k^2 + 1$.

3.1. Tétel (Hoffman–Singleton-tétel). *Ha létezik* 5 *bőségű, k-reguláris,* k^2+1 *csúcsú gráf, akkor* $k = 2, 3, 7,$ *vagy* 57.

Vagyis a Moore-korlát csupán három esetben ad annyi csúcsot, hogy a gráfot meg lehessen rajzolni, illetve egy esetben vet fel egy eddig megválaszolatlan kérdést:

(i) Ha $k = 2$, akkor tudjuk, hogy a gráf, melynek a csúcsszáma minimális, az ötszög.

(ii) A $k = 3$ esetben látni fogjuk, hogy a gráf befejezhető, azaz a gráf megszerkeszthető a Moore-korlát által adott minimális csúcsszámmal. Ezt a gráfot Petersen-gráfnak nevezzük.

(iii) A $k = 7$ értékre a gráf szintén megkonstruálható, e gráf neve Hoffman–Singleton gráf, mellyel szintén később fogunk foglalkozni.

(vi) Az utolsó esetet a $k = 57$ jelenti. Ez az eset mindeddig nyitott kérdés maradt. Eddig még senki sem volt képes megszerkeszteni azt az 5-bőségű, 7-reguláris gráfot, melynek csúcsszámára a Moore-korlát 3250-et ír elő, ellenben megcáfolni sem tudjuk azt, hogy létezik.

Moore-kalitkák még a $g = 6, 8, 12$ esetben ismertek, sőt tudjuk azt, hogy a $g = 3, 4, 5, 6, 8, 12$ eseteken kívül nem léteznek Moore-kalitkák, ha $k \geq 3$. Ezek az eredmények egyáltalán nem triviálisak, bizonyításuk komoly (lineáris) algebrai apparátust igényel.

3.2. Tétel. *Legyen a bőség* 6,8 *vagy* 12*. Ekkor ha* $k =$ *prímhatvány* $+ 1$ *alakú, akkor a gráfot be lehet fejezni, vagyis elég annyi csúcs, amennyit a Moore-korlát megad.*

Prímhatvány-sejtés

A Prímhatvány-sejtés azt mondja ki, hogy ha $g = 6, 8, 12$ és k nem prímhatvány$+1$ alakú, akkor $I(k, g) > I'(k, g)$.

3.1. Megjegyzés. *Tudjuk, hogy ha* $g = 6$ *és* $k = 7, 11$*, akkor a Moore-gráfot nem lehet megszerkeszteni.*

3.3. Tétel (Feit–Higman-tétel). *Ha* g *páros és* $g \neq 4, 6, 8, 12$ *akkor a gráfot* $k \geq 3$ *esetén nem lehet befejezni* $I'(k, g)$ *csúcson.*

3.4. Tétel (Damarell-, Bannai–Ito-tétel). *Ha* g *páratlan és* $g \geq 7$*, akkor* $k \geq 3$ *esetén nem léteznek* (k, g) *Moore-kalitkák.*

3.2. Átmérő a kalitkagráfokban

Ezt a szakaszt az [1] és a [2] könyvek alapján dolgoztam ki.

3.3. Feladat. *Lássuk be, hogy* G*-nek legfeljebb* $1+k+k(k-1)+\ldots+k(k-1)^{d-1}$ *csúcsa van, ha* d *a gráf átmérője és* k *a maximális fokszám* G*-ben. Mutassuk meg, hogy ha egyenlőség teljesül, akkor* G *reguláris.*

A bizonyítást a 3.1. állítás mintájára fogjuk megoldani. Tekintsünk egy x csúcsot a gráfban. Ekkor a feladat leírása alapján ennek az x csúcsnak legfeljebb k darab szomszédja van, vagyis a nulladik szinten 1, míg az első szinten k darab csúcs áll. A második szinten a k darab csúcsnak összesen $k(k-1)$ szomszédja lehet legfeljebb.

Ha a gráf átmérője d, akkor legfeljebb a d-edik szintig mehetünk le, ahol a csúcsok száma összesen $k(k-1)^{d-1}$. Adjuk össze szintenként a csúcsok számát és megkapjuk a feladatban szereplő kifejezést. A levezetésből az is látszik, hogy ha G-nek pontosan ennyi csúcsa van, akkor minden csúcs foka k, vagyis a gráf k-reguláris.

3.2. Megjegyzés. *Ha a 3.3. feladatban nézett G gráf k-reguláris, akkor G az a Moore-gráf, melynek bősége $g = 2 \cdot d + 1$. Ez könnyen látszik, hiszen ha a gráf átmérője d, akkor összes szinten egyet lépve a levelek felé (természetesen két egymástól független úton haladva), a gráf bősége $g = 2 \cdot d + 1$. Azért kell hozzáadnunk 1-et, mert a két levelet össze kell kötnünk, hogy kört kapjunk. Vagyis a gráfunk k-reguláris, bősége $g = 2 \cdot d + 1$, amiből d-t kiszámolva és behelyettesítve a 3.3. feladat képletébe visszakapjuk a 3.1. állítást.*

3.5. Tétel (Erdős–Sachs; forrás: [2]). *Vegyünk egy k-reguláris, legalább g bőségű G gráfot, melynek csúcsszáma minimális e tulajdonságok mellett. Ekkor*

(i) G átmérője legfeljebb g,

(ii) a bősége pontosan g,

(iii) G csúcsszáma legfeljebb $\frac{k\cdot(k-1)^g}{k-2}$.

Bizonyítás. (i) Bizonyítsuk be indirekte! Vegyünk két csúcsot G-ben, legyenek ezek v és w. Tegyük fel, hogy ezen két csúcs távolsága $g+1$, tehát az átmérő legalább $g+1$. Töröljük el a gráfból v-t és w-t! Most vizsgáljuk meg a kapott G' gráfot és változtassuk meg úgy, hogy az eredeti feltételek teljesüljenek. A v és w csúcsok szomszédainak a száma a törlés után eggyel csökkent, vagyis mivel a gráf eredetileg reguláris volt megtehetjük, hogy v és w szomszédait párokba állítva összekötjük, így a kapott G' gráf újra reguláris lett. A feltevésünk szerint v és w között $g+1$ hosszúságú útnál nem volt rövidebb út, így a kapott gráfban v és w szomszédai között legalább $g-1$ hosszú út van.

Próbáljuk meg belátni, hogy az így kapott G' gráf bősége legalább g, hiszen ekkor ellentmondásra jutunk, mert az eredeti gráfunkban a csúcsok száma nem lehetett minimális.

Vizsgáljuk a gráfban szereplő legrövidebb körök egyikét. Ekkor a törlés és az új élek behúzása után három lehetséges eset van:

- a vizsgált legrövidebb körben nincsen újonnan behúzott él,
- a vizsgált legrövidebb körben egy új él van,
- a vizsgált legrövidebb körben legalább két új él van.

Az első eset azt jelenti, hogy a kört olyan élek alkotják, melyek az eredeti, G gráfban is benne voltak, vagyis a feltétel szerint ennek a hossza legalább g.

A második esetben az új élen kívüli élek által alkotott út legalább $g-1$ hosszú lehet, hiszen ez az út összeköti v egyik szomszédját w egy szomszédjával, erről pedig beláttuk, hogy legalább $g-1$ hosszú. Ehhez az úthoz az új élt hozzávéve legalább g bőségű kört kapunk.

A harmadik esetben lehetséges, hogy a kör tartalmaz egy olyan utat, amely összeköti v és w egy-egy szomszédját, ebben az esetben láttuk, hogy a bőség legalább g. Vagy lehet, hogy a kör úgy épül fel, hogy egy út összeköti v két szomszédját, illetve egy másik út fut w két szomszédja között. Ekkor egy ilyen útnak a hossza legalább $g-2$, hiszen az eredeti gráfunk bősége legalább g. Ekkor a kör hossza a két új éllel együtt $2+2(g-2)$. Erre pedig igaz, hogy legalább g. Vagyis a kapott G' gráf bősége legalább g, de ez ellentmond az eredeti G gráf minimalitásának, tehát G átmérője legfeljebb g.

(ii) Külön vizsgáljuk a páros és a páratlan esetet. Nézzük először azt az esetet, amikor k páros! Tudjuk, hogy a gráfunk legalább g bőségű, lássuk be, hogy legfeljebb g bőségű is. Vegyünk egy x csúcsot, majd ezt töröljük ki a gráfból! Így x szomszédainak $k-1$ lesz a foka, ezért kössük össze őket kettesével, így újra egy k-reguláris gráfot kapunk. Ebben a gráfban biztosan van $(g-1)$ hosszú kör, hiszen az eredeti gráfunk legalább g bőségű volt. A kapott $g-1$ hosszúságú kör biztosan tartalmaz legalább egy új élt, hiszen az nem lehet, hogy ne tartalmazzon egyet sem az újonnan behúzott élek közül. Kettő élt nem tartalmazhat, mert ebben az esetben a kör tartalmazna a két új él között legalább egy $g-2$ hosszúságú utat, és így túl hosszú lenne. Vagyis tudjuk, hogy az adott kör pontosan egy új élt tartalmaz. Ha ezt az élt kivesszük, és visszarakjuk az x csúcsot, akkor látjuk, hogy a gráf bősége legfeljebb g.

A páratlan esetet hasonlóképpen látjuk be, de itt egy élt törlünk, a két végpontjával együtt. Legyen a két csúcs neve x és y. Hasonlóan a páros esethez, kössük össze x szomszédait, illetve kössük össze y szomszédait. Ekkor a gráfban lesz egy legfeljebb $g-1$ hosszú kör, tehát az eredeti gráfunkban kellett lennie egy legfeljebb g hosszú körnek.

(iii) A 3.3. feladatban szereplő kifejezést átírjuk összegképletté, akkor egyértelműen látszik:

$$1 + k + k(k-1) + \ldots + k(k-1)^{d-1} = \frac{1 + k(k-1)^d - 1}{k-2},$$

továbbá tudjuk, hogy az átmérő legfeljebb g, tehát:

$$\frac{k(k-1)^d}{k-2} \leq \frac{k(k-1)^g}{k-2}.$$

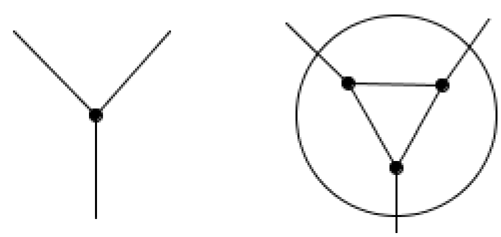
□

Most bizonyítsuk be az egyik legfontosabb tételt. Az alábbi bizonyítás Erdős Páltól és Horst Sachs-tól származik. A tételt a [2] gondolatmenetét követve bizonyítom be.

3.6. Tétel. *Tetszőleges $k \geq 2$ és $g \geq 2$ esetén létezik k-reguláris és g bőségű gráf.*

Bizonyítás. Bizonyítsunk indukcióval! Kettős indukcióval fogjuk belátni a tételt, egyszerre haladunk a bőség és a fokszám mentén is. Tudjuk, hogy a $(2, g)$ kalitkagráfok léteznek, hiszen ezek a g hosszúságú körök. Továbbá tudjuk, hogy léteznek a $(k, 3)$ illetve $(k, 4)$ kalitkagráfok, hiszen ezek rendre a K_{k+1} teljes gráfok, illetve a $K_{k,k}$ teljes páros gráfok.

Tegyük fel, hogy $G(k, g)$, illetve $G'(k', g-1)$ gráfokat már megalkottuk, ahol $k' = |V(G(k, g))|$. Ekkor vesszük a G' gráfot és elkezdjük felfújni. Minden csúcsába belehelyezzük a $G(k, g)$ gráf egy példányát, azaz minden eddigi pont a gráfban már egy kisebb gráf lesz. Legyen ez az új gráfunk G''. Ekkor G'' éleit úgy húzzuk be, hogy G' minden éle $G(k, g)$ egy-egy tetszőleges csúcsába fog menni, azaz minden csúcs foka $(k+1)$ lesz. Tehát kaptunk egy $k+1$ reguláris gráfot. Lássuk be, hogy az így kapott gráf bősége g!



3.1. ábra. A G' gráf egy csúcsa és az ennek megfelelő felfújt csúcs G''-ben

Vegyünk egy C kört G''-ben! Célunk megmutatni, hogy a C kör legalább g hosszú. Ehhez két esetet kell vizsgálni. Az első, hogy C teljesen benne van a $G(k, g)$ egyik példányában, a másik, hogy van olyan éle, amely G''-ben egy G'-ből származó élnek felel meg.

Az első esetben, mivel a G gráf bősége g, azonnal készen vagyunk. A másik esetben legyen C hossza s. Ekkor G'' gráfról térjünk vissza G' gráfra úgy, hogy a csúcsokba helyezett példányokat kivesszük, azaz G'' csúcsait összehúzzuk, így megkapjuk G' gráfot újra. Nézzük meg, hogy ebben a gráfban hogyan néz ki a C körünk! Ekkor látszik, hogy C itt már csak egy körvonal, ami viszont biztosan tartalmaz kört, legyen ez C'. A G'' gráfban C biztosan tartalmazott egy élt $G(k,g)$ egyik példányából, hiszen amikor belépünk a G gráf egyik példányába, akkor a felfújás miatt biztosan használnunk kell G''-beli és $G(k,g)$-beli élt is. Ezért C' rövidebb C-nél, tehát legfeljebb $s-1$ hosszú. De tudjuk, hogy a G' gráf $g-1$ bőségű, tehát a C' kör legalább $g-1$ hosszú. Tehát azt kapjuk, hogy $s-1 \geq g-1$, azaz $s \geq g$. Ezzel beláttuk, hogy G'' legalább g bőségű. Másrészt legfeljebb g bőségű, hiszen a $G(k,g)$ tetszőleges példányában van g hosszú kör. Ezáltal kaptunk egy $k+1$ reguláris, g bőségű gráfot. Így a soron következő gráfot mindig elő tudjuk állítani. □

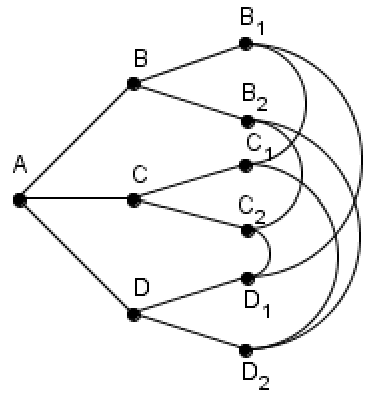
3.3. A $(3,5)$ kalitkagráf: Petersen gráf

3.4. Feladat. *Alkossuk meg a* $(3,5)$ *kalitkagráfot!*

Mivel a bőség páratlan, így induljunk ki egy csúcsból, legyen az A. A szomszédainak vegyük fel B-t, C-t és D-t, melyeknek van további két szomszédjuk, ezek rendre B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2. Az eddig felsorolt 10 csúcs közül semelyik kettő sem lehet azonos, hiszen ha így lenne, akkor gráfban lenne ötnél kisebb hosszúságú kör.

Nézzük meg, hogy ez a 10 csúcs elég-e ahhoz, hogy befejezzük a gráfot. A B_i csúcsok között nem mehet él, hiszen ez három hosszú kört eredményezne ($B-B_1-B_2$). Ugyanez igaz C_j-kre és D_k csúcsokra is. B_i-ből nem mehet egyszerre él C_1-be és C_2-be is, hiszen ekkor négy hosszú kört hoztunk létre: $B_1-C_2-C-C_1-B_1$. Ugyanebből az elgondolásból feltehető az is, hogy B_i-ből nem mehet él egyszerre D_1-be és D_2-be is. Mivel tudjuk, hogy B_1-nek még két szomszédja lesz, így az egyetlen lehetőség, hogy először összekötjük C_j egyikével, például C_1-gyel, majd pedig élt húzunk belőle az egyik D_k csúcsba, például D_1-be.

Hasonlóan összekötjük B_2-t C_2-vel és D_2-vel. Ekkor még négy csúcsnak kettő a foka, vagyis vizsgáljuk meg a maradék csúcsokat! C_1-nek C_2 nem lehet a szomszédja, viszont D_1 sem lehet, hiszen ekkor $C_1-D_1-B_1$ három hosszú kört alkotna. Vagyis C_1-et összekötjük D_2-vel, és behúzzuk az utolsó élt, amely C_2 és D_1 között fut.



3.2. ábra. A Petersen-gráf

Így minden csúcs foka 3 és a gráfban nincsen ötnél rövidebb hosszúságú kör. Tehát a gráfot be tudtuk fejezni 10 csúccsal, azaz $I(3,5) = 10$. A kapott gráf neve Petersen-gráf.

A Petersen-gráfot bár Julius Petersenről nevezték el, aki 1898-ban konstruálta meg, már jóval előtte, 1866-ban rajzolták meg először.

Beláttuk, hogy létezik a Petersen-gráf, most lássuk be, hogy izomorfia erejéig egyértelműen létezik. Vegyünk egy 3-reguláris, 5 bőségű gráfot, melynek 10 csúcsa van. Az előző levezetés alapján ennek a gráfnak a csúcsait meg tudjuk jelölni betűkkel, úgy, hogy az új gráfban akkor van behúzva egy él, ha az az él a kapott Petersen-gráfban is benne van. Ez megfelel az izomorfia definíciójának, tehát a két gráfot nem különböztetjük meg egymástól, azaz a Petersen-gráf egyértelműen létezik.

3.5. Feladat. *Hány darab ötszög található a Petersen-gráfban?*

A Petersen-gráfnak 10 csúcsa van, vagyis a kör első csúcsát tízféleképpen választhatjuk meg. Mivel a Petersen-gráf 3-reguláris, így a kör második csúcsát már csak háromféleképpen választhatjuk ki. A kör harmadik csúcsát már csak kétféleképpen, hiszen a második csúcsnak már csak két szabad éle van, hiszen visszafelé nem mehetünk. Ugyanez igaz a kör negyedik csúcsának kiválasztására, vagyis erre is két lehetőség van.

A Petersen-gráf átmérője kettő, ami azt jelenti, hogy bármely csúcsból bármelyik másikba el lehet jutni két él mentén. Ez biztosítja azt, hogy az öt hosszú kört be lehet fejezni. Az utolsó csúcsra már csak egy lehetőség van, vagyis ez adott, hiszen ha nem így lenne akkor a két különböző kettő hosszú utat egybefűzve egy négy hosszú kört kapnánk, ez pedig lehetetlen. Tehát az összes lehetséges eset $10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

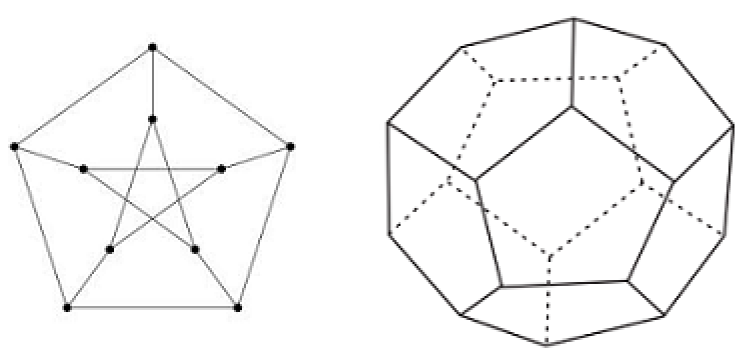
Két kört nem kell különbözőnek tekinteni, ha ugyanazokat a csúcsokat járja be ugyanazon élek mentén, mint egy másik kör, aminek megrajzolását egy másik, ámde az előző körben szereplő csúcsból indítottuk el. Így egy kört összesen $5 \cdot 2 = 10$-szer számoltunk. Tehát a Petersen-gráfban szereplő öt hosszú körök száma $\frac{120}{10} = 12$.

3.6. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy a Petersen-gráfnak hány automorfizmusa van!*

Próbáljuk meg a betűket a csúcsoknak megfeleltetni! Az első, A csúcsot tízféleképpen vehetjük fel, hiszen a gráfnak 10 csúcsa van. A B, C és D csúcsokat már csak hat különböző módon választhatjuk meg, hiszen ha közülük az egyiket lerögzítem, akkor kettő lehetőség marad, tehát a három csúcs összesen hat különböző esetet ad. B_1 megválasztására már csak két lehetőség marad, és ezután vizsgálva az algoritmust mellyel a Petersen-gráfot készítettük el látszik, hogy B_2, C_1, C_2, D_1 és D_2 helye adott, hiszen B_1 meghatározza B_2-t, és ezek után a maradék csúcsnak is csak egy betűt tudunk megfeletetni. Vagyis összesen a Petersen-gráfnak $10 \cdot 6 \cdot 2 = 120$ automorfizmusa van.

3.7. Feladat. *Hasonlítsuk össze a dodekaéder-gráfot a Petersen-gráffal!*

A dodekaéder-gráf a dodekaéder csúcsaiból és élhálózatából áll. Összesen 20 csúcsa és 30 éle van. Hasonlóan a Petersen-gráfhoz minden csúcs foka 3 és a bősége 5.



3.3. ábra. A Petersen-gráf és a dodekaéder-gráf

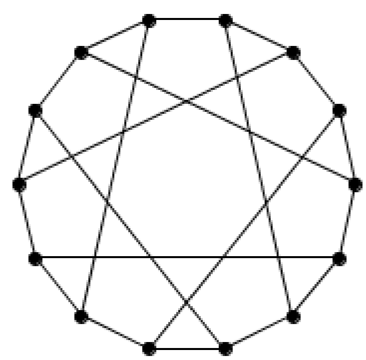
Könnyen megszámolható, hogy a dodekaéder-gráfban is 12 darab ötszög van, hiszen 12 lapja van, és mindegyiket egy öthosszú kör határolja. Ám ezt a gráfot nem hívhatjuk kalitkagráfnak, hiszen csúcsainak száma kétszerese a Petersen-gráféhoz képest, vagyis nem minimális.

A következő gráfokat a [3] alapján ismertetem.

3.4. A $(3, 6)$ kalitkagráf: Heawood gráf

Nevét Percy John Heawood-ról kapta. A Moore-korlát a $(3, 6)$ kalitkagráf csúcsszámára 14-t ír elő. A Heawood gráfnak 14 csúcsa és 21 éle van. 3-reguláris, és bármely benne található kör éleinek száma legalább 6.

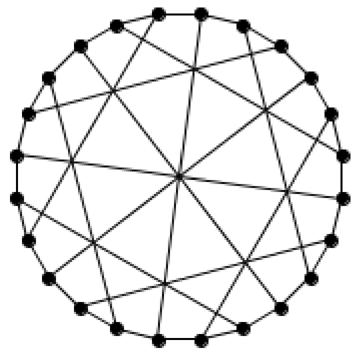
Bármely nála kevesebb csúccsal rendelkező 3-reguláris gráfban rövidebb körök vannak, tehát a gráf kalitkagráf. A csúcsszámát vizsgálva látszik, hogy egyben Moore gráf is. Az ábrán látható, hogy a gráf felrajzolható úgy, hogy a csúcsok egy körön fekszenek, azaz a gráfban van Hamilton-kör. A Heawood gráf megrajzolható úgy is, hogy a csúcsokat két csoportba osztjuk, tehát páros gráf. A gráf összesen 28 darab 6 hosszúságú kört tartalmaz, átmérője 3 és összesen 336 automorfizmusa van.



3.4. ábra. A Heawood gráf

3.5. A $(3, 7)$ kalitkagráf: McGee gráf

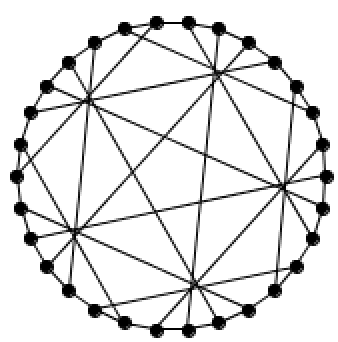
A legkevesebb csúcsszámmal rendelkező 3-reguláris, 7 bőségű gráf. A gráfnak 36 éle van. A Moore-korlát a kalitkagráf csúcsszámára 21-et ír elő, ám 24 csúcsa van, vagyis a McGee gráf a legkisebb olyan gráf a 3-regulárisok közül, amelyik nem Moore-gráf. Először Sachs fedezte fel, de nem publikálta, majd 1960-ban W. F. McGee publikálta, róla kapta a nevét. A gráf átmérője 4, és összesen 32 automorfizmusa van. A gráf csúcskromatikus és élkromatikus száma is 3. Az ábráról jól látszik, hogy egy körre fel lehet rajzolni a csúcsait, tehát van benne Hamilton-kör.



3.5. ábra. A McGee gráf

3.6. A $(3, 8)$ gráf: Tutte–Coxeter gráf

A Tutte-Coxeter kalitkagráfnak 45 éle van. A Moore-korlát a $(3, 8)$ kalitkagráf csúcsszámára 30-at ír elő, és mivel pontosan ennyi csúcsa van, Moore-gráf is. Az átmérője 4, és összesen 1440 automorfizmusa van. Az ábrából is jól látható, hogy a gráfban van Hamilton kör. Tekintsük a gráfot úgy, ahogy a képen van lerajzolva. A gráf csúcskromatikus száma 2, azaz két színnel felváltva tudjuk színezni a csúcsokat úgy, hogy a csúcsok által alkotott kör mentén haladunk. Az élkromatikus száma 3. A Hamilton-körben szereplő éleket felváltva színezzük két színnel, míg a körön kívüli éleket egy harmadik színnel színezzük, hiszen ezeknek nincsen közös csúcsuk.



3.6. ábra. A Tutte–Coxeter gráf

3.7. A $(3,9)$ kalitkagráfok

A 3-reguláris, 9 bőségű kalitkagráfból 18 különböző van, mindegyiknek a csúcsszáma 58. Ezen kalitkák tehát nem Moore-gráfok, hiszen a $(3,9)$ kalitkagráfok csúcsszámára a Moore-korlát 46-ot ír elő. Ezen gráfok közül az elsőt Biggs és Hoare alkották meg. Később többen, például Brinkmann vagy Saager is konstruált meg $(3,9)$ kalitkagráfot. Mindegyik $(3,9)$ kalitkagráf tartalmaz Hamilton-kört.

3.8. A $(3,10)$ kalitkagráfok

A 3-reguláris, 10 bőségű gráfból 3 létezik, a Balaban gráf, a Harries-Wong gráf és a Harries gráf. Mindhárom gráfnak 70 csúcsa és 105 éle van. Ezek sem Moore-gráfok, hiszen csúcsszámuk meghaladja a Moore-korlát által adott alsó becslést, mely 62. A Balaban gráf átmérője 6, ám mindössze 80 automorfizmusa létezik. A gráfban van Hamilton-kör. A csúcskromatikus száma 2, élkromatikus száma pedig 3.

3.9. A $(3,11)$ kalitkagráf: Balaban gráf

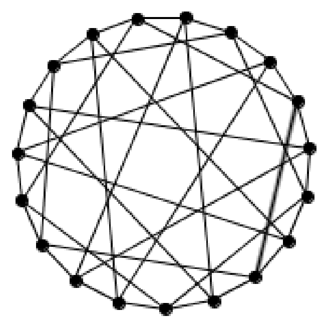
Az előző gráfhoz hasonlóan ezt is Balaban alkotta meg 1973-ban. A $(3,11)$ kalitkagráfra a Moore-korlát által adott alsó becslés 94. Ennek a Balaban gráfnak viszont 112 csúcsa és 168 éle van. A gráf átmérője 8 és összesen 64 automorfizmusa van. Az előzőekhez hasonlóan tartalmaz Hamilton-kört.

3.10. A $(3,12)$ kalitkagráf: Benson gráf

A Benson gráfnak, avagy Tutte 12 kalitkagráfnak 126 csúcsa van, ami egyezik a Moore-korlát által adott becsléssel, tehát egyben Moore-gráf is. A Benson gráfnak összesen 189 éle van. Az átmérője 6, és automorfizmusainak száma 12096. Páros gráf, vagyis a csúcskromatikus száma 2, élkromatikus száma 3. Hamilton-kört szintén tartalmaz.

3.11. A $(4,5)$ kalitkagráf: Robertson gráf

A Robertson gráfnak 19 csúcsa és 38 éle van. A csúcsszáma tehát a Moore-korlát által adott alsó becslést, ami 17, kettővel haladja meg. A gráf átmérője 3, és 24 automorfizmusa létezik. A gráf csúcskromatikus száma 3, míg élkromatikus száma 5. A Hamilton-kört is tartalmazó gráfot Neil Robertson fedezte fel 1964-ben.

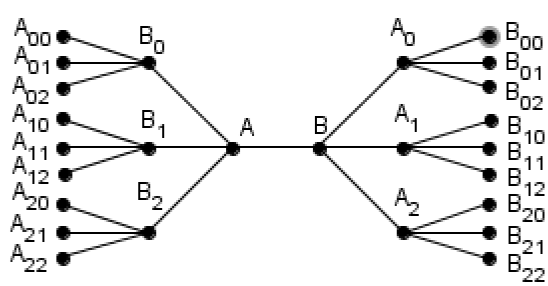


3.7. ábra. A Robertson gráf

3.12. A $(4,6)$ kalitkagráf: Wong-gráf

3.8. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy hány csúcsa van a* $(4,6)$ *kalitkagráfnak!*

Mivel a bőség páros, két csúcsból indulunk ki. Legyenek ezek A és B csúcsok! Ekkor, mivel a gráf 4-reguláris, A-nak is és B-nek is fel kell vennünk további három-három szomszédot. Az A csúcshoz vegyük fel a B_0, B_1 és B_2 csúcsokat, míg B-hez vegyük fel az A_0, A_1 és A_2 pontokat. Ennyi csúcs még nem lesz elég a gráf megalkotásához, hiszen a bőség 6, tehát a mostani levelekhez még további három-három csúcsot fel kell venni, azaz összesen még 18 csúcsot, melyeket az ábra szerint nevezünk el.



Eddig a gráfnak 26 csúcsa van, ami éppen $I'(4,6)$. Vizsgáljuk meg, hogy be tudjuk-e fejezni a gráfot, azaz kell-e még új csúcsokat felvennünk vagy nem ahhoz, hogy a maradék éleket be tudjuk húzni.

Induljunk el az A_{ij} csúcsok felől! Ahhoz, hogy ne rajzoljunk a gráfba hat hosszú körnél rövidebb kört, a következő három feltételnek kell teljesülnie:

(i) Az A_{ij} csúcsokból még három különböző élt kell indítani, melyek közül egyiknek a B_{0x} csúcsok valamelyikébe kell futnia, a másodiknak a B_{1y} csúcsokhoz, míg a harmadiknak a B_{1z} pontok valamelyikébe kell futnia. Ha ez nem teljesülne, akkor négy hosszú kört kapnánk, például: $A_{00} - B_{00} - A_0 - B_{01} - A_{00}$, ha A_{00}-t összekötöm B_{00}-val és B_{01}-gyel is.

(ii) Az A_{ix} és A_{iy} csúcsokból nem indulhat él ugyanabba a csúcsba, mert az 4-es kört adna. Például: $A_{10} - B_{00} - A_{11} - B_1 - A_{10}$.

(iii) Nem lehet két közös szomszédja két különböző csúcsnak, hiszen ekkor 4 hosszú kör alakulna ki: $A_{00} - B_{00} - A_{01} - B_{01} - A_{00}$.

Az (i) feltétel azt mondja ki, hogy az A_{0*} csúcsok háromszor három szomszédja leírható egy 3×3-as mátrixszal, ahol a mátrix i-edik sorának j-edik eleme k, ha $A_{0,i-1}$ szomszédja $B_{j-1,k}$-nak. Hasonlóan az A_{1*} és A_{2*} csúcsok is megadnak egy-egy 3×3-as mátrixot.

Az (ii) feltétel arra mutat rá, hogy az így kapott 3 darab 3×3-as mátrix bármely oszlopában mindegyik szám csak egyszer fordulhat elő.

Az (iii) feltétel szerint bármely két sorban a számok közül kettőnek el kell térnie egymástól.

Ezeknek a feltételeknek megfelelően lehet adni három darab olyan 3×3-as mátrixot, melyek teljesítik ezeket a kritériumokat.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vagyis a gráfot 26 csúccsal be tudtuk fejezni. Ezt a gráfot elsőként Wong alkotta meg 1982-ben. A Wong-gráf megkonstruálásához a [6] és az [1] forrásokat használtam.

3.13. Az $(5, 5)$ kalitkagráfok

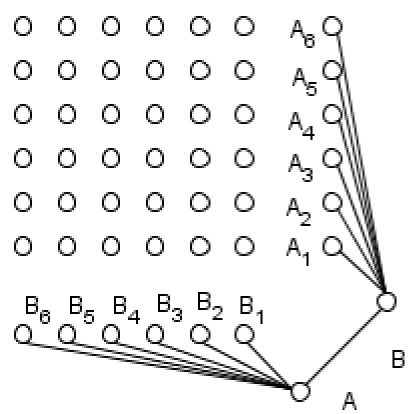
Négy darab 5-reguláris, 5 bőségű gráf ismert, a Wong gráf, a Foster kalitkagráf, a Meringer gráf és a Robertson-Wegner gráf. Sokáig úgy vélték, hogy csak három darab $(5, 5)$ kalitkagráf van, míg 1999-ben Meringer felfedezte a negyediket. Az $(5, 5)$ kalitkagráfoknak a Moore-korlát szerint minimum 26 csúcsa kell legyen. Mind a négy gráfnak 30 csúcsa és 75 éle van. Az automorfizmusaik száma eltérő, ezek rendre 120, 30, 96 illetve 20.

3.14. A $(6, 5)$ kalitkagráf

A gráfnak 40 csúcsa van, tehát hárommal több a Moore-korlát által előírt 37-nél. Megkonstruálható úgy is, ha a Hoffman-Singleton gráfból kitöröljük egy Petersen-részgráf csúcsait. Ezen $(6, 5)$ kalitkagráfnak 480 automorfizmusa van.

3.15. A $(7, 5)$ kalitkagráf: Hoffman–Singleton gráf

Vizsgáljuk meg a 7-reguláris, 5 bőségű gráfot, melynek 50 csúcsa van! A megkonstruálását a páratlan bőségnél megszokottól eltérő módon kezdjük. Vegyünk két csúcsot, legyenek ezek A és B. Kössük össze őket! Mindkét csúcshoz vegyünk fel újabb csúcsokat! Legyenek A szomszédai $B_1, B_2, \ldots, B_6$, illetve hasonlóan B-ből menjen él $A_1, A_2, \ldots, A_6$-ba. Az eddig létező csúcsok között nincsen több él, hiszen ha lenne, akkor a gráf tartalmazna ötnél rövidebb kört. Tudjuk, hogy 36 csúcsot még biztosan fel kell vennünk, tegyük meg ezt az ábrán látható módon.



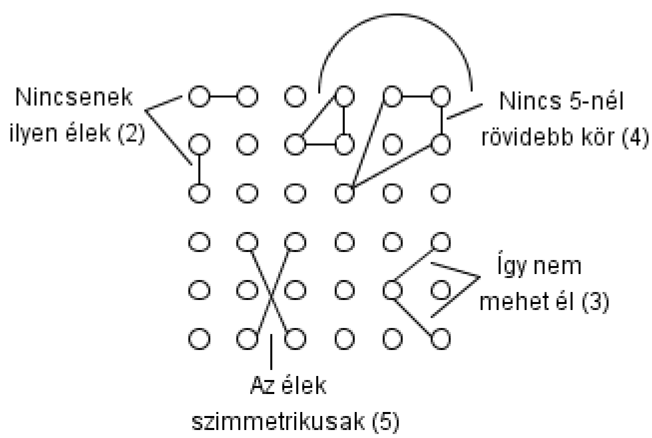
Az A_i és B_j csúcsoknak is egyenként hat-hat szomszédja van e 36 csúcs között. Egyértelmű, hogy ahhoz, hogy elkerüljük a négyes köröket, nem mehet ugyanabba a csúcsba él B_i-ből és B_j-ből, hiszen ezek már A-val össze vannak kötve. Ugyanez érvényes bármely két A_i és A_j csúcsra is. A 36 csúcsot feloszthatjuk hat darab 6 csúcsból álló csoportba. Minden csoportra igaz, hogy az elemei ugyanazzal az A_i vagy B_j csúccsal vannak összekötve. Vagyis lesznek A_i szerinti és B_j szerinti csoportok. Vegyünk egy A_i és egy B_j szerinti csoportot is! Ekkor ezeknek legfeljebb egy közös csúcsuk lehet, hiszen ha nem így lenne, keletkezne 4 hosszú kör. Például: legyen a két csoportnak két közös eleme, ezeket nevezzük v-nek és w-nek. Ekkor a négy hosszú kör: $A_1 - v - B_1 - w - A_1$. Ez azt mondja meg, hogy bármely két A_i és B_j csúcshoz legfeljebb egy olyan csúcs tartozik, mely mindkettővel összekötettésben áll. De tudjuk, hogy minden csúcshoz még hat élt kell behúznunk és összesen 36 izolált csúcsunk van, tehát ez csakis úgy lehetséges, hogy minden (A_i, B_j) csúcspár pontosan egy közös csúccsal van összekötve. Ez azt jelenti, hogy a még izolált csúcsokat elnevezhetjük aszerint, hogy melyik A_i illetve B_j csúcsokkal van összekötve. Ha például v csúcs A_1-gyel és B_5-tel van összekötve, akkor őrá (A_1, B_5)-ként hivatkozunk. Így adjuk meg a csúcsok koordinátáit.

Tudjuk, hogy már csak a gráfunkba a maradék 36 csúcs közé kell éleket behúzni úgy, hogy ne legyen benne 5-nél rövidebb kör, és minden csúcs foka 7 legyen. Fogalmazzunk erre általános szabályokat!

(1) Bármely (A_i, B_j) csúcsból pontosan 5 él indul ki.

(2) Nem húzhatunk be két csúcs között élt, ha azon két csúcsnak bármelyik koordinátája megegyezik. Ha így tennénk, akkor 3 hosszú kör keletkezne: $A_1-(A_1, B_1)-(A_1, B_2)-A_1$.

(3) Nem lehet, hogy egy csúcs két olyan csúccsal legyen összekötve, melyeknek az egyik koordinátájuk megegyezik. Ekkor ha például az (A_2, B_2) össze van kötve (A_1, B_1)-gyel és (A_4, B_1)-gyel is, akkor a 4 hosszú kör: $B_1-(A_1, B_1)-(A_2, B_2)-(A_4, B_1)-B_1$.



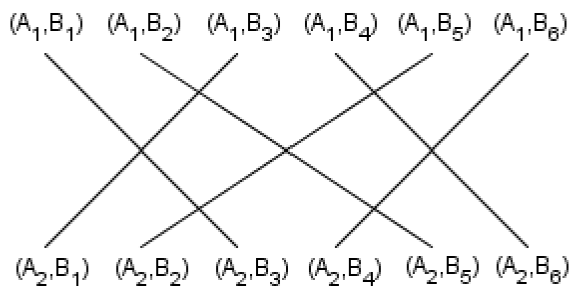
Tudjuk, hogy ezek a feltételek szükségesek, ám könnyen látható, hogy ezen feltételek betartásával biztosan nem építünk a gráfunkba 5-nél rövidebb kört, ami tartalmaz a 36 csúcson kívüli csúcsokat. Ahhoz, hogy a gráf 5 bőségű legyen, mutatnunk kell legalább egy öt hosszú kört. Például: $A - B - A_1 - (A_1, B_1) - B_1 - A$. Legyen a γ azon gráf neve, mely csak a 36 csúcsot tartalmazza. Ekkor a további feltételek:

(4) γ-nak a bősége legalább 5 legyen.

A (4)-es feltételt később vizsgáljuk. A kapott feltételekben igen nehéz eligazodni. Próbáljunk meg a gráfunkban szimmetriákat létrehozni, és így megalkotni a Hoffman–Singleton gráfot! Így talán könnyebben átlátható lesz a kapott gráf. Tehát vezessük be az utolsó feltételt:

(5) Húzzuk be az éleket szimmetrikusan! Azaz ha egy (A_i, B_j) csúcs össze van kötve az (A_l, B_h) csúccsal, akkor az (A_i, B_h) és (A_l, B_j) csúcsok között is él fut.

Vegyünk két sort a hat közül, és nézzük meg, hogy mit kapunk, ha alkalmazzuk a feltételeket. Nézzük például az $(A_1, B_1), (A_1, B_2), \ldots, (A_1, B_6)$ és $(A_2, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_2, B_6)$ sorokat!



A (2)-es feltétel azt mondja ki, hogy bármely egy sorban lévő elemek között nem mehet él, illetve azt is, hogy függőleges élek sem lehetnek a gráfban. A (3)-as feltétel szerint mindegyik csúcsból legfeljebb egy él mehet a másik sor csúcsaiba. De tudjuk, hogy összesen 6 sor van, tehát egy csúcsból pontosan egy él indulhat a többi sorokba. Az (5)-ös feltétel szerint szimmetrikusan kell húzni az éleket, tehát a csúcsok B_i-k szerint párokba rendezhetőek.

$$B_1 \longleftrightarrow B_3, \qquad B_2 \longleftrightarrow B_5, \qquad B_4 \longleftrightarrow B_6$$

Ha rögzítünk egy sort, a többi sort hozzávéve minden sorban kapunk egy-egy párosítást a $\{B_1, \ldots, B_6\}$ halmazon. Ezenkívül még 4 párosítást fogunk kapni. Az előző feltételek garantálják, hogy minden párt csak egyszer tekintünk.

Hogy a gráfot befejezzük, próbáljuk meg másként értelmezni a gráfunkat!

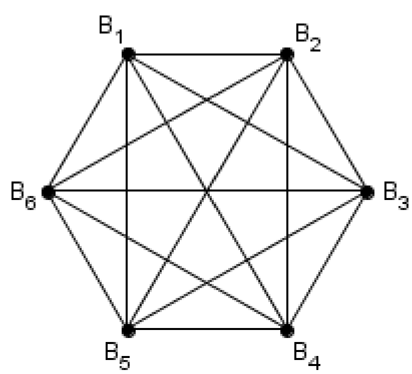
3.15.1. Bajnokságok

Vezessük be a bajnokságoknál használatos kifejezéseket! Jelöljék a $B_1, \ldots, B_6$ szimbólumok a focicsapatokat. Ekkor nézzük, mit tudunk eddig:

(i) Az előző levezetésben, ha kiválasztunk két adott sort, például $(A_1, B_1), \ldots, (A_1, B_6)$ és $(A_2, B_1), \ldots, (A_2, B_6)$ sorokat, akkor ezek B_i-k egy párosítását adják, melyek a körmérkőzés egy-egy fordulóját jelölik.

(ii) Rögzítsük le az egyik sort, legyen mondjuk ez A_1 sora. Ekkor ha a többi sort különkülön hozzávesszük, akkor láttuk, hogy minden esetben kapunk egy párosítást, azaz az összes sor elővétele után egy olyan bajnokságot kapunk, ahol mindegyik focicsapat pontosan egyszer játszik bármely másik focicsapattal.

Egy bajnokságnak akkor van vége, ha mindegyik csapat mindegyikkel egyszer játszott. Igaz-e, hogy ha sikerülne egy teljes bajnokságot létrehozni, akkor a γ gráfban be tudjuk húzni az éleket? Vizsgáljuk meg, hogy ha az előbbiek szerint létrehoznánk egy öt fordulóból álló bajnokságot, melyre (ii) teljesülne, azaz teljes bajnokság lenne, melyben mindenki mindenkivel pontosan egyszer meccsel, akkor milyen éleket kell az eredeti gráfunkban behúzni. Ekkor nyilván (A_i, B_j) és (A_h, B_l) csúcsokat akkor kötjük össze, ha az A_i, A_h fordulóban volt B_j, B_l meccs, feltéve, hogy $i \neq h$ és $j \neq l$. Ekkor biztosak lehetünk benne, hogy az (1), (2), (3), (5)-ös feltételek biztosan teljesülnek a gráfban. A (4)-es feltételről még nem ejtettünk szót. Mielőtt ezt megtesszük, vizsgáljuk meg az alábbi kérdéseket!



3.8. ábra. A β gráf

Eddig is és ezután is olyan bajnokságokról volt szó, melyekben hat csapat mérkőzik meg egymás ellen. Tehát a teljes bajnokság egy 6 csúcsú teljes gráfot jelöl. Nevezzük ezt

β-nak! A képen látható, ahol a pontok a csapatokat, míg az élek a meccseket jelölik.

(1) Ha minden csapat mindegyikkel egyszer játszik, akkor egy bajnokság hány mérkőzést tartalmaz? A bajnokság hány fordulóból áll?

A feladat a K_6 élszámára kérdez rá, ez pedig $\binom{6}{2}$, vagyis 15. A hat csapatot öt fordulóban tudjuk összemérni egymással, tehát egy bajnokság öt fordulóból áll.

(2) Tekintsünk most csak egy fordulót! Ekkor hányféleképpen tudnak egymással játszani a csapatok?

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy hányféleképpen alakulhat egy forduló. Megint állítsuk sorba a csapatokat, ahogy az előbb. Ekkor az első csapat még a maradék öt közül bármelyikkel játszhat, válasszuk ki mondjuk a mellette lévőt. Ekkor az első és második csapat már mérkőzik egymással, tehát következőnek a harmadik csapat választ ellenfelet. Ezt háromféle módon teheti meg. Miután választ az utolsó két, még be nem osztott csapat egymással fog mérkőzni. Tehát összesen $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$-féleképpen alakulhat egy forduló.

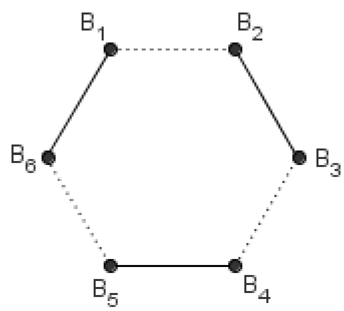
(3) Válasszunk ki egy adott fordulót! Hány olyan forduló van, melynek egyik mérkőzése sem egyezik meg a kiválasztott forduló mérkőzéseivel?

Az „összes−rossz” megoldást fogjuk használni. Vesszük az összes lehetséges fordulót, ami 15, és kivonjuk belőle azokat fordulókat, amelyek tartalmazzák a kiválasztott forduló bármely mérkőzését, illetve kivonjuk a kiválasztott fordulót is. A kérdés tehát az, hogy hány olyan forduló van, amely tartalmaz ilyen nem kívánt mérkőzést. Egy forduló biztosan csak egy darab nem kívánt mérkőzést tartalmazhat, hiszen ha kettőt tartalmazna, akkor a harmadik adott, tehát visszakapnánk a kiválasztott fordulót. Hányféleképpen tartalmazhat egy forduló egy ilyen mérkőzést? Ki kell választanunk egy nemkívánt mérkőzést, ezt háromféleképpen tehetjük meg. Erre tehát három lehetőségünk van, míg a másodikra kettő marad, hiszen a négy csapat már csak kétféleképpen mérkőzhet meg egymással úgy, hogy ne kapjunk újabb egyezést. Tehát összesen $15 - 3 \cdot 2 - 1 = 8$ ilyen forduló van.

(4) Vegyünk most kettő előre megadott fordulót, melyekben nincs közös mérkőzés. Keressük azon bajnokságok számát, melyek tartalmazzák ezt a két fordulót.

Vegyük egyszerre a két előre adott fordulót, és ábrázoljuk egyszerre egy gráfon, majd vizsgáljuk meg, hogy milyen alakzatot vehet fel. Akárhogyan vesszük fel a fordulókat, összesen két esetet kaphatunk. Az első esetben egy hat hosszú kört kapunk, míg második esetben két darab háromszöget, hiszen minden fokszám 2 lesz. A második esetet kizárhatjuk, mert egy csapat akkor egy fordulóban kétszer játszana. Tehát mindenképpen egy hat hosszú kört fogunk kapni.

Most vizsgáljuk meg, hogy melyik mérkőzések fognak egy további fordulóhoz tartozni. Tegyük fel, hogy az ábrán látható két forduló tervét kapjuk meg előre. Ekkor induljunk ki a B_1 csúcsból! B_1B_3 mérkőzés melyik meccsekkel lesz egy fordulóban? B_2B_4 nem lehet, hiszen ekkor B_5B_6 mérkőzés lenne, de ezt az élt már tartalmazza a gráf; hasonlóan B_2B_6 sem lehet, hiszen ekkor pedig a B_4B_5 mérkőzést játszanánk le kétszer. Tehát csupán egy lehetőség marad, mégpedig B_2B_5 és B_4B_6 leosztás.



3.9. ábra. A két előre adott forduló

Ugyanezen gondolatmenten haladva vizsgáljuk a B_1B_4 és B_1B_5 esetet is. Ekkor ahhoz a fordulóhoz, mely B_1B_4-et tartalmazza még hozzátartoznak majd a B_2B_6 és B_3B_5 találkozók is, illetve a B_1B_5 mérkőzéssel együtt játsszák le a B_2B_4, és B_3B_6 találkozókat is. Tehát azt kaptuk, hogy biztosan csak egy olyan bajnokság van, melyben szerepel két előre adott, közös mérkőzés nélküli forduló.

(5) Nézzük meg, hogy egy forduló hány bajnokságban szerepel!

Vegyünk egy f fordulót! Ekkor tudjuk, hogy ehhez a fordulóhoz nyolc olyan forduló van, melyek közül egyik sem tartalmazza ugyanazt a mérkőzést, hívjuk ezeket f-hez képest megengedett fordulóknak. Ha ehhez a fordulóhoz egy másikat hozzáveszünk, akkor egyértelműen meghatároznak egy bajnokságot. Ahhoz, hogy teljes bajnokságot kapjunk, még szükségünk van három másik fordulóra. Ekkor a megengedett fordulók közül még négy nem lejátszott forduló van. Ha ehhez hozzávesszük az f fordulónkat, akkor kapunk egy új bajnokságot. Tehát minden forduló két bajnokságban szerepel.

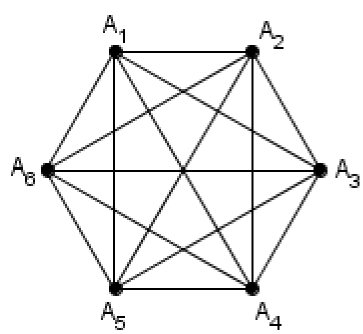
(6) Hány darab bajnokságot állíthatunk össze?

Összesen tudjuk, hogy 15 különböző forduló van, de az előző feladatból kiderült, hogy minden forduló két bajnokságban szerepel, ami tehát 30. Viszont így a bajnokságok ötszörösét vettük, tehát összesen hat bajnokság van.

(7) Nézzünk két különböző bajnokságot! E kettőben van-e közös forduló és ha igen, mennyi?

A fönti feladatból megtudtuk, hogy két forduló egyértelműen meghatároz egy bajnokságot, tehát két bajnokságnak maximum egy közös fordulója lehet. A 15 forduló mindegyike két bajnokságban szerepel és összesen hat bajnokság van. Azaz megnézve, hogy az összes bajnokságból hányféleképpen vehetünk ki kettő különbözőt, akkor $\binom{6}{2} = 15$-öt kapunk, és mivel pontosan ennyi fordulónk van, ezért bárhogyan is veszünk két bajnokságot, biztosan egy közös fordulójuk lesz.

Tehát összegezve azt kaptuk, hogy a mérkőzéseket 15 fordulóba tudjuk beosztani, és így hat csapattal összesen hat bajnokságot tudunk rendezni úgy, hogy bármely két bajnokságnak pontosan egy közös fordulója legyen.



3.10. ábra. Az α gráf

Tehát újból kaptunk egy 6 csúcsú teljes gráfot, melynek csúcsai a bajnokságok és élei pedig a fordulókat reprezentálják. Tehát a két csúcs közti él azt a fordulót takarja, amely közös a két bajnokságban. Ez a gráf jól adja vissza a bajnokságokat, minden csúcsába pontosan öt él fut be, hiszen minden bajnokságban öt forduló van. Nevezzük ezt a gráfot α-nak!

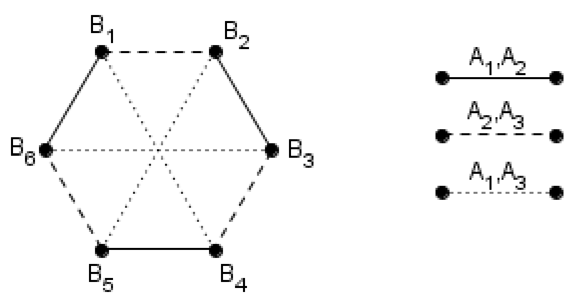
Térjünk vissza a Hoffman–Singleton gráfunkra! A bajnokságok az A_i szimbólumoknak feleltek meg, míg a fordulókat az A_iA_j kifejezések takarták, ahol két (A_i, B_h) és (A_j, B_l)

csúcsot akkor kötöttünk össze, ha az A_iA_j fordulóban B_h és B_l megmérkőzött egymással. Ezekszerint találtunk egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a bajnokságok és csapatok, illetve a fordulók és mérkőzések között. Pontosan ez az, amit szerettünk volna.

A bajnokságok előtt megnéztük, hogy ha találunk egy ilyen gráfot, akkor az (1), (2), (3), (5) feltételeket biztosan teljesíti. Tekintsük most a (4)-es feltételt:

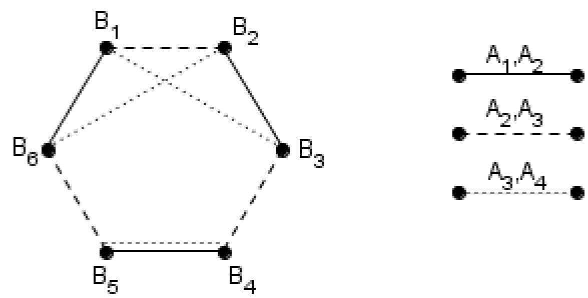
(4) γ-nak a bősége legalább 5 legyen.

γ volt a 36 csúcsú gráfunk. Keressünk benne háromszöget vagy négyszöget! Tegyük fel, hogy van γ-ban háromszög, alkossák ezt (A_1, B_1), (A_2, B_2) és (A_3, B_3). Eszerint tehát az A_1A_2 fordulóban B_1 és B_2 találkozik, az A_1A_3 fordulóhoz tartozik a B_1, B_3 mérkőzés, még az A_2A_3 fordulóban együtt játszik B_2 és B_3. Észrevehető, hogy így az α gráfban háromszöget kaptunk, melynek csúcsai A_1, A_2 és A_3. Ugyanez elmondható a β gráfra is, ott is keletkezett háromszög, melynek élei: B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3. Lássuk be, hogy ez nem lehetséges. Az α gráfban az A_1A_2 és A_2A_3 közös csúcsból, A_2-ből indul ki, amiről tudjuk, hogy azt jelenti, hogy nincsen közös mérkőzésük, tehát fel tudtuk őket rajzolni egy gráfba, amelyről beláttuk, hogy egy hatszög. Az A_1A_3 élnek van közös csúcsa A_1A_2-vel és A_2A_3-mal is, de nincsen benne a B_2 bajnokságban, tehát az A_1A_2 és A_1A_3, illetve A_2A_3 és A_1A_3 élek is felrajzolhatóak egy hatszögre. Tehát egy gráfra egyértelműen fel tudjuk rajzolni az A_1A_2, A_1A_3 és A_2A_3 fordulókat. Az alábbi ábra mutatja hogyan. Nyilvánvaló, hogy a gráfban csak a címkéket tudjuk felcserélni, de ugyanezt a gráfot fogjuk kapni. A képről látszik, hogy ebben a gráfban nincsen háromszög.



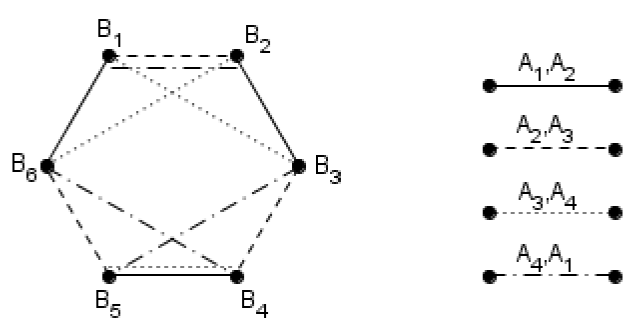
3.11. ábra. A három forduló egy gráfon

Most nézzük meg, hogy van-e a gráfban négyszög! Tegyük fel, hogy az (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) és (A_4, B_4) csúcsok négyszöget alkotnak. Ekkor az előzőhöz hasonlóan nézzük meg, hogy az α-ban lévő éleket hogyan lehet berajzolni β gráfba! Az α gráfban négy hosszúságú kört alkot az A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 élsorozat. Az A_1A_2 és A_2A_3 forduló együtt megint egy hatszöget ad ki a β gráfban. Hasonlóan A_2A_3 és A_3A_4 is hatszöget ad, ám A_1A_2 és A_3A_4 fordulók nem.



Nincsen közös csúcsa az α gráfban az A_1A_2 és A_3A_4 éleknek. Ez azt jelenti, hogy ebben a két fordulóban szerepel ugyanaz a mérkőzés, tehát a β gráfban lesz egy közös élük. Ennek megfelelően látható, hogy ez a gráf csak egyféleképpen konstruálható meg, a fenti ábra mutatja.

Ezután a gráfhoz hozzávéve az utolsó, A_4A_1 élt, most már látszik, hogy egy olyan β gráfot kell kapnunk, ahol α azon élei, melyeknek van közös csúcsuk a β gráfban hatszöget alkossanak, míg α azon élei, melyeknek nincsen közös csúcsok a β gráfban úgy fognak megjelenni, hogy párhuzamos éleket fognak létrehozni. Ekkor látható, hogy nem kapunk olyan négyszöget melynek élei rendre A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 és A_4A_1.



3.12. ábra. A négy forduló egy gráfon

Vagyis sikerült a Hoffman–Singleton gráfot megalkotni úgy, hogy az eredeti 5 feltétel mindegyike teljesüljön. A gráf megkonstruálása során az [1] gondolatmenetét követtem.

3.16. Nyitott kérdések

A központi probléma minden esetben az, hogy adott k-ra és g-re hogyan, és hány csúccsal tudunk megkonstruálni egy kalitkagráfot. Ám ezen belül is nagyon sok megválaszolatlan kérdés van.

1. Alsó becslést adni azon kalitkagráfok csúcsszámára, ahol a Moore-korlát által adott csúcsszám nem elegendő.
2. Prímhatványsejtés.
3. A Hoffman–Singleton-tétel utolsó esete. A $g = 5$ bőségű és $k = 57$-reguláris Moore-gráf megszerkesztése 3250 csúcson, melyre még senki nem volt képes, ám megcáfolni sem tudjuk a létezését.
4. Lejjebb vinni a $(3, 13)$ kalitkagráf csúcsszámának becslését.
5. Meghatározni a $(8, 5)$ kalitkagráf csúcsainak a számát. Azon esetek, ahol az $I(k, 5)$ csúcsú gráfra igaz, hogy $k \leq 7$, a kalitkagráfok csúcsszáma már régóta ismert, ám ez az eset még tisztázatlan.
6. Megtalálni a megszerkesztés módját azon 3-reguláris kalitkagráfoknál, ahol $g > 19$.
7. Igaz-e, hogy $I(k, g) < I(k + 1, g)$?
8. Igaz-e, hogy abban az esetben, ha g páros, akkor minden (k, g) kalitkagráf páros gráf?

Irodalomjegyzék

[1] Szőnyi Tamás, Bérczi Gergely, Gács András, Hraskó András: *Új matematikai mozaik,* Typotex, 2002.

[2] Lovász László: *Kombinatorikai problémák és feladatok,* Typotex, 1999.

[3] Geoffrey Exoo, Robert Jajcay: *Dynamic Cage Survey,* The Electronic Journal of Combinatorics (2013), #DS16

[4] Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin: *Diszkrét matematika,* Typotex, 2010.

[5] Katona Gyula, Recski András, Szabó Csaba: *A számítástudomány alapjai,* Typotex, 2006.

[6] P.K. Wong: *Cages - a survey,* Journal of Graph Theory 6, 1982, 1–22.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőimnek, Szőnyi Tamásnak és Héger Tamásnak a folyamatos támogatásért és bátorításért, illetve a szakterületük iránti lelkesedésért, mely engem is arra ösztönzött, hogy minél mélyebb ismeretekre tehessek szert ezen témakörrel kapcsolatban.

Valamint szeretném megköszönni családomnak, és barátnőmnek, Barbarának hogy az egyetemi éveim alatt támogattak, és bátran fordulhattam hozzájuk segítségért.

Nyilatkozat

Név: Tinku Krisztina
ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc
Neptun azonosító: KBQ3GW
Szakdolgozat címe: Adott bőségű reguláris gráfok

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2014

---

a hallgató aláírása