

BALÁZSI JUDIT

EGYLÉPÉSES MÓDSZEREK 0- ÉS A-STABILITÁSA

B.SC. SZAKDOLGOZAT

Témavezető:

Fekete Imre

Doktorandusz

Alkalmazott Analízis Tanszék

Tudományos segédmunkatárs

MTA-ELTE NUMNET



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Alkalmazott Analízis és
Számításmatematikai Tanszék

Budapest

2015

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Fekete Imrének a rengeteg segítséget, valamint útmutatást, ami segített ezen szakdolgozat megírásában.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. Egylépéses módszerek operátor alakja	2
1.1. Folytonos feladat operátor alakja	2
1.2. Diszkrét feladat operátor alakja	3
1.3. A numerikus analízis alapfogalmai	6
1.3.1. Konzisztencia	6
1.3.2. Konvergencia és 0-stabilitás	7
2. Abszolút stabilitás	10
2.1. Dahlquist-féle tesztegyszerlet	12
2.2. Lineáris rendszer esete	14
3. Runge-Kutta módszerek abszolút stabilitása	15
3.1. Runge-Kutta típusú módszerek	15
3.2. Runge-Kutta módszerek stabilitási függvényei	18
Hivatkozások	23

Bevezetés

Tanulmányaim során megismerhettem a matematika főbb témaköreit, melyek közül a numerikus analízis nyerte el leginkább a tetszésem. Számos gyakorlatban előforduló probléma differenciálegyenletek segítségével írható le, viszont ezek analitikus megoldásának előállítása nem könnyű, sőt olykor kivitelezhetetlen feladat, ezért numerikus módszereket alkalmazunk. A dolgozatban kezdetiérték feladatra alkalmazott egylépéses numerikus módszerek absztrakt szintű megfogalmazását, ezek 0- és egy speciális osztályának (ún. explicit Runge-Kutta típusú módszerek) A-stabilitását tűztem ki célul.

Az első fejezetben bevezetem a skaláris Cauchy-feladatot (kezdetiérték feladat). Célom ezen folytonos feladat absztrakt módon való felírása az $Lu = 0$ operátoregyenlet segítségével. A gyakorlat numerikus modellek konstruálását igénylik. A fejezet további részében a folytonos feladat helyett diszkrét feladatok sorozatát tekintek abban a reményben, hogy ezek megoldásait könnyebben nyerjük és tartanak majd a folytonos feladat megoldásához. Ezért vezetem be a numerikus módszerekre vonatkozó alapfogalmakat, úgy mint a konzisztencia, konvergencia, illetve a 0-stabilitás. A fejezet legvégén bizonyítom a numerikus analízis alaptételét.

Habár az elméletben van egy jól működő egylépéses módszerem, azonban a második fejezet két példája jól mutatja, hogy a 0-stabilitás a gyakorlatban nem eléggé hatékony. Ezért a második fejezetben már a gyakorlatban is jól használható fogalommal, az abszolút stabilitással foglalkozom. Továbbá kitérek a Dahlquist-féle tesztegnyenlet, illetve lineáris rendszer stabilitásának vizsgálatára.

A harmadik fejezetben az egylépéses módszerek osztályán belül a leggyakrabban használt numerikus módszerekkel, az ún. Runge-Kutta típusú módszerekkel foglalkozom. A fejezetben ilyen módszerek abszolút stabilitási függvényeit szeretnénk megadni. Az explicit Runge-Kutta módszerek esetében megmutatom, hogy ezek nem lehetnek abszolút stabilak.

1. fejezet

Egylépéses módszerek operátor alakja

Tekintsük a

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

$$u(0) = u_0 \quad (1.2)$$

skaláris kezdetiérték-problémát (úgynevezett Cauchy-feladatot), ahol $u_0 \in \mathbb{R}$ a kezdeti érték és az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy első változójában folytonos, a második változójában kielégíti a Lipschitz-feltételt. Ekkor ismeretes [9], hogy az (1.1)-(1.2) egyértelműen megoldható és a teljes megoldás határtól határig terjed.

1.1. Folytonos feladat operátor alakja

A fejezet főként a [4] könyvön alapszik. Ebben a részben a legfőbb célunk az, hogy az (1.1)-(1.2) feladatot absztrakt módon, egy lineáris operátoregyenlet segítségével

$$Lu = 0 \quad (1.3)$$

alakban írjuk fel. Ehhez keressük azt az $u(t)$ függvényt a $\text{dom}(L)$ halmazból, amelyhez az L operátor a $[0, T]$ intervallumon értelmezett azonosan nulla függvényt rendel hozzá.

Ennek megadásához legyen L egy olyan operátor, amely valamilyen szabály szerint adott $[0, T]$ intervallumon értelmezett függvényhez egy másik $[0, T]$ intervallumon értelmezett függvényt rendel hozzá. Ez a szabály megadható

az alábbi módon:

$$(Lw)(t) = w'(t) - f(t, w(t)), \quad t \in (0, T], \quad (1.4)$$

ahol

$$\text{dom}(L) = \{w \in C^1[0, T] : w(0) = u_0\}. \quad (1.5)$$

Az (1.4)-(1.5) által meghatározott L operátort az (1.1)-(1.2) kezdetiérték-probléma operátorának nevezzük. Azaz $L : C^1([0, T]) \rightarrow C([0, T])$ operátor, amely az (1.1)-(1.2) feladatot (1.3) alakra hozza.

1.1.1. Megjegyzés. *Természetesen megadható más szabály is, mely az (1.1)-(1.2) feladatot (1.3) alakra hozza:*

$$(Lw)(t) = \begin{cases} w'(t) - f(t, w(t)), & t \in (0, T], \\ w(0) - u_0, & t = 0, \end{cases}$$

ahol $w \in C^1([0, T])$.

Számtalan valós jelenséget (fizikai, kémiai, biológiai, szociológiai, stb.) leíró matematikai modellek tömören (1.3) alakban írhatóak fel. Ugyanakkor ezen modellek megoldása zárt (analitikus) alakban ritkán adható meg, ezért a gyakorlat numerikus modellek konstruálását igényli.

A numerikus modellek nem az eredeti feladat egzakt megoldását adják, hanem minden egyes számítási lépés során jutunk hozzá egyre és egyre közelebb. Ezeket a módszereket a realizálhatósághoz valamilyen programnyelven implementálnunk kell. A számítógép lehető teszi, hogy mennyiségi (és minőségi) információkat kapjunk. Egyik legfőbb előnye, hogy az adatokat rendkívül olcsón nyerjük. A valós adatnyerés gyakran költséges, veszélyes, sőt olykor kivitelezhetetlen is.

1.2. Diszkrét feladat operátor alakja

A továbbiakban szeretnénk a nehezen megoldható folytonos feladatot egyszerűbb, diszkrét feladatok sorozatával helyettesíteni. Az ezekre alkalmazott numerikus módszerekkel szemben az alábbi alapvető feltételeket követeljük meg:

- Minden egyes diszkrét feladat korrekt kitűzésű.
 - létezik megoldás (egzisztencia)
 - ez a megoldás egyetlen (unicitás)

– a megoldás folytonosan függ a feladatot meghatározó függvényektől (stabilitás)

- A numerikus modellben a numerikus megoldást hatékonyan tudjuk számolni.
- A numerikus megoldások sorozata konvergens legyen.
- A numerikus megoldások sorozata tartson az eredeti feladat megoldásához.

Ebben a fejezetben az (1.3) folytonos feladatot szeretnénk diszkrét feladatok sorozatára lecserélni.

Ehhez vezessük be a $[0, T]$ zárt intervallumon a finomodó, változó hosszúságú rácshálók sorozatát, melyet ω_h jelöl.

$$\omega_h := \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T\},$$

valamint

$$\omega_h^0 = \omega_h \setminus \{t_0 = 0\}.$$

Jelölje továbbá

$$h_k = t_{k+1} - t_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad h = T/N.$$

Feltesszük, hogy a rácspontok számának növelésével a rácsháló mindenütt finomodik, azaz létezik olyan $0 < c < \infty$ állandó, amelyre minden N esetén

$$h_k \leq ch, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Tegyük fel, hogy rögzített $t^* \in (0, T]$ pont mindegyik rácsháló eleme. Jelölje n egy ilyen rögzített rácshálón azt az indexet, melyre $h_0 + h_1 + \dots + h_{n-1} = t^*$.

Egylépéses numerikus módszereket használva szeretnénk az eredeti feladatot megoldani. Ennek legelső lépése, hogy az (1.3) folytonos feladatot lecseréljük az alábbi

$$L_h u_h = 0 \tag{1.6}$$

diszkrét feladatok sorozatára.

Legyen L_h egy olyan operátor, amely az ω_h pontjaiban értelmezett rácsfüggvényekhez egy ω_h^0 pontjaiban értelmezett rácsfüggvényt rendel hozzá. Jelölje $\mathbb{F}(\omega_h)$ és $\mathbb{F}(\omega_h^0)$ az ω_h , illetve az ω_h^0 rácson értelmezett rácsfüggvények vektorterét. Ekkor az egylépéses numerikus módszereket leíró L_h operátor hatása egy w_h rácsfüggvényre az alábbi:

$$L_h w_h(t_n) = \Phi(h_n, t_{n-1}, w_h(t_{n-1}), w_h(t_n)), \quad t_n \in \omega_h \tag{1.7}$$

a

$$\text{dom}(L_h) = \{w_h \in \mathbb{F}(\omega_h) : w_h(t_0 = 0) = u_0\}$$

értelmezési tartománnyal, ahol Φ az egylépéses numerikus módszert jellemzi.

1.2.1. Megjegyzés. Az (1.7) képletben $\Phi = \Phi(h_n, t_{n-1}, w_h(t_{n-1}))$ esetén a módszer explicit, míg $\Phi = \Phi(h_n, t_{n-1}, w_h(t_{n-1}), w_h(t_n))$ esetén implicit.

1.2.1. Példa. A θ -módszert az alábbi

$$\Phi(h_n, t_{n-1}, w_h(t_{n-1}), w_h(t_n)) = (1-\theta)f(t_{n-1}, w_h(t_{n-1})) + \theta f(t_{n-1} + h_n, w_h(t_n))$$

megválasztással kapjuk. Ha a fenti formulában a θ paraméter értéke rendre 0, 1 és 1/2, akkor rendre az explicit Euler, implicit Euler és trapéz módszereket kapjuk. ♣

1.2.2. Megjegyzés. A módszer realizálhatóságához feltesszük, hogy a rögzített első három változó mellett a Φ függvény negyedik változójában invertálható, azaz a $\Phi(h^*, t^*, w^*, s)$ függvény injektív.

1.2.3. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az (1.7) képletben szereplő L_h operátor $\mathbb{F}(\omega_h) \rightarrow \mathbb{F}(\omega_h^0)$ típusú. Emellett az is nyilvánvaló, hogy $\dim(\mathbb{F}(\omega_h)) \neq \dim(\mathbb{F}(\omega_h^0))$. Az értelmezési tartománytól eltekintve ez azt jelentené, hogy az L_h operátor nem lenne injektív a teljes $\mathbb{F}(\omega_h)$ téren, azaz $L_h u_h = 0$ feladatnak nem lenne egyértelmű megoldása. Ezért szükséges $\mathbb{F}(\omega_h)$ egy alkalmas $\text{dom}(L_h) \subset \mathbb{F}(\omega_h)$ hamazra való leszűkítése, amelyre $\dim(\text{dom}(L_h)) = \dim(\mathbb{F}(\omega_h^0))$. Ekkor már az L_h operátor invertálható lesz. Ezt az $\mathbb{F}(\omega_h)$ -beli függvényt a $t = t_0 = 0$ pontbeli értékének rögzítésével érhetjük el.

1.2.4. Megjegyzés. Egy másik lehetséges megadási módja az egylépéses módszereknek:

$$(L_h w_h)(t_n) = \begin{cases} \Phi(h_n, t_{n-1}, w_h(t_{n-1}), w_h(t_n)), & \text{ha } t_n \in \omega_h^0, \\ w(0) - u_0 & \text{ha } t_n = 0. \end{cases}$$

1.2.2. Példa. Az ismeretlen $w_h \in \mathbb{F}(\omega_h)$ rácsfüggvényt az

$$w_h(t_n) = w_h(t_{n-1}) + h_n(1-\theta)f(t_{n-1}, w_h(t_{n-1})) + h_n\theta f(t_n, w_h(t_n)), \quad t_n \in \omega_h$$

módon határozzuk meg, ahol $w_h(0) = u_0$. Az L_h operátort úgy határozzuk meg, hogy valamely $w_h \in \mathbb{F}(\omega_h)$ rácsfüggvényhez rendelje hozzá az

$$(L_h w_h)(t_n) = \frac{w_h(t_n) - w_h(t_{n-1})}{h_n} - (1-\theta)f(t_{n-1}, w_h(t_{n-1})) + \theta f(t_n, w_h(t_n))$$

rácsfüggvényt, ahol $n = 1, 2, \dots, N$, valamint $h_1 + h_2 + \dots + h_n = T$, azaz $L_h w_h \in \mathbb{F}(\omega_h)$. Az operátor értelmezési tartománya:

$$\text{dom}(L_h) = \{w_h \in \mathbb{F}(\omega_h) : w_h(t_0 = 0) = u_0\}.$$

♣

1.3. A numerikus analízis alapfogalmai

Az előző fejezetben láthattuk, hogy az (1.1)-(1.2) feladatot (1.3) alakba írhatjuk. Az ezeket megoldó (1.7) képlet által megadott egy lépéses módszereket annak reményében definiáltuk, hogy ezek valamilyen értelemben az eredeti, folytonos feladat megoldásához tartsanak. Most olyan precíz fogalmakat szeretnénk megadni, melyek ezt a kívánt tulajdonságot megadhatják.

1.3.1. Konzisztencia

Első lépésként azt szeretnénk megérteni, hogy az L_h operátor milyen hibával közelíti az L operátort az (1.3) feladat pontos megoldáson. Ez azt jelenti, hogy a $t_n \in \omega_h$ rácspontokban az $(Lu)(t_n)$ értékeket hasonlítjuk össze az $u(t)$ megoldás rácspontbeli értékeiből képzett rácsfüggvény L_h -beli képével.

1.3.1. Definíció. *Legyenek az alábbi*

$$P_h : C^1([0, T]) \rightarrow \mathbb{F}(\omega_h) \text{ és } R_h : C([0, T]) \rightarrow \mathbb{F}(\omega_h^0)$$

leképezések vetítő típusúak, azaz

$$[P_h u] = u(t_n), t_n \in \omega_h \text{ és } [R_h u] = u(t_n), t_n \in \omega_h^0.$$

Ekkor tetszőleges $w \in C^1([0, T])$ függvény esetén az $\mathbb{F}(\omega_h^0)$ vektortérben az alábbi módon mérhetjük az L_h operátor képlethibáját:

$$l_h(w) = |(L_h P_h w) - (R_h L w)|, \quad w \in C^1([0, T]). \quad (1.8)$$

Ha az (1.8) egyenletbe az (1.3) feladat pontos megoldását helyettesítjük, akkor a képlethiba az

$$l_h(u) = |(L_h u)(t_n)|, \quad t_n \in \omega_h^0$$

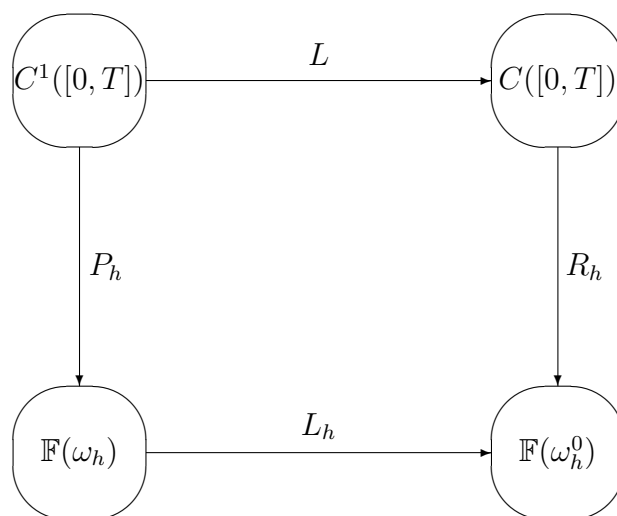
alakot ölti.

1.3.2. Definíció. *Az L_h operátorral leírt numerikus módszert konzisztensnek nevezzük, ha*

$$\lim_{h \rightarrow 0} l_h = 0.$$

Azt mondjuk, hogy p -edrendben konzisztens, ha $l_h = \mathcal{O}(h^p)$.

Az 1.3.1 és 1.3.2 Definíciók alapján a diszkretizációs eljárás sémája a lenti 1.1 ábra segítségével képzelhető el.



1.1. ábra. Általános séma numerikus módszerekre.

1.3.1. Példa. *Határozzuk meg a θ -módszer konzisztencia-rendjét!*

$$\begin{aligned}
 (L_h w_h)(t_n) &= \frac{w_h(t_n) - w_h(t_{n-1})}{h_n} - (1 - \theta)f(t_{n-1}, u_h(t_{n-1})) - h_n \theta f(t_n, u_h(t_n)) \\
 &= \frac{u(t_{n-1}) + h_n u'(t_{n-1}) + \frac{h_n^2}{2} u''(t_{n-1}) + \frac{h_n^3}{3!} u'''(t_{n-1}) + \mathcal{O}(h^4) - u(t_{n-1})}{h} \\
 &\quad - (1 - \theta)u'(t_{n-1}) - \theta u'(t_n) \\
 &= u'(t_{n-1}) + \frac{h}{2} u''(t_{n-1}) + \frac{h^2}{6} u'''(t_{n-1}) + \mathcal{O}(h^3) \\
 &\quad - (1 - \theta)u'(t_{n-1}) - \theta(u'(t_{n-1}) + hu''(t_{n-1}) + \frac{h^2}{2} u'''(t_{n-1}) + \mathcal{O}(h^3)) \\
 &= u''(t_{n-1})\left(\frac{h}{2} - \theta h\right) + u'''(t_{n-1})\left(\frac{h^2}{6} - \theta \frac{h^2}{2}\right) + \mathcal{O}(h^3)
 \end{aligned}$$

Azaz a módszer $\theta = \frac{1}{2}$ esetén másodrendben, $\theta \neq \frac{1}{2}$ esetén elsőrendben konzisztens. ♣

1.3.2. Konvergencia és 0-stabilitás

Ebben a szakaszban megvizsgáljuk, hogy finomodó felosztás esetén hogyan viselkedik a pontos megoldások és a numerikus megoldások eltérésének sorozata. Legyen

$$h = \max_{1 \leq n \leq N} h_n$$

és tegyük fel, hogy Nh korlátos $h \rightarrow 0$ esetén. Legyen $t^* \in (0, T]$ egy olyan rögzített pont, amelyre $t^* \in \omega_h$ minden $h > 0$ érték esetén.

1.3.3. Definíció. Az L_h operátorral leírt numerikus módszert konvergensenek nevezzük, ha minden $t^* \in (0, T]$ esetén

$$\lim_{h \rightarrow 0} e_h = \lim_{h \rightarrow 0} u(t^*) - u_h(t_n) = 0,$$

ahol $t_n = t^*$. Azt mondjuk, hogy p -edrendben konvergens, ha $e_h = \mathcal{O}(h^p)$.

1.3.4. Definíció. Az L_h operátorral leírt numerikus módszert 0 -stabilnak nevezzük, ha léteznek olyan h_0 és S pozitív állandók, hogy minden $h < h_0$ esetén tetszőleges $\mathbb{F}(\omega_h)$ -beli z_h és w_h rácsfüggvényre érvényes az

$$|z_h(t_n) - w_h(t_n)| \leq S|z_h(t_0) - w_h(t_0)| + \max_{1 \leq k \leq N} |L_h z_h(t_k) - L_h w_h(t_k)|$$

egyenlőtlenség tetszőleges $n = 1, 2, \dots, N$ indexre.

1.3.1. Megjegyzés. A fenti 0 -stabilitási definíció megtalálható az [5] könyvben is.

1.3.1. Tétel. Tegyük fel, hogy

- i, az $Lu = \varphi$ operátoregyenletnek létezik egyértelmű megoldása, illetve*
- ii, az $L_h : \mathbb{F}(\omega_h) \rightarrow \mathbb{F}(\omega_h)$ operátorral leírt numerikus módszer p -edrendben konzisztens és 0 -stabil.*

Ekkor

- i, az $L_h u_h = \varphi_h$ egyenletnek létezik u_h egyértelmű megoldása a*

$$\text{dom}(L_h) = \{w_h \in \mathbb{F}(\omega_h), w_h(t_0) = 0\}$$

halmazon, illetve

- ii, a numerikus megoldások sorozata konvergens, és a konvergencia rendje megegyezik a konzisztencia rendjével.*

Bizonyítás. Mivel a folytonos feladat korrekt kitűzésű, ezért jelölje $u(t)$ az $(Lw)(t) = w'(t) - f(t, w(t)), t \in (0, T]$ operátoregyenlet megoldását. Jelölje továbbá v_h az u függvény projekcióját az ω_h rácsra.

A feltevés szerint az L_h operátor 0 -stabil, ezért a diszkrét egyenletnek létezik egyértelmű u_h megoldása. Ekkor a globális hibára a 0 -stabilitás definíciója alapján az alábbi összefüggést nyerjük:

$$\begin{aligned} |e_h(t_n)| &= |u_h(t_n) - v_h(t_n)| \\ &\leq S|u_h(t_0) - v_h(t_0)| + \max_{1 \leq k \leq N} |L_h u_h(t_k) - L_h v_h(t_k)| \\ &\leq S \max_{1 \leq k \leq N} |L_h v_h(t_k)| = S \max_{1 \leq k \leq N} |l_h(t_k)|. \end{aligned}$$

Azaz, ha a módszer p -edrendben konzisztens, akkor $|l_h(t_k)| = \mathcal{O}(h^p)$, azaz $e_h(t_n) = \mathcal{O}(h^p)$. \square

1.3.2. Megjegyzés. *Az állításban a konvergencia akkor is érvényes marad, ha*

$$\text{dom}(L_h) = \{w_h \in \mathbb{F}(\omega_h), w_h(t_0) = u_0\}$$

helyett a

$$\text{dom}(L_h) = \{w_h \in \mathbb{F}(\omega_h), w_h(t_0) = u_0^h\}$$

halmazon definiáljuk az L_h operátort, ahol feltesszük, hogy $\lim_{h \rightarrow 0} u_0^h = u_0$. Emellett, ha $u_0^h - u_0 = O(h^p)$, akkor a konvergencia rendje is megőrződik.

2. fejezet

Abszolút stabilitás

Az 1.3.1 Tétel szerint beláttuk, hogy egy p -edrendben konzisztens 0-stabil módszer p -edrendben konvergens is. A tétel egyik nagy hátránya, hogy nagy Lipschitz konstans esetén a konvergenciát biztosító h értékét annyira kicsinek kell megválasztanunk, hogy ez a gyakorlatban realizálhatatlan módszert eredményez. Ehhez a 0-stabilitásnál erősebb fogalomra lesz szükségünk. Hogyan tudjuk a legjobban megbecsülni h értékét? Ennek megértésére szolgál az alábbi példa is.

2.0.2. Példa. *Tekintsük az*

$$\begin{aligned}u'(t) &= -\sin(t) \\ u(0) &= 1\end{aligned}$$

kezdetiérték feladatot! Milyen lépésközű rácshálón kell megoldanunk az explicit Euler-módszerrel, hogy a $t^ = 2$ pontban a megoldás $\epsilon = 10^{-3}$ pontosságú legyen?*

Az egyenletet deriválva

$$u''(t) = -\cos(t),$$

azaz

$$M_2 = \max_{t \in [0, 2]} |-\cos(t)| = 1.$$

A példában a differenciálegyenlet jobb oldala

$$f(t, u) = -\sin(t),$$

ezért f lipschitzes $L = 0$ állandóval. Az explicit Euler-módszer lokális approximációs hibáját figyelembe véve (lásd például [3]) a globális hibára a következő összefüggést kapjuk:

$$|e_n| \leq h \max_{[0, t^*]} |\cos(t)| = h.$$

Tehát a $h = \epsilon$ megválasztású rácshálón az explicit Euler-módszer eredménye az ϵ pontosságot.

Legyen $h = 10^{-3}$. Ekkor $t^* = t_{2000}$, hiszen a lépésszám a $t^* = 2$ pontig $t^*/h = 2000$. Ezen rácshálón az explicit Euler-módszerrel kapott numerikus megoldás $y_{2000} = -0.41569$. Mivel a feladat pontos megoldása $u(t) = \cos(t)$, ezért összevetve a $\cos(2) = -0.41614$ pontos megoldással a globális hibára az $e_{2000} = 0.4548 \cdot 10^{-3}$ értéket kapjuk. ♣

2.0.3. Példa. Oldjuk meg az explicit Euler-módszer segítségével az alábbi kezdetiérték-feladatot:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \lambda(u(t) - \cos(t)) - \sin(t), \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ u(0) &= 1 \end{aligned}$$

Ebben a feladatban a megoldás ugyanaz, mint az előző példában, ezért az ottani rácshálóval próbálkozunk, vagyis legyen $h = 10^{-3}$ lépésközű ekvidisztáns rácsháló. A $t^* = 2$ ponthoz tartozó közelítés $y_{2000} = -0.416163$ lesz, azaz a hibára az $e_h(t_{2000}) = |y_{2000} - \cos(2)| = 0.161 \cdot 10^{-4}$ adódik. Tehát ez a rácsháló megválasztás jó a kívánt pontosság eléréséhez.

Legyen most $\lambda = -2100$. Próbálkozzunk ismét a $h = 10^{-3}$ lépésközű ekvidisztáns rácshálóval. Ekkor $y_{2000} = -0.254310^{77}$ értéket kapjuk, amely alkalmatlan a $\cos(2)$ közelítésére. Ezért próbálkozzunk kisebb h értékekkel. Eredményeink az alábbi táblázatban láthatók:

h	$e_h(2)$
0.001000	$0.145252 \cdot 10^{77}$
0.000976	$0.588105 \cdot 10^{36}$
0.000950	$0.321089 \cdot 10^{-6}$
0.000800	$0.792298 \cdot 10^{-7}$
0.000400	$0.396033 \cdot 10^{-7}$

2.1. táblázat. A h lépésközhez tartozó globális hiba értékei.

A táblázatból jól látszik, hogy valamilyen ok következtében a $h = 0.000976$ és a $h = 0.000950$ értékek között történik változás és az addig használhatatlan numerikus eredmény jóvá válik. ♣

A vizsgált példák jól érzékeltetik (hasonló példák találhatóak a [8] könyvben), hogy a 0-stabilitás csupán azt mutatja, hogy $h \rightarrow 0$ esetén hogyan viselkedik a numerikus megoldás. Szeretnénk elméleti úton magyarázatot adni a 2.1 táblázatban tapasztaltakra.

2.1. Dahlquist-féle tesztegnyenlet

A 0-stabilitás azon numerikus módszereket klasszifikálja, amelyek az $y' = 0$ differenciálegyenlet megoldására jól viselkednek. Dahlquist vezette be először a most már a szakirodalomból ([1], [6]-[7]) ún. tesztegnyenletet, amely olyan numerikus módszereket jelöl ki, melyek az

$$u'(t) = \lambda u(t), \quad t > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

$$u(0) = u_0 \quad (2.2)$$

tesztegnyenleten viselkednek jól.

Természetes elvárás az ilyen numerikus módszerekkel szemben, hogy a numerikus megoldás rögzített rácshálón jól modellezze az $u(t) = e^{\lambda t} u_0$ megoldást. A továbbiakban feltesszük, hogy $u(0) = u_0 > 0$. A numerikus megoldás stabilitása $Re(\lambda)$ előjelétől függ és ekkor három eset lehetséges:

- (a) $Re(\lambda) > 0$ esetén $u(t)$ időben szigorúan monoton növekvő (instabil).
- (b) $Re(\lambda) \leq 0$ esetén $u(t)$ időben korlátos marad (stabil).
- (c) $Re(\lambda)$ esetén $u(t)$ időben lecseng (aszimptotikusan stabil).

Egy numerikus módszer alkalmazásánál alapvető elvárás, hogy a lehető legjobban közelítse a folytonos feladat megoldását, megőrizve annak legfontosabb kvalitatív tulajdonságait. Mivel $Re(\lambda) \leq 0$ esetén a megoldás monoton csökkenő, míg $Re(\lambda) > 0$ esetén növekszik és kinő a végtelenbe, ezért megköveteljük, hogy a numerikus módszer által meghatározott eredmény is rendelkezzen ezen tulajdonsággal. Vagyis ha a tesztegnyenletben $Re(\lambda) \leq 0$, akkor a numerikus megoldásra teljesüljön az $|u_n| \leq |u_{n-1}| \leq \dots \leq |u_0|$ egyenlőtlenség. Azaz kiemelten fontosak azok a numerikus módszerek, melyekre igaz, hogy $Re(\lambda) \leq 0$ esetén a tesztegnyenlethez tartozó numerikus megoldások monoton csökkenő numerikus megoldást adnak.

Ennek következtében a numerikus módszerünket olyan tesztfeladatra alkalmazzuk, amelyre $Re(\lambda) \leq 0$. A megoldás ekkor monoton csökkenő és minden $t > 0$ esetén $|u(t)| \leq |u(0)| = u_0$.

2.1.1. Példa. Alkalmazzuk a θ -módszert a (2.1)-(2.2) feladat megoldására. Mivel

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + h\lambda y_n + (1 - \theta)h\lambda y_n \\ y_n - h\lambda\theta y_n &= y_{n-1} + (1 - \theta)h\lambda y_{n-1} \\ (1 - h\lambda\theta)y_n &= (1 + (1 - \theta)h\lambda)y_{n-1} \end{aligned}$$

2.1. Dahlquist-féle tesztegnyenlet

ezért a numerikus megoldás a rácsháló pontjaiban

$$y_n = \frac{(1 + (1 - \theta)h\lambda)}{(1 - h\lambda\theta)} y_{n-1}.$$

A stabilitás diszkrét megfelelőjét jelentő

$$|y_n| \leq |y_{n-1}| \tag{2.3}$$

feltétel akkor és csak akkor teljesül, amikor

$$\left| \frac{(1 + (1 - \theta)h\lambda)}{(1 - h\lambda\theta)} \right| \leq 1. \tag{2.4}$$

Ez azt jelenti, hogy a (2.1) tesztegnyenletben szereplő λ adott érték esetén csak azon h -lépésközű rácshálókon teljesül a (2.3) numerikus stabilitási tulajdonság, amelyekre a (2.4) feltétel érvényes.

Vezessük be a $z = \lambda h \in \mathbb{C}$ jelölést, illetve az $R(z) = \frac{(1+(1-\theta)h\lambda)}{(1-h\lambda\theta)}$ függvényt. Ezen jelölésekkel a θ -módszer felírható

$$y_n = R(z)y_{n-1}$$

alakban. ♣

2.1.1. Definíció. Tetszőleges egylépéses módszer esetén az

$$y_n = R(z)y_{n-1}, \quad y_0 \text{ adott}$$

relációban az $R(z)$ függvényt a módszer stabilitási függvényének nevezzük.

Általánosan igaz, hogy a numerikus megoldás monoton csökkenésének feltétele, hogy az

$$|R(z)| \leq 1$$

egyenlőtlenség teljesüljön.

2.1.2. Definíció. A azon $z \in \mathbb{C}$ pontok halmazát, melyekre $|R(z)| \leq 1$ abszolút stabilitási tartománynak nevezzük.

Fontos megjegyeznünk, hogy az abszolút stabilitási feltétel a stabilitásra és nem a pontosság növelésére szolgál.

2.1.3. Definíció. Egy numerikus módszert A -stabil módszernek nevezünk, ha abszolút stabilitási tartománya tartalmazza \mathbb{C}_0^- bal oldali komplex félsíkot.

2.1.1. Megjegyzés. Ha egy numerikus módszer A -stabil, akkor az csak azt biztosítja, hogy a módszer a tesztegnyenleten $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ esetén megfelelően viselkedik, viszont a $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ esetre nem ad választ.

2.2. Lineáris rendszer esete

Lineáris rendszerek esetén a stabilitás vizsgálata bonyolultabb. Tekintjük az

$$u'(t) = Au(t), \quad t > 0 \quad (2.5)$$

lineáris rendszert, ahol $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ adott, diagonalizálható mátrix. Tehát létezik olyan T reguláris mátrix, amellyel a hasonlósági transzformáció után

$$T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_d],$$

ahol λ_i az A mátrix sajátértékei. Bevezetve $w(t) = T^{-1}u(t)$ új változót igaz, hogy

$$Tw'(t) = ATw(t),$$

azaz a (2.5) egyenlet átírható

$$w'(t) = \Lambda w(t)$$

alakban, azaz

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}.$$

Mivel ez az egyenlet d darab tesztegysenletet jelent, ezért a stabilitásnak feltétele, hogy mindegyik skaláris egyenlet stabil legyen, vagyis teljesüljön a $\text{Re}(\lambda_j) \leq 0$ feltétel minden $j = 1, 2, \dots, d$ esetén.

2.2.1. Megjegyzés. Legyen $T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ortogonális mátrix, azaz $T^{-1} = T^T$. Ekkor egy tetszőleges $y \in \mathbb{R}^d$ vektor és annak $w = T^{-1}y$ transzponáltjainak euklideszi normái között az alábbi kapcsolat érvényes:

$$\begin{aligned} \|y\|_2^2 &= \langle y, y \rangle = \langle Tw, Tw \rangle = \langle w, T^T Tw \rangle \\ &= \langle w, T^{-1}Tw \rangle = \langle w, w \rangle = \|w\|_2^2. \end{aligned}$$

Azaz az ortogonális transzformáció normatartó.

2.2.1. Következmény. Az ortogonális mátrixok egy további fontos tulajdonsága, hogy az euklideszi normabeli kondicionáltsági száma $\text{cond}_2(T) = 1$. Azaz, ha T ortogonális mátrix, akkor érvényes az $\|y_n\|_2 \leq \|y_0\|_2$ tulajdonság.

3. fejezet

Runge-Kutta módszerek abszolút stabilitása

3.1. Runge-Kutta típusú módszerek

Az egylépéses módszerek osztályán belül a leggyakrabban használt numerikus módszerek az ún. Runge-Kutta típusú módszerek. A fejezetben ilyen módszerek abszolút stabilitási függvényeit szeretnénk megadni. Mielőtt ezeket kiszámítanánk, röviden ismertetjük a Runge-Kutta módszerek alapvető tulajdonságait.

3.1.1. Definíció. *Legyen $s \geq 1$ egy adott egész szám. A rögzített a_{ij}, c_i, b_i , ahol $i, j = 1, 2, \dots, s$ számok melletti*

$$Y_i = y_{n-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_{n-1} + c_j h, Y_j), \quad (3.1)$$

$$y_n = y_{n-1} + h \sum_{i=1}^s b_i f(t_{n-1} + c_i h, Y_i) \quad (3.2)$$

numerikus módszert s -lépcsős Runge-Kutta típusú módszernek nevezünk.

Észrevételek:

- A módszer egylépéses, mivel y_{n-1} értékéből származtatja y_n értékét. Az s paraméter a lépcsőszámot jelenti, mégpedig hány köztes pontban számolunk ki értéket, amelyekből az y_n értékét meghatározzuk.
- A módszert adott s esetén a paraméterei határozzák meg, amelyek száma $s^2 + 2s$.

3.1. Runge-Kutta típusú módszerek

A Runge-Kutta típusú módszerek egy másik lehetséges felírása, amikor nem a megoldásfüggvényt, hanem annak deriváltját, azaz $u'(t) = f(t, u(t))$ függvényt approximáljuk köztes értékekkel a $t_{n-1} + c_i h$ pontokban. Ekkor a Runge-Kutta módszereket a következő módon is definiálhatjuk.

3.1.2. Definíció. *Legyen $s \geq 1$ egy adott egész szám. A rögzített a_{ij}, c_i, b_i , ahol $i, j = 1, 2, \dots, s$ számok melletti*

$$k_i = f(t_{n-1} + c_i h, y_{n-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (3.3)$$

$$y_n = y_{n-1} + h \sum_{i=1}^s b_i k_i. \quad (3.4)$$

numerikus módszert s -lépcsős Runge-Kutta típusú módszernek nevezzük.

Vezessük be az $A = (a_{ij})_{i,j=1}^s \in \mathbb{R}^{s \times s}$, valamint az $c = (c_i)_{i=1}^s, b = (b_i)_{i=1}^s \in \mathbb{R}^s$ jelöléseket. Ekkor mind a (3.1)-(3.2) és a (3.3)-(3.4) által meghatározott Runge-Kutta megadható az alábbi

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

alakban. Az ilyen típusú táblázatot Butcher-táblázatnak nevezzük.

3.1.1. Megjegyzés. *Könnyen látható módon a Runge-Kutta módszer explicit, ha a Butcher-táblázatában szereplő A mátrix szigorú alsó háromszög mátrix. Ellenkező esetben a módszer implicit.*

3.1.1. Példa. *Tekintsük az alábbi módszer Butcher-táblázatát és határozzuk meg, hogy mi ez a módszer!*

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \theta & \theta \\ \hline & 1 - \theta & \theta \end{array}$$

Ez egy implicit Runge-Kutta típusú módszer, amely a következőt jelenti:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_{n-1}, y_{n-1}) \\ k_2 &= f(t_{n-1} + h, y_{n-1} + h(1 - \theta)k_1 + \theta h k_2) \\ y_n &= y_{n-1} + h(1 - \theta)k_1 + h\theta k_2 \end{aligned}$$

A harmadik képletből

$$y_n - y_{n-1} = h[(1 - \theta)k_1 + \theta k_2].$$

3.1. Runge-Kutta típusú módszerek

Ezt és az első összefüggést behelyettesítve a második egyenletbe, a

$$k_2 = f(t_n, y_{n-1} + (y_n - y_{n-1})) = f(t_n, y_n)$$

összefüggést kapjuk. Ezt a k_2 értéket, és az első összefüggésbeli k_1 értéket behelyettesítve a hatmadik egyenletbe, megkapjuk az

$$y_n = y_{n-1} + h(1 - \theta)f(t_{n-1}, y_{n-1}) + h\theta f(t_n, y_n)$$

összefüggést. Ez a módszer nem más, mint a θ -módszer. ♣

3.1.1. Tétel. Egy Runge-Kutta módszer p -edrendűségének szükséges feltétele a Butcher táblázat jelöléseit megtartva a következő:

$$\frac{1}{k!} = b^T A^{k-1} e, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

3.1.2. Megjegyzés. Fontos megemlíteni, hogy a (3.1)-(3.2) és a (3.3)-(3.4) módszerek Butcher-táblázatai és pontosság feltételei megegyeznek, azaz ezeket a módszereket ekvivalensnek tekintjük.

Mivel dolgozatunk főleg explicit Runge-Kutta módszerek A-stabilitásának kérdését vizsgálja, nyilvánvaló módon felmerül az a kérdés, hogy mi a kapcsolat az explicit Runge-Kutta típusú módszerek lépcsőszáma (s) és a rendje (p) között. Az alábbi szakirodalomból nyert táblázatból választ nyerhetünk a kérdésünkre:

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(s)$	1	2	3	4	4	5	6	6	7	7

3.1. táblázat. Explicit Runge-Kutta módszerek lépcsőszáma és rendje közötti kapcsolat

Jól látszik, hogy az egylépcsős explicit Euler-módszer elsőrendű, a kétlépcsős módszerek másodrendűek, a háromlépcsős módszerek harmadrendűek, a néglépcsős módszer pedig negyedrendben pontos. Tehát $s = 1, 2, 3, 4$ esetén $p = s$ pontosság biztosítható. Viszont $s \geq 5$ esetén ez már nem érvényes, a rend alatta marad a lépcsőszámnak, vagyis $p < s$.

3.1.3. Megjegyzés. Az explicit Runge-Kutta típusú módszer esetén nem ismeretes, hogy tetszőleges p rend eléréséhez hány lépcsőszám szükséges. Csúpnán $p = 8$ értékig ismert. Az alábbi táblázatból jól látszik, hogy ezen értékig hány feltétel, illetve hány paraméter szerepel:

3.2. Runge-Kutta módszerek stabilitási függvényei

$rend(p)$	1	2	3	4		5	6		7		8
feltételek száma	1	2	4	8		17	37		85		200
lépcsők száma (s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
paraméterek száma	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

3.2. táblázat. Feltételek, lépcsők és paraméterek száma közötti összefüggés.

3.1.4. Megjegyzés. *Az érdeklődő Olvasók számára megjegyezzük, hogy a fenti táblázat jobb megértésére ajánljuk a B-fák és egyszerűsítő rendfeltételek c. témakörök feldolgozását a [1], [2], [6]- [7] könyvekből.*

3.2. Runge-Kutta módszerek stabilitási függvényei

Ebben a szakaszban megvizsgáljuk a Runge-Kutta típusú módszerek abszolút stabilitási függvényét és a kapott eredményből rögtön megadjuk a választ arra a kérdésre, hogy vannak-e A-stabil explicit Runge-Kutta típusú módszerek.

Egyelőre tetszőleges Runge-Kutta típusú módszer viselkedését vizsgáljuk a (2.1)-(2.2) teszthez. A stabilitási tartomány felírásához első lépésben a tesztfeladatra Runge-Kutta típusú módszerhez tartozó $R(z)$ stabilitási függvény meghatározása szükséges.

Vezessük be az $Y \in \mathbb{R}^s$ vektort, az $I \in \mathbb{R}^{s \times s}$ egységmátrixot, továbbá az $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^s$ vektort. Ekkor a (3.1)-(3.2) Runge-Kutta típusú módszert alkalmazva a (2.1)-(2.2) teszthez a következőképpen írható fel:

$$Y = y_{n-1}e + h\lambda Y = y_{n-1}e + zAY \quad (3.5)$$

összefüggés, ahol $z = h\lambda$. Innen

$$(I - zA)Y = y_{n-1}e.$$

Megfelelően kis z (azaz h) esetén $I - zA$ mátrix invertálható és ekkor inverze Neumann-sora segítségével előállítható. Azaz

$$Y = (I - zA)^{-1}y_{n-1}e,$$

másrészt (3.2) alapján

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + h \sum_{i=1}^s b_i \lambda Y_i = y_{n-1} + zb^T Y \\ &= y_{n-1} + zb^T (I - zA)^{-1} e y_{n-1} = [1 + zb^T (I - zA)^{-1} e] y_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2. Runge-Kutta módszerek stabilitási függvényei

A Runge-Kutta típusú módszerek stabilitási függvénye:

$$R(z) = 1 + zb^T(I - zA)^{-1}e.$$

Felírva $(I - zA)^{-1}$ Neumann sorát érvényes az alábbi összefüggés:

$$\begin{aligned} R(z) &= 1 + zb^T(I + zA + z^2A^2 + \dots + \dots)e \\ &= 1 + zb^T\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k A^k\right)e = 1 + b^T\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1} A^k\right)e \\ &= 1 + b^T\left(\sum_{k=1}^{\infty} z^k A^{k-1}\right)e = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \left(b^T A^{k-1}e\right). \end{aligned}$$

A 3.1.1 Tétel alapján a Runge-Kutta típusú módszerek p -edrendűségének szükséges feltétele:

$$\frac{1}{k!} = b^T A^{k-1}e, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Ezért egy p -edrendű Runge-Kutta típusú módszer stabilitási függvénye az előzőek alapján:

$$R(z) = 1 + \sum_{k=1}^p z^k \frac{1}{k!} + \sum_{k=p+1}^{\infty} z^k (b^T A^{k-1}e). \quad (3.7)$$

Tehát egy tetszőleges p -edrendű Runge-Kutta típusú módszer stabilitási függvénye (3.7) alakú.

Most tegyük fel, hogy a módszerünk s lépcsős, p -edrendben pontos explicit Runge-Kutta típusú módszer. Ekkor a Butcher táblázatban $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$ egy szigorúan alsó háromszögű mátrix, ezért

$$A^k = 0, \quad k = s + 1, s + 2, \dots$$

Így az ilyen módszerek stabilitási függvénye

$$R(z) = 1 + \sum_{k=1}^p z^k \frac{1}{k!} + \sum_{k=p+1}^s z^k (b^T A^{k-1}e). \quad (3.8)$$

Fontos megjegyeznünk, hogy a maximális rendű explicit Runge-Kutta típusú módszerek stabilitási függvényei $p = 1, 2, 3, 4$ esetén ugyanolyan alakúak, hiszen a $p = s$ reláció miatt mindegyik módszerre

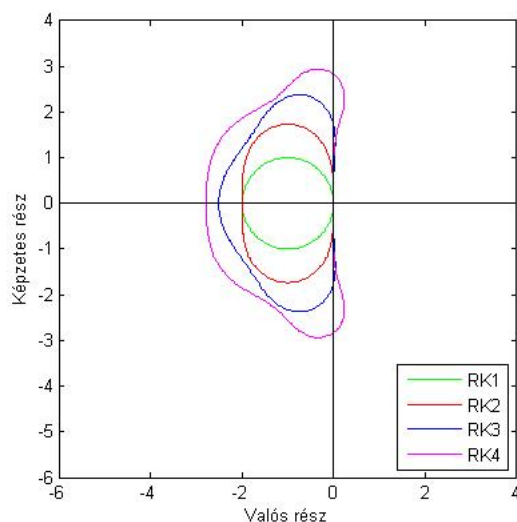
$$R(z) = 1 + \sum_{k=1}^p z^k \frac{1}{k!}, \quad p = 1, 2, 3, 4. \quad (3.9)$$

A stabilitási függvény a (3.8) alakú előállításából látszik, hogy az explicit Runge-Kutta típusú módszer stabilitási függvénye egy legfeljebb s -ed fokú polinom. Ezért $|z| \rightarrow \infty$ esetén $\lim |R(z)| = \infty$, ezért ebben az esetben a stabilitási tartomány nem tartalmazhatja a teljes \mathbb{C}^- félsíkot. Ebből nyilvánvaló módon adódik az alábbi tétel.

3.2.1. Tétel. *Az explicit Runge-Kutta típusú módszerek nem A-stabilak.*

Az előző, 3.2.1 Tételben kimondtuk, hogy az explicit Runge-Kutta típusú módszerek nem A-stabilak. Ez a tény az alkalmazhatóságot erősen korlátozza.

3.2.1. Példa. *Az explicit Runge-Kutta típusú módszer abszolút stabilitási tartománya a $p = 1, 2, 3, 4$ rendekre az alábbi ábrán látható:*



3.1. ábra. Az RK1, RK2, RK3 és RK4 módszerek abszolút stabilitási tartományai.



Amikor a (3.1)-(3.2) Runge-Kutta típusú módszert alkalmazzuk a (2.1) tesztegyenletre, akkor a (3.1) alapján (a korábbi jelöléseink megtartásával) érvényes az

$$R(z) = 1 + zb^T(I - zA)^{-1}e$$

összefüggés. Célunk a stabilitási függvény egy másik alakú megadása, melyből egyrészt könnyen számíthatjuk ki a stabilitási függvényt, illetve el lehet dönteni egyes implicit módszerekről azok A-stabilitását.

3.2.2. Tétel. *Egy tetszőleges implicit Runge-Kutta típusú módszer $R(z)$ stabilitási függvénye felírható*

$$R(z) = \frac{\det(I - zA + zeb^T)}{\det(I - zA)}$$

alakban.

Bizonyítás. A (3.5) összefüggésből érvényes az

$$Y_i - z \sum_{j=1}^s a_{ij} Y_j = y_{n-1}, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (3.10)$$

egyenlőtlenség. Másrészt, a (3.6) összefüggésből

$$y_n - z \sum_{j=1}^s b_j Y_j = y_{n-1}. \quad (3.11)$$

Ekkor (3.10)-(3.11) egy $s + 1$ ismeretlenes lineáris algebrai egyenletrendszert jelent az $Y_1, Y_2, \dots, Y_s, y_n$ ismeretlenekre nézve. Jelölje $y \in \mathbb{R}^{s+1}$ ezen ismeretlenek vektorát. Ekkor az egyenletrendszer felírható

$$By = f$$

alakban, ahol $f = y_{n-1}e$, míg a rendszer $B \in \mathbb{R}^{(s+1) \times (s+1)}$ együtthatómátrixa a következő alakú:

$$B = \begin{pmatrix} 1 - za_{11} & -za_{12} & \cdots & -za_{1s} & 0 \\ -za_{21} & 1 - za_{22} & \cdots & -za_{2s} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -za_{s1} & -za_{s2} & \cdots & 1 - za_{ss} & 0 \\ -zb_1 & -zb_2 & \cdots & -zb_s & 1 \end{pmatrix}$$

Az utolsó y_n ismeretlent Cramer-szabállyal meghatározva nyerjük, hogy

$$y_n = \frac{\det B_f}{\det B}, \quad (3.12)$$

ahol

$$B_f = \begin{pmatrix} 1 - za_{11} & -za_{12} & \cdots & -za_{1s} & y_{n-1} \\ -za_{21} & 1 - za_{22} & \cdots & -za_{2s} & y_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -za_{s1} & -za_{s2} & \cdots & 1 - za_{ss} & y_{n-1} \\ -zb_1 & -zb_2 & \cdots & -zb_s & y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Könnyen láthatóan $\det B$ értékét az utolsó oszlop szerinti kifejezéssel közvetlenül meghatározhatjuk, ekkor

$$\det B = \det(I - zA). \quad (3.13)$$

Ezért $\det B_f$ értékének meghatározásához vonjuk ki az utolsó sorát rendre a felette levő sorokból. Ezután az utolsó oszlop szerinti kifejezéssel már látható, hogy

$$\det B_f = y_{n-1} \det(I - zA + eb^T). \quad (3.14)$$

A (3.13)-(3.14) összefüggések (3.12) képletbe való behelyettesítése a tétel állítását adja. \square

3.2.2. Példa. A 3.1.1 példában meghatároztuk a (2.1)-(2.2) tesztegyenletre alkalmazott θ -módszer stabilitási függvényét, amely az alábbi volt:

$$R(z) = \frac{1 + (1 - \theta)z}{1 - z\theta}.$$

Mivel a θ -módszer speciális implicit Runge-Kutta módszer, ezért érvényes rá a 3.2.2 Tétel eredménye. A Butcher táblázat jelöléseit használva ez 3.2.2 Tételben az alábbi megválasztást jelenti:

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 - \theta \\ \theta \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 - \theta & \theta \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$R(z) = \frac{\det(I - zA + zeb^T)}{\det(I - zA)} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 + z(1 - \theta) & z\theta \\ -z(1 - \theta) + z(1 - \theta) & 1 - z\theta + z\theta \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z(1 - \theta) & 1 - z\theta \end{pmatrix}},$$

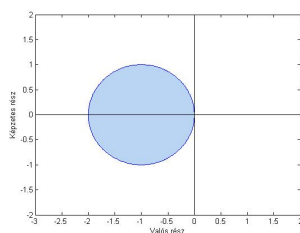
azaz

$$R(z) = \frac{1 + (1 - \theta)z}{1 - z\theta}.$$

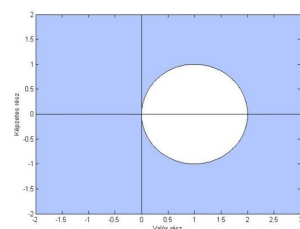


3.2.3. Példa. A θ -módszer stabilitási tartománya 0, 1 és $\frac{1}{2}$ értékek esetén az alábbi ábrákon láthatóak:

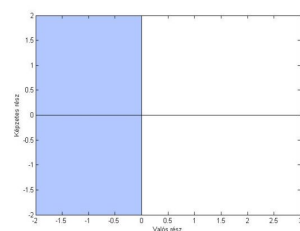
3.2. Runge-Kutta módszerek stabilitási függvényei



3.2. ábra. Az explicit Euler módszer stabilitási függvénye.



3.3. ábra. Az implicit Euler módszer stabilitási függvénye.



3.4. ábra. A trapéz módszer stabilitási függvénye.

Azaz a fenti ábrákból is leolvasható, hogy az implicit Euler, trapéz módszerek A-stabilak szemben az explicit Euler-módszerrel. ♣

3.2.1. Megjegyzés. *A fejezet elméleti eredményei és példái alapján láthatuk, hogy célszerű az implicit Runge-Kutta típusú módszerek abszolút stabilitásának szisztematikus vizsgálata. Ez most meghaladja ezen dolgozat kereteit, de mi is adtunk példát arra, hogy az explicit Runge-Kutta típusú módszerekkel ellentétben léteznek A-stabil implicit Runge-Kutta típusú módszerek.*

Irodalomjegyzék

- [1] J. C. Butcher, *Numerical methods for ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, Chichester, 2008.
- [2] K. Dekker és J. G. Verwer, *Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984.
- [3] Faragó István és Horváth Róbert, *Numerikus módszerek*, Typotex Kiadó, 2011.
- [4] Faragó István: *Numerikus modellezés és közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldási módszerei*, 2013.
- [5] W. Gautschi, *Numerical analysis. An introduction*, 2nd ed., Birkhäuser, Boston, MA, 2012.
- [6] E. Hairer, S. P. Nørsett és G. Wanner, *Solving ordinary differential equations. I. Nonstiff problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [7] E. Hairer és G. Wanner, *Solving ordinary differential equations. II. Stiff and differential-algebraic problems*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [8] R. J. LeVeque, *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations. Steady-state and time-dependent problems*, SIAM, Philadelphia, PA, 2007.
- [9] Simon L. Péter és Tóth János, *Differenciálegyenletek, Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba*, Typotex Kiadó, 2009.