Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Interpolációelmélet a numerikus analízisben

BSc Szakdolgozat

Készítette: Csurkó Lilla
Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Faragó István
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

1.

Bevezetés

Szakdolgozatom egy matematikai közelítő eljárással, az interpolációval foglalkozik. Az interpoláció feladata alkalmazásokban, hogy néhány mérési eredményt algebrai, illetve trigonometrikus polinomok grafikonjaival kössön össze. Ezeket az összekötő polinomokat interpolációs polinomoknak nevezzük. Segítségükkel információt nyerhetünk mérési eredményeken kívüli ismeretlen értékekről. A szakdolgozatomban az interpolációs polinomok különböző alakját tárgyalom, mint például a Lagrange féle alakot-melyet a hiedelemmel ellentétben nem Lagrange fedezett fel, hiszen Euler már 1783-ban használta a formulát-, a baricentrikus és a Newton-féle alakot, illetve ezek kiterjesztését, az Hermite-féle interpolációt. Az interpolációs polinomoknál lényeges kérdés, hogy mekkora hibát ejtenek. Elérhető-e konvergencia? Ha igen, milyen rendben? Ezekre a kérdésekre ad választ a harmadik fejezet. Külön vizsgálom azt az esetet amikor egy függvény akárhányszor differenciálható és a deriváltjai nem nőnek ki gyorsan, és külön azt, amikor egy függvény nem rendelkezik ezzel a simasági tulajdonsággal. Ilyen függvény például a Runge példájából ismert

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x \in [-5, 5].$$

Hogy az egyes interpolációk konvergenciája jól látható legyen, MATLAB program segítségével illusztrációkat készítettem a fenti függvényhez és a dolgozat végén az interpolációs hibákat összehasonlítottam egy adott pontban. Felmerül a kérdés, hogy az alappontok megválasztásával javulhat-e az interpolációs hiba? Így jutunk el a negyedik fejezetben a Csebisev-alappontok fogalmához. A trigonometrikus interpoláció tárgyalásánál szó lesz a Fourier transzformációról is.

2.

Interpolációs feladatok

2.1. A feladat bemutatása

Tegyük fel, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ismeretlen függvénynek n+1 helyen ismerjük az értékét. Legyenek ezek rendre $(x_i, f_i),\ i = 0, 1, \ldots, n$. A továbbiakban ezeket adatoknak, az $x_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ pontokat pedig alappontoknak nevezzük. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, továbbá, hogy $x_i \neq x_j, ha\ i \neq j$. Hogyan becsülhető az f függvény értéke az alappontoktól különböző pontokban? Rögzítjük az intervallumon az adott tulajdonságú függvények halmazát, és közülük keresünk olyan függvényt, amelyik grafikonja átmegy az összes adott ponton. Az így nyert függvényt az adott pontokhoz tartozó interpolációs függvénynek hívjuk, ha létezik. Az alappontoktól eltérő pontokban az interpolációs függvény értékeivel közelítjük az ismeretlen f függvény értékeit. Ezt az eljárást nevezzük interpolációnak. Ha a közelítést $p_n \in P_n$ alakban keressük, ahol P_n a legfeljebb n-edfokú polinomok halmaza, akkor a

$$p_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n \tag{1}$$

feltételeket interpolációs feltételeknek nevezzük.

2.1. Állítás Ha létezik olyan polinom, melyre az (1) feltételek teljesülnek, akkor az a polinom egyetlen.

Bizonyítás. Az unicitást indirekt bizonyítjuk.
Feltesszük,hogy léteznek $g, h \in P_n$, amelyekre (1) teljesül, de $g \neq h$.
Jelölje

$$p(x) = g(x) - h(x) \in P_n.$$

Ekkor

$$p(x_i) = 0,\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Tehát $x_0, x_1, .., x_n$ n+1 darab alappont gyöke a $p \in P_n$ legfeljebb n-edfokú polinomnak. Az algebra alaptétele miatt ekkor $p(x) = 0$, azaz $f(x) = g(x)$, ami ellentmond a feltevésünknek. □

2.2. A Lagrange-féle interpolációs polinom

A továbbiakban mutassuk meg, hogy létezik ilyen polinom!

2.2. Állítás Létezik olyan P_n-beli polinom, melyre az (1) feltételek teljesülnek.

Bizonyítás.
Vezessük be a

$$\hat{\Phi}_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} (x - x_j) \in P_n$$

jelölést. Ekkor

$$\hat{\Phi}_i(x_k) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad \text{és} \;\; k \neq i \text{ esetén, továbbá } \hat{\Phi}_i(x_i) \neq 0.$$

Tekintsük a

$$\Phi_i(x) = \frac{\hat{\Phi}_i(x)}{\hat{\Phi}_i(x_i)} \in P_n$$

polinomot!
Ekkor

$$\Phi_i(x_k) = \delta_i^{k\,1} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad k \neq i; \\ 1 & \text{ha} \quad k = i. \end{cases}$$

Nyilvánvalóan $\Phi_i(x)$ felírható

$$\Phi_i(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}; \quad i = 0, 1, .., n \tag{2}$$

alakban. Ekkor az

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \Phi_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{3}$$

jelöléssel $L_n \in P_n$ és $L_n(x_i) = f_i, \; i = 0, 1 \ldots, n.$ $\square$

[1]A δ_i^k-t Kronecker-deltának nevezzük.

2.3. Definíció Adott alappontok esetén a fenti $\Phi_i(x),\ i = 0, 1, \ldots, n$ polinomot az i-edik alapponthoz tartozó Lagrange-féle alappolinomnak nevezzük.

2.4. Definíció Az $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \Phi_i(x)$ polinomot Lagrange-féle interpolációs polinomnak nevezzük.

Jelölje az $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \in P_{n+1}$.

2.5. Definíció Az $\omega_{n+1}(x)$ polinomot alappontpolinomnak hívjuk.

Ekkor a szorzat deriválási szabálya miatt

$$\omega'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_j),$$

ezért

$$\omega'_{n+1}(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j). \tag{4}$$

Így a (2) és a (4) összefüggések alapján a következőt kapjuk:

$$\Phi_i(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} (x_i - x_j)} = \frac{\prod\limits_{j=0}^{n} (x - x_j)}{(x - x_i) \prod\limits_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} (x_i - x_j)} = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\ \omega'_{n+1}(x_i)}.$$

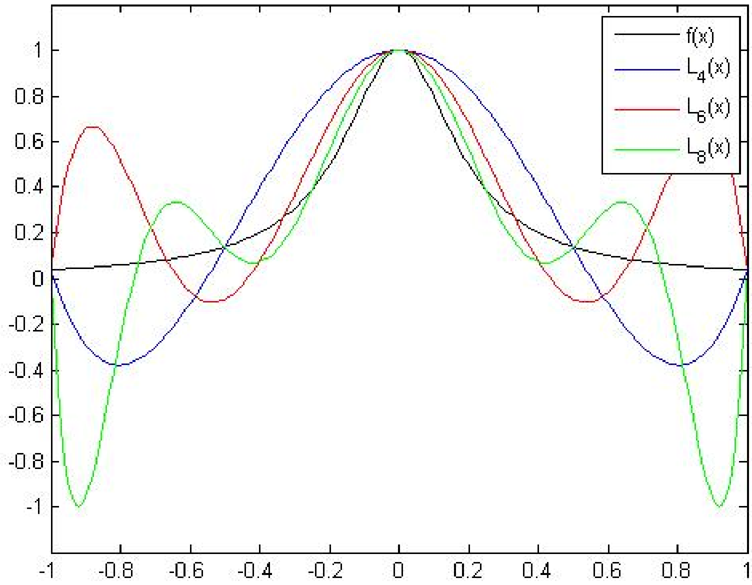
2.6. Következmény A Lagrange-féle interpolációs polinom felírható

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\ \omega'_{n+1}(x_i)} \tag{5}$$

alakban.

A Lagrange-féle előállítás előnye, hogy ha csak egy alappontban kell a függvényértéket megváltoztatnunk, akkor az új polinom helyettesítési értékeit könnyen újraszámolhatjuk a régi értékekből, hiszen az (5) összegben csak egy tagot kell megváltoztatnunk. Azonban hátránya, hogy a módszer nem adaptív[2], mivel egy új alappont hozzávételével minden korábbi tagot újra kell számolnunk.

[2]Az adaptív módszerek figyelembe veszik az adott függvénynek az $x_i^{(n-1)}$ pontokon és az előző alappontokon felvett értékeit a rákövetkező $x_i^{(n)}$ alappontok megválasztásánál.



1. ábra. Az $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ függvény és az erre illesztett negyed-, hatod- és nyolcadrendű Lagrange-féle polinomok.

2.3. A baricentrikus interpolációs formula

A Lagrange-féle interpolációnál láttuk, hogy egy új alappont felvétele esetén minden korábbi tagot újra kell számolnunk. Azonban, ha a formulát egy kicsit átalakítjuk, egy praktikusabb előállítását kapjuk az interpolációs-polinomnak, az úgynevezett baricentrikus formulát.Vezessük be $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén az x_k alapponthoz tartozó

$$q_k := \frac{1}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)} \equiv \frac{1}{\omega'_{n+1}(x_k)}$$

baricentrikus súlyokat. Ezek a súlyok a Lagrange-féle alappolinomok főegyütthatói. Így a Lagrange-féle előállításból kiindulva az interpolációs polinom az

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{x - x_k} = \omega_{n+1}(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{q_k}{x - x_k} f_k \qquad (6)$$

alakra hozható. Vegyük észre, hogy

$$\omega_{n+1}(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{q_k}{x - x_k} \equiv 1,$$

hiszen az egyenlőség bal oldala az $(x_k, 1),\ k = 0, 1, \ldots, n$ pontokhoz tartozó interpolációs polinomot adja, ami csak a konstans 1 polinom lehet, az interpolációs polinom egyértelműsége miatt. Ennek alapján a (6) formulát átírhatjuk a következőképpen:

$$L_n(x) = \frac{L_n(x)}{1} = \frac{\omega_{n+1}(x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{q_k}{x-x_k}f_k}{\omega_{n+1}(x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{q_k}{x-x_k}} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{q_k}{x-x_k}f_k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{q_k}{x-x_k}}.$$

Ezt a formulát baricentrikus interpolációnak nevezzük. Használatával jelentősen csökkenthető a műveletszám.

2.4. A Newton-féle interpolációs polinom

Jelölje ismét $L_k(x) \in P_k$ az $(x_i, f_i),\ i = 0, 1, \ldots, k$ adatokra fektetett interpolációs polinomot. Ekkor

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) \in P_k,$$

továbbá az interpolációs feltételek miatt

$$(L_k - L_{k-1})(x_i) = 0,\ i = 0, 1 \ldots, k-1.$$

Tehát az $L_k - L_{k-1}$ k-adfokú polinom gyökei $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$, azaz felírható

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = b_k(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1}) \tag{7}$$

alakban, ahol b_k egy egyelőre ismeretlen együttható.
Vizsgáljuk meg (7)-ban x^k együtthatóját! A képlet jobb oldalán x^k együtthatója b_k, míg a bal oldalán az $L_k(x)$ polinom x^k tagjának együtthatója, azaz a (3) alapján

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} f_i \frac{1}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(x_i - x_j)}.$$

Nyilván $L_0(x) = f_0$. Jelölje $N_k(x)$ az ezzel az iterációval előállított Lagrange-féle interpolációs polinomot. Ekkor tehát

$$N_k(x) = N_{k-1}(x) + b_k\omega_k(x),\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

ahol

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} f_i \frac{1}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(x_i - x_j)}, \tag{9}$$

és

$$N_0(x) = f_0.$$

Legyen

$$b_0 = f_0, \ \ \omega_0(x) = 1. \tag{10}$$

Ekkor $N_0(x) = b_0\omega_0(x)$. Ezen jelölésekkel tehát a (8) összefüggés igaz minden $k = 0, 1, \ldots, n$ értékre.

2.7. Definíció A (8), a (9), és a (10) alapján előállított interpolációs polinomot Newton-féle interpolációs polinomnak nevezzük.

Így

$$N_o(x) = b_0\omega_0(x),$$

$$N_1(x) = N_0(x) + b_1\omega_1(x) = \sum_{i=0}^{1} b_i\omega_i(x),$$

$$N_2(x) = N_0(x) + b_1\omega_1(x) + b_2\omega_2(x) = \sum_{i=0}^{2} b_i\omega_i(x).$$

Tehát a Newton-féle interpolációs polinom

$$N_k(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i\omega_i(x), \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{11}$$

alakban is írható, azaz

$$N_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i\omega_i(x).$$

Adjunk egy egyszerűbb képletet a (9) szerinti b_k együtthatókra! Definíció szerint

$$b_0 = f_0.$$

A (11) képletbe $k = 1$-et helyettesítve

$$N_1(x) = b_0\omega_0(x) + b_1\omega_1(x),$$

ahol a (9) alapján

$$b_1 = f_0 \frac{1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{1}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

Ha $k = 2$ értéket tekintjük, akkor:

$$N_2(x) = b_0 + b_1\omega_1(x) + b_2\omega_2(x),$$

ahol ismét a (9) alapján:

$$b_2 = f_0 \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Tekintsük a következő egyenlőséget:

$$\frac{1}{(x_2 - x_0)} \left[\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \right] = f_2 \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} -$$
$$f_1 \left[\frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} \right] + f_0 \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)}$$

Mivel f_1 együtthatója

$$\frac{1}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)},$$

így

$$b_2 = \frac{1}{(x_2 - x_0)} \left[\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \right].$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$[x_0]f = f_0 \equiv f(x_0),$$

$$[x_0, x_1]f = \frac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0} \equiv \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0},$$

és általában

$$[x_0, \ldots, x_k]f = \frac{[x_1, \ldots, x_k]f - [x_0, \ldots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}.$$

Ezeket a jelöléseket használva kapjuk, hogy

$$b_0 = [x_0]f,$$

$$b_1 = [x_0, x_1]f,$$

$$b_2 = [x_0, x_1, x_2]f.$$

2.8. Definíció Tetszőlegesen adott $(x_i, f_i),\ i = 1, \dots, k$ esetén az $[x_0, \dots, x_k]f$ számot az $(x_0, f_0), \dots, (x_k, f_k)$ pontokhoz tartozó $k-1$-edrendű Newton-féle osztott differenciának nevezzük.

2.9. Állítás A Newton-féle interpolációs polinom definíciójában szereplő b_k együtthatók a

$$b_k = [x_0, \dots, x_k]f$$

képlettel számíthatók ki.

Bizonyítás. Teljes indukcióval. Az $n = 0, 1, 2$ eseteket már láttuk. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz az állítás, azaz

$$b_k \equiv [x_0, \dots, x_k]f.$$

Mutassuk meg, hogy

$$b_{k+1} = [x_0, x_1, \dots, x_{k+1}]f. \tag{12}$$

A (9) alak figyelembe vételével a (12) kifejezésre a következőt kapjuk:

$$[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}]f = \sum_{i=0}^{k+1} f_i \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)}. \tag{13}$$

A (13) jobb oldala:

$$f_0 \frac{1}{\prod_{j=1}^{k+1} (x_0 - x_j)} + \prod_{i=1}^{k} f_i \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)} + f_{k+1} \frac{1}{\prod_{j=0}^{k} (x_{k+1} - x_j)}. \tag{14}$$

Azt tudjuk, hogy

$$b_{k+1} \equiv \frac{[x_1, \dots, x_{k+1}]f - [x_0, \dots, x_k]f}{x_{k+1} - x_0}. \tag{15}$$

Az indukciós feltétel miatt a (13) igaz tetszőleges $k+1$ pontra, azaz:

$$[x_1, \dots, x_{k+1}]f = \sum_{i=1}^{k+1} f_i \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)}, \tag{16}$$

továbbá

$$[x_0, \dots, x_k]f = \sum_{i=0}^{k} f_i \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} (x_i - x_j)}. \tag{17}$$

Ekkor a (16) és a (17) összefüggéseket behelyettesítve a (15)-be kapjuk, hogy

$$b_{k+1} = \frac{1}{x_{k+1} - x_0} \left[\sum_{i=1}^{k+1} f_i \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)} - \sum_{i=0}^{k} f_i \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} (x_i - x_j)} \right]. \tag{18}$$

Vizsgáljuk meg, hogy a (18) jobb oldalán mi lesz f_i, $i = 0, 1 \ldots, k+1$ együtthatója!
Ha $i = 1, 2, \ldots, k$, akkor f_i együtthatója:

$$\frac{1}{x_{k+1} - x_0} \frac{(x_i - x_0) - (x_i - x_{k+1})}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)} = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)}. \tag{19}$$

Ha $i = 0$, akkor f_0 együtthatója:

$$-\frac{1}{x_{k+1} - x_0} \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} (x_0 - x_j)} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{k+1} (x_0 - x_j)}. \tag{20}$$

Ha $i = k+1$, akkor f_{k+1} együtthatója:

$$\frac{1}{x_{k+1} - x_0} \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} (x_{k+1} - x_j)} = \frac{1}{\prod_{j=0}^{k} (x_{k+1} - x_j)}. \tag{21}$$

A (19)-(21)-t összevetve a (14)-val, az állításunkat kapjuk. $\square$

3.

Hibabecslés

3.1. Cauchy-tétele az interpolációs hibára

3.1. Tétel *Tegyük fel, hogy az* $f \in C^{(n+1)}[a,b]$ *függvényt interpoláljuk az* $x_0, \ldots, x_n$ *alappontokban. Ekkor* $x \in [a,b]$ *esetén létezik olyan* $\xi_x \in (a,b)$ *x-től függő szám, amelyre az interpolációs hiba felírható*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad (22)$$

alakban.

Bizonyítás. Legyen

$$\varphi(x) := f(x) - p_n(x) - K\omega_{n+1}(x),$$

ahol K egy egyelőre ismeretlen állandó. Tegyük fel, hogy $\tilde{x}$ az I intervallum egy tetszőleges rögzített pontja, de nem alappont, azaz $\tilde{x} \neq x_i,\ i = 0, \ldots, n$. Adjunk becslést $f(\tilde{x}) - p_n(\tilde{x})$-re! Válasszuk meg a K állandót úgy, hogy $\varphi(\tilde{x}) = 0$ legyen, azaz teljesüljön a

$$\varphi(\tilde{x}) \equiv f(\tilde{x}) - p_n(\tilde{x}) - K\omega_{n+1}(\tilde{x}) = 0$$

feltétel! Mivel $\tilde{x}$ nem alappont, ezért K meghatározható az

$$K = \frac{f(\tilde{x}) - p_n(\tilde{x})}{\omega_{n+1}(\tilde{x})}$$

egyenlőséggel. Ekkor a φ függvénynek legalább $n+2$ zérushelye van: $x_0, x_1, \ldots,$ $x_n, \tilde{x}$. Nyilván φ $n+1$-szer folytonosan differenciálható az (a,b)-n. Ekkor a Rolle-középértéktételt [3] alkalmazva látható, hogy a φ' függvénynek legalább $n+1$ zérushelye van. Így haladva mindig az eggyel nagyobb deriváltak irányába azt kapjuk, hogy a $\varphi^{(n+1)}$ függvénynek legalább egy zéruhelye van. Jelölje

[3] Ha az f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon , differenciálható az intervallum belső pontjaiban és $f(a) = f(b)$, akkor létezik olyan $c \in (a,b)$ szám, hogy $f'(c) = 0$ teljesül.

ξ_x az ilyen pontot, azaz $\varphi^{(n+1)}(\xi_x) = 0$. Felhasználva, hogy egy legfeljebb n-ed fokú polinom $(n+1)$-edik deriváltja 0, valamint hogy $\omega_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, a

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - K(n+1)!$$

egyenlőséget kapjuk. Így a $\varphi^{(n+1)}(\xi_x) = 0$ egyenlőség alapján

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} = \frac{f(\tilde{x}) - p_n(\tilde{x})}{\omega_{n+1}(\tilde{x})},$$

tehát

$$f(\tilde{x}) - p_n(\tilde{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(\tilde{x}).$$

Mivel $x = x_i$ esetén a (22) nyilvánvalóan igaz, ezért ezzel az állításunkat beláttuk. □

3.2. Következmény Jelölje $M_{n+1} := \max_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|$. Ekkor

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|.$$

Mivel

$$|\omega_{n+1} = |x - x_0| \dots |x - x_n| \leq (b-a)^{n+1},$$

így

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \tag{23}$$

3.3. Állítás Az $\omega_{n+1}(x)$ alappolinomra érvényes a

$$|\omega_{n+1}(x)| \leq \frac{n!}{4}h^{n+1} \tag{24}$$

becslés, ahol $x \in I$ és h a szomszédos alappontok közti legnagyobb távolság.

Bizonyítás. Teljes indukcióval. Az $n = 1$ esetben $\omega_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)$, és erre a függvényre a számtani-mértani közepek közismert összefüggése alapján

$$|(x-x_0)(x-x_1)| \leq \left(\frac{(x-x_0)+(x_1-x_0)}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4}.$$

Tegyük fel, hogy

$$|\omega_n(x)| \leq \frac{(n-1)!}{4} \cdot h^n.$$

Ekkor

$$|\omega_{n+1}(x)| = |\omega_n(x)| \cdot |x - x_n| \leq \frac{(n-1)!}{4} \cdot h^n \cdot n \cdot h = \frac{n!}{4}h^{n+1},$$

ami az állításunkat bizonyítja. □

3.4. Következmény A (22) hibabecslő formulában alkalmazva a (24) becslést, az

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{4} \cdot h^{n+1} = \frac{M_{n+1}}{4(n+1)} h^{n+1}$$

egyenlőséget kapjuk.

3.5. Definíció Amennyiben az interpoláció hibája eleget tesz valamely $M > 0$ állandóval az

$$|f(x) - p_n(x)| \leq M \cdot h^r$$

becslésnek, akkor azt mondjuk, hogy a hiba r-edrendű.

Tehát a Lagrange-féle interpoláció pontos $f \in P_n$ polinomokra, és az interpolációs formula rendje megegyezik az alappontok számával.

3.2. Az egyenletes és a pontonkénti konvergencia

Eddig megvizsgáltuk a Lagrange-féle interpoláció hibáját és felső becslést adtunk rá. Vajon tart-e az interpolációs polinomok sorozata az eredeti f függvényhez? Ha igen, akkor milyen értelemben és milyen feltételek mellett lesz egyenletes is a konvergencia?
A következő tétel segítségével elégséges feltételt tudunk adni az egyenletes konvergenciára.

3.6. Tétel *Ha $f \in C^\infty[a,b]$ és létezik olyan $M > 0$, melyre $n = 0, 1, \ldots$ esetén $max_{x\in[a,b]}|f^{(n)}(x)| \leq M^n$, akkor $\lim_{n\to\infty} max_{x\in[a,b]}|f(x) - p_n(x)| = 0$.*

Bizonyítás. A (23)-ből következik, mivel ebben az esetben

$$\frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{(M(b-a))^{n+1}}{(n+1)!},$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = 0.$$

□

3.7. Definíció Azt mondjuk, hogy a Lagrange-féle interpoláció konvergens az $x^\star \in [a,b]$ pontban, ha létezik $\lim_{n\to\infty} L_n(x^\star)$ határérték és $\lim_{n\to\infty} L_n(x^\star) = f(x^\star)$.

3.8. Megjegyzés Az egyenletes konvergencia erősebb, mint a pontonkénti konvergencia. Tehát, ha $L_n(x)$ interpolációs függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f(x)$ függvényhez az $[a,b]$-n, akkor pontonként is. Mint ismeretes, egyenletes konvergencia esetén a határérték és az integrálás, illetve a határérték és a deriválás sorrendje is felcserélhető.

Eddig azt az esetet néztük, amikor f akárhányszor differenciálható és a deriváltjai nem nőnek ki túl gyorsan. Most azzal az esettel foglalkozunk, amikor f nem rendelkezik ezzel a simasági tulajdonsággal. Ekkor mi mondható el a konvergenciáról? Ha az f függvény simaságára nem teszünk feltételt, akkor az interpolációs hibáról semmit sem tudunk mondani, hiszen az alappontokon kívül a függvényértékek tetszőlegesek lehetnek, ezért tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon.
Jelölje $\Omega_0 = \{x_0^0\}$, $\Omega_1 = \{x_0^1, x_1^1\}$,..., $\Omega_k = \{x_0^k, \ldots, x_k^k\}$ $k = 0, 1, \ldots, n$, és jelölje L_n az Ω_n pontjaira fektetett Lagrange-féle interpolációt. Tehát az $[a,b]$ intervallumbeli $\Omega_k = \{x_0^k, \ldots, x_k^k\}$ $k = 0, 1, \ldots, n$ alappontsorozaton a továbbiakban egy olyan sorozatot értünk, melynek k-adik eleme az $[a,b]$ intervallum $k+1$ darab különböző pontja.

3.9. Példa Bernstein a $[-1,1]$ intervallum ekvidisztáns felosztássorozatán vizsgálta az $f(x) = |x|$ függvény interpolációs polinomjait. Ezek csak a $-1, 0, 1$ pontokban konvergálnak az $f(x)$ függvény megfelelő értékeihez. Runge a $[-5,5]$ intervallum ekvidisztáns felosztássorozatán interpolálta az $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ függvényt. Észrevette, hogy az így nyert interpolációs polinomok sorozata csak az $|x| < 3.63$ (kerekített érték) feltételnek megfelelő x pontokban konvergál az eredeti függvényhez, az interpolációs polinomsorozat az intervallumon kívül divergál. Tehát a folytonosság mellett nem biztos a konvergencia, még a gyengébb pontonkénti sem. A következő tétel ezt állítja.

3.10. Tétel (Weierstrass-féle approximációs tétel) *Legyen $f \in C[a,b]$ egy tetszőleges folytonos függvény. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan p polinom, melyre $|f(x) - p(x)| < 0$ minden $x \in [a,b]$ esetén.*

A Weierstrass-féle approximációs tétel nem követeli meg az interpolációs feltételt. Azt mondja ki, hogy folytonos függvények tetszőlegesen megközelíthetőek polinomok segítségével, azaz mindig tudunk olyan $p(x)$ polinomot találni, mely az $f(x)$ függvénytől ε távolságon belül van. Ez a tétel reményt adott arra, hogy létezik egy olyan (nem ekvidisztáns) felosztássorozat, melyre a Lagrange-féle interpolációs polinomok konvergálni fognak minden f folytonos függvényhez a $[-1,1]$-en. 1914-ben azonban Georg Faber megmutatta, hogy nem létezik ilyen felosztássorozat.

3.11. Tétel (Georg Faber) *Bármely* Ω_k *alappontrendszer esetén létezik olyan* f *folytonos függvény, amelyre* $L_n(x)$ *interpolációk sorozata nem tart egyenletesen* f*-hez.*

Ez egy negatív eredmény, mivel arra hívja fel a figyelmet, hogy az egyenletes konvergencia csupán folytonosság esetén általában nem várható el. Azaz, minden felosztáshoz megadható olyan f folytonos függvény, mely esetén az interpolációk sorozata nem tart egyenletesen az f-hez. Ugyanakkor a következő tétel pedig azt mutatja meg, hogy adott f folytonos függvény esetén az alappontok megfelelő megválasztásával az egyenletes konvergencia mindig elérhető.

3.12. Tétel (Józef Marcinkiewicz) *Minden* $f \in C[a, b]$ *függvényhez létezik olyan* Ω_k *felosztássorozat, amelyre az* $L_n(x)$ *interpolációk sorozata egyenletesen tart* f*-hez.*

3.13. Megjegyzés Az $f(x) = |x|$ esetén az Ω_k alappontrendszer biztosan nem az ekvidisztáns felosztássorozat. Bernstein példája pont ezt mutatja.

Vizsgáljuk meg, mi mondható el a pontonkénti konvergenciáról!

Azt már Bernstein páldájában láttuk, hogy általában a folytonosság nem elegendő a pontonkénti konvergenciához sem, mivel a folytonos $f(x) = |x|$ függvény interpolációs polinomjai csak 3 pontban konvergáltak az eredeti függvényhez a $[-1, 1]$-en.

3.14. Tétel (Berstein) *Minden felosztáshoz létezik olyan* $f \in C[a, b]$ *folytonos függvény és olyan* $\widetilde{x} \in [a, b]$ *pont, amelyre* $\lim_{n\to\infty} |(L_n f)(\widetilde{x})| = \infty$.

Ezt a tételt jelentősen általánosítja a következő állítás.

3.15. Tétel (Erdős,Vértesi) *Minden felosztáshoz létezik olyan folytonos függvény, amelyre majdnem minden* $x \in [a, b]$ *esetén az* $(L_n f)(x)$ *számsorozat divergens.*

A tétel érdekessége, hogy Erdős Pál már egy jóval korábbi cikkében [7] leírta sejtését, melyet négy év munka után tudtak bebizonyítani Vértesi Péterrel.

A következő kérdés az, hogy lehetséges-e az interpolációs alappontokat úgy megválasztani, hogy az interpoláció hibabecslése javuljon?

4.

Interpoláció Csebisev-alappontokon

4.1. Az alappontok megválasztása

Legyen $f \in C^{n+1}[a,b]$. Megmutattuk, hogy ekkor

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|.$$

Az interpolációs hibabecslés jobb oldalán álló kifejezés két részre bontható. M_{n+1} az interpolált függvénytől függ, így a numerikus modellezésben nem tudjuk befolyásolni a nagyságát. Azonban

$$\frac{|\omega_{n+1}(x)|}{(n+1)!}$$

nagysága csak az alappontoktól függ. Ezért feladatunk az alappontokat úgy megválasztani, hogy az $\omega_{n+1}(x)$ alappontpolinom végtelennormája a lehető legkisebb legyen! Az alappontpolinom egy olyan $(n+1)$-ed fokú polinom, melynek főegyütthatója 1. Vizsgáljuk az alappontpolinomot a $[-1,1]$ intervallumon! Tekintsük az elsőfokú polinomok esetét! Ekkor $p_1(x) = x + c$, és a cél, hogy $\max_{x\in[-1,1]}|p_1(x)|$ minimális legyen! Ez a

$$\min(\max\{|p_1(-1)|, |p_1(1)|\} = \min(\max\{|-1+c|, |1+c|\}$$

feladatot jelenti. Ez akkor minimális, ha $|-1+c| = |1+c| = 1$, tehát ha $c = 0$. Tehát a keresett polinom: $p_1(x) = x$.

Tekintsük a $p_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ függvényt, ahol $n \in \mathbb{N}$.

4.1. Állítás A fent definiált $p_n(x)$ egy n-edfokú polinom, azaz $p_n(x) \in P_n$.

Bizonyítás. Közismertek az alábbi trigonometrikus összefüggések:

$$\cos((n+1)\phi) = \cos(n\phi)\cos(\phi) - \sin(n\phi)\sin(\phi),$$

$$\cos((n-1)\phi) = \cos(n\phi)\cos(\phi) + \sin(n\phi)\sin(\phi).$$

A két összefüggést összeadva kapjuk, hogy

$$\cos((n+1)\phi) + \cos((n-1)\phi) = 2\cos(n\phi)\cos(\phi).$$

Legyen $\phi = \arccos(x)$! Ekkor a $p_n(x)$ polinom definíciója következtében

$$p_{n+1}(x) + p_{n-1}(x) = 2\cos\arccos(x)p_n(x),$$

azaz a p_n polinom definíciója következtében

$$p_{n+1}(x) = 2xp_n(x) - p_{n-1}(x). \tag{25}$$

Ebből következik, hogy ha $p_{n-1}(x)$ és $p_n(x)$ polinomok, akkor $p_{n+1}(x)$ is az. A $p_n(x)$ polinom definíciója alapján $n = 0, 1$ esetén:

$$p_0(x) = \cos(0\arccos(x)) = 1,$$

$$p_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x.$$

Így a (25) kétlépéses rekurzió alapján az állításunkat beláttuk. $\square$
A tétel következménye, hogy a $p_n(x) \in P_n$ polinom főegyütthatója 2^{n-1}.

4.2. A Csebisev-polinomok

Mivel az $\omega_{n+1}(x)$ alappontpolinom 1 főegyütthatós, így legyen

$$T_n(x) := \frac{1}{2^{n-1}}p_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos(x)),\ n \geq 1,$$

$$T_o(x) = 1.$$

4.2. Definíció A fent definiált $T_n(x) \in P_n$ polinomokat Csebisev-polinomoknak nevezzük.

Vizsgáljuk meg a fenti módon előállított Csebisev-polinomok tulajdonságait!
$T_n(x)$ gyökei a

$$\cos(n\arccos(x)) = 0$$

egyenlet gyökei, azaz

$$n\arccos x_k = \frac{2k+1}{2}\cdot\pi,\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ekkor

$$\arccos x_k = \frac{2k+1}{2n}\cdot\pi,$$

ahonnan az alábbi megoldást kapjuk:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\cdot\pi\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{26}$$

Tehát a $T_n(x)$ polinom a gyökei a (26) szerint az x_k számok.
Most vizsgáljuk meg $T_n(x)$ szélsőértékhelyeit, azaz oldjuk meg a

$$T_n'(x) = 0$$

egyenletet. Ekkor a láncszabályt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sin(n \arccos x) n \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

azaz

$$\sin(n \arccos x) = 0.$$

Így

$$n \arccos \widetilde{x_k} = k\pi,\ k = 0, 1, \ldots, n,$$

azaz

$$\arccos \widetilde{x_k} = \frac{k\pi}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n,$$

ahonnan az alábbi szélsőértékhelyeket kapjuk:

$$\widetilde{x_k} = \cos\frac{k\pi}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Határozzuk meg ezen pontokban a Csebisev-polinomok értékeit!

$$T_n(\widetilde{x_k}) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos(\cos\frac{k\pi}{n})) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\frac{k\pi}{n}) = \frac{1}{2^{n-1}}(-1)^k.$$

4.3. Következmény $\max_{x\in[-1,1]} T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Most megmutatjuk, hogy $T_n(x)$ a keresett minimális végtelennormájú polinom.

4.4. Állítás Minden $Q_n \in P_n$ esetén $||T_n||_\infty \leq ||Q_n||_\infty$.

Bizonyítás. Indirekt. Tegyük fel, hogy létezik olyan $Q_n \in P_n$, melyre:

$$||Q_n||_\infty < ||T_n||_\infty = \frac{1}{2^{n-1}},$$

azaz

$$\max_{x\in[-1,1]}|Q_n(x)| < ||T_n||_\infty.$$

Tekintsük a

$$p(x) := T_n(x) - Q_n(x) \in P_{n-1}$$

polinomot. Ekkor

$$sign\ p(\widetilde{x_k}) = sign\ (T_n(\widetilde{x_k}) - Q_n(\widetilde{x}_k)) = (-1)^k.$$

Ekkor a Rolle-tétel miatt minden $[\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_{k+1}]$ intervallumon létezik a p polinomnak gyöke, $k = 0, 1, \dots, n$. Ekkor tehát p-nek n darab gyöke van. Ez az algebra alaptétele miatt nyilvánvalóan ellentmond a feltevésünknek, mivel $p \in P_{n-1}$. $\square$

Tehát az alappontpolinom normája akkor lesz a legkisebb, ha alappontoknak a Csebisev-polinomok zérushelyeit választjuk. Ekkor az alappontokat Csebisev-alappontoknak nevezzük.

4.5. Megjegyzés Csebisev-alappontokon interpolálva az interpolációs hiba felső becslésére teljesül, hogy

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!2^n},\ x \in [-1, 1],$$

ahol $M_{n+1} = max_{x\in I}|f^{(n+1)}(x)|$.

4.6. Megjegyzés Csebisev alappontok nem csak a $[-1, 1]$ intervallumon adhatók meg. Az

$$\widetilde{x}_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_k$$

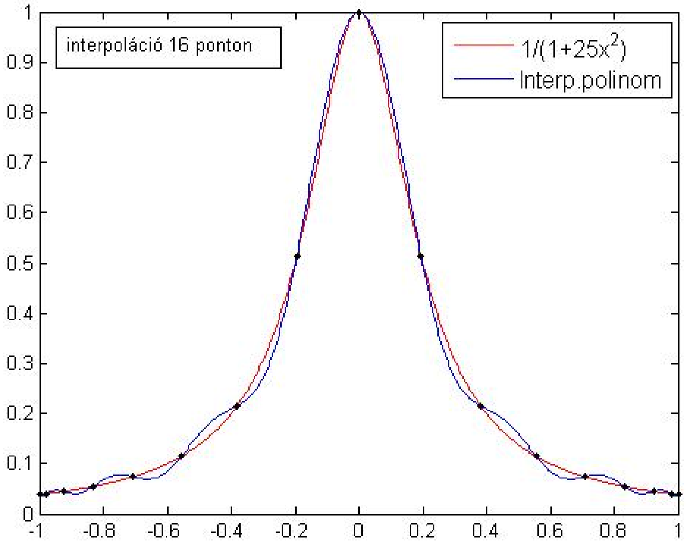
transzformációval bármilyen $[a, b]$ intervallumon is.

4.7. Tétel *Az $[a, b]$ intervallumon abszolút folytonos függvények[4] Csebisev-alappontokon vett interpolációs polinomjainak sorozata $C[a, b]$ maximumnormájában, azaz egyenletesen tart az eredeti függvényhez, ha az alappontok száma tart a végtelenhez.*

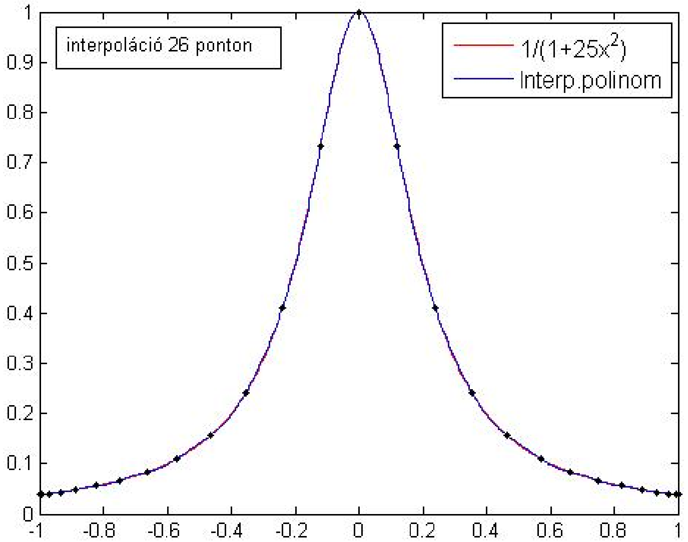
4.8. Következmény Az $|x|$ vagy a Runge féle $\dfrac{1}{1+x^2}$ függvényt a Csebisev alappontokon interpolálva az eredeti függvényhez konvergáló polinomsorozatot kapunk.

4.9. Megjegyzés A Faber-tétel miatt a Csebisev-alappontok esetén is lesz olyan folytonos függvény, melynél nincs egyenletes konvergencia.

[4]Egy $f \in [a, b]$ függvény abszolút folytonos, ha minden ε>0-hoz létezik olyan δ>0, hogy valahányszor $[a_1, \dots, b_1], \dots, [a_n, \dots, b_n]$ olyan egymásba nem nyúló részintervallumai $[a, b]$-nek, melyekre $\sum_{i=1\to n}(b_i - a_i) < \delta$, akkor $\sum_{i=1\to n}|f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.



2. ábra. Az $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ függvény interpolációja 16 Csebisev alapponton.



3. ábra. Az $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ függvény interpolációja 26 Csebisev alapponton.

5.

Hermite-interpoláció

5.1. Hermite-féle interpolációs polinom

Eddig azt vizsgáltuk, hogy ha ismert egy függvény $n+1$ alappontbeli értéke, akkor hogyan állíthatunk elő egy olyan polinomot, amely ugyanazon alappontokban ugyanazon értékeket veszi fel. Most általánosításként azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor az alappontokban ismerjük az eredeti függvény deriváltjainak értékeit is, bizonyos rendig bezáróan. Azaz legyenek adottak $x_0, x_1, \ldots, x_m$ különböző alappontok, és tegyük fel, hogy mindegyik x_k alappontban ismerjük a függvény értékét és a deriváltak értékeit $N_k - 1$ rendig bezáróan. Jelölje $n := N_0 + N_1 + \cdots + N_m - 1$. Keressünk olyan $H_n(x) \in P_n$ polinomot, amelyre

$$H_n^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k),\ i = 0, 1, \ldots, N_k - 1,\ k = 0, 1, \ldots, m. \tag{27}$$

Ezt az eljárást Hermite-féle interpolációnak nevezzük.

5.1. Állítás Egyértelműen létezik olyan $H_n \in P_n$, melyre

$$H_n^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k),\ i = 0, 1, \ldots, N_{k-1},\ k = 0, 1, \ldots, m$$

feltételek igazak.

Bizonyítás. Legyen

$$H_n(x) = a_0 + a_1(x) + \cdots + a_n x^n \tag{28}$$

alakú. Azt kell belátnunk, hogy a (28)-ben szereplő $a_0, \ldots, a_n$; $n+1$ darab együttható egyértelműen meghatározható. A (28) alakú polinomot a (27) feltételbe behelyettesítve egy lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk az ismeretlen együtthatókra. Ennek a feladatnak pontosan akkor létezik egyértelmű megoldása, ha a homogén feladatnak létezik egyértelmű megoldása, azaz ha a

$$H_n^{(i)}(x_k) = 0,\ i = 0, 1, \ldots, N_k - 1,\ k = 0, 1, \ldots, m \tag{29}$$

feladatnak létezik egyértelmű megoldása. A (29) feladatnak az $a_0 = \cdots = a_n = 0$ nyilvánvalóan megoldása. Mutassuk meg, hogy nincs más megoldás! Mivel

$$H_n^{(i)}(x_k) = 0,\ i = 0,1,\dots,N_k - 1,\ k = 0,1,\dots,m,$$

így az $x = x_k$ pont N_k-szoros gyöke az egyenletrendszernek. Tehát a mutiplicitás figyelembe vételével a $H_n \in P_n$ polinomnak legalább $N_0+N_1+\cdots+N_m = n+1$ gyöke van, de ez az algebra alaptétele miatt csak a $H_n(x) \equiv 0$ polinom lehet. □

5.2. Definíció A fenti tulajdonságokkal rendelkező $H_n \in P_n$ polinomot Hermite-féle interpolációs polinomnak nevezzük.

5.3. Megjegyzés Ha $N_0 = N_1 = \cdots = N_m = 1$, akkor éppen a Lagrange-féle interpolációt kapjuk.

5.4. Megjegyzés Abban a speciális esetben, amikor $m = 0$ és $n \geq 1$, a Taylor polinomhoz jutunk:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + f(x_0{}^{(n)}\frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

5.2. Az Hermite-interpoláció hibabecslése

Terjesszük ki az $\omega_{n+1}(x)$ alappontpolinomot, azaz legyen

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)^{N_0}\dots(x - x_m)^{N_m} = \prod_{k=0}^{m}(x - x_k)^{N_k}.$$

Ekkor $\omega_{n+1} \in P_{n+1}$.

5.5. Állítás Tegyük fel, hogy $f \in C^{n+1}[a,b]$. Ekkor minden $x \in [a,b]$ ponthoz létezik olyan $\xi \in (a,b)$ x-től függő szám, amelyre

$$f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x). \tag{30}$$

Bizonyítás. Legyen

$$\varphi(x) \equiv f(x) - H_n(x) - K\omega_{n+1}(x),$$

ahol K egy egyelőre ismeretlen állandó. Tegyük fel, hogy $\widetilde{x}$ az [a,b] intervallum egy tetszőleges, rögzített pontja, de $\tilde{x} \neq x_k,\ k = 0,1,\dots,m$. Válasszuk meg a K állandót úgy, hogy $\varphi(\tilde{x}) = 0$ legyen, azaz teljesüljön a

$$\varphi(\tilde{x}) \equiv f(\tilde{x}) - H_n(\tilde{x}) - K\omega_{n+1}(\tilde{x}) = 0$$

feltétel! Mivel $\tilde{x}$ nem alappont, ezért K meghatározható a

$$K = \frac{f(\tilde{x}) - H_n(\tilde{x})}{\omega_{n+1}(\tilde{x})} \tag{31}$$

egyenlőséggel. Ekkor a φ függvénynek az $x_0, \ldots, x_m$ pontok rendre $N_0, \ldots, N_m$-szeres gyökei és az $\tilde{x}$ egyszeres gyöke. Tehát a φ függvénynek a multiplicitás figyelembe vételével legalább $N_0 + \cdots + N_m + 1 = n + 2$ gyöke van. Tekintsük a $\varphi'(x)$ függvényt! A Rolle-tétel alapján az $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [\tilde{x}, x_m]$ intervallumokon létezik $\xi_1, \ldots, \xi_{m+1}$ gyöke. Másrészt $\varphi'(x)$-nek x_0 $N_0 - 1$-szeres, $\ldots, x_m$ $N_m - 1$-szeres gyöke. Tehát a $\varphi'(x)$ függvénynek legalább $(N_0 - 1) + \cdots + (N_m - 1) + (m + 1) = n + 1$ darab gyöke van. Így haladva mindig az eggyel nagyobb deriváltak irányába azt kapjuk, hogy a $\varphi^{(n+1)}$ függvénynek legalább egy gyöke van, azaz létezik $\xi \in (a, b)$, melyre $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Másrészt

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - H_{(n+1)}(x) - K\omega_{n+1}^{(n+1)}(x).$$

Felhasználva azt, hogy egy n-edfokú polinom $n + 1$-edik deriváltja 0, a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - K(n + 1)! = 0,$$

azaz

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}.$$

Ekkor a K együttható (31) alakját figyelembe véve, éppen az állításunkat kapjuk. □

5.6. Következmény Ha $|f^{(n+1)}| \leq M_{n+1}$ az [a,b] intervallumon, akkor

$$|f(x) - H_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}.$$

5.7. Következmény Ha $f \in C^\infty[a, b]$ és létezik olyan $M > 0$, melyre $k = 0, 1, \ldots$ esetén $\max_{x\in[a,b]}|f^{(k)}(x)| \leq M^k$, akkor $H_n(x)$ egyenletesen tart az f függvényhez.

5.3. Az Hermite-Fejér interpoláció

Azt a speciális esetet, amikor minden alappontban a keresett polinom függvényértéke és az első deriváltja adott, azaz az $f^{(0)}(x_k), f^{(1)}(x_k),\ k = 0, 1,\ldots,$n értékek, Hermite-Fejér interpolációnak nevezzük. Ha $n + 1$ alappontunk van,

akkor ez $2n+2$ adatot jelent, így egy legfeljebb $2n+1$-edfokú polinom lesz az interpolációs polinom, melyet jelöljön H_{2n+1}. Az Hermite-Fejér féle interpolációs polinomot kétféle alappolinom segítségével állítjuk elő.
A $h_{k,0}(x)$ alappolinom az x_k hely kivételével 0 értéket vesz, az x_k helyen 1-et, a deriváltja pedig minden alappontban 0.
A $h_{k,1}(x)$ alappolinom értéke minden alappontban 0, deriváltja az x_k hely kivételével 0 értéket vesz fel, az x_k helyen pedig 1 az értéke. Azaz

$$h_{k,0}(x_l) = \delta_{kl},\ h'_{k,0}(x_l) = 0, \tag{32}$$

és

$$h_{k,1}(x_l) = 0,\ h'_{k,1}(x_l) = \delta_{kl}, \tag{33}$$

ahol $k, l = 0, 1, \ldots, n$ és δ_{kl} a már korábban definiált Kronecker-szimbólum. Nyilvánvalóan igaz a következő állítás:

5.8. Tétel *Az Hermite-Fejér interpolációs polinom a*

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{(0)} h_{k,0}(x) + \sum_{k=0}^{n} f_k^{(1)} h_{k,1}(x)$$

képlettel állítható elő.

A következő tételben szereplő állítások Fejér Lipót nevéhez fűződnek.[8]

5.9. Tétel *Az Hermite-Fejér polinomokat a Lagrange-féle polinomok segítségével állítjuk elő, a következő módon:*

$$h_{k,0}(x) = [l_k(x)]^2 \left[1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right],$$

és

$$h_{k,1}(x) = [l_k(x)]^2 (x - x_k).$$

A következő tétel szintén Fejér Lipót eredménye.

5.10. Tétel *Legyen $f \in C[a,b]$, $H_{2n+1}(x_k) = f(x_k)$ és $H'_{2n+1}(x_k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Ekkor az Hermite-Fejér féle interpolációk sorozata egyenletesen tart az f függvényhez az [a,b] intervallumon.*

A fenti tétel azt mutatja, hogy ha az interpolációs polinom foka közel kétszerese az interpolációs pontokénak, akkor egyenletes konvergenciát tudunk elérni folytonos f függvények esetén. Az állítás egyben bizonyítja a Weierstrass féle approximációs tételt is.

6.

A TRIGONOMETRIKUS INTERPOLÁCIÓ

Alkalmazásokban gyakran találkozunk periodikus függvényekkel. A polinomiális interpoláció használata ezen függvények esetén nem alkalmas, hiszen az algebrai polinomok nem periodikusak. Ekkor az adott periodikus függvényt trigonometrikus összetevőkre kell bontanunk. Egy 2π szerint periodikus függvénynek kereshetjük például az

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j \cos(jx) + \beta_j \sin(jx)) \tag{34}$$

alakú előállítását, ahol $\alpha_0, \alpha_j, \beta_j,\ \ j = 1, 2, \ldots$ megfelelő konstansok. A (34) előállítást az $f(x)$ függvény trigonometrikus sorának nevezzük. Ahhoz, hogy az $f(x)$ függvényhez egyenletesen konvergáljon a Fourier-sor, az együtthatókat az

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx,$$

$$\alpha_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(jx)dx,$$

$$\beta_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(jx)dx$$

módon kell megválasztani, azonban ezek az integrálok csak nagyon speciális $f(x)$ függvények esetén számíthatóak ki pontosan. További probléma, hogy gyakran az $f(x)$ függvény értékét is csak néhány alappontban ismerjük. Ezek a problémák azonban áthidalhatóak.

Határozzuk meg az $f(x)$ függvény adott alappontokban vett értékeire illesztett trigonometrikus polinomot - ezt az eljárást nevezzük trigonometrikus interpolációnak, majd közelítsük ezzel a polinommal az $f(x)$ függvény Fourier-sorát!

Tegyük fel, hogy egy 2π szerint periodikus függvénynek ismerjük az $f_k = f(x_k)$ értékeit az

$$x_k = \frac{2\pi k}{n+1} \in [0, 2\pi),\ \ k = 0, 1, \ldots, n$$

pontokban. Keressük azt a

$$\mathbb{T}_m(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{m}(a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$$

m-edfokú (ha $|a_m|+|b_m| \neq 0$) trigonometrikus polinomot, melyre

$$\mathbb{T}_m(x_k) = f_k, (k = 0, 1, \ldots, n)$$

teljesül. Az $a_0, a_j, b_j,\ j = 1, \ldots, m$ együtthatókat diszkrét Fourier-együtthatóknak nevezzük. Tehát összesen $n+1$ egyenletünk van és $2m+1$ ismeretlen együtthatónk. Azaz ha n páros, akkor várhatóan egy $m = n/2$ -ed fokú polinom megfelelő lesz. Ha n páratlan, akkor $m = (n+1)/2$-ed fokú polinomra lesz szükségünk. Ebben az esetben $n+1$ egyenletünk és $n+2$ együtthatónk van, azaz a rendszer alulhatározott.
Vegyük észre, hogy

$$b_m \sin(mx_k) = b_m \sin\left(\frac{n+1}{2}\frac{2\pi k}{n+1}\right) = b_m \sin(\pi k) = 0,$$

azaz a b_m együtthatóhoz tartozó $\sin(mx)$ függvény az alappontokban nullát vesz fel, tehát b_m értéke nem befolyásolja az interpolációt.

6.1. Megjegyzés Páratlan n esetén a trigonometrikus polinomokat kiegyensúlyozott trigonometrikus polinomoknak nevezzük.

6.2. Tétel *Tegyük fel, hogy az* $x_k = \dfrac{2\pi k}{n+1}$ *alappontokban adottak az* $f_k \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, \ldots, n$ *értékek, továbbá, hogy* n *páratlan. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan* $m = \dfrac{n+1}{2}$*-ed fokú kiegyensúlyozott trigonometrikus polinom, melyre* $\mathbb{T}_m(x_k) = f_k, k = 0, 1, \ldots, n$. *A valós Fourier együtthatók az alábbi módon számíthatók:*

$$a_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f_k, \quad a_m = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f_k \cos(mx_k),$$

$$a_j = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f_k \cos(jx_k),\ \ j = 1, \ldots, m-1,$$

$$b_j = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f_k \sin(jx_k),\ \ j = 1, \ldots, m-1.$$

Bizonyítás. Miközben explicit módon előállítjuk az interpolációs polinomot, látni fogjuk, hogy az előállítás egyértelmű. A komplex számok Euler alakjából

$$e^{ijx} = \cos(jx) + i\sin(jx),$$

$$e^{-ijx} = \cos(jx) - i\sin(jx)$$

a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\cos(jx) = \frac{e^{ijx} + e^{-ijx}}{2} \text{ és } \sin(jx) = \frac{e^{ijx} - e^{-ijx}}{2i}.$$

Ezeket a kifejezéseket a $\mathbb{T}_m$ polinomba visszahelyettesítve a következőt kapjuk:

$$t_m(x) = a_0 + \textstyle\sum_{j=1}^{m} \left(a_j \frac{e^{ijx} + e^{-ijx}}{2} + b_j \frac{e^{ijx} - e^{-ijx}}{2i} \right) =$$

$$a_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{a_j - b_j i}{2} e^{ijx} + \frac{a_j + b_j i}{2} e^{-ijx} \right) + \frac{a_m}{2} e^{imx} + \frac{a_m}{2} e^{-imx}.$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket

$$c_0 = a_0, \quad c_m = c_{-m} = a_m,$$

$$c_j = \frac{a_j - b_j i}{2} \quad \text{és} \quad c_{-j} = \frac{a_j + b_j i}{2}.$$

Ekkor

$$\mathbb{T}_m(x) = \sum_{j=-(m-1)}^{m-1} c_j e^{ijx} + \frac{c_m}{2} e^{imx} + \frac{c_{-m}}{2} e^{-imx}.$$

6.3. Megjegyzés A fenti c_j, $j = (-m, \ldots, m)$ együtthatókat komplex Fourier-együtthatóknak nevezzük.

A komplex Fourier-együtthatók segítségével a valós Fourier-együtthatók könnyen előállíthatóak:

$$a_0 = c_0, \quad a_m = c_m,$$

$$a_j = c_j + c_{-j}, \ j = 1, \ldots, m-1,$$

$$b_j = (c_j - c_{-j})i, \ j = 1, \ldots, m-1.$$

Térjünk át a $\mathbb{T}_m(x_k) = f_k,\ k = 0, \ldots, n$ követelmények teljesítésére. Ekkor

$$\sum_{j=-(m-1)}^{m-1} c_j e^{ijx_k} + \frac{c_m}{2} e^{imx_k} + \frac{c_{-m}}{2} e^{-imx_k} = f_k,\ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{35}$$

Jelölje $w = e^{i2\pi/(n+1)}$ az $(n+1)$-edik egységgyököt. Ezzel a jelöléssel

$$e^{ijx_k} = w^{jk}$$

és

$$w^{mk} = w^{(n+1)k/2} = (e^{i\pi})^k = (-1)^k.$$

Ekkor a (35) bal oldalának utolsó két tagja összevonható az alábbi módon

$$\frac{c_m}{2}(-1)^k + \frac{c_{-m}}{2} = (-1)^k = c_m w^{mk},$$

tehát a megoldandó egyenletrendszer az

$$\sum_{j=-(m-1)}^{m-1} c_j w^{jk} = f_k,\ k = 0, 1, \ldots, n \tag{36}$$

alakban írható. Ez az egyenletrendszer mátrixos alakban az

$$G_{n+1}\bar{c}_{n+1} = \bar{f}_{n+1} \tag{37}$$

módon írható, ahol

$$G_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ w^{-(m-1)} & w^{-(m-2)} & \ldots & w^{(m-1)} & w^m \\ w^{-2(m-1)} & w^{-2(m-2)} & \ldots & w^{2(m-1)} & w^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ w^{-n(m-1)} & w^{-n(m-2)} & \ldots & w^{n(m-1)} & w^{nm} \end{pmatrix},$$

$$\bar{c}_{n+1} = \begin{pmatrix} c_{-(m-1)} \\ c_{-(m-2)} \\ c_{-(m-3)} \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \text{ és } \bar{f}_{n+1} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Megmutatjuk, hogy az $(1/n+1)G_{n+1}$ mátrix unitér, azaz hogy az inverze a transzponált konjugáltja, így a komplex Fourier-együtthatók egyértelműen előállíthatók az alábbi módon:

$$\bar{c}_{n+1} = \frac{1}{n+1} G_{n+1}^H \bar{f}_{n+1}, \tag{38}$$

vagy koodinátánként

$$c_j = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f_k w^{-jk},\ \ j = -(m-1),\dots,m. \tag{39}$$

Ehhez elég megmutatni, hogy

$$G_{n+1}G_{n+1}^H = (n+1)E.$$

Számítsuk ki a mátrix k-adik sorának j-edik elemét, $k = 0,1,\dots,n,\ \ j = -(m-1),\dots,m.$

$$(G_{n+1}G_{n+1}^H)_{kj} = \sum_{s=-(m-1)}^{m} w^{ks}w-js = \sum s = -(m-1)^m w^{s(k-j)}$$

$$= \begin{cases} n+1, & \text{ha } k = j, \\ 0, & \text{ha } k \neq j. \end{cases}$$

Mivel az f_k függvényértékek valósak, ezért $c_{-j} = \bar{c}_j,\ j = 1,\dots,m-1$, azaz ezek az együtthatók egymás konjugáltjai, $a_0 = c_0$, és $a_m = c_m$ valósak. Tehát $a_j = 2\mathrm{Re}(c_j)$ és $b_j = -2\mathrm{Im}(c_j)$. $\square$

6.4. Megjegyzés A (36), vagy a (37) képletet a Fourier-szintézis vagy inverz Fourier-transzformáció képletének hívjuk. Ez a képlet állítja elő a komplex Fourier-együtthatókból az alappontbeli értéket. A (38) és (39) képletet pedig a Fourier-analízis vagy más néven diszkrét Fourier-transzformáció képletének hívjuk. Ez a képlet segít az alappontbeli függvényértékekből a komplex Fourier-együtthatókat meghatározni.

Az előző tételhez hasonló igaz páros n esetén is.

6.5. Tétel *Tegyük fel, hogy az $x_k = \dfrac{2\pi k}{n+1}$ adottak az $f_k \in \mathbb{R},\ k = 0,1,\dots,n$ értékek, továbbá, hogy n páros. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $m = n/2$-ed fokú $\mathbb{T}_m$ trigonometrikus polinom, melyre $\mathbb{T}_m(x_k) = f_k,\ k = 0,1,\dots,n.$ A valós diszkrét Fourier-együtthatók az alábbi módon számolhatók:*

$$a_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f_k,$$

$$a_j = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f_k\cos(jx_k),\ \ j = 1,\dots,m,$$

$$b_j = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f_k\sin(jx_k),\ \ j = 1,\dots,m.$$

7.

A SZAKASZONKÉNT POLINOMIÁLIS INTERPOLÁCIÓ

Ha az interpolációs alappontokat nem lehet szabadon megválasztani (pl. mérési eredmények esetén), akkor a Csebisev-alappontok nem használhatóak. Ez nagy interpolációs hibához vezethet. Az eddig tárgyalt polinomiális interpolációk a szélső alappontok között gyakran rosszabb eredményt adnak, mintha töröttvonallal összekötnénk az alappontokat. Ezek a hibák kiküszöbölhetők szakaszonként polinomiális interpoláció használatával. Ekkor a szomszédos alappontok közti szakaszokon, egy-egy alacsony fokszámú polinommal interpolálunk, és az egyes polinomok előre megadott simasággal illeszkednek egymáshoz. Ezt az eljárást spline-interpolációnak nevezzük.

7.1. A szakaszonként lineáris interpoláció

A szakaszonként lineáris interpoláció esetén a szomszédos alappontokat egyenes szakaszokkal kötjük össze. Jelöljük az alappontokat a szokásos $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ módon, az egyes függvényértékeket pedig jelölje rendre $f_0, f_1, \ldots, f_n$, és az $[x_{k-1}, x_k]$ szakaszon az interpolációs spline polinom legyen s_k, $k = 1, \ldots, n$, $s_k(x) \in P_1$. Szakaszonként lineáris spline esetén nyilvánvalóan

$$s_k(x) = f_{k-1}\frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} + f_k\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Az $[x_0, x_n]$ intervallumon értelmezett interpolációs függvény ekkor:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x), & \text{ha } x \in [x_0, x_1], \\ s_2(x), & \text{ha } x \in [x_1, x_2], \\ \vdots & \\ s_n(x), & \text{ha } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

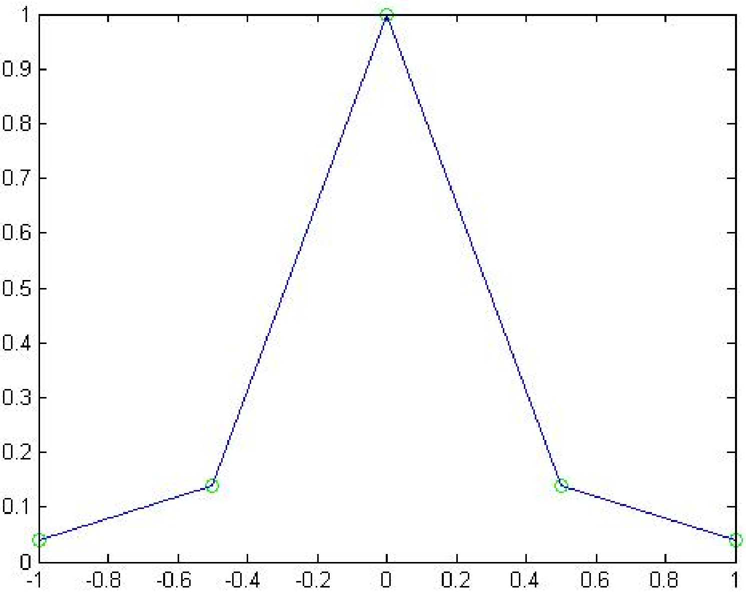
alakban adható meg. Az $s(x)$ interpolációs függvény folytonos, hiszen $s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k) = f_k$.

7.1. Tétel *Legyen $f \in C^2(I)$. Ekkor a lineáris spline-interpolációs függvény hibája*

$$|s(x) - f(x)| \leq \frac{M_2}{8}h^2,$$

ahol M_2 egy felső korlát f második deriváltjára az I intervallumon, és h a szomszédos alappontok közötti maximális távolság.

Bizonyítás. A tétel a (3.1) és a (3.3) tételek szakaszonkénti alkalmazásából következik. $\square$



4. ábra. Az $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ függvényhez tartozó szakaszonként lineáris interpoláció. Az alappontok: $-1, -0.5, 0, 0.5, 1$.

7.2. A szakaszonként kvadratikus interpoláció

A szakaszonként lineáris interpoláció hátránya, hogy az s interpolációs függvény ugyan folytonos, de a deriváltja nem, mivel a csomópontokban a derivált nem is létezik. Azonban ez kiküszöbölhető másodfokú polinomok alkalmazásával. Válasszuk meg az s függvény deriváltjának értékét x_0-ban. Legyen ez az érték d_0. Hajtsunk végre az $[x_0, x_1]$ szakaszon Hermite-interpolációt! Ekkor egyértelműen meghatározhatunk egy olyan s_1 legfeljebb másodfokú polinomot, melyre

$$s_1(x_0) = f_0,\ s_1'(x_0) = d_0 \text{ és } s_1(x_1) = f_1.$$

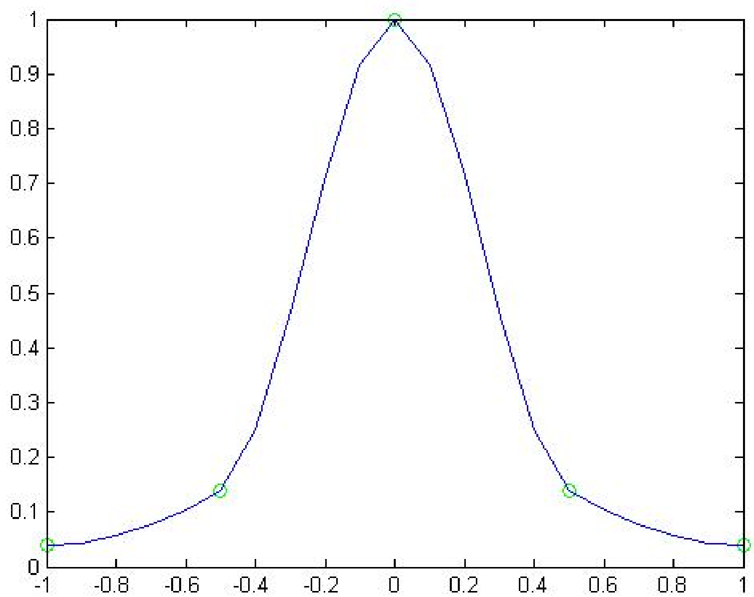
Válasszuk meg $s_1'(x_1)$ értékét d_1-nek. Ekkor az $[x_1, x_2]$ intervallumon egyértelműen meghatározható egy olyan s_2 Hermite-féle interpolációs polinom, melyre

$$s_2(x_1) = f_1, \; s_2'(x_1) = d_1 \text{ és } s_2(x_2) = f_2.$$

Ezt az eljárást folytatva a többi intervallumon, az eredő s függvény és a deriváltja is folytonos lesz az egész intervallumon.

7.3. A szakaszonként harmadfokú interpoláció

Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor egy legfeljebb harmadfokú polinomot alkalmazunk az interpolációra. Ha megadjuk az $x_0, \ldots, x_n$ pontokban a $d_0, \ldots, d_n$ értékeket, akkor minden részintervallum mindkét végpontjában adott egy-egy függvényérték és egy-egy deriváltérték. Ezek Hermite-Fejér interpoláció segítségével egyértelműen meghatároznak egy legfeljebb harmadfokú polinomot.



5. ábra. Az $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ függvényhez tartozó szakaszonként harmadfokú interpoláció. Az alappontok: $-1, -0.5, 0, 0.5, 1$.

Ez az eljárás ismét csak folytonosan deriválható interpolációs függvényt ad, azonban a $d_0, \ldots, d_n$ deriváltértékek alkalmas megválasztásával a másodrendű deriváltak folytonossága is elérhető.

Legyen $s_k,\ k = 0, \ldots, n$ az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumon adott harmadfokú polinom. Ekkor adott d_{k-1} és d_k deriváltértékekkel s_k meghatározható Hermite-Fejér interpoláció segítségével.

alappontok	$f_i = [.]f$	$[.,.]f$	$[.,.,.]f$	$[.,.,.,.]f$
x_{k-1}	$f_{k-1} =: c_{k0}$			
		$d_{k-1} =: c_{k1}$		
x_{k-1}	f_{k-1}		$\dfrac{\frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} - c_{k1}}{x_k - x_{k-1}} =: c_{k2}$	
				$\dfrac{\frac{d_k - \frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}}{x_k - x_{k-1}} - c_{k2}}{x_k - x_{k-1}} =: c_{k3}$
		$\dfrac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$		
x_k	f_k		$\dfrac{d_k - \frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}}{x_k - x_{k-1}}$	
		d_k		
x_k	f_k			

Ezen jelölésekkel s_k az

$$s_k(x) = c_{k0} + c_{k1}(x - x_{k-1} + c_{k2}(x - x_{k-1})^2 + c_{k3}(x - x_{k-1})^2(x - x_k)$$

alakban írható, ahol c_{ki} a k. intervallumon definiált s_k polinom megfelelő együtthatóját jelöli. Hasonlóan kaphatjuk az $[x_k, x_{k+1}]$ intervallumon az s_{k+1} polinomot

$$s_{k+1}(x) = c_{k+1,0} + c_{k+1,1}(x - x_{k-1} + c_{k+1,2}(x - x_{k-1})^2 + c_{k+1,3}(x - x_{k-1})^2(x - x_k).$$

Mivel

$$s_k''(x) = 2c_{k2} + 2c_{k3}(x - x_k) + 4c_{k3}(x - x_{k-1})$$

és

$$s_{k+1}''(x) = 2c_{k+1,2} + 2c_{k+1,3}(x - x_{k+1}) + 4c_{k+1,3}(x - x_k),$$

így ahhoz, hogy az x_k pontban folytonos legyen a második derivált, a következő egyenlőségnek kell teljesülnie:

$$2c_{k2} + 4c_{k3}(x_k - x_{k-1}) = 2c_{k+1,2} + 2c_{k+1,3}(x_k - x_{k+1}).$$

Az együtthatókat behelyettesítve az

$$\frac{2}{x_k - x_{k-1}} d_{k-1} + 4\left(\frac{1}{x_k - x_{k-1}} + \frac{1}{x_{k+1} - x_k}\right) d_k + \frac{2}{x_{k+1} - x_k} d_{k+1} =$$
$$6\left(\frac{f_k - f_{k-1}}{(x_k - x_{k-1})^2} + \frac{f_{k+1} - f_k}{(x_{k+1} - x_k)^2}\right), \quad k = 1, \ldots, n-1 \quad (40)$$

egyenletet kapjuk. Ha a $d_0, \ldots, d_n$ deriváltértékek teljesítik a (40) feltételeket, akkor a második derivált folytonos lesz a teljes intervallumon. Mivel ez $n-1$ egyenletet jelent, és az ismeretlen deriváltértékek száma $n+1$, így várhatón még 2 pluszt feltétel is előírható. Legyenek ezek a plusz feltételek az intervallum két szélén előírt második deriváltak, melyeket jelöljön D_0, illetve D_n.
Ha $k = 1$, akkor

$$s_1''(x_0) = 2c_{12} + 2c_{13}(x_0 - x_1) = D_0,$$

ahonnan a

$$\frac{2}{x_1 - x_0} d_0 + \frac{1}{x_1 - x_0} d_1 = 3\frac{f_1 - f_0}{(x_1 - x_0)^2} - \frac{D_0}{2} \quad (41)$$

egyenlőséget kapjuk.
A $k = n$ esetben pedig

$$s_n''(x_n) = 2c_{n2} + 4c_{n3}(x_n - x_{n-1} = D_n.$$

Így az

$$\frac{1}{x_n - x_{n-1}} d_{n-1} + \frac{2}{x_n - x_{n-1}} d_n = 3\frac{f_n - f_{n-1}}{(x_n - x_{n-1})^2} + \frac{D_n}{2} \quad (42)$$

egyenlethez jutunk.
A (40),(41),(42) egyenletrendszer megoldásaként megkapjuk a $d_0, \ldots, d_n$ deriváltértékeket, illetve a D_0 és a D_n értékét.

Ha az alappontok ekvidisztáns módon helyezkednek el, vagyis $x_{k+1} - x_k = h, \ k = 0, \ldots, n-1$, akkor a (40),(41),(42) egyenletekből álló egyenletrendszer felírható a

$$\frac{h}{3}\begin{pmatrix} 2\,1\,0\,0\,0\ldots\,0\,0\,0 \\ 1\,4\,1\,0\,0\ldots\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,4\,1\,0\ldots\,0\,0\,0 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ 0\,0\,0\,0\,0\ldots\,1\,4\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\ldots\,0\,1\,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 - f_0 - D_0 h^2/6 \\ f_2 - f_0 \\ f_3 - f_1 \\ \vdots \\ f_n - f_{n-1} + d_n h^2/6 \end{pmatrix}$$

alakban.

7.2. Megjegyzés Mivel a $d_0, \ldots, d_n$ ismeretlen deriváltértékek száma $n+1$, és a második derivált folytonossága $n-1$ egyenletet igényel, így az egyértelműséghez szükséges plusz 2 feltétel nem csak az x_0 és x_n pontbeli második derivált előírásával biztosítható. Szokás az is, hogy magát a deriváltértéket írjuk elő ezen pontokban. A differenciálegyenletek numerikus megoldása során ezeket az értékeket az egyenletből ismerjük, hiszen tipikusan peremfeltételként adottak.

Ebben az esetben a mátrix a következő alakú lesz

$$\frac{h}{3}\begin{pmatrix} 4\,1\,0\,0\,0 \ldots 0\,0\,0 \\ 1\,4\,1\,0\,0 \ldots 0\,0\,0 \\ 0\,1\,4\,1\,0 \ldots 0\,0\,0 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ 0\,0\,0\,0\,0 \ldots 1\,4\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \ldots 0\,1\,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_0 h/3 \\ f_2 - f_0 \\ f_3 - f_1 \\ \vdots \\ -d_n h/3 \end{pmatrix}.$$

Az így nyert mátrix mindkét esetben invertálható, így egyértelmű megoldást kapunk a deriváltértékekre, amik egyértelműen meghatározzák az egyes szakaszokon a legfeljebb harmadfokú polinomokat.

Az eddigiekben többször előkerült az $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$, $x = [-1, 1]$ függvény. A különböző interpolációkat is ezen függvény segítségével illusztráltam. A következő táblázat mutatja a különböző interpolációk hibáit egy adott pontban.

Az f(x) függvény pontos értéke az $x = 0,4$-ben $0,2$		
A használt interpoláció	Az interpoláció értéke $x = 0,4$-ben	Abszolút hiba
Negyedrendű Lagrange-féle	$0,4005$	$0,2005$
Hatodrendű Lagrange-féle	$0,0773$	$0,1227$
Nyolcadrendű Lagrange-féle	$0,0726$	$0,1274$
Csebisev 16 alapponton	$0,2089$	$0,0089$
Csebisev 26 alapponton	$0,1961$	$0,0039$
Lineáris spline	$0,3103$	$0,1103$
Harmadfokú spline	$0,2504$	$0,0504$

8.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Faragó István, Horváth Róbert: *Numerikus módszerek*, Typotex kiadó (2013)

[2] Stoyan Gispert, Takó Galina: *Numerikus módszerek I.*, Typotex kiadó (1993)

[3] Jean-Paul Berrut, Lloyd Trefethen: *Barycentric Lagrange Interpolation*

[4] Péter Vértesi: *Classical (Unweighted) and Wighted Interpolation*, A Panorama of Hungarian Mathematics in the Twentieth Century pp. 71-117

[5] Walter Gautschi: *Numerical Analysis*, Birkhauser (2012)

[6] J.Szabados, P.Vértesi: *A survey on mean convergence of interpolatory processes*, Journal of Computational and Applied Mathematics 43 (1992) 3-18

[7] P. Erdős: *Problems and results on the theory of interpolation, I*,Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 9 (1958)

[8] P.Turán, {128, p.39}.

[9] Nick Trefethen: *Six Myths of Polynomial Interpolation and Quadrature*, Mathematics Today (August 2011)

Köszönetnyilvánítás

Hálásan köszönöm témavezetőmnek, Faragó Istvánnak bátorítását és türelmét. Az ő segítsége, valamint figyelmes észrevételei nélkül nem jöhetett volna létre ez a dolgozat. Emellett külön köszönettel tartozom családomnak, a tanulmányaim során biztosított nyugodt háttérért és támogatásukért.

Nyilatkozat

Név: Csurkó Lilla
ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematikai BSc
NEPTUN azonosító: I9V9ZH
Szakdolgozat címe: Interpolációelmélet a numerikus analízisben

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2015.05.10.

a hallgató aláírása