EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Erdős, Faber és Lovász sejtéséről

BSc Szakdolgozat

Gócza Gergely

Matematika BSc
Elemző szakirány

Témavezető:
Kiss Attila
ELTE
Számítógéptudományi Tanszék

Budapest,
2015

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. Alapismeretek **4**
2.1. Gráfok és alaptulajdonságaik 4
2.2. Gráfok színezése 6

3. Erdős-Faber-Lovász sejtés **8**
3.1. A sejtésről általánosan 8
3.2. E-F-L sejtés sűrű hipergráfokra 9

4. Eredmények a témakörben **11**
4.1. Az E-F-L sejtés közelítései 11
4.2. Színezési problémák feszítő részhipergráfokra 14

5. Legfrissebb eredmények **20**
5.1. B-színezés 20
5.2. B-színezés feszes páros gráfokra 24
5.3. E-F-L sejtés a tört gráfelméletben 25
5.4. Összegzés 27

6. Köszönetnyílvánítás **28**

1. Bevezetés

Szakdolgozatom témája az Erdős-Faber-Lovász sejtés. Ezt az ezidáig megoldatlan gráfszínezéssel foglalkozó problémát 1972-ben Erdős Pál, Vance Faber és Lovász László mondta ki.
Dolgozatomban bevezetem azokat a gráfelméleti alapfogalmakat, melyek elengedhetetlenek a témakör átfogó ismertetéséhez. A sejtés két ekvivalens átírását is ismertetem, az egyik megfogalmazásban teljes gráfokból előállított egyszerű gráfokra, míg a másikban hipergráfokra. A témában több részeredmény is született. Az eredeti sejtést ezidáig nem sikerült senkinek bizonyítania vagy cáfolnia, viszont egyéb megszorításokkal születtek új eredmények és közelítő megoldások ezen részfeladatokra. Szakdolgozatomban elsődlegesen ezen eredményeket mutatom be, néhány új sejtéssel egyetemben, melyek a mai napig születtek az Erdős-Faber-Lovász sejtés kapcsán.

2. Alapismeretek

2.1. Gráfok és alaptulajdonságaik

2.1.1. Definíció (Gráf)
Gráfnak egy olyan rendezett párt nevezünk, ahol van egy nemüres halmazunk, ezt jelöljük V(G)-vel, ennek elemeit csúcsoknak vagy pontoknak nevezzük, és van még egy halmazunk, ami a V-ből képezhető rendezett párok egy nem feltétlenül valódi részhalmaza, ezt jelöljük E(G)-vel és a benne lévő rendezett párokat nevezzük éleknek. Jelölés: G=(V,E)

A csúcsok számát |V(G)|-vel jelöljük.
Az élek számát |E(G)|-vel jelöljük.

2.1.2. Definíció (Hurokél)
Ha egy e∈E él a v_1,v_2 párnak felel meg, akkor ez a két pont e végpontja. Hurokélről akkor beszélünk, ha v_1 és v_2 megegyezik egymással, azaz v_1=v_2.

2.1.3. Definíció (Párhuzamos él)
Két élet párhuzamosnak nevezünk, ha egymástól különböző nem hurokélek és végpontjaik megegyeznek.

2.1.4. Definíció (Teljes gráf)
Ha egy n pontú egyszerű gráfnak bármely két pontja között fut él, akkor n pontú teljes gráfnak hívjuk. Jele: K_n

2.1.5. Definíció (Fokszám)

Egy pont fokszáma, a rá illeszkedő élek száma. A v pont fokszámát d(v)-vel jelöljük. A maximális fokszámot Δ-val jelöljük míg a minimálisat δ-val.

2.1.6. Definíció (Részgráf)
Egy G'=(V',E') gráf részgráfja a G=(V,E) gráfnak, ha V'$\subseteq$V és E'$\subseteq$E továbbá egy csúcs és egy él abban az esetben illeszkedhet egymásra G'-ben ha G-ben is illeszkednek.

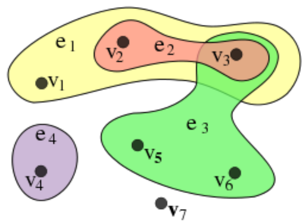
2.1.7. Definíció (Feszítő Részgráf)
Egy G' gráf feszítő részgráfja a G gráfnak, ha G' olyan részgráf amely G összes pontját tartalmazza.

2.1.8. Definíció (Feszített Részgráf)
Egy G' gráf feszített részgráfja a G gráfnak, ha G' olyan részgráf, amely az összes olyan E'-beli élet tartalmazza melynek mindkét végpontja megtalálható G'-ben.

2.1.9. Definíció (Szomszédsági mátrix)
Egy n csúcsú véges gráf szomszédsági mátrixa az az $n \times n$-es mátrix, melynek nem főátlóbeli a_{ij} elemei, a gráfban az i és j pontokat összekötő élek számát, míg főátlóbeli elemei (a_{ii}) az i csúcsra illeszkedő hurokélek számát vagy kétszeresét adják meg. 1$\leq$i$\neq$j$\leq$n

2.1.10. Definíció (Hipergráf)
H hipergráf egy (V,E) rendzett pár, ami egy V, a gráf csúcsait tartalmazó nemüres halmazból és E halmazból áll. Az E halmaz a V részhalmazainak a családja. A hipergráfban egy E halmazban lévő e hiperél a csúcsok egy nemüres halmaza. V elemeit hipercsúcsoknak, míg E elemeit hiperéleknek nevezzük.

Példa:
V=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7)
E=(e_1,e_2,e_3,e_4)=((v_1,v_2,v_3),(v_2,v_3),(v_3,v_5,v_6),(v_4))



1. ábra. Egy hipergráf 7 csúccsal és 4 éllel [2]

2.1.11. Definíció (Lineáris Hipergráf)
Egy hipergráf akkor lineáris, ha két hiperélnek maximum egy közös pontja van.

2.1.12. Definíció (Hurokmentes Hipergráf)
Egy hipergráf akkor hurokmentes, ha nincs egy méretű éle, azaz minden élnek legalább két pontja van.

2.1.13. Definíció (Egyszerű Hipergráf)
Egy hipergráf akkor egyszerű, ha lineáris és hurokmentes.

2.1.14. Definíció (Hipergráf Fokszáma)
Egy pont fokszáma, az azt a pontot tartalmazó hiperélek száma. A v pont fokszámát d(v)-vel jelöljük.

2.2. Gráfok színezése

Azt mondjuk, hogy egy gráf n db színnel színezhető, ha csúcsait n különböző színűre tudjuk színezni úgy, hogy két szomszédos csúcs színe nem egyezik meg.

Ha hurokél lenne egy gráfban, akkor az ahhoz az élhez tartozó pontot nem tudnánk kiszínezni és a párhuzamos éleket, pedig nem kell figyelembe vennünk egy színezésnél, így csak egyszerű gráfokkal foglalkozunk színezéses problémáknál.

2.2.1. Definíció (Kromatikus szám)
Egy G gráf kromatikus száma χ(G)=n, ha a G gráf n színnel jól színezhető, de ezt n-1 darabbal már nem tudjuk megtenni. Tehát ez a minimális száma egy jó

színezésben felhasznált színeknek.

Az azonos színt kapott csúcsok halmazát színosztálynak nevezzük.

2.2.2. Definíció (Klikk)
Klikknek, a G gráf egy teljes részgráfját nevezzük. Ezen klikkek közül a maximális méretű pontszámát a gráf klikkszámának hívjuk. Jele: ω(G)

Egy klikknek semelyik két pontja nem lehet azonos színű.

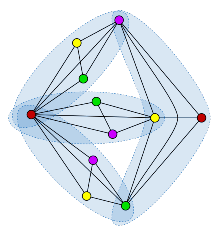
2.2.3. Tétel [1]
Bármely G gráfra igaz, hogy a kromatikus száma nem lehet kisebb a klikkszámánál.
$\chi(G) \geq \omega(G)$

Bizonyítás
A klikkszám mutatja meg mekkora a legnagyobb összefüggő teljes részgráfja a gráfnak. Ebben a részgráfban minden egyes pontnak külön színt kell adni, mert minden csúcs szomszédos, így a gráf kromatikus száma legalább a klikkszámmal egyenlő, annál nagyobb lehet, de kisebb semmiképp sem. $\square$

3. Erdős-Faber-Lovász sejtés

3.1. A sejtésről általánosan

A sejtést Erdős Pál, Vance Faber és Lovász László fogalmazták meg 1972-ben. [3] Nem sokkal később Erdős Pál 50 dolláros jutalmat kínált annak, aki bizonyítja vagy cáfolja a sejtést, de később ezt az összeget megemelte 500 dollárra, mivel a probléma nehezebbnek bizonyult, mint azt elsőre gondolták, mikor megfogalmazták a sejtést. Részeredmények és szigorúbb sejtések cáfolatai születtek az évek folyamán, de még a mai napig nincs bizonyítva vagy cáfolva az eredeti Erdős-Faber-Lovász sejtés. Folyamatosan születnek újabb és újabb eredmények, melyek mind az Erdős-Faber-Lovász sejtésből indulnak ki, vagy azt próbálják meg bizonyítani további feltételek hozzáadásával.
Ha van n db teljes gráfunk és mindnek n csúcsa van, akkor ha ezeket páronként összeragasztjuk úgy, hogy maximum egy ponton csatlakozhatnak, akkor az n db teljes gráf csúcsait kiszínezhetjük n színnel.
Ezt megfogalmazhatjuk hipergráfra akként, hogy a K_n teljes gráfok pontjai mind egy hiperélt definiálnak az adott hipergráfban.
Ekkor azt mondjuk, hogy bármely n élű lineáris hipergráf, amelynek minden éle n méretű, n színnel kiszínezhető.



2. ábra. Egy példa az Erdős-Faber-Lovász sejtésre, n=4 [4]

3.2. E-F-L sejtés sűrű hipergráfokra

Abdón Sánchez-Arroyo [5] foglalkozott tüzetesebben az Erdős-Faber-Lovász sejtés és sűrű hipergráfok témájával. A hipergráfos megadásból kiindulva:
Legyen H=(E_H,V_H) egy hipergráf, ami áll egy véges méretű E_H nem üres halmazból, ami a hipergráf éleit tartalmazza: E_H=(E_1,...,E_n), és V_H halmazból ami a hipergráf csúcsait tartalmazza. Azt mondjuk, hogy egy csúcs foka (jelöljük x-szel) azt adja meg, hogy hány él tartalmazza az adott csúcsot. A H hipergráf legkisebb és legnagyobb fokszámának jele rendre: δ(H), Δ(H).
Egy hipergráfra akkor mondjuk hogy sűrű, ha a legkisebb fokszám nagyobb a hiperélek számának gyökénél, azaz
δ(H) > $\sqrt{n}$.

Egy H=(E_H,V_H) hipergráf egy jó k-színezése azt jelenti, hogy a hipergráf csúcsait kiszínezzük úgy k színnel, hogy az egy hiperélhez tartozó csúcsok mind különböző színűek. A hipergráf kormatikus száma (χ(H)) a legkisebb k, amivel az összes csúcsot ki tudjuk színezni. Ha feltesszük a hipergráfról, hogy lineráris, akkor megkapjuk az Erdős-Faber-Lovász sejtés hipergráfos átiratát, miszerint:

3.2.1. Sejtés [3]
Ha egy H lineáris hipergráf n hiperélet tartalmaz, és minden hiperélhez n db csúcs tartozik, akkor a H hipergráf n színnel kiszínezhető.

Ekkor a linearitás miatt a H hipergráf minden hiperélének van legalább egy darab első fokú csúcsa, hiszen ha az összes hiperél kapcsolódik valamely csúcsnál, akkor is egy hiperélnek maximum n-1 olyan pontja lehet ami más hiperélhez is kapcsolódik. Ekkor ha a legalább másodfokú csúcsokat ki tudjuk színezni n különböző színnel, akkor a teljes hipergráfot is ki tudjuk színezni n színnel, hiszen az első fokú csúcsokat olyan színűre színezzük, amilyen az adott hiperélben nincsen.
He egy így megadott H hipergráfból előállítunk egy H' hipergráfot úgy, hogy kitöröljük belőle az első fokú csúcsokat, akkor H' szintén n db hiperélt tartalmaz, de a hiperélek maximum n-1 csúcsot tartalmaznak, amik foka minimum 2.
Így a sejtést megfeleltethetjük egy második sejtésnek, ami szerint:

3.2.2. Tétel (A. Sánchez-Arroyo 2008 [5])
Vegyünk egy H lineáris hipergráfot, aminek n db maximum n csúcsot tartalmazó

éle van, amelyek fokszáma minimum kettő. Ha H sűrű, akkor χ(H)$\leq$n.

Bizonyítás [5]
Elkezdjük a csúcsokat kiszínezni a fokszámuk szerinti csökkenő sorrendben. Feltesszük, hogy kiszíneztük az összes csúcsot aminek fokszáma nagyobb, mint r. Haladunk tovább és ki szeretnénk színezni egy csúcsot aminek r a fokszáma. Veszünk egy r fokú x csúcsot egy E hiperélben. Meg kell néznünk, hogy az E hiperélben hány csúcs van eddig kiszínezve. A hipergráfban n-r olyan hiperél van amely nem tartalmazza x-et. Ha egy E-beli y csúcsnak már van színe, akkor y-nak legalább r a foka, hiszen az r-nél nagyobbakat már kiszíneztük mind, és most megyünk végig az r fokúakon. Ekkor H linearitása miatt maximum $\frac{n-r}{r-1}$ csúcsnak van színe E-ben. Ez igaz az összes olyan hiperélre, ami tartalmazza x-et, így maximum r$\cdot\frac{n-r}{r-1}$ olyan színezett csúcs van ami x-nek szomszédja. Magát x-et is ki tudjuk színezni, ha n szigorúan nagyobb, mint r$\cdot\frac{n-r}{r-1}$. Így, ha a H hipergráf sűrű, x-et ki tudjuk színezni. $\square$

Még egy megfogalmazás [6]

A problémát Haddad és Tardif is átfogalmazta 2004-ben olyan alakra, amelyben bizottságok ülési rendjét szeretnék meghatározni vele.
Egy egyetemen k db bizottságnak lesz ülése, mindegyiknek k db tagja van és egy olyan teremben üléseznek, amelyben k db szék található. Két bizottságnak maximum egy közös tagja lehet. Le lehet-e úgy ültetni a bizottságok tagjait, hogy a különböző bizottságokba is tartozó emberek mindig ugyanott üljenek. Itt a személyek reprezentálják a csúcsokat, maguk a bizottságok a teljes gráfok, a székek pedig a színek. Hiszen a gráfban is egy csúcsnak egy színe lehet, akárhány gráfba is tartozik bele, és a szomszédos csúcsoknak, azaz a bizottsági társainak, más színűnek kell lennie, más székre kell ülnie.

4. Eredmények a témakörben

4.1. Az E-F-L sejtés közelítései

Eugene Leighton Lawler és W. I. Chang 1986-87-ben [7] kidolgozott egy módszert, amivel az Erdős-Faber-Lovász sejtést bebizonyították $\frac{3}{2}$n-2 színre.

Ők az Erdős-Faber-Lovász sejtés halmazelméleti megadásából indultak ki, miszerint: Vegyünk n db halmazt A_1-től A_n-ig. $|A_i|$=n, ahol 1$\leq$i$\leq$n és $|A_i \cap A_j| \leq 1$, ahol 1$\leq$j<i$\leq$n. $\cup A_i$ elemeit ki lehet színezni úgy n színnel, hogy minden i$\in A_i$ más színű legyen.

Chang és Lawler az előzőekben ismertetett sűrű hipergráfos módszerhez hasonlóan először elhagyták azokat az elemeket a halmazokból, amik csak egy halmazba tartoztak, hiszen azok az elemek már könnyedén színezhetőek, ha a többi elemet jól kiszínezték. Ezt a rendszert egyszerű halmazrendszernek nevezték el. Ezzel az átalakítással az Erdős-Faber-Lovász sejtés ekvivalens lett azzal az állítással, hogy minden egyszerű halmazrendszer n színnel kiszínezhető.

Ezután a problémát ők is átfogalmazták hipergráfokra.
Vegyünk egy H=(V,E) hipergráfot, ahol e$\in$E hiperél mérete azt jelöli, hogy hány csúcsot tartalmaz. Ebben az esetben a H hipergráf egyszerű, ha bármely u, v hiperél párnak maximum egy közös csúcsa van és nincs olyan hiperél H-ban, aminek csak egy csúcsa lenne. A sejtés szerint bármely egyszerű H hipergráf aminek n csúcsa van, legfeljebb n színnel élszínezhető.

Vegyünk egy egyszerű halmazrendszert, A_i-t, ahol 1$\leq$i$\leq$n. Létre tudunk hozni egy n csúcsú H hipergráfot (V={1,...,n}) aminek az élei megfelelnek a különböző A_i halmazoknak.
Pontosabban, minden egyes A_i halmazhozhozzárendelünk egy e hiperélet H-ban,

ami kapcsolódik minden egyes j (1≤j≤n) csúcshoz, j∈e=A_i. Ekkor H egyértelműen egyszerű.
Ezt fordítva is meg lehet tenni, hogy egy egyszerű hipergráfot átalakítunk egy egyszerű halmazrendszerré. Chang és Lawler tétele szerint, $\frac{3}{2}$n-2 szín biztosan elegendő az Erdős-Faber-Lovász probléma megoldásához.

4.1.1. Definíció (Kromatikus index)
Egy hipergráf kromatikus indexe a legkisebb olyan szám, ahány színnel ki lehet színezni a hipergráf hiperéleit úgy, hogy két szomszédos hiperél ne legyen azonos színű.

4.1.2. Tétel (E. L. Lawler, W. I. Chang 2006 [7])
Minden n csúcsú egyszerű H hipergráf kromatikus indexe maximum $\frac{3}{2}$n-2.

Bizonyítás [7]
Először is a H hipergráf hiperéleit nem-csökkenő sorrendbe rakjuk, így a legnagyobb lesz a legelején és a legkisebb a legvégén. A hiperél méretét a hozzátartozó csúcsok adják meg. Ebben a sorrendben elkezdjük kiszínezni az éleket $\frac{3}{2}$n-2 színnel. Feltesszük, hogy a következő e él amit kiszíneznénk mérete k≥3. Ezidáig csak k vagy annál nagyobb méretű hiperélek lettek kiszínezve, így a hipergráf egyszerű mivoltából kiindulva legfeljebb $\frac{n-k}{k-1}$ ilyen él találkozhat e-vel minden egyes k élen, amivel e szomszédos. Így lesz szabad szín e-nek ha k$\cdot\frac{n-r}{r-1}$<$\frac{3}{2}$n-2, ami igaz k≥3-ra. Ez alapján kiszínezzük e-t.
Ezután feltesszük, hogy a következő hiperél amit szineznünk kell egy kettő méretű (u,v) él. Ha van olyan szín, amit sem u-nál, sem v-nél még nem használtunk, akkor színezzük olyanra a hiperélt. Máskülönben létezik olyan w csúcs amire igazak a következők:

(u,w) és (v,w) olyan kettő méretű élek, amik már kaptak színt, és (u,w) színe felhasználható v-nél és (v,w) színe felhasználható u-nál.

Megállapítjuk, hogy legalább $\frac{n}{2}$ felhasználható szín áll rendelkezésünkre mind u-nál, mind v-nél; ezek diszjunkt színhalmazok és legfeljebb n-1 ezen színek közül tartozhat már w-hez. Következik, hogy van felhasználható szín w-re és van egy-egy u-ra és v-re is. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy van egy c szín, ami felhasználható mind u-nál, mind w-nél. Ez alapján újraszínezzük az

(u,w) hiperélt a c színnel, és az eredeti (u,w) színnel kiszínezzük az (u,v) hiperélt. Annyi maradt hátra, hogy megmutassuk, létezik ilyen w csúcs.
Legyen

P=(c|c színe egy kettő méretű élnek, ami u-hoz kapcsolódik, de nem színe semmilyen három vagy annál nagyobb méretű élnek ami v-hez kapcsolódik)

Q=(c|c színe egy kettő méretű élnek, ami v-hez kapcsolódik, de nem színe semmilyen három vagy annál nagyobb méretű élnek ami u-hoz kapcsolódik)

Ekkor bármely szín ami kapcsolódik u-hoz vagy v-hez, de nem része A∪B-nek, egy három vagy annál nagyobb méretű hiperél színe ami kapcsolódik u-hoz vagy v-hez. Mivel H egyszerű feltehetjük, hogy $n-$|A|-2$_{\frac{}{2}}$ és $n-$|B|-2$_{\frac{}{2}}$ felső határai azon három vagy nagyobb méretű élek számának amik kapcsolódhatnak u-hoz illetőleg v-hez. A feltételezés szerint, nincs felhasználható szín se u-nál, se v-nél, tehát

$$\frac{3}{2}\text{n-}\frac{5}{2}\geq\frac{3}{2}\text{n-2}\geq|\text{A}\cup\text{B}|+\frac{n-|A|-2}{2}+\frac{n-|B|-2}{2}$$

vagy ezzel ekvivalensen

$$\text{n-1}\geq|\tfrac{A}{B}|+|\tfrac{B}{A}|.$$

□

4.1.3. Megjegyzés
$|\frac{A}{B}|$ azon (u,w) hiperéleket számolja, amelyek színe felhasználható v-nél, míg ehhez hasonlóan $|\frac{B}{A}|$ azon (v,w) hiperéleket számolja, amelyek színe felhasználható u-nál. A létezése egy ilyen w-nek következik az utolsó egyenlőtlenségből és a skatulya-elv egyszerű alkalmazásából.

4.1.4. Skatulya-elv [17]
Ha van n db tárgyunk, m db tárolónk és n>m, akkor legalább egy tárolóban egyszerre több tárgy lesz.

Jeff Kahn munkája

Az egyik legfontosabb tanulmány a sejtéssel kapcsolatban, melyet később többen is felhasználtak saját munkájukhoz az Jeff Kahn 1992-es [8] tanulmánya, miszerint
majdnem-diszjunkt hipergráfok kromatikus száma legfeljebb (1+o(1))·n, azaz (n+o(n)).

4.1.5. Definíció (Diszjunkt hipergráf)
Legyen A_i hipergráfok egy családja (1≤i≤n). Két hipergráf akkor diszjunkt ha, $|A_i \cap A_j| \leq 1$ és i≠j.

4.1.6. Definíció (Majdnem-diszjunkt hipergráf)
Legyen e és f egy H hipergráf két különböző hiperéle, a H hipergráf közel-diszjunkt ha |e∩f| ≤1 minden e és f párra.

Ezzel az eredménnyel jobban közelítette az Erdős-Faber-Lovász sejtést, mint a korábban ismertetett Chang és Lawler által bizonyított közelítés, hogy $\frac{3}{2}$n-2 [7] esetén igaz az Erdős-Faber-Lovász sejtés.

4.2. Színezési problémák feszítő részhipergráfokra

Egy viszonylag friss, 2004-es eredmény származik Bill Jackson, G. Sethuraman és Carol Whitehead [9] tanulmánya alapján. Ők is egyszerű hipergráfokat használtak a sejtés részleges bizonyítására, de ők a H hipergráf egy S feszítő részhipergráfjára bizonyítottak bizonyos színezési feladatokat.

Bevezetés:
A következő részeredményben is egyszerű hipergráfok élszínezésével foglalkozom. Ebben a részben Δ_H-val jelöljük a H hipergráf maximális fokát. A sejtés szerint egy n csúccsal rendelkező egyszerű hipergráf n színnel jól élszínezhető. A sejtés igaznak bizonyult, abban az esetben, ha vesszük H egy részgráfját S-et, melyet az olyan élek alapján határoztunk meg melyek mérete nagyobb vagy egyenlő hárommal, Δ_S élszínezhető és kielégíti a $\Delta_S \geq 3$ feltételt. A sejtés különösképpen

igaz, ha S unimoduláris és $\Delta_S \geq 3$.

4.2.1. Definíció (Hipergráf maximális foka)
Egy hipercsúcs foka azt a számot adja meg, hogy hány hiperél tartalmazza az adott csúcsot. A hipergráf maximális foka a legnagyobb ilyen szám.

4.2.2. Definíció (Teljesen unimoduláris mátrix)
Egy mátrix akkor teljesen unimoduláris, ha minden négyzetes részmátrixának a determinánsa -1, 0 vagy 1.

4.2.3. Definíció (Unimoduláris hipergráf)
Egy hipergráf akkor unimoduláris, ha szomszédsági mátrixa teljesen unimoduláris.

A H hipergráfot már meghatároztuk halmazokkal, de még nem mutattuk meg, hogy incidencia mátrixszal is megadható. A(H)=a_{ij}, ahol a sorok reprezentálják a csúcsokat és az oszlopok az éleket. A mátrixban a_{ij}=1 ha $v_i \in e_j$, azaz az adott csúcs hozzátartozik az adott élhez, máskülönben 0.
H egy részhipergráfja, egy olyan hipergráf amit a szomszédsági mátrix egy részmátrixa határoz meg. H egy feszítő részhipergráfja, egy olyan részhipergráf H' melynek élei E'=E(H')⊆E(H) és csúcsai V(H')=$\cup_{e \in E'}$e. Azt mondhatjuk, hogy H' feszítő részhipergráfot E' határozza meg, hiszen A(H') csak A(H) oszlopai E' szerint. A feszítő részhipergráf meghatározását jelölhetjük E(H)/E' vagy H-E'-vel.
A v∈V(H)-ra, d_h(v) azon élek számát adja meg amelyek tartalmazzák v-t H-ban és Δ_H=$max_{v \in V(H)} d_H(v)$. A páronként csatlakozó élek maximális számát H-ban Δ_H^0-val jelöljük.
Élszínezni szeretnénk a hipergráfot k színnel, azaz úgy színt adni minden egyes élnek, hogy a közös csúccsal rendelkező hiperélek más színt kapjanak. Legyen q(H) a H hipergráf kromatikus indexe, ami azt jelöli, hogy mi az a legkisebb szám, ahány színnel jól élszínezhető a hipergráf.

q(H)$\leq \Delta_H^0 \leq \Delta_H$.

Azt mondjuk, hogy egy H hipergráf jól élszínezhető, ha q(H)=Δ_H.

4.2.4. Sejtés [3]
Legyen H egy n db n méretű éllel rendelkező lineáris hipergráf. Ekkor H csúcsait n színnel ki tudjuk színezni úgy, hogy egyik azonos élhez tartozó csúcs se kapja ugyanazt a színt.

Legyen H egy lineáris hipergráf és legyen V'$\subseteq$V(H) azon csúcsok halmaza, melyek H legalább két hiperéléhez tartoznak. Ha V' kiszínezhető, úgy hogy két szomszédos csúcs ne legyen ugyanolyan színű, akkor ez a színezés kiterjeszthető a teljes H hipergráfra, ugyanennyi szín felhasználásával. Továbbá ha H-nak n éle van, akkor a linearitás miatt egy él se tartalmazhat n-1-nél több másodfokú csúcsot. Így a Sejtés 4.2.4. megfeleltethető az alábbi sejtésnek:

4.2.5. Sejtés [9]
Legyen H egy n csúcsú lineáris hipergráf, aminek minden csúcsa legalább másodfokú. Ekkor a H hipergráf csúcsai kiszínezhetőek n színnel úgy, hogy két szomszédos csúcs ne legyen azonos színű.

4.2.6. Definíció (Gráf Duálisa)
Egy G gráf duálisa egy olyan G* gráf melyben minden G-beli élnek megfelel egy él, de az eredeti gráf tartományait, a külső tartományt is beleértve, feleltetjük meg a G* gráf csúcsainak, és G* élei akkor és csak akkor kötnek össze két csúcsot, ha azon tartományok melyeknek megfeleltethetőek szomszédosak voltak G-ben.

4.2.7. Definíció (Hipergráf Duálisa)
Legyen H=(V, E_1, E_2,..., E_k) egy hipergráf, ahol V=(v_1,..., v_n) a csúcsok halmaza és minde E_i egy hiperél. Ekkor egy H*=(E,v_1, v_2,..., v_n) hipergráf megfeleltethető a H-nak, úgy hogy a H* minden csúcsa, ami ez esetben e_1, e_2,..., e_k (megfelelve E_1, E_2,..., E_k-nak) és a hiperélek a V_1, V_2,..., V_n halmazok (megfelelve a v_1, v_2,..., v_n-nek), ahol V_j=($v_j$$\in$$E_i$, i$\leq$k), j=1, 2,..., n. H* hipergráf a H hipergráf duálisa.

Az könnyen látható, hogy egy lineáris hipergráf duálisa szintén lineáris. Továbbá annak a tulajdonságnak a duálisa, hogy nincs kettőnél kisebb fokú csúcs az, hogy nincs olyan él ami kevesebb mint kettő csúcsot tartalmazna. Így a Sejtés 4.2.5. ekvivalens, egy újabb sejtéssel:

4.2.8. Sejtés [9]
Legyen H egy hurokmentes és lineáris hipergráf n csúccsal. Ekkor q(H)$\leq$n.

Legyen S a H egy olyan feszítő részhipergráfja, amelyet a háromnál nagyobb méretű hiperélek határoznak meg. A Sejtés 4.2.8. igaz, ha S=$\emptyset$, mivel minden egyszerű gráf n csúccsal n élszínezhető. Meg kell mutatnunk, hogy a Sejtés 4.2.8. igaz, minden H-ra melynek S feszítő részhipergráfja jól élszínezhető és Δ_S $\leq$3.

Eredmények:

Innentől kezdve H minden esetben egy n csúcsú, egyszerű hipergráfot jelöl és S a H egy olyan feszítő részhipergráfja, amelyet a háromnál nagyobb méretű élek határoznak meg. Legyen G=H-E(S). Ekkor G minden éle 2 nagyságú és így G egy egyszerű gráf. Jelöljük T-vel a G azon részgráfját melyet a V(H)/V(S) csúcs halmazból állítunk elő, és jelölje G_Δ G azon részgráfját melyet a Δ_G fokú csúcsokból állítottunk elő. A megközelítésünk H él színezéséhez, hogy kiterjesztjük a q(S) él színezését S-nek E'$\subseteq$E(G) részhalmazára, úgy hogy a gráf G'=G-E' élszínezhető legyen a maradék n-q(S) színnel. Hogy élszínezzük G'-t, a következő tételeket használjuk:

4.2.9. Tétel (V. G. Vizing 1964 [10])
Legyen G egy egyszerű gráf. Ekkor q(G)$\leq\Delta_G$-1.

4.2.10. Tétel (J-C. Fournier 1973 [11])
Legyen G egy egyszerű gráf. Ha G_Δ aciklikus, akkor q(G)=Δ_G.

4.2.11. Lemma [9]
Legyen H egy egyszerű, n csúcsú hipergráf. Ha Δ_S=1, akkor q(H)$\leq\Delta_H$+1.

Mivel H egyszerű, Δ_H $\leq$n-1-ből és Lemma 4.2.11.-ből következik, hogy Sej-

tés 4.2.8. igaz, amikor Δ_S=1. Abban az esetben, amikor Δ_S $\geq$2, feltesszük az erősebb hipotézist, hogy H jól élszínezhető. Szintén feltételezhetjük, az általánosság megszorítása nélkül, hogy H minden csúcspárja megjelenik egy hiperélen, mivel kettő méretű élek hozzáadása nem tudja csökkenteni q(H)-t.
Ennek egy egyszerű következménye van:

4.2.12. Állítás [9]
Feltéve, hogy H minden csúcspárját tartalmazza egy hiperélen H-ban, legyen
v$\in$ V(T) és x,y $\in$ V(S).

(a) Ha T$\neq\emptyset$, akkor T egy teljes gráf és T minden csúcsa össze van kötve S minden csúcsával egy kettő méretű éllel. Így g_G(v)=n-1.
(b) x és y nem szomszédosak G-ben akkor és csak akkor, ha ugyanaz az e$\in$E(S) él tartalmazza őket.
(c) d_G(x)$\leq$n-3 és d_G(x)=n-3 akkor és csak akkor, ha x-et egy egyedi e$\in$E(S) él tartalmazza és $|$e$|$=3.
(d) Ha d_S(x)=2 akkor d_G(x)$\leq$n-5.
(e) Ha d_S(x)=3 akkor d_G(x)$\leq$n-7.

4.2.13. Lemma [9]
Legyen H egy n csúcsú, egyszerű hipergráf amiben Δ_S=q(S)=2. Ekkor q(H)$\leq$n.

4.2.14. Lemma [9]
Legyen H egy n csúcsú, egyszerű hipergráf amiben Δ_S=q(S)=3. Ekkor q(H)$\leq$n.

Kikövetkeztethetjük az alábbi speciális esetet Sejtés 4.2.8.-ra a Lemma 4.2.11., 4.2.13 és 4.2.14.-ből:

4.2.15. Tétel (B. Jackson, G. Sethuraman, C. Whitehead 2007 [9])
Legyen H egy n csúcsú, egyszerű hipergráf és S a három vagy annál nagyobb méretű élek által meghatározott feszítő részhipergráf. Ha S jól élszínezhető és Δ_S $\leq$3, akkor q(H)$\leq$n.

Legyen H egy hipergráf és V'$\subseteq$V(H).
H'-t a V' csúcs halmazból és E'=($e_i\cap$H':1$\leq$i$\leq$m, $|e_i\cap$V'$|\neq$0) élhalmazból álló részhipergráfot, H V'-vel indukált részhipergráfjának nevezzük. A dualitással a 4.2.15. Tétel a következő speciális esetét kapjuk a 4.2.4. Sejtésre:

4.2.16. Megjegyzés [9]
Legyen H egy egyszerű, n éllel rendelkező hipergráf, melynek minden éle n méretű és legyen S a H legalább 3 méretű éleiből indukált feszítő részhipergráfja. Ha $|$e$|\leq$3, minden E$\in$E(S) és S 3 színnel kiszínezhető, akkor lehetséges, hogy n színnel kiszínezzük H csúcsait úgy, hogy két szomszédos csúcs ne legyen azonos színű.

A hipergráfok több osztálya is, amik általánosítják a páros gráfokat, ismertek arról, hogy jól élszínezhetők. Ezek közé tartozik az unimoduláris hipergráfok osztálya is. Egy A mátrixra azt mondjuk, hogy teljesen unimoduláris, ha minden négyzetes részmátrixának a determinánsa -1, 0 vagy 1. Egy H hipergráfra akkor mondjuk, hogy unimoduláris, ha a szomszédsági mátrixa teljesen unimoduláris. Továbbá a H hipergráf duálisa, H* akkor és csak akkor unimoduláris, ha H is az. Így megkapjuk a következő eseteket a 4.2.15. Tételre és a 4.2.16. Megjegyzésre:

4.2.17. Megjegyzés [9]
A 4.2.8. Sejtés igaz, ha a H legalább 3 méretű hiperélei által meghatározott S feszítő részhipergráf unimoduláris és kielégíti, hogy Δ_S $\leq$3.

4.2.18. Megjegyzés [9]
A 4.2.4. sejtés igaz, ha a H legalább 3 méretű hiperélei által meghatározott S feszítő részhipergráf unimoduláris és ezzel együtt $|$e$|\leq$3, minden e$\in$E(S)-re.

Végül, megjegyezzük, hogy van egy R.E. Bixby [12] által készített polinomiális időben lefutó algoritmus arra, hogy eldöntsük egy hipergráfról, hogy unimoduláris vagy sem.

5. Legfrissebb eredmények

Az Erdős-Faber-Lovász sejtés továbbra is a gráfelmélet egyik fontos kérdése. A mai napig születnek eredmények és tanulmányok melyek a gráfelmélet új, fiatal ágazatain belül vizsgálják az Erdős-Faber-Lovász sejtést.

5.1. B-színezés

Az E-F-L sejtést a gráfelmélet olyan fiatal ágai is használják vagy próbálják bizonyítani mint a b-színezés. Victor Campos, Carlos Lima és Ana Silva [13] a b-színezés és egy gráf legkisebb körének mérete közti összefüggést vizsgálták munkájukban és az Erdős-Faber-Lovász sejtés részbizonyításához is felhasználták ezt.
Egy gráf b-színezése [14] annyit tesz, hogy ha az adott gráf kromatikus számának megfelelően jól kiszínezzük a gráf csúcsait, akkor minden színosztály tartalmazni fog egy olyan csúcsot, aminek az összes többi színosztályban van szomszédja.

5.1.1. Definíció (b-kromatikus szám)
Egy G gráf b-kromatikus száma a legnagyobb olyan b(G) egész szám, amely mellett van a G gráfnak b-színezése b(G) db színnel.

Ezt a számot felülről becsülhetjük egy másik számmal, ez az m(G), a G gráf m-foka. Az m(G) a legnagyobb olyan egész szám, ami mellett a G gráfnak legalább m(G) db olyan csúcsa van aminek a fokszáma legalább m(G)-1.
Egy gráfban ha a legkisebb kör mérete nagy, akkor a b-kromatikus száma is nagy lesz, az m(G)-hez képest.
Minden gráfnak, amiben a legkisebb kör mérete legalább 8, a b-kromatikus száma

legalább m(G)-1. Ekkor egy G gráf b-kromatikus száma, polinomiális időben megtalálható.
Ha egy gráfot ki szeretnénk színezni, akkor ezt megpróbálhatjuk iterációs módszerrel. tegyük fel, hogy a gráfot már jól kiszíneztük n db színnel. Ha van egy olyan c szín, hogy minden egyes v csúcs, ami c színnel van ellátva nem kapcsolódik legalább egy másik színosztályhoz, akkor ezeket a v csúcsokat átszínezhetjük annak a színosztálynak a színére és máris van egy jó színezésünk n-1 színnel. A színezési probléma azonban NP-nehéz, emiatt igen csak sokáig tartana a kromatikus számot elérni ezzel a módszerrel. Erre az esetre találták ki a b-színezést, hiszen a b-színezésnél nincs olyan színosztály, aminek ne lenne olyan csúcsa, ami nem kapcsolódik egy másik színosztályhoz. Ezt a fajta színezést nem lehet a fenti módszerrel javítani és a b-kromatikus szám a legrosszabb ilyen színezést adja. Egy b-csúcs az, ha egy csúcsnak vannak szomszédai minden egyes színosztályban, a sajátján kívül természetesen. Egy G gráf b-kromatikus számának a kiszámolása szintén NP-nehéz [14] feladat, még akkor is ha a G egy páros [15] vagy merev körű [16] gráf.

5.1.2. Definíció (Páros gráf)
Páros gráfnak nevezünk egy olyan G gráfot, amelyben a csúcsokat egyértelműen fel tudjuk osztani két halmazra úgy, hogy az összes G-beli élnek az egyik végpontja az egyik, míg a másik végpontja a másik halmazban van. G=(A,B;E)

5.1.3. Definíció (Merev körű gráf)
Egy merev körű gráf, egy olyan G gráf, amelyben minden 4 vagy annál hosszabb körön belül van él két csúcs között és ez az él nem része a körnek.

Természetesen, mivel G egy jó színezése egyben b-színezés is, ezért χ(G)$\geq$b(G). Mindazonáltal χ(G) és b(G) között nagyon nagy lehet az eltérés. A b-kromatikus számra már adtak egy felső becslést, az m(G)-t. Hiszen ha a G-nek van egy k színből álló b-színezése, az azt jelenti, hogy van k csúcsunk amiknek a foka legalább k-1. Legfeljebb m(G) db ilyen csúcs lehet, ezért b(G)$\leq$m(G). Ebben az esetben is m(G) és b(G) között igen nagy lehet a különbség.
Legyen a G-ben található legkisebb kör neve g(G). Habár eldönteni, hogy mikor lesz m(G)=b(G) NP-nehéz feladat, van reláció a legkisebb kör mérete és b(G) valamint m(G) különbsége között. Ezzel foglalkozik a következő két sejtés. Ezekhez használjuk az alábbi jelöléseket, legyen d(v) a v csúcs foka és azt mondjuk,

hogy a G gráf d-reugális, ha d(v)=d minden v-re.

5.1.4. Sejtés [18]
Ha G d-reguláris és a legkisebb kör benne legalább 5, továbbá G nem a Petersen-gráf, akkor b(G)=d+1.

5.1.5. Sejtés [16]
Ha G=(A,B) egy C_4-mentes páros gráf amiben |A|=m, d(u)=m-1 minden u∈A-ra és d(v)<m-1 minden v∈B-re, akkor b(G)≥m-1.

Meg kell jegyezni, hogy az első sejtésben a legkisebb kör legalább 5 és G m-foka d+1, míg a második sejtésnél a legkisebb kör legalább 6 és az m-fok egyenlő m-mel. Továbbá a második sejtés igaz [21], ha maga az Erdős-Faber-Lovász sejtés is igaz.
Ezen sejtések motiválták azt a kérdést, hogy milyen g*≤g(G) szám esetén lesz a b(G)≥m(G)-1?
Erre a válasz, hogy 5≤g*≤9. [19]

5.1.6. Tétel (V. Campos, C. Lima, A. Silva 2013 [13])
Ha G egy olyan gráf melyben a legkisebb kör mérete legalább 8, akkor
b(G)≥m(G)-1.

Legyen K_n egy n-csúcsú teljes gráf, $K_{m,n}$ egy teljes páros gráf m csúccsal az egyik és n-csúccsal a másik pontosztályban. Legyen C_k egy k-csúcsú kör, továbbá legyen G×H a Descartes szorzata G és H gráfoknak.

5.1.7. Sejtés [18]
Legyen G bármilyen gráf, úgy hogy nem tartalmazza a $K_{2,3}$-at részgráfként. Ha G≠$C_3 \times C_3$, akkor b(G)≥m(G)-1. [20]

Habár ez a sejtés így önmagában hibás, mert $C_3 \times C_3$ együtt az izolált pontokkal egy ellenpélda, de igaz lesz, ha átfogalmazzuk a következő alakra.

5.1.8. Sejtés [13]
Legyen G bármilyen gráf, úgy hogy nem tartalmazza a $K_{2,3}$-at részgráfként. Ekkor b(G)≥m(G)-1 hacsak G-nek nincs olyan részgráfja ami izomorf a $C_3 \times C_3$ gráffal és minden más részgráfjának a maximális foka legfeljebb 2.

Ez a sejtés kapcsolódik az előbbiekben feltett kérdéshez, hiszen ebből következik, hogy g*≤5, hiszen ha g*≥5, akkor nem tartalmaz sem $K_{2,3}$-at, sem $C_3 \times C_3$-at részgráfként.

5.1.9. Definíció (κ_m)
κ_m gráfok egy olyan halmaza, amelyben m-szer található meg K_m és két gráf legfeljebb egy ponton van összeragasztva.

5.1.10. Definíció (B-színezés bázisa)
Vegyük G gráf egy jó színezését és jelöljük ezt θ-val. Egy b-színezés A bázisa egy részhalmaza θ-nak, amely minden színosztályból tartalmaz egy b-csúcsot.

Ekkor az Erdős-Faber-Lovász sejtés a következő féle képpen hangzik:

5.1.11. E-F-L Sejtés [3]
Ha G$\in\kappa_m$ akkor $\chi(G)$=m.

Legyen H$\in\kappa_m$ egy olyan gráf, hogy H-ban minden K_m-nek van legalább egy olyan csúcsa, ami nem tartozik semelyik másik K_m-hez sem. Legyen A egy olyan halmaz, ami tartalmaz az összes K_m-ből egy csúcsot, ezeket az előbbi tulajdonság alapján válogatjuk ki. Legyen G egy olyan gráf, amit H-ból állítunk elő úgy, hogy kitöröljük azokat az éleket, amelyknek nincs végpontja A-ban és legyen B=V(G)/A. Így G egy páros gráf lesz, és teljesíti az 5.1.5. sejtés feltételeit, m(G)=m egészen addig, amíg nincs olyan csúcs B-ben aminek m-1 a foka. Továbbá ha b(G)=m, ahol A a bázisa, akkor $\chi(G)$=m és az E-F-L sejtés igaz. Következésképpen, ha g*≤6, a G gráf olyan megadása mellett, hogy g(G)≥6 és b(G)=m(G)-1 meghatározza a lehetséges ellenpéldát az Erdős-Faber-Lovász sejtésre.

5.2. B-színezés feszes páros gráfokra

Az egyik ilyen tanulmány, melyet Wu-Hsiung Lin és Gerald J. Chang [21] írt 2011-ben, a már ismertetett b-színezéssel [14] foglalkozik, de ezúttal feszes páros gráfok b-színezését és annak kapcsolatát az E-F-L sejtéssel mutatja be.

5.2.1. Definíció (Sűrű csúcs)
Egy G gráf csúcsára akkor mondjuk, hogy sűrű, ha a csúcs foka, legalább m(G)-1.

5.2.2. Definíció (Feszes gráf)
Egy G gráfra akkor mondjuk, hogy feszes, ha pontosan m(G) db sűrű csúcsa van, melyek mindegyikének m(G)-1 a foka.

Egy feszes G gráfban jelölje D a sűrű csúcsok halmazát és D' a nem sűrű csúcsok halmazát. Jelöljük β_m-mel azon G feszes páros gráfok osztályát amikben m(G)=m, itt D és D'=$\cup_x \in_D N_G$(x)) stabil halmazok és $|N_G$(x)$\cap N_G$(x')$|\leq$1 minden különböző x és x' sűrű csúcsra. Itt is az előzőleg definiált κ_m-et használjuk.
Ekkor kimondhatjuk ezekre a gráfokra az Erdős-Faber-Lovász sejtést:

Ha H$\in\kappa_m$, akkor χ(H)=m. [3]
Korábban már foglalkoztam azzal, hogy milyen m esetén lesz ez igaz. Most β_m és κ_m kapcsolatával foglalkozunk.
Ha veszünk egy olyan feszes páros G gráfot amire igaz, hogy G$\in\beta_m$ és D=(x_1, x_2,. . . ,x_m), akkor ha elhaggyuk az összes x_m-ből kifutó élet és kitöröljük az összes csúcsot ami szomszédos volt x_m-mel, kivéve azokat, amiknek van x_i szomszédja (1$\leq$i$\leq$m-1), akkor kapunk egy H_G gráfot. Ez a H_G gráf eleme κ_m-nek.

5.2.3. Tétel (W-H. Lin, G. J. Chang 2013 [21])
Ha az Erdős-Faber-Lovász sejtés igaz, akkor χ_b(G)=m vagy m-1 minden G$\in\beta_m$-re

Egy másik tétel az E-F-L sejtéssel kapcsolatban:

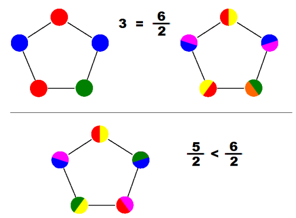
5.2.4. Tétel (W-H. Lin, G. J. Chang 2013 [21])
Minden H$\in\kappa_m$-re, ha $G_H\in\beta_m$ és $\chi_b(G_H)$=m vagy $G_H\notin\beta_m$, akkor χ(H)=m.

A 5.2.3. Tételből következik, hogy ha χ_b(G)=m minden G$\in\beta_m$-re, akkor az Erdős-Faber-Lovász sejtés igaz. Ez azonban nem minden esetben következik be.

5.3. E-F-L sejtés a tört gráfelméletben

Egy másik igen friss eredmény 2013 májusában jelent meg, melyben John Bosica és Claude Tardif [22] az Erdős-Faber-Lovász sejtést tört színezésre vizsgálják.
Ennek a tárgyalásához be kell vezetni pár új fogalmat. Egy G gráf t-színezése, azt jelenti, hogy t db színt tartalmazó halmazokat rendelünk hozzá a csúcsokhoz és a szomszédos csúcsokhoz diszjunkt halmazokat rendelünk, ezeket a színeket felhasználjuk mind egy csúcshoz.
Egy a:t színezése egy gráfnak, egy t-színezés a db adott színt felhasználva.
Egy G gráf t-kromatikus száma, amit χ_t(G)-vel jelölünk, a legkisebb a szám, amivel még létezik a:t színezés.

5.3.1. Definíció (Tört kromatikus szám)
Egy G gráf tört kromatikus száma, χ_f(G)=$lim_{t\to\infty}\frac{\chi_t(G)}{t}$=$inf_t\frac{\chi_t(G)}{t}$.



3. ábra. Felül egy C_5 gráf $\frac{3}{1}$-es és a neki megfeleltethető $\frac{6}{2}$-es színezése látszik, alul ugyan ennek a gráfnak az $\frac{5}{2}$-es színezése. [23]

A tört kromatikus számnak van néhány fontos tulajdonsága:
χ_{a+t}(G)$\leq\chi_a$(G)+χ_t(G)
ω(G)$\leq\chi_f$(G)$\leq\chi$(G)
Magát az Erdős-Faber-Lovász sejtést ezúttal nem írjuk át semmilyen formában, az eredeti formájában használjuk. Azaz G egy olyan gráf, ami n darab n méretű klikkből áll és két klikk legfeljebb egy csúcson van összeragasztva, és ennek a gráfnak a kromatikus száma n.
Legyen egy n egész számra EFL_n gráfok egy olyan osztálya, amik n db klikkből állnak és két klikk legfeljebb egy csúcsnál van összeragasztva. Ekkor EFL_n véges sok izomorf gráfot tartalmaz és az Erdős-Faber-Lovász sejtés ekvivales a következővel:
max:{$\chi(G)$: G$\in EFL_n$}=n minden n-re.
Az, hogy egy G$\in EFL_n$ gráf klikkszáma n, nem egyértelmű, de következménye de Brujin és Erdős egy 1948-as tételének. [24]
A tételhez először fel kell tennünk, hogy van n darab elemünk (a_1, a_2, $\ldots$, a_n) és ezenek az elemeknek elkészítjük A_1, A_2, $\ldots$, A_m kombinációját. Feltesszük, hogy van m>1 kombinációnk, A_1, A_2, $\ldots$, A_m, úgy hogy minden (a_i, a_j) pár csak egyetlen egy A_i-ben található meg.

5.3.2. Tétel (Erdős P., N. G. de Brujin 1948 [24])
Ha m≥n, akkor egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, ha minden rendszer az alábbi szerint néz ki, A_1=(a_1, a_2, ..., a_{n-1}), A_2=(a_1,a_n), ..., A_n=(a_{n-1},a_n) vagy ha n alakja k·(k-1)+1 és minden A_i k elemű és minden a_i k db A-ban jelenik meg.

Ezeket felhasználva kapjuk az alábbi tört kromatikus számra vonatkozó tételt:

5.3.3. Tétel (J. Kahn, P. Seymour 1992 [25])
Minden G∈EFL_n gráfra, χ_f(G)=n.

5.4. Összegzés

Szakdolgozatomban igyekeztem minél részletesebben bemutatni az Erdős-Faber-Lovász sejtést és összeszedni azokat az eredményeket amelyek ezzel kapcsolatban születtek. 1972-es kimondása óta többen is próbálták már bebizonyítani vagy megcáfolni. Az eddig ismertetett eredményeken túl még sok tanulmány foglalkozik az Erdős-Faber-Lovász sejtéssel és 2014-ben David Romeronak és Frederico Alonso-Pecinanak [26] sikerült belátni, hogy ha n≤12 akkor a sejtés igaz, de teljes bizonyítást a mai napig nem sikerült még kimondani. Azonban a gráfelmélet és a matematika folyamatosan fejlődik és új ágai is jelennek meg, így valószínűleg még sok eredmény fog születni amely az Erdős-Faber-Lovász sejtéssel foglalkozik.

6. Köszönetnyílvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Kiss Attilának, a tanácsait, a türelmét és azt, hogy mindig szakított rá időt, hogy segítsen szakdolgozatom elkészülésében. Továbbá köszönöm családomnak, barátaimnak és munkatársaimnak a támogatásukat, nélkülük nem jutottam volna el idáig.

Hivatkozások

[1] GY. Y. Katona , A. Recski, Cs. Szabó: "A számítástudomány alapjai." *Budapest: Typotex* (2006).

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Hypergraph/media/File:Hypergraph-wikipedia.svg

[3] P. Erdős: "Problems and results in graph theory and combinatorial analysis." *Proc. British Combinatorial Conj., 5th* (1975): 169-192.

[4] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fa/Erdős-Faber-Lovász_conjecture.svg

[5] A. Sánchez-Arroyo: "The ErdősFaberLovász conjecture for dense hypergraphs." *Discrete Mathematics 308.5* (2008): 991-992.

[6] L. Haddad, C. Tardif: "A clone-theoretic formulation of the Erdös-Faber-Lovász conjecture." *Discussiones Mathematicae Graph Theory 24.3* (2004): 545-549.

[7] W. I. Chang, E. L. Lawler: "Edge coloring of hypergraphs and a conjecture of Erdős, Faber, Lovász." *Combinatorica 8.3* (1988): 293-295.

[8] J. Kahn: "Coloring nearly-disjoint hypergraphs with n+ o (n) colors." *Journal of Combinatorial Theory, Series A 59.1* (1992): 31-39.

[9] B. Jackson, G. Sethuraman, C. Whitehead: "A note on the ErdősFarberLovász conjecture." *Discrete mathematics 307.7* (2007): 911-915.

[10] V. G. Vizing: "On an estimate of the chromatic class of a p-graph." *Diskret. Analiz 3.7* (1964): 25-30.

[11] J-C. Fournier: "Colorations des arétes dun graphe." *Cahiers du CERO 15* (1973): 311-314.

[12] R.E. Bixby: "Matroids and operations research." *Advanced techniques in the practice of operations research 6* (1982).

[13] V. Campos, C. Lima, A. Silva: "b-coloring graphs with girth at least 8." *The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications. Scuola Normale Superiore* (2013).

[14] R. W. Irving, D. F. Manlove: "The b-chromatic number of a graph." *Discrete Applied Mathematics 91.1* (1999): 127-141.

[15] J. Kratochvíl, Zs. Tuza, M. Voigt: "On the b-chromatic number of graphs." *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg* (2002).

[16] F. Havet, C. L. Sales, L. Sampaio: "b-coloring of tight graphs." *Discrete Applied Mathematics 160.18* (2012): 2709-2715.

[17] I. N. Herstein: Topics in algebra. *John Wiley Sons* (2006).

[18] M. Blidia, F. Maffray, Z. Zemir: "On b-colorings in regular graphs." *Discrete Applied Mathematics 157.8* (2009): 1787-1793.

[19] V. Campos, V. A. E. de Farias, A. Silva: "b-Coloring graphs with large girth." *Journal of the Brazilian Computer Society 18.4* (2012): 375-378.

[20] F. Maffray, A. Silva: "b-colouring the Cartesian product of trees and some other graphs." *Discrete Applied Mathematics 161.4* (2013): 650-669.

[21] W-H. Lin, G. J. Chang: "b-coloring of tight bipartite graphs and the Erdős-FaberLovász conjecture." *Discrete Applied Mathematics 161.7* (2013): 1060-1066.

[22] J. Bosica, C. Tardif: "Fractional Aspects of the Erdős-Faber-Lovász Conjecture." *Discussiones Mathematicae Graph Theory* (2013).

[23] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/65/Fractional_coloring_of_C5.png

[24] N.G. de Bruijn, P. Erdös: "On a combinatorial problem." *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Indagationes mathematicae 51.10 5* (1948): 1277-1277.

[25] J Kahn, P. D. Seymour: "A fractional version of the Erdős-Faber-Lovász conjecture." *Combinatorica 12.2* (1992): 155-160.

[26] D. Romero, F. Alonso-Pecina: "The Erdős-Faber-Lovász conjecture is true for n≤12." *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications 6.03* (2014).