Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

# Lineáris algebrai egyenletrendszerek direkt és iterációs megoldási módszerei

BSc Szakdolgozat

Készítette: Laki Annamária
Matematika BSc
Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Svantnerné Sebestyén Gabriella
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest
2015

# Tartalomjegyzék

**Köszönetnyilvánítás**
Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Svantnerné Sebestyén Gabriellának, hogy hasznos tanácsaival és empatikus hozzáállásával segítséget nyújtott szakdolgozatom megírásában. Továbbá, szeretnék köszönetet mondani családomnak, akik az utolsó pillanatig támogattak és bíztattak egyetemi éveim alatt.

# 1. Bevezetés

Szakdolgozatom témája a lineáris algebrai egyenletrendszerek direkt és iteratív megoldási módszerei. Jelentősége abban áll, hogy segítségével nagyszámú változót tudunk egyszerre kezelni, az általuk meghatározott egyenletrendszert pedig tetszőleges pontossággal megoldani. A felhasználási területek rendkívül sokfélék: a közgazdaságtanon kívül is számos területen előkerülnek, ahol a valóságot- annak bonyolultsága miatt – többé-kevésbé összetett modellekkel „helyettesítjük”. A mérnöki modellek jelentős része is lineáris fizikai modelleken alapul. Az alkalmazott matematika numerikus módszerei közül is sok visszavezethető lineáris egyenletrendszerek megoldására, például az interpoláció, deriválás (főleg amikor mérési eredményekről van szó). Mindezek ráadásul jól „leprogramozható”, számítógéppel feldolgozható feladatokká egyszerűsítik az egyes tudományterületek modelljeit.

A direkt módszerek között talán a legismertebbnek és legegyszerűbbnek tekinthető a Gauss-elimináció, mely Carl Friedrick Gauss,[1] német matematikus nevéhez köthető. Szakdolgozatomban a direkt módszerek közül az LU-felbontásról és a Cholesky-felbontásról írok, melyek nagyrészben a Gauss-elimináció algoritmusára támaszkodnak. A Gauss-módszer által kinyert mátrixfelbontások könnyebbé és időben rövidebbé teszik a számolást.

Az iterációs eljárások akkor igazán hasznosak, ha túl sok (számítás) időbe kerülne az adott egyenletrendszer megoldása, illetve nincs feltétlen szükségünk a pontos megoldásra; ekkor az általam ismertetett módszerekkel, (Jacobi-és Gauss-Seidel-iteráció, valamint ezek relaxált változatai) a kellő pontosság megadása mellett sokkal gyorsabban elvégezhető a számítási feladat. Ez főleg a valós idejű esetekben válik fontossá: például a számítógépes játékoknál, hogy egy könnyedebb példát is említsek.

[1]Carl Friedrich Gauss (Gauß) (Braunschweig, 1777. április 30. – Göttingen, 1855. február 23.) német matematikus, természettudós és csillagász. Munkásságának elismeréseként „a matematika fejedelme” névvel illetik. Kiváló tehetségű, sokoldalú tudósként a tudomány számos területének fejlődéséhez járult hozzá, így a számelmélethez, az analízishez, a differenciálgeometriához, a geodéziához, a mágnesességhez, az asztronómiához és az optikához. Olyan komoly hatása volt a matematika és a természettudomány több területére, hogy Euler, Newton és Arkhimédész mellett minden idők egyik legnagyobb matematikusaként tartják számon.

# 2. Elméleti háttér

Egy $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ lineáris algebrai egyenletrendszer általános alakját a következőképpen írhatjuk fel: legyenek $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ adottak (ahol $i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$). Célunk olyan $x_j$, $(j = 1 \dots n)$ számokat találni, amelyek kielégítik az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{1}$$

Az $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ egyenletrendszer átírható mátrixos alakba, ahol $\mathbf{A}$ az együtthatómátrix, valamint $\mathbf{b}$ az oszlopvektor:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Ekkor a kibővített mátrixunk az:

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

alakban írható fel.
Tehát olyan $\mathbf{b}$ oszlopvektort keresünk, melyre teljesül az $\mathbf{A}x$=$\mathbf{b}$ egyenlőség. A lineáris algebrai egyenletrendszer megoldhatóságáról a következő tételek szólnak.

**2.1. Tétel.** *Egy $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor megoldható, ha az $\boldsymbol{A}$ együttható mátrix és az $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$ kibővített mátrix rangja megegyezik: $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$. Megoldhatóság esetén a megoldás akkor és csak akkor egyértelmű, ha a (közös) rang megegyezik az ismeretlenek számával, azaz: $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = n$.*

A tétel után megfogalmazódhat a kérdés a megoldások számáról.

1. Ha $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, és ez a közös rang megegyezik az ismeretlenek számával, akkor egy megoldás van.
2. Ha $r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, akkor nincs megoldás.
3. Ha $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ és ez a közös rang kisebb az ismeretlenek számánál, akkor végtelen sok megoldás van.

**2.1. Definíció.** Egy lineáris egyenletrendszert *homogén*nek nevezzük, ha a jobboldali konstansok mindegyike nulla. Ellenkező esetben, *inhomogén.*

**2.2. Tétel.** *Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek száma nagyobb, mint az egyenletek száma, akkor az egyenletrendszernek biztosan létezik nemtriviális megoldása.*

**2.1. Következmény.** A homogén egyenletrendszer mindig megoldható, mert nullával szorozva az egyenletrendszer együtthatóit, a megoldás nulla.

A továbbiakban olyan egyenletrendszerekkel foglalkozunk, ahol $r(\mathbf{A}) = n$.

# 3. Direkt módszerek

A lineáris egyenletrendszerek megoldási módszereit két csoportba sorolhatjuk. Direkt módszereknek nevezzük az olyan módszereket, melyekkel pontosan kiszámítható az egyenletrendszer megoldása. Általában ezt úgy tesszük, hogy kifejezzük az egyik egyenletből az egyik ismeretlent, majd behelyettesítve kapjuk a többi megoldást. Előnye, a már említett pontosság, hátránya viszont az, hogy nagyobb egyenletrendszerekre nem hatékony, a kiszámolás hosszadalmas. Ebben a részben az **LU**-felbontásról, valamint a Cholesky-felbontásról lesz szó.

## 3.1. Az LU-felbontás

Egy olyan eljárást szeretnék bemutatni lineáris egyenletrendszerek megoldására, melynek hátterében a Gauss-elimináció húzódik meg, azonban műveletigénye jóval kisebb, mivel ha a jobb oldalon lévő $\mathbf{b}_i$-ket, $(i = 1 \ldots m)$ megváltoztatjuk akkor a Gauss-eliminációt újra és újra elkell végezni, azonban az **LU**-felbontásnál elég egyszer kiszámolni.

**3.1. Megjegyzés.** Az **LU**-felbontás műveletigénye: $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$.

Az **LU**-felbontás lényege, hogy az **A** mátrixot két mátrix szorzatára bontjuk fel, ahol $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy alsó (lower) háromszögmátrix, melynek főátlója csupa egyesekből áll, valamint $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ felső (upper) háromszögmátrix.
Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **LU** általános alakját a következőképpen írhatjuk fel:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

A felbontás tehát a következő alakú:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}. \tag{2}$$

Így, az $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ lineáris algebrai egyenletrendszer felírható az alsó- és felső háromszögmátrix szorzataként, azaz: $\mathbf{A}x = \mathbf{LU}x = \mathbf{b}$. Ekkor először megoldjuk az $\mathbf{L}y = \mathbf{b}$ egyenletet és kifejezzük $y$-t, majd utána az $\mathbf{U}x = y$ egyenletet megoldjuk és kapjuk az $x$ megoldásokat.
Az **LU**-felbontás algoritmusa:
Nézzük Gauss-módszert, mely egyben az alapját is képezi az **LU**-felbontásnak. A módszer igazából két részből áll. Az első az elminációs rész, a második pedig a visszahelyettesítés. Az eliminációs rész lényege, hogy olyan alakúra hozzuk az egyenletrendszerünket, hogy az utolsó egyenletben az utolsó ismeretlen szerepel, az utolsó előttiben az utolsó kettő stb. Megfigyelhető, hogy a végső (új) egyenletrendszer együtthatómátrixa egy felső háromszögmátrix lesz. A megoldásokat alulról felfelé haladva visszahelyettesítéssel kaphatjuk meg.
Most nézzük meg a Gauss-módszer lépéseit, melyből végül megkapjuk a keresett **LU**-felbontást. Tekintsük az $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $det(\mathbf{A}) \neq 0$) egyenletrendszert, melynek keressük a megoldását. Az egyenletrendszer együtthatóit felírva:

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} & b_{nn} \end{array}. \tag{3}$$

Az $^{(1)}$ felső index jelentse, hogy ez az elimináció során nyert első egyenletrendszer:

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(1)} & b_{nn}^{(1)} \end{array}. \tag{4}$$

Első lépésként az első egyenlet segítségével kiejtjük a többi egyenletből az első változót. Ezt úgy érjük el, hogy az első egyenlet egy számszorosát kivonjuk a megfelelő egyenletből. Legyen

$$\begin{array}{c} l_{21} = a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \\ \vdots \\ l_{n1} = a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \end{array}. \tag{5}$$

Ekkor könnyű látni, hogy az $i$. egyenletből kivonva az első egyenlet $l_{i1}$-szeresét az $i$. egyenletből kiesik az első változó. Az $l_{ij}$ alakú szorzókat úgy indexeljük, hogy $l_{ij}$ az $i$. sor $j$. elemének kinullázásához használt szorzót jelentse. Így az

$$\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} - l_{21}a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} - l_{21}a_{1n}^{(1)} & b_2^{(1)} - l_{21}b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} - l_{21}a_{n1}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} - l_{n1}a_{n1}^{(1)} & b_n^{(1)} - l_{n1}b_1 \end{array}. \tag{6}$$

egyenletrendszerhez jutottunk.
Kiszámítva az

$$\begin{array}{c} l_{32} = a_{32}^{(2)}/a_{22}^{(2)} \\ \vdots \\ l_{n1} = a_{n2}^{(2)}/a_{22}^{(2)} \end{array} \tag{7}$$

szorzókat, hasonlóan kinullázhatjuk a második oszlop főátló alatti elemeit is, majd ez után kapjuk az új

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array} \tag{8}$$

egyenletrendszert.
Ezt addig folytatjuk, amíg kinulláztunk minden főátló alatti elemet. A Gauss-elimináció végeredményét nézve

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{U} := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(n)} & b_{nn}^{(n)} \end{array}\right], \tag{9}$$

úgynevezett felső háromszögmátrix. Ezt **A**-ból úgy kapjuk meg, hogy $\mathbf{A}:=\mathbf{A}_1$-et balról az $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \ldots, \mathbf{L}_{n-1}$ alsó háromszögmátrixokkal szorozzuk meg, azaz

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{L}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1} \qquad k = 2, \ldots, n; \qquad \mathbf{A}_n = \mathbf{U} = \mathbf{L}_{n-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{L}_1\mathbf{A} \tag{10}$$

szorzást, ahol az $\mathbf{L}_k$ mátrix:

$$\mathbf{L}_k := \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k-1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -l_{k+1,k} & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -l_{nk} & 0 & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Az $\mathbf{L}_k$ mátrixok inverzeiben a főátlón kívüli elemek előjele változik meg, így összeszorozva kapjuk, hogy

$$\mathbf{L}_1^{-1} \cdots \mathbf{L}_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ l_{n1} & \cdot & l_{nn-1} & 1 \end{bmatrix} =: \mathbf{L}. \tag{12}$$

A mátrix normált, azaz

$$l_{ii} = 1. \tag{13}$$

Most (10)-ből és (12)-ből kapjuk, hogy

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}. \tag{14}$$

**3.1. Állítás.** Az LU-felbontás pontosan akkor létezik, ha a Gauss-elimináció elvégezhető sor- és oszlopcsere nélkül.

**3.1. Tétel.** *(Létezés és egyértelműség)*
*Egy reguláris (invertálható) mátrixnak akkor és csak akkor létezik* $\boldsymbol{LU}$*-felbontása, ha a főátlóbeli elemek nem nullák. Csak egy olyan* $\boldsymbol{LU}$*-felbontás létezik, ahol* $\boldsymbol{L}$ *vagy* $\boldsymbol{U}$ *főátlójában egyesek szerepelnek.*

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra $det(\mathbf{A}(1{:}\mathrm{k}, 1{:}\mathrm{k})) \neq 0$, ($k = 1,\ldots, n-1$), azaz a Gauss-elimináció végrehajtható vele. Ekkor létezik egy olyan **L** normált (főátlóban egyesek szerepelnek) alsó háromszögmátrix és egy **U** felső háromszögmátrix, melyekkel

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}. \tag{15}$$

Ha egy reguláris mátrixnak létezik **LU**-felbontása, akkor az **LU**-felbontása egyértelmű.

**Bizonyítás.** A Gauss-elimináció során a Gauss-transzformációk az **A** mátrixot felső háromszögmátrix alakúra hozzák. Legyen ez az **U** mátrix. Így tehát

$$\mathbf{L}_{n-1}\mathbf{L}_{n-2} \cdot \ldots \cdot \mathbf{L}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}. \tag{16}$$

Mivel

$$(\mathbf{E} - l_k\mathbf{e}_k^T)^{-1} = \mathbf{E} + l_k\mathbf{e}_k^T, sl_k\mathbf{e}_k^T l_l\mathbf{e}_l^T = 0, \tag{17}$$

ha $l > k$ az **A** mátrix az alábbi alakban írható:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1^{-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{L}_{n-2}^{-1}\mathbf{L}_{n-1}^{-1}\mathbf{U} = \left(\prod_{k=1}^{n-1}(\mathbf{E} - l_k\mathbf{e}_k^T)\right)\mathbf{U} = \left(\mathbf{E} + \sum_{k=1}^{n-1} l_k\mathbf{e}_k^T\right)\mathbf{U} = \mathbf{LU}.$$

Ahol

$$\mathbf{E} + \sum_{k=1}^{n-1} l_k\mathbf{e}_k^T = \mathbf{L},$$

ahol **L** normált alsó háromszögmátrix. Az egyértelműség igazolásához tegyük fel, hogy van két különböző **LU**-felbontása is az **A** invertálható mátrixnak:

$$\mathbf{A} = \tilde{L}\tilde{U} = \mathbf{LU}. \tag{18}$$

Ekkor

$$\tilde{L}^{-1}\mathbf{L} = \tilde{U}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{E}, \tag{19}$$

mivel normált alsó háromszögmátrixok szorzata normált alsó háromszögmátrix, a felsőké felső háromszögmátrix. □

**3.1. Példa.** Nézzük az alábbi **A** mátrix **LU**-felbontását!

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 4 \\ 4 & 7 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahol az $\mathbf{L}_1$ mátrix úgy kapható meg, hogy az $a_{11}$ elemmel leosztjuk az alatta lévő elemeket. Az $\mathbf{A}_2$ mátrix meghatározásához vegyük a $\mathbf{L}_1$ és $\mathbf{A}_1$ szorzatát, azaz

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7/2 & -9/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}_3$ kiszámolása is hasonlóképpen történik, csak itt az $\mathbf{L}_2$ és $\mathbf{A}_2$ szorozzuk össze, melynek eredménye:

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7/2 & -9/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & -9/7 \end{bmatrix}.$$

Észrevehető, hogy $\mathbf{A}_3$ már maga az $\mathbf{U}$ felső háromszögmátrix. Az $\mathbf{L}$ alsó háromszögmátrix megkapható $\mathbf{L}_1^{-1}$ és $\mathbf{L}_2^{-1}$ szorazataként:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1^{-1} \cdot \mathbf{L}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 2 & -2/7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor már felírhatóak az $\mathbf{L}y = b$, valamint az $\mathbf{U}x = y$ egyenletek,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 2 & -2/7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

amiből kapjuk:

$$y_1 = 5, \qquad y_2 = -7/2, \qquad y_3 = -9.$$

Ax $x$ változók meghatározásához a következő lineáris algebrai egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & -9/7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7/2 \\ -9 \end{bmatrix},$$

amiből

$$x_1 = 329/28, \qquad x_2 = -119/14, \qquad x_3 = 7.$$

Tehát az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{LU}$-felbontása:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 2 & -2/7 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & -9/7 \end{bmatrix}.$$

Tehát az $x_1$, $x_2$ és $x_3$ a feladat megoldásai, valamint $\mathbf{L}$ szigorúan alsó háromszögmátrix és $\mathbf{U}$ a szigorúan felső háromszögmátrix. Ezzel megkaptuk az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{LU}$-felbontását.

## 3.2. Cholesky-felbontás

A Cholesky-felbontást szimmetrikus, pozitív definit mátrixok felbontására alkalmazzuk. Előnye, hogy műveletigénye körülbelül fele akkora, mint az $\mathbf{LU}$-felbontásé, így az ilyen négyzetes mátrixok esetén ez a módszer kedvezőbb.

**3.1. Definíció.** Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix szimmetrikus, ha

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \tag{20}$$

ahol $\mathbf{A}^T$ az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltja.

**3.2. Megjegyzés.** Hétköznapi nyelven ez annyit tesz, hogy a sorok helyet cserélnek az oszlopokkal.

**3.2. Definíció.** Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot pozitív definit mátrixnak nevezzük, ha $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén $x^T \mathbf{A} x > 0$, ahol $x^T$ az $x$ vektor transzponáltja.

**3.3. Definíció.** Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix szimmetrikus pozitív definit, ha

- $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ és
- $< \mathbf{A}x, x > > 0$, $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ esetén.

**3.2. Tétel.** *Szimmetrikus $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix esetén egyértelműen létezik egy $\boldsymbol{L}$ normált alsó háromszögmátrix és egy $\boldsymbol{D}$ diagonális mátrix, melyekkel*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^T. \tag{21}$$

**3.3. Tétel.** *(Cholesky-felbontás) Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{A}$ egy szimmetrikus, pozitív definit mátrix. Ekkor létezik pontosan egy olyan pozitív diagonálisú $\tilde{L}$ alsó háromszögmátrix, mellyel*

$$\boldsymbol{A} = \tilde{L}\tilde{L}^T. \tag{22}$$

**Bizonyítás.** Az előző tétel egyértelműen kimondja, hogy létezik az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T$ felbontása. A $\mathbf{D}$ mátrix diagonális és főátlójában pozitív elemek állnak, mivel az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív definit. Legyen $\tilde{L} = \mathbf{L} \cdot diag(\sqrt{d_{11}}, \ldots, \sqrt{d_{nn}})$, ami egy alsó háromszögmátrix, melynek főátlójában pozitív számok vannak. □

**3.3. Megjegyzés.** A Cholesky-felbontás műveletigényét tekintve: $\frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$.

**A Cholesky-felbontás algoritmusa**:
Jelöljük $\mathbf{E}_n$-el az $n \times n$-es egységmátrixot, valamint 0-val a zérusmátrixot, legyen $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}$. Ha

$$\mathbf{A}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{i,i} & b_i^T \\ 0 & b_i & \mathbf{B}^{(i)} \end{bmatrix} \tag{23}$$

alakú, akkor az $\mathbf{A}^{(i+1)}$-et a következő helyettesítéssel kapjuk:

$$a_{i,i} := 1; \qquad b_i := 0; \qquad b_i^T := 0; \qquad \mathbf{B}^{(i)} = \mathbf{B}^{(i)} \frac{1}{a_{i,i}} b_i b_i^T. \tag{24}$$

Meghatározva az

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a}_{i,i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}_{i,i}} b_i & \mathbf{E}_{n-i} \end{bmatrix} \tag{25}$$

mátrixot, az $\mathbf{A}^{(i)}$ mátrix felírható

$$\mathbf{A}^{(i)} = \mathbf{L}_i \mathbf{A}^{i+1} \mathbf{L}_i^T \tag{26}$$

szorzataként. Ekkor az $\mathbf{A}^{(i+1)}$ mátrix a következőképpen néz ki:

$$\mathbf{A}^{(i+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}^{(i)} - \frac{1}{a_{i,i}} b_i b_i^T \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Ezt ismételgetve $i = 1, \ldots, n$-ig, majd az $n$-edik lépés után megkapjuk, hogy $\mathbf{A}^{i+1} = \mathbf{E}$, azaz az egységmátrixot, ezért az alsó háromszögmátrixra adódik, hogy

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{L}_n. \tag{28}$$

A Cholesky-felbontás megkapható az **LU**-felbontás ismerete nélkül is, egyszerűen elemenként felírva az $\mathbf{A} = \tilde{L}\tilde{L}$ egyenlőséget:

$$\tilde{l}_{ii} = \sqrt{a_{ii}},$$

$$\tilde{l}_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{n=1}^{i-1} l_{in}^2},$$

$$\tilde{l}_{ij} = \frac{a_{ij - \sum_{k=1}^{j-1} \tilde{l}_{in}\tilde{l}_{jk}}}{\tilde{l}_{jj}}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, i-1).$$

Ahogy látjuk, műveletigénye az **LU**-felbontáshoz képest felére csökkent, Sőt, tárolás szempontjából is kedvező a helyzet, ugyanis **A** szimmetriáját felhasználva **A** elemeit elég a felső háromszög részében megtartani, míg az alsó háromszögben ki lehet számolni $\tilde{L}$ elemeit.

**3.2. Példa.** Határozzuk meg a következő mátrix Cholesky-felbontását az **LU**-felbontás segítségével. Először az **LU**-felbontással, majd az $\mathbf{LDL}^T$ felbontással, majd végül a mátrix szorzással. Tekintsük az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 7 & 11 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrixot, melynek **LU** felbontása a következő, amelyet most $\widetilde{L}\widetilde{U}$ jelöl. Ennek segítségével határozzuk meg az $\mathbf{LL}^T$-felbontást.

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & -11/6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{U} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 0 & 6/5 & -11/5 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Ha az $\tilde{L}$ mátrixot összeszorozzuk az $\tilde{U}$ mátrix diagonálisában szereplő elemek gyökével, azaz a mátrix:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 7/5\sqrt{5} & \sqrt{6/5} & 0 \\ 3/5\sqrt{5} & -11/6\sqrt{6/5} & \sqrt{1/6} \end{bmatrix}.$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az **LDU** felbontást alkalmazzuk. Mivel az **A** mátrix szimmetrikus, így $\mathbf{L}^T = \mathbf{U}$, tehát igazából az **LDU** felbontás megegyezik az $\mathbf{LDL}^T$ felbontással.

Az utolsó módszer a **mátrix szorzás**, melynek időigénye kisebb, mint az **LU**-felbontásos módszerek egyike, így könnyebben alkalmazható kézzel történő megoldás során, ráadásul a képletbe való helyettesítési hibáktól sem kell tartanunk. Nézzük az

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{A}$$

alakot.

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_4 \\ 0 & l_3 & l_5 \\ 0 & 0 & l_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 7 & 11 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Az első oszlop alapján:

$$l_1^2 = 5 \to l_1 = \sqrt{5}, \qquad l_2 l_1 = 7 \to l_2 = \frac{7}{\sqrt{5}}, \qquad l_4 l_1 = 3 \to l_4 = \frac{3}{\sqrt{5}}. \tag{29}$$

A második oszlop alapján:

$$l_3^2 + l_2^2 = 11 \to l_3 = \sqrt{\frac{6}{5}}, \qquad l_4 l_2 + l_5 l_3 = 2 \to l_5 = -\frac{11}{\sqrt{30}}. \tag{30}$$

A harmadik oszlop alapján:

$$l_4^2 + l_5^2 + l_6^2 = 6 \to l_6 = \sqrt{\frac{1}{6}}. \tag{31}$$

Így megkaptuk a keresett **L** mátrixot:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ \frac{7}{5}\sqrt{5} & \sqrt{\frac{6}{5}} & 0 \\ \frac{3}{5}\sqrt{5} & \frac{-11}{6}\sqrt{\frac{6}{5}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \end{bmatrix}.$$

# 4. Iterációs eljárások

A direkt módszereknél láthattuk, hogy feladatunk kiszámolása pontos, ám hosszadalmas. A gyakorlatban sokszor elég meghatározni a közelítő megoldást. Erre használhatóak az iteratív technikák. Ebben a fejezetben bemutatom a lineáris algebrai egyenletrendszerek legfőbb iterációs módszereit. Az $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ lineáris algebrai egyenletrendszer (lineáris) iterációs alakja a következőképpen adható meg:

$$x^{k+1} = \mathbf{B}x^k + \mathbf{f}, \quad k = 0, 1 \dots \tag{32}$$

ahol $\mathbf{B}$ az iterációs mátrix, $\mathbf{f}$ egy vektor, $x^k$ az iteráció $k$. lépésében kapott közelítés, ahol $k = 0, 1, \dots,$. A módszerek lényege, hogy olyan konvergens sorozatot alkotnak, melynek határértéke egyértelmű megoldása az $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ lineáris algebrai egyenletrendszernek. Jelölje $x^*$ ezt az egyértelmű megoldást. Egyenletrendszerünkben $x^0$ adott, valamint azt várjuk, hogy az $x^k$ sorozatunk tartson az $x^*$ megoldáshoz.
Az iterációs eljárásokkal kapcsolatban, felmerülhetnek az alábbi kérdések.

- Miként választjuk meg a $\mathbf{B}$ iterációs mátrixot, $\mathbf{f}$-et, valamint a kiinduló $x^0$ vektorokat?
- Mikor konvergál a megoldáshoz a sorozat?
- Mekkora lesz a konvergencia sebessége?
- Mikor álljunk le az iterációval?

Az iterációs eljárások bemutatása előtt szeretnék pár alapfogalmat bevezetni, melyek nélkülözhetetlenek az eljárásokhoz, valamint érthetőbbé teszik megértésüket, valamint könnyebb használatot biztosítanak a feladatok megoldásában.

**4.1. Definíció.** Az $x^{k+1} = \mathbf{B}x^k + \mathbf{f}$ iterációt *konzisztensnek* nevezzük, ha $x^* = \mathbf{B}x^* + \mathbf{f}$, ahol $x^*$ az egyenletrendszer megoldása.

Ha tekintjük az $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F}x = \mathbf{B}x + \mathbf{f}$ függvényt, akkor valamilyen $\|\cdot\|$ vektornormában és a számára megfelelő indukált mátrixnormában igazak az alábbiak tetszőleges $x_1$, $x_2 \in \mathbb{R}^n$ vektorokra:

$$\|\mathbf{F}(x_1) - \mathbf{F}(x_2)\| = \|\mathbf{B}x_1 + \mathbf{f} - (\mathbf{B}x_2 + \mathbf{f})\| = \|\mathbf{B}(x_1 - x_2)\| \leq \|\mathbf{B}\|\|x_1 - x_2\|.$$

Tehát, ha $\|\mathbf{B}\| < 1$, akkor az $\mathbf{F}$ leképezés kontrakció és teljesülnek a Banach-féle fixponttétel feltételei. Ez azt jelenti ebben az esetben, hogy bármely

vektorról indítjuk az iterációt, akkor az $\mathbf{F}$ leképezés fixpontjához fog tartani, ami maga az egyenletrendszer megoldása.
Legyen

$$\mathbf{e}^k = x^k - x^* \tag{33}$$

a hibavektor. Ekkor a konvergencia azt jelenti, hogy $\mathbf{e}^k \to 0$ $(k \to \infty)$, azaz:

$$\|\mathbf{e}^k\| \to 0 \tag{34}$$

valamilyen normában.

**4.2. Definíció.** Legyen $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda_i(\mathbf{B})$ a sajátértékei, ahol $i = 1, \ldots, k$. Spektrálsugárnak hívjuk az abszolút értékben legnagyobb sajátértéket, azaz

$$\rho(\mathbf{B}) := \max_{1\leq i\leq k} |\lambda_i(\mathbf{B})|. \tag{35}$$

**4.1. Tétel.** *Egy, az $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszerrel konzisztens lineáris iteráció pontosan akkor tart az egyenletrendszer megoldásához tetszőleges kezdővektor esetén, ha*

$$\rho(B) < 1. \tag{36}$$

**Bizonyítás.** Az

$$\mathbf{e}^{k+1} = x^{k+1} - x^* = \mathbf{B}x^k + \mathbf{f} - (\mathbf{B}x^* + \mathbf{f}) = \mathbf{B}\mathbf{e}^k \tag{37}$$

egyenlőség miatt

$$\mathbf{e}^k = \mathbf{B}^k\mathbf{e}^0. \tag{38}$$

A konvergencia feltétele, hogy a $\mathbf{B}^k$ mátrix nullához tartson, aminek szükséges és elégséges feltétele a $\rho(B) < 1$. $\square$

**4.1. Megjegyzés.** A bizonyításból adódik, hogy a konvergencia annál gyorsabb, minél kisebb a $\mathbf{B}$ mátrix konvergenciasugara.

## 4.1. A Jacobi-iteráció

Az egylépéses iterációk családjába tartozó Jacobi-iteráció az egyik legismertebb iterációs eljárás lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldására. Mielőtt ismertetném, szeretnék bevezetni pár alapvető fogalmat a módszer megértéséhez.

**4.3. Definíció.** Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot szigorúan diagonálisan dominánsnak nevezzük, ha

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Tekintsük az $\mathbf{A}x = \mathbf{f}$ lineáris algebrai egyenletrendszert, ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, valamint $det(\mathbf{A}) \neq 0$. Keressük $x \in \mathbb{R}^n$-t!

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ii}x_i + a_{in}x_n = f_i, \qquad \forall i = 1, 2\ldots, n. \tag{39}$$

A lineáris algebrai egyenletrendszer $i$-dik sorát felírva és kifejezve $x_i$-t:

$$x_i = -\left[\frac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1 + \frac{a_{i2}}{a_{ii}}x_2 + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ii}}x_n\right] + \frac{f_i}{a_{ii}}. \tag{40}$$

Így, a Jacobi-iteráció rögzített kezdeti vektor mellett felírható az alábbi módon:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_i^k + \frac{f_i}{a_{ii}}, \qquad (i = 1, 2\ldots, n). \tag{41}$$

Az $x^0$ kezdeti vektor segítségével (ahol $k = 0$) kiszámolhatjuk az iteráció első közelítését, majd $k = 1$-et behelyettesítve a fenti képletbe, megkapjuk a második közelítést stb.

### 4.1.1. Jacobi-iteráció mátrixos alakja

Bontsuk fel az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot a következő módon. Legyen az

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{U}, \tag{42}$$

ahol $\mathbf{L}$ az $\mathbf{A}$ mátrix szigorúan alsó háromszögű része, $\mathbf{D}$ a diagonális része és $\mathbf{U}$ a szigorúan felső hárömszögű része.

Tehát

$$\mathbf{A}x = \mathbf{f} \longleftrightarrow (\mathbf{L}{+}\mathbf{D}{+}\mathbf{U})x = \mathbf{f} \tag{43}$$
$$\mathbf{D}x = -(\mathbf{L}{+}\mathbf{U})x + \mathbf{f} \tag{44}$$
$$\mathbf{D}x^{k+1} = -(\mathbf{L}{+}\mathbf{U})x^k + \mathbf{f} \tag{45}$$
$$x^{k+1} = \underbrace{-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}{+}\mathbf{U})}_{:=\mathbf{B}_J} x^k + \underbrace{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{f}}_{\mathbf{v}}. \tag{46}$$

Ezzel megkaptuk a Jacobi-iteráció mátrixos alakját, melyben a $\mathbf{B}_J$ jelöli az iterációs mátrixot.

### 4.1.2. A Jacobi-iteráció kanonikus alakja

A Jacobi-iteráció kanonikus alakját némi átrendezéssel kaphatjuk meg:

$$\mathbf{D}x^{k+1} = -(\mathbf{L}{+}\mathbf{U})x^k + \mathbf{f} \longrightarrow \mathbf{D}x^{k+1} + \mathbf{L}{+}\mathbf{U})x^k = \mathbf{f} \tag{47}$$
$$\mathbf{D}x^{k+1} - \mathbf{D}x^k + \mathbf{D}x^k + (\mathbf{L}{+}\mathbf{U})x^k = \mathbf{f} \tag{48}$$
$$\mathbf{D}(x^{k+1} - x^k) + \underbrace{(\mathbf{D}{+}\mathbf{L}{+}\mathbf{U})}_{\textbf{A mátrix}} x^k = \mathbf{f} \tag{49}$$
$$\mathbf{D}(x^{k+1} - x^k) + \mathbf{A}x^k = \mathbf{f}. \tag{50}$$

Ezzel megkaptuk a Jacobi-iteráció kanonikus alakját.

### 4.1.3. A Jacobi-iteráció konvergenciája

**4.2. Tétel.** *Legyen az $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szigorúan diagonálisan domináns. Ekkor a Jacobi-iteráció konvergens.*

**4.3. Tétel.** *Ha az iteráció által elállított $x^k$ vektorsorozat konvergens,azaz létezik $x^*$, amelyre*

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x^*, \tag{51}$$

*akkor $x^*$ megoldása az $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszernek.*

**Bizonyítás.**

$$\lim_{k\to\infty}[\mathbf{D}(x^{k+1} - x^k) + \mathbf{A}x^k] = \mathbf{D}\lim_{k\to\infty}(x^{k+1} - x^k) + \mathbf{A}\lim_{k\to\infty} x^k = \mathbf{A}x^* = \mathbf{b} \tag{52}$$

□

**4.4. Tétel.** *(Elégséges feltétel az iteráció konvergenciájára.) Ha a* $\|\boldsymbol{B}_J\| < 1$*, akkor a Jacobi-iteráció konvergens, azaz valamely* $x^0$ *kezdővektor esetén* $x^k \to x^*$*, midőn* $k \to \infty$*. (*$x^*$ *az egyenletrendszer megoldása).*

**4.5. Tétel.** *(Szükséges és elégséges feltétel az iteráció konvergenciájára.) Az iteráció pontosan akkor konvergens* $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$ *esetén, ha*

$$\rho(\boldsymbol{B}_J) = \max_{1 \leq i \leq k} |\lambda_i(B_J)| < 1. \tag{53}$$

.

**4.2. Megjegyzés.** Ha az elégéséges feltétellel megtaláltuk a megfelelő normát, akkor a szükséges és elégséges feltételt már nem kell alkalmazni. Azonban, ha az iterációs mátrixban találhatók egynél nagyobb elemek, akkor a szükséges és elégséges feltétel alkalmazható.

## 4.2. A Gauss-Seidel-iteráció

A Gauss-Seidel-iteráció abban különbözik a Jacobi-iterációtól, hogy az $(k+1)$. közelítés $i$. komponensének kiszámolásához felhasználja a már kiszámolt $(k+1)$. közelítés komponenseit, azaz a $j = 1, \ldots, (i-1)$-et.

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{f_i}{a_{ii}}, \qquad \forall i = 1, 2 \ldots, n. \tag{54}$$

### 4.2.1. A Gauss-Seidel-iteráció mátrixos alakja

Ahogyan a Jacobi-iteráció, úgy a Gauss-Seidel-iteráció is felírható mátrixos alakban. Módosítsuk a Jacobi-iterációnál már látott alakot:

$$\mathbf{D}x^{k+1} = -(\mathbf{L}+\mathbf{U})x^k + \mathbf{f} \tag{55}$$

$$(\mathbf{L}+\mathbf{D})x = \text{-}\mathbf{U}x + \mathbf{f} \tag{56}$$

$$(\mathbf{L}+\mathbf{D})x^{k+1} = \text{-}\mathbf{U}x^k + \mathbf{f} \tag{57}$$

$$x^{k+1} = \underbrace{\text{-}(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}}_{\mathbf{B}_{G-S}} x^k + \underbrace{(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{f}}_{\mathbf{v}}. \tag{58}$$

Ezzel megkaptuk a Gauss-Seidel-iteráció mátrixos alakját, ahol $\mathbf{B}_{G-S}$ jelöli az iterációs mátrixot.

A mátrixos alakból kifejezhető az iteráció kanonikus alakja:

$$(\mathbf{L}{+}\mathbf{D})x^{k+1} + \mathbf{U}x^k = \mathbf{f} \tag{59}$$

$$(\mathbf{L}{+}\mathbf{D})x^{k+1} - (\mathbf{L}{+}\mathbf{D})x^k + \ldots + (\mathbf{L}{+}\mathbf{D})x^k + \mathbf{U}x^k = \mathbf{f} \tag{60}$$

$$(\mathbf{L}{+}\mathbf{D})(x^{k+1} - x^k) + \underbrace{(\mathbf{L}{+}\mathbf{D}{+}\mathbf{U})}_{\textbf{A mátrix}} x^k = \mathbf{f} \tag{61}$$

$$(\mathbf{L}{+}\mathbf{D})(x^{k+1} - x^k) + \mathbf{A}x^k = \mathbf{f}. \tag{62}$$

Így megkaptuk a Gauss-Seidel-iteráció kanonikus alakját.

### 4.2.2. A Gauss-Seidel-iteráció konvergenciája

**4.6. Tétel.** *Ha az $\boldsymbol{A}$ együtthatómátrix szimmetrikus és pozitív definit, akkor a Gauss-Seidel-iteráció konvergál az egyenletrendszer megoldásához tetszőleges kezdeti vektor esetén.*

**4.7. Tétel.** *Ha a Jacobi-iteráció által elállított $x^n$ vektorsorozat konvergens,azaz létezik $x^*$, amelyre*

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x^*, \tag{63}$$

*akkor $x^*$ megoldása az $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszernek.*

**Bizonyítás.**

$$\lim_{k\to\infty}[(\mathbf{L}{+}\mathbf{D})(x^{k+1}-x^k)+\mathbf{A}x^k] = (\mathbf{L}{+}\mathbf{D}) \lim_{k\to\infty}(x^{k+1}-x^k)+\mathbf{A} \lim_{k\to\infty} x^k = \mathbf{A}x^* = \mathbf{b}$$

□

## 4.3. Relaxációs módszerek

Amint láttuk, a Jacobi -és a Gauss-Seidel- iteráció esetében az iterációs mátrix spektrálsugara egy adott érték. Bizonyos esetekben, amikor a spektrálsugár egynél nagyobb, vagy nagyon közel van egyhez, az iteráció lassan, vagy egyáltalán nem konvergál a megoldáshoz. Ennek kiküszöbölésére, az iterációba az iterációban egy paramétert használva elérhetjük, hogy iterációnk gyorsabban konvergáljon.

### 4.3.1. Relaxált Jacobi-iteráció (JOR-módszer)

A $(k+1)$-edik iterációs vektor $i$-edik eleme felírható

$$x_i^{k+1} = x_i^k + (x_i^{k+1} - x_i^k) \tag{64}$$

alakban. Bevezetve a $\omega$ (relaxációs) paramétert, a következőt kapjuk:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega(x_{i,J}^{k+1} - x_i^k), \tag{65}$$

ahol $x_{i,J}^{k+1}$ azt az értéket jelöli, amit a Jacobi-iteráció adna a $(k+1)$-edik iterációs vektor $i$-edik elemére, ha azt a $x^k$ vektor eleméből számítanánk. A Jacobi-iteráció relaxált változata komponensenként felírva az alábbi alakot ölti:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega\left(-\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^k - b_i\right] - x_i^k\right) = \tag{66}$$

$$= (1-\omega)x_i^k - \frac{\omega}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^k - b_i\right], \qquad i = 1,\ldots,n. \tag{67}$$

A JOR- iteráció mátrixos alakját úgy kaphatjuk meg, hogy a Jacobi-iteráció mátrixos alakjának képletébe behelyettesítjük a Jacobi-módszer által adott $x^{k+1}$ vektor képletét:

$$x^{k+1} = x^k + \omega(\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})x^k + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{f} - x^k), \tag{68}$$

amiből

$$x^{(k+1)} = \underbrace{((1-\omega)\mathbf{E} + \omega(\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\mathbf{B}_{J(\omega)}}x^k) + \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{f}. \tag{69}$$

Tehát az iterációs mátrix

$$\underbrace{((1-\omega)\mathbf{E}+\omega(\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\mathbf{B}_{J(\omega)}} = (1-\omega)\mathbf{E}+\omega\mathbf{B}_J \tag{70}$$

alakban írható fel.

**4.3. Megjegyzés.** Minden tetszőlegesen megválasztott $\omega$ paraméter esetén az egyenletrendszerünkkel konzisztens iterációt kapunk. Tehát adva van a lehetőség, hogy egy jól -és gyorsan konvergáló iterációt nyerjünk.

### 4.3.2. Relaxált Gauss-Seidel-iteráció (SOR-módszer)

Induljunk ki a Gauss-Seidel-iteráció (55) alakjából, majd használjuk fel a Jacobi-iterációnál már látott (66) relaxációs képletet és helyettesítsük be $x_{i,J}^{k+1}$ érték helyére a Gauss-Seidel-iteráció által adott $x_{i,G-S}^{k+1}$ értéket, amelyet a $k$-adik iterációs vektor elemeiből és a (relaxációval nyert) $(k+1)$-edik iterációs vektor már kiszámolt elemeiből számítjuk a Gauss-Seidel-iteráció képletével. Ekkor a SOR iteráció a következő:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega\left(-\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k - b_i\right] - x_i^k\right) = \tag{71}$$

$$= (1-\omega)x_i^k - \frac{\omega}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k - b_i\right], \qquad i=1,\dots,n. \tag{72}$$

Mátrixos alakban felírva:

$$x^{k+1} = \underbrace{(\mathbf{D}\text{-}\omega\mathbf{L})^{-1}((1-\omega\mathbf{D})+\omega\mathbf{U})}_{\mathbf{B}_{G-S(\omega)}} x^k + \omega(\mathbf{D}-\omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{f}. \tag{73}$$

Tehát

$$\mathbf{B}_{G-S(\omega)} = (\mathbf{D}\text{-}\omega\mathbf{L})^{-1}((1-\omega\mathbf{D})+\omega\mathbf{U}). \tag{74}$$

**4.4. Megjegyzés.** Ahogy a JOR-módszernél, úgy a SOR módszer is konzisztens lesz az egyenletrendszerünkkel tetszőleges $\omega$ esetén. A $\omega = 1$ választással visszakapjuk a Gauss-Seidel-módszert.

### 4.3.3. A JOR és a SOR-iterációk konvergenciája

Amint láttuk, egy lineáris egyenletrendszerrel konzisztens iterációs módszer pontosan akkor konvergens, ha az iterációs mátrix spektrálsugara kisebb egynél. Most vizsgáljuk meg, hogy mikor, illetve hogyan lehet biztosítani a konvergenciát a JOR -és a SOR módszer esetén.

**4.4. Definíció.** Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ M-mátrix, ha

- $a_{ij} \leq 0, \qquad (\forall i \neq j)$
- $\exists\ g \in \mathbb{R}^n > 0$ és $\mathbf{A}g > 0$.

**4.8. Tétel.** *Ha az egyenletrendszer együtthatómátrixa M-mátrix, akkor a Jacobi, a Gauss-Seidel-iterációk és ezek relaxált változatai $\omega \in (0,1)$ mellett konvergálnak az egyenletrendszer megoldásához tetszőleges kezdeti vektor esetén.*

**Bizonyítás.** Ha $\mathbf{A}$ M-mátrix, akkor $\mathbf{A}^{-1} \geq 0$. A JOR iterációra a reguláris felbontás képletében szereplő $\mathbf{S}$ és $\mathbf{T}$ mátrixok $\omega \in (0,1]$ esetén reguláris felbontását adják $\mathbf{A}$-nak. Így az előző tétel szerint az iteráció konvergens lesz. A SOR módszer esetén szintén reguláris felbontást ad, ha $\omega \in (0;1]$. Az $\omega = 1$ eset felel meg a Jacobi és Gauss-Seidel-módszereknek. □

**4.9. Tétel.** ***Kahan.*** *A SOR módszer esetén*

$$\rho(\boldsymbol{B}_{G-S(\omega)}) \geq |1-\omega| \tag{75}$$

*azaz a konvergencia szükséges feltétele $\omega \in (0,2)$.*

**Bizonyítás.** Az alábbi egyenlőségek igazak:

$$\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| = |det((B_{G-S_{(\omega)}})| = |det((\mathbf{D}-\omega\mathbf{L})^{-1}|\cdot|det((1-\omega)\mathbf{D}+\omega\mathbf{U})| = |1-\omega|^n. \tag{76}$$

Tehát

$$\rho(\mathbf{B}_{G-S_{(\omega)}}) = \max_{i=1,\dots n} |\lambda_i| \geq \left(\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|\right)^{\frac{1}{n}} = |1-\omega|, \tag{77}$$

a számtani-mértani közép egyenlőtlenséget kihasználva. □

**4.10. Tétel.** ***(Ostrowski, 1954; Reich, 1949)*** *Ha $\boldsymbol{B}$ szimmetrikus, pozitív definit mátrix, és $\omega \in (0,2)$, akkor*

$$\rho(\boldsymbol{B}_{G-S(\omega)}) < 1, \tag{78}$$

*azaz a SOR iteráció konvergens lesz. Továbbá, a tétel kimondja, hogy a Kahan-tétel feltétele elégséges is a konvergenciához szimmetrikus pozitív definit mátrixok esetén.*

## 4.4. Mikor álljunk le az iterációval?

Azt, hogy mikor álljunk le az iterációval, illetve a kívánt pontosságot mikor kapjuk meg, vagy éppen milyen messze vagyunk a megoldástól a következő szabályok biztosítják.

- Ha $\|\mathbf{B}\| < 1$ valamilyen normában, akkor a Banach-féle fixponttétellel

  $$\|x - x^j\| \leq \frac{\|\mathbf{B}\|^j}{1 - \|\mathbf{B}\|}\|x^1 - x^0\|. \tag{79}$$

  a $\|\mathbf{B}\|$ értékből és az első iteráció eredményéből megmondhatjuk, hogy hány iterációra van még szükségünk az adott normabeli pontosság eléréséhez.

- Az egymás utáni iterációk eredményeit vizsgálva, ha $\|x^{k+1} - x^k\|$ elegendően kicsi, akkor az iterációt leállítjuk.

- Megadunk egy értéket, ahol leállítjuk az iterációt.

Az utolsó feltételt érdemes beépíteni, hisz ekkor biztosítva van az iteráció leállása.

## 4.5. Lineáris közgazdasági modellek

A gazdaság egy nagyon összetett rendszer kölcsönhatásokkal a benne szereplő különböző szektorok, valamint a termelt és fogyasztott javak között. Az optimális árak, illetve a termelési szintek behatárolására a kívánt cél elérhető kidolgozott matematikai modellekkel. Jelen esetben a lineáris algebra egy hatékony eszköz a fejlődésben és elemzésben bizonyos gazdasági modelleknél. Ebben a fejezetben két modellt ismertetek, az első a harvardi közgazdász, Wassily Leontief nevéhez fűződik. Ezt a módszert sokszor Input-Output (I-O) modellnek is hívják, ami egy gyakori használatban lévő eszköz a matematikai közgazdaságtanban, városok, vállalatok és az egész országra kiterjedő gazdasági tervekre, valamint előrejelzésekre.

### 4.5.1. A Leontief-modell

Egy ország gazdasága 3 szektort foglal magába: villamosenergia, olaj, valamint egy szolgáltató szektort. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy minden szektor egyetlen árucikket termel az adott évben és a szektor bevétele ezen árucikk eladásából származik. Mivel ez egy zárt gazdasági modell, ezért országon kívüli kereskedelem, illetve értékesítés nincs, az egyes szektorok csak országon belül, egymást között kereskedhetnek. Árucikkeket minden szektor vásárol minden szektortól, így önmagától is. Ami az egyik szektor termelése (output), az egy másik szektor termelésében felhasznált termelési tényező (input) lesz, sőt egy szektor a saját outputját is újra fel fogja használni inputként a termelésében. Továbbá feltesszük, hogy a gazdaság egyensúlyban van azaz, minden szektor termelése pontosan egyenlő a szektoron belüli felhasználással, országos szinten, tehát az összes felhasználás egyenlő az összes termeléssel (Input = Output). Az alábbi táblázat összefoglalja, hogy egy adott szektor termeléséből mennyit használt fel a többi szektor.

| | | Termelés | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **Szolgáltatás** | **Villamosenergia** | **Olajipar** |
| Felhasznált | **Szolgáltatás** | 1/4 | 1/3 | 1/2 |
| termelési | **Villamosenergia** | 1/4 | 1/3 | 1/4 |
| tényező | **Olaj** | 1/2 | 1/3 | 1/4 |

Az első oszlopból láthatjuk, hogy a szolgáltatás szektor $\frac{1}{4}$-et fogyaszt saját termeléséből, a villamosenergia-ipar további $\frac{1}{4}$-et, valamint az olajipar $\frac{1}{2}$-et használ a szolgáltatás szektor termeléséből. A következő 2 oszlopnál hasonló megfeleltetés van. Az egyes oszlopok összege 1. Az arányok azt mutatják meg, hogy az egyes szektorok milyen arányban használták fel a termelésükben a saját, illetve a másik két szektor árucikkeit. Jelölje $x_1$, $x_2$ és $x_3$ az éves termelést (income) a szolgáltatás szektorra, a villamosenergia-iparra, illetve az olajiparra nézve, millió dollárban.Mivel a fogyasztás megegyezik a ráfordítással, a szolgáltatás szektor $\frac{1}{4}x_1$-et költ saját termékeire, $\frac{1}{3}x_2$-t a villamosenergia-iparra és $\frac{1}{2}x_3$-at olajiparra. Ami azt jelenti, hogy a szolgáltatás szektor összes éves ráfordítása $\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3$. Mivel a gazdaság egyensúlyban van, a szolgáltatás szektor kiadása meg kell egyezzen az éves bevétetllel, $x_1$-el. Ez az első egyenletünket adja, a további két egyenletet a villamosenergia-és az olajipar elemzésével nyertük ki.

$$\text{Szolgáltatás szektor: } \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

$$\text{Villamosenergia-ipar: } \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

$$\text{Olajipar: } \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

Rendezve az egyenleteket, egy homogén lineáris egyenletrendszert kapunk:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -3/4 & -1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & -2/3 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & -3/4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Tekintve, hogy $x_3 = t$, kapjuk, hogy $x_1 = t$ és $x_2 = \frac{3}{4}t$. Tehát, láthatjuk, hogy a szolgáltatás szektor, villamosenergia-és olajipar relatív kiadásai $x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 3 : 4$ rációba kell legyenek, hogy megkapjuk a gazdasági egyensúlyt.

**4.5. Megjegyzés.** A példát Leontief zárt modellnek nevezik. Mivel a kibocsátás megfeleltethető a bevételnek, gondolkodhatunk úgy is, hogy $x_1$, $x_2$ és $x_3$ a három árucikk árai.

Tekintsük az előző feladatban szereplő modellt egy nyitott gazdaságra. Ebben az esetben egy külső valamint egy belső kereslet is van a termékek előállítására. Nem meglepő módon, ezt a modellt Leontief nyílt modellnek nevezik. Képzeljük el a három szektort, ahogyan az az előző feladatban is szerepelt.

| | | Termelés | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **Szolgáltatás** | **Villamosenergia** | **Olaj** |
| Felhasznált termelési tényező | **Szolgáltatás** | 0.20 | 0.50 | 0.10 |
| | **Villamosenergia** | 0.40 | 0.20 | 0.20 |
| | **Olaj** | 0.10 | 0.30 | 0.30 |

Láthatjuk, hogy a szolgáltatás szektorban előállított termékek 20%-át használja fel maga a szolgáltatás szektor, 40%-át a Villamosenergia-ipar, valamint 10%-át az olajipar. Ezért a gazdaság csak 70%-át fogyasztja a szolgáltató szektor termeléséből. A következmény, hogy a szolgáltató szektorban a fogyasztás felett van a termelés, azaz termelési felesleg alakult ki. Ez azt jelenti, hogy a szolgáltatás szektor produktív. Hasonlóan, az olajipar is produktív, viszont a Villamosenergia-ipar nem produktív. (Megfigyelhető, hogy az első és harmadik oszlop összege kisebb, mint 1, viszont a második oszlop összege egyenlő 1).

**4.6. Megjegyzés.** A felesleges termelést akár egy külső keresletre is fellehet használni.

Tegyük fel, hogy egy éves külső kereslete (millió dollárban) a szolgáltatás- és villamosenergia-iparnak 10, 10, valamint az olajiparnak 30. Ezután, ha egyenlővé tesszük a fogyasztást és a termelést, kapjuk az alábbi egyenletet.

| | **Termelés** | **Belső kereslet** | **Külső kereslet** |
|---|---|---|---|
| **Szolgáltatás** | $x_1$ | $= 0.20x_1 + 0.50x_2 + 0.10x_3$ | $+10$ |
| **Villamosenergia** | $x_2$ | $= 0.40x_1 + 0.20x_2 + 0.20x_3$ | $+10$ |
| **Olaj** | $x_3$ | $= 0.10x_1 + 0.30x_2 + 0.30x_3$ | $+30$ |

Átrendezve kapjuk az alábbi lineáris egyenletrendszert, valamint a bővített mátrixot:

$$\begin{aligned} 0.8x_1 - 0.5x_2 - 0.1x_3 &= 10 \\ -0.4x_1 + 0.8x_2 - 0.2x_3 &= 10 \\ -0.1x_1 - 0.3x_2 + 0.7x_3 &= 30 \end{aligned} \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 0.8 & -0.5 & -0.1 & 10 \\ -0.4 & 0.8 & -0.2 & 10 \\ -0.1 & -0.3 & 0.7 & 30 \end{array}\right].$$

Amiből kapjuk, hogy:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 61.74 \\ 0 & 1 & 0 & 63.04 \\ 0 & 0 & 1 & 78.70 \end{array}\right].$$

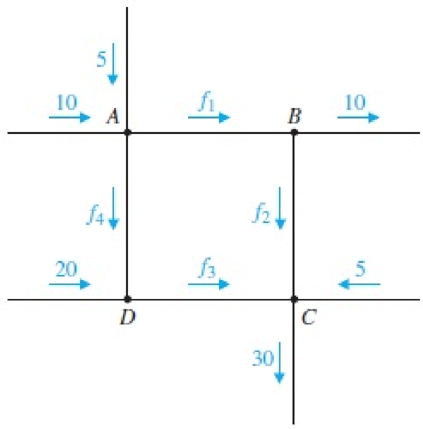
Tehát láthatjuk, hogy a szolgáltatás szektor $61.74m$\$-t, a villamosenergia-ipar $63.04m$\$-t, valamint az olajipar $78.70m$\$-t kell termeljen éves szinten, hogy kielégítse mind a belső és mind a külső keresletet.

## 4.6. Hálózatelemzés

Számos szituáció ad okot arra, hogy egyfajta hálózattal elemezzünk valamely matematikai problémát, illetve felvázoljuk annak rendszerét. Ilyennek tekinthetőek a közlekedési hálózatok, a kommunikációs hálózatok, de ide sorolhatóak a gazdasági hálózatok is. Például egy útkereszteződésen/úthálózaton átmenő forgalom, egy adathálózaton átfolyó információ, valamint a gazdaságot tekintve, a termékek és szolgáltatások átmenő forgalma. Ebben a példában hálózatunk véges számú csomópontot (csúcsot) tartalmaz, melyek irányított élekkel vannak összekötve. Minden él egy adott folyamszámmal van felcimkézve, amely az átfolyó áru/adat mennyiségét reprezentálja a megadott irányba. (Például autók átmenő forgalma egy egyirányú utcában).

**4.7. Megjegyzés.** A bemenő folyam ekvivalens a kimenő folyammal.

**4.1. Példa.** Budapest belvárosában számos egyirányú utcával találkozhatunk, melyeknek átmenő forgalmát minden kereszteződésnél mérik. A város ezen részén a számok mutatják az átlagos forgalmat, a kereszteződésbe (A,B,C,D) egy perc alatt bemenő-kimenő járművek számát (1.ábra).




1. ábra.

Most írjuk fel az egyes csomópontokba be-illetve kiáramló folyamot (forgalmat):

| | |
|---|---|
| **A csomópont:** | $15 = f_1 + f_4,$ |
| **B csomópont:** | $f_1 = f_2 + 10,$ |
| **C csomópont:** | $f_2 + f_3 + 5 = 30,$ |
| **D csomópont:** | $f_4 + 20 = f_3.$ |

Átrendezve az egyenletet, majd mátrixba helyettesítve kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} f_1 + f_4 &= 15, \\ f_1 - f_2 &= 10, \\ f_2 + f_3 &= 25, \\ f_3 - f_4 &= 20, \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Láthatjuk, hogy az $f_4$ változó szabad, tehát véges sok megoldás lehetséges. Legyen $f_4 = t$, majd fejezzük ki a többi változót $f_4$ tekintetében. Ekkor az alábbi egyenleteket kapjuk, melyek megadják az összes lehetséges folyamot a hálózatban.

$$\begin{array}{rcrl} f_1 & = & 15 & -t, \\ f_2 & = & 5 & -t, \\ f_3 & = & 20 & +t, \\ f_4 & = & & t. \end{array}$$

Ha az **AD** élen $t = 5$ autó/perc, akkor $f_1 = 10$, $f_2 = 0$, $f_3 = 25$. Tudunk ennél jobb megoldást is, méghozzá úgy, hogy megkeressük a minimum, illetve maxumimum folyamokat. Természetesen feltesszük, hogy a folyamok nemnegativak. Vizsgálva az első és második egyenletet, $t \leq 15$ (különben $f_1$ negatív lenne) és $t \leq 5$ (különben $f_2$ negatív lenne). Ezek közül a második egyenlőtlenség szigorúbb, tehát ezt kell használni a továbbiakban. A harmadik egyenletre nem kell további megszorítást tenni $t$ paraméterre nézve, tehát $0 \leq t \leq 5$. Ezt az eredményt ötvözve, a négy egyenletre kapjuk:

$$\begin{array}{rcccl} 10 & \leq & f_1 & \leq & 15, \\ 0 & \leq & f_2 & \leq & 5, \\ 20 & \leq & f_3 & \leq & 25, \\ 0 & \leq & f_4 & \leq & 5. \end{array}$$

Ezzel megkaptuk a lehetséges folyamokat a forgalmi hálózatunkban.

## 4.7. Összefoglalás

Szakdolgozatomat a lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldási módszereiről írtam. Az első fejezetben bevezettem azokat a fogalmakat, melyek elengedhetetlenek a további részek megértéséhez, illetve a feladatok megoldásához.

A második részben bemutattam a lineáris algebrai egyenletrendszerek direkt megoldási módszereit, nevezetesen az LU-felbontást és a Cholesky-felbontást, melyekkel ugyan pontos megoldást kapunk, viszont egyes feladatoknál kiszámításuk időigényes lehet.

A harmadik fejezetben az iterációs módszereket mutattam be, majd a konvergenciájukat tekintve néhány tétel bizonyítását is beláttam. A negyedik fejezetben a Jacobi-illetve a Gauss-Seidel iteráció relaxált változataival foglalkoztam, melyekkel bizonyos esetekben jobb és gyorsabban konvergáló iterációkat kaphatunk. Ezután a JOR-és a SOR módszer konvergenciáját foglaltam össze.

Az iterációs eljárásokra vonatkozó részt a leállási feltételekkel, majd az utolsó fejezetet két életszerű feladattal zártam le. Az első egy közgazdasági modell, nevezetesen a Leontief-modell, majd a második egy forgalom-hálózati modell. Szakdolgozatommal rávilágítottam az alapvető megoldási formákra, melyeket használva, feladatainkat könnyebben meg tudjuk oldani számos alkalmazási területen.

# Nyilatkozat

Név: Laki Annamária

ELTE Természettudományi Kar
Szak: Matematika BSc.

Neptun azonosító: M8CQ4E

Szakdolgozat cím: Lineáris algebrai egyenletrendszerek direkt és iterációs megoldási módszerei

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2015. május 28.

Hallgató aláírása

# Irodalomjegyzék


[1] Faragó István-Horváth Róbert: *Numerikus módszerek példatár, Typotex (2011)*

[2] Faragó István : *Alkalmazott analízis 1-2, előadás jegyzet*

[3] Freud Róbert: *Lineáris Algebra, ELTE Eötvös Kiadó, 2006*

[4] Kurics Tamás jegyzete: *alkanal2.pdf*

[5] David Poole: *Linear Algebra, A modern introduction*

[6] Stoyan Gisbert, Takó Alina: *Numerikus módszerek 1., Typotex (2005)*

[7] Wikipédia: *http://hu.wikipedia.org/wiki/Cholesky-felbontás*

[8] Wikipédia: *http://hu.wikipedia.org/wiki/Carl_ Friedrich_ Gauss*

[9] Wikipédia: *http://hu.wikipedia.org/wiki/LU_felbontás*