A kétpontos peremérték-feladatok numerikus megoldási módszerei

B.Sc. Szakdolgozat

Takács Annamária
Matematika B.Sc., Matematikai elemző szakirány

Témavezető:
Dr. Faragó István
egyetemi tanár
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest
2015

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Faragó Istvánnak, az érdeklődésem felkeltéséért, a bátorításáért, az átgondolt észrevételeiért, javaslataiért. Köszönöm családomnak és barátaimnak, hogy mellettem álltak és segítettek, így biztosítva a nyugodt hátteret dolgozatom elkészítéséhez. Hálás vagyok Istennek a szakdolgozatom megírásához kapott kegyelmekért.

1. fejezet

Bevezetés

"A matematikának a természettudományok terén való hasznossága a csodával határos. Nincs is rá racionális magyarázat. Mert semmiképpen sem természetes, hogy legyenek "természeti törvények", és még kevésbé kézenfekvő, hogy az ember felfedezhesse őket. Az a tény, hogy a matematika nyelve alkalmas a fizikai törvények megfogalmazására, csodálatos ajándék, amelyet soha nem leszünk képesek igazán megérteni vagy kiérdemelni.„

Wigner Jenő

A differenciálegyenletek olyan egyenletek, melyekben az ismeretlen kifejezés egy differenciálható függvény, és az egyenlet a függvény és ennek deriváltjaitól függ. Ezek segítségével felállíthatunk matematikai modelleket a különböző természettudományi, közgazdasági, műszaki folyamatok leírására. Az esetek legnagyobb részében a differenciálegyenlet megoldása nem fejezhető ki zárt formában, csak közelítő megoldást tudunk adni valamilyen numerikus módszer segítségével. Dolgozatomban csak közönséges differenciálegyenletekről lesz szó, tehát arról az esetről, amikor a keresett függvény egyváltozós.

A peremérték-feladatokban a megoldást egy $[a, b]$ intervallumon vizsgáljuk, és a megoldás értékét ismerjük a végpontokban. A dolgozatban megvizsgáljuk a feladat megoldhatóságát, majd két numerikus megoldási eljárást: a véges differenciák módszerét és a belövéses módszert.

1.1. Definíció

1.1. Definíció (Kétpontos peremérték-feladat). *[1] Legyen T korlátos térbeli tartomány és $f : T \to \mathbb{R}, u : I \to \mathbb{R}$ függvények, ahol $T \subset \mathbb{R}^3;\ I \subset \mathbb{R}$, illetve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*
Az $u(x)$ ismeretlen függvényre kitűzött

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) \quad x \in (a, b) = I \tag{1.1}$$
$$u(a) = \alpha;\ \ u(b) = \beta \tag{1.2}$$

feladatot Dirichlet peremfeltétellel kitűzött kétpontos peremérték-feladatnak nevezzük.

A fenti definícióban a peremfeltétel általánosabb formában is megadható:

Legyen $\mathbf{g}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adott függvény. Az $u(x)$ ismeretlen függvényre kitűzött peremérték-feladat Dirichlet peremfeltétele a **g** függvény segítségével

$$\mathbf{g}(u(a), u(b)) = 0 \tag{1.3}$$

alakban írható fel. Ha $\mathbf{g}(s_1, s_2) = \begin{pmatrix} s_1 - \alpha \\ s_2 - \beta \end{pmatrix}$ alakú, akkor az (1.3) éppen a definícióban szereplő feltételt jelenti.

A peremérték-feladatok peremfeltétele azonban többféle lehet, a definíciót az első feltétellel írtuk fel, mert ez a legegyszerűbb. A következő definíció magában foglalja az általánosabb esetet is.

1.2. Definíció. *Legyen* $\mathbf{g}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ *adott függvény.*
Az $u(x)$ *ismeretlen függvényre kitűzött*

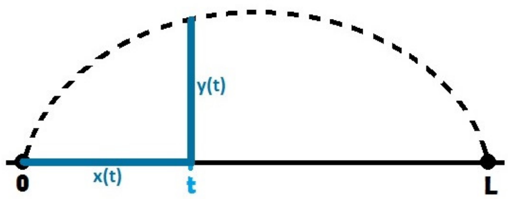
$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) \quad x \in (a, b)$$
$$\mathbf{g}(u(a), u(b), u'(a), u'(b)) = 0$$

feladatot általános alakú kétpontos peremérték-feladatnak nevezzük.

1.2. Motiváció

A következő klasszikus példa megmutatja, hogyan származtatható ilyen feladat.

1.1. Példa. *Egy adott pontból (az egyszerűség kedvéért* $x = 0$*-ból) kilövünk egy golyót. Jelölje* $y(t)$ *a kilőtt golyó magasságát a föld felett,* $x(t)$ *pedig a kezdőponttól való vízszintes távolságát a* $t > 0$ *időpontban, ahogy az 1.1. ábrán látható. Tegyük fel, hogy vízszintes irányban állandó (*$v \neq 0$*) sebességgel repül, függőleges irányban csak a gravitáció hat rá. Azt szeretnénk meghatározni, hogy milyen szögben kell kilőnünk ahhoz, hogy egy meghatározott helyre, az* $x = L$ *pontba érkezzen.*



1.1. ábra.

Feltételünk miatt a mozgást az alábbi egyenletek írják le:

$$\dot{x}(t) = v,$$
$$\ddot{y}(t) = -g.$$

A $t = 0$ időpontban a golyó a kezdeti helyén van, így a kezdeti feltételeink a következők:

$$x(0) = 0 \text{ és } y(0) = 0.$$

Az első egyenlet megoldása $x(t) = vt$, azaz $t = x(t)/v$. Ezt behelyettesítjük y-ba:

$$y(t) = y(x(t)/v).$$

Legyen Y olyan egyváltozós függvény, amely az $x = x(t)$ helyen az $y(t)$ értéket veszi fel, azaz

$$Y(x(t)) = y(t).$$

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva az

$$\dot{y}(t) = \frac{\mathrm{d}Y(x(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}v$$

alakhoz jutunk, amit másodszor is lederiválunk:

$$\ddot{y}(t) = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} \cdot 0 + v \cdot \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}x^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = v^2\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}x^2}$$
$$\ddot{y}(t) = -g = v^2\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}x^2}.$$

Tehát keressük azt az $Y \in C^2[0, L]$ függvényt, amelyre

$$Y''(x) = -\frac{g}{v^2}, \quad x \in (0, L),$$
$$Y(0) = 0, \;\; Y(L) = 0$$

teljesül. Ennek megoldása analitikusan előállítható kétszeres integrálással:

$$Y(x) = -\frac{g}{v^2} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2,$$

ahol a tetszőleges C_1 és C_2 paramétereket a peremfeltételekkel határozhatjuk meg:

$$Y(0) = C_2 = 0 \quad \text{és}$$
$$Y(L) = -\frac{g}{v^2} \cdot \frac{L^2}{2} + C_1L = 0, \text{ ezért } C_1 = \frac{gL}{2v^2}.$$

Azaz a megoldás $Y(x) = -\frac{g}{v^2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{gL}{2v^2}x = \frac{gx}{2v^2}(L - x)$.

Mivel a lövés szögére $\mathrm{tg}(\alpha) = Y'(0)$, ezért ezt úgy kell megválasztani, hogy teljesüljön a

$$\mathrm{tg}(\alpha) = Y'(0) = \frac{gL}{2v^2} \quad \text{összefüggés.}$$

Ezért a keresett szög $\alpha = arctg\left(\frac{gL}{2v^2}\right)$ lesz.

1.1. Megjegyzés. *A feladat megoldása szerint bármekkora távolságra el tudunk lőni, tehát tetszőleges $x = L$ ponthoz megadható az a szög, hogy ha az ágyú csövét eszerint állítjuk be, eltaláljuk a célpontot. Ez természetesen a valóságban nincs így, modellünkben csak a gravitációs erő szerepel, nem vesz figyelembe más testre ható erőt, például a súrlódást sem.*

1.3. A feladat megoldhatósága

A kezdetiérték-feladatok megoldhatóságát, és annak egyértelműségét az $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ egyenletben az f függvény második változójának lipschitzessége határozza meg, ha ez teljesül, bármilyen kezdetifeltétel esetén egyértelmű megoldást kapunk. Egy függvény akkor Lipschitz-tulajdonságú a második változójában, ha létezik olyan $L > 0$ állandó, hogy az értelmezési tartomány minden $(t, u_1), (t, u_2)$ pontjára

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L|u_1 - u_2| \quad \text{teljesül.}$$

A peremérték-feladatok megoldhatósága illetve egyértelműsége a peremfeltételektől is függ, ezt támasztja alá az alábbi példa is:

1.2. Példa. *Tekintsük az $f(x, u, u') := -4u$ megválasztásával az* (1.1) *egyenletet. Azaz az*

$$u''(x) = -4u(x)$$

lineáris, másodrendű közönséges differenciálegyenletet vizsgáljuk.

Ennek általános megoldását a feladathoz tartozó karakterisztikus polinom gyökeinek megtalálásával kapjuk. Mivel esetünkben

$$\lambda^2 + 4 = 0, \text{ ezért a gyökök } \lambda_{1,2} = \pm 2i \text{ lesznek.}$$

Mint ismeretes, ha a gyökök $\alpha \pm i\beta$ alakú komplex számok, akkor a differenciálegyenlet alapmegoldásai az

$$u_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} \cos(\beta x) \text{ és } u_2(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

függvények. Így esetünkben az alapmegoldások

$$u_1(x) = \mathrm{e}^{0x} \cos(2x) = \cos(2x) \text{ és } u_2(x) = \mathrm{e}^{0x} \sin(2x) = \sin(2x),$$

tehát az általános megoldás $u(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$ alakban írható fel.

Határozzuk meg az általános megoldásban szereplő állandókat különböző peremfeltételek mellett!

- Ha a peremfelételek $u(0) = 1$ és $u\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, akkor a feltételünk a

$$\begin{aligned} 1 &= C_1\cos(0) + C_2\sin(0) = C_1 + 0, \\ 2 &= C_1\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) + C_2\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 0 + C_2 \end{aligned}$$

  egyenletrendszert eredményezi a C_1, C_2 együtthatókra, innen adódik, hogy az $u(x) = \cos(2x) + 2\sin(2x)$ az egyetlen megoldás.

- Ha a peremfeltételek $u(0) = 1$ és $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, a megoldást a következő egyenletrendszer adja meg:

$$\begin{aligned} 1 &= C_1\cos(0) + C_2\sin(0) = C_1 + 0, \\ 2 &= C_1\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) + C_2\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -C_1 + 0. \end{aligned}$$

  Ezt megoldva $C_1 = 1 \neq -2$. Tehát nincs olyan C_1, C_2 konstans, ami megfelel a feltételeknek.

- Végül ha az $u(0) = 1$ és $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ feltéleket határozzuk meg:

$$\begin{aligned} 1 &= C_1\cos(0) + C_2\sin(0) = C_1 + 0, \\ -1 &= C_1\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) + C_2\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -C_1 + 0, \end{aligned}$$

  egyenletek adódnak, ebből következik, hogy $u(x) = 1\cos(2x) + C_2\sin(2x)$ a megoldás, C_2 tetszőleges megválasztásával, tehát végtelen sok érték kielégíti a peremérték-feladatot.

Láthatjuk, hogy az egyértelmű megoldás létezése a peremfeltételektől is függ. Az alábbi tétel elégséges feltételeket ad, amik mellett biztosítható az egyértelmű megoldás létezése tetszőleges peremfeltétel esetén.

1.1. Tétel. *[5] Jelölje $T := \{(x, s_1, s_2) : x \in [a, b], s_1, s_2 \in \mathbb{R}\}$ halmazt.*
Ha az $u''(x) = f(x, u(x), u'(x))$ egyenlet f függvényére teljesülnek az alábbiak:

1. *$f \in C(T)$;*
2. *$\partial_2 f, \partial_3 f \in C(T)$;*
3. *$\partial_2 f > 0 \quad T$-n;*
4. *$\exists M \geqslant 0 : \; |\partial_3 f| \leqslant M \quad T$-n,*

akkor az (1.1)-(1.2) peremérték-feladatnak tetszőleges peremfeltétele mellett létezik egyértelmű megoldása.

1.3.1. A lineáris peremérték-feladat megoldhatósága

Ha f lineáris, a peremérték-feladat a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} &u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) \equiv p(x)u'(x) + q(x)u(x) + r(x), \;\; x \in [a, b], \\ &u(a) = \alpha;\; u(b) = \beta, \end{aligned}$$

ahol $p, q, r \in C[a, b]$ adott folytonos függvények.

Az 1.1. Tétel elégséges feltétele lineáris esetben lényegesen leegyszerűsödik, ugyanis f speciális alakja miatt csak a harmadik feltételt kell leellenőrizni, a többi automatikusan teljesül. Az egyértelmű megoldás létezéséhez tehát elég a $q(x) > 0$ feltétel teljesülése az $[a, b]$ intervallumon.

Az 1.2. Példában $q(x) = -4$, tehát $q(x) < 0$, bizonyos peremfeltételre mégis egyértelmű megoldást kapunk. Ezért a továbbiakban a lineáris peremérték-feladat megoldhatóságához más feltételeket keresünk, illetve megvizsgáljuk, hogyan állíthatjuk elő a megoldást. Ehhez az egyenletet átírjuk kétismeretlenes rendszerré, ugyanis a magasabbrendű differenciálegyenletek átírhatók elsőrendű rendszerek alakjába az átviteli elv felhasználásával.

A peremérték-feladat egyenlete is felírható kétismeretlenes, elsőrendű rendszer alakjában. Ehhez vezessük be az $\mathbf{u}$ függvényt, amely $\mathbf{u} : [a, b] \to \mathbb{R}^2,\; \mathbf{u}(x) = (u_1(x), u_2(x))$, ahol $u_1(x) = u(x)$ és $u_2(x) = u'(x)$. Ekkor tehát az (1.1)-(1.2) feladat:

$$\begin{aligned} &u_1' = u_2 \\ &u_2' = f(x, u_1, u_2) \\ &u_1(a) = \alpha;\;\; u_1(b) = \beta. \end{aligned}$$

Ez pedig tovább alakítható:

$$u' = f(x, \mathbf{u}) = f(x, u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_2 \\ f(x, u_1, u_2) \end{pmatrix}, \quad x \in [a, b].$$

A fentiek segítségével $f(x, u(x), u'(x)) = p(x)u'(x)+q(x)u(x)+r(x)$ lineáris feladat felírható elsőrendű rendszer alakjában:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}(x)u + \mathbf{r}(x), \text{ ahol}$$

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(x) & p(x) \end{pmatrix} \text{ és } \mathbf{r}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}.$$

A hozzátartozó $u(a) = \alpha$ illetve $u(b) = \beta$ peremfeltételek felírhatók

$$\mathbf{B_a}\mathbf{u}(a) + \mathbf{B_b}\mathbf{u}(b) = \mathbf{v}$$

mátixos alakban, ahol

$$\mathbf{B_a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\; \mathbf{B_b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ és } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

jelöléseket használtuk.

1.2. Megjegyzés. *Bármilyen m-ed rendű ($m \geq 2$) lineáris differenciálegyenlet felírható ilyen alakban, $\mathbf{B_a}, \mathbf{B_b}$ és $\mathbf{A}(x)$ megfelelő, $\mathbb{R}^{m\times m}$ mátrixok alkalmas megválasztásával.*

1.3. Példa. *Írjuk fel az*

$$\begin{aligned}&u''''(x) = \lambda^4 + 2\lambda^2 u(x) - 4\lambda^2 u'(x) + 2\lambda^4 u''(x) - 2\lambda^2 u'''(x), \quad x \in (0,2)\\ &u(0) = \alpha,\ u'(0) = \beta,\ u'(2) = \gamma\end{aligned}$$

lineáris egyenletet mátrixos alakban!

Legyen $\mathbf{u}(x) = (u(x), u'(x), u''(x), u'''(x))$ egy $[0,2] \to \mathbb{R}^4$ függvény. Az egyenletet $\mathbf{u}' = \mathbf{A}(x)u$ alakban szeretnénk felírni, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Legyen

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 2\lambda^2 & -4\lambda^2 & 2\lambda^4 & -2\lambda^2 \end{pmatrix} \text{ és } \mathbf{r}(x) = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \lambda^4 \end{pmatrix}.$$

A peremfeltételek $\mathbf{B_0}, \mathbf{B_2} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$\mathbf{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ és } \mathbf{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ alakú mátrixok és}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha\\ \beta\\ \gamma \end{pmatrix} \text{ vektor segítségével írhatók fel:}$$

$$\mathbf{B_0}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B_2}\mathbf{u}(2) = \mathbf{v}.$$

Az $\mathbf{u}' = \mathbf{A}(x)u + \mathbf{r}(x)$ egyenlet általános megoldásához szükségünk van az alapmegoldására, vagyis a $\mathbf{u}' = \mathbf{A}(x)u$ homogén egyenlet megoldásaiból álló tér bázisából, mint oszlopvektorokból képzett mátrixra, ezt jelöljük $\mathbf{Y}(x)$-szel ($\mathbf{Y}(x) \in \mathbb{R}^{m\times m}$).

Ekkor az egyenlet általános megoldása az állandók variálásának módszere szerint a következő:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{Y}(x)\left(\mathbf{c} + \int_a^x \mathbf{Y}^{-1}(s)\mathbf{r}(s)\mathrm{d}s\right), \text{ ahol } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m \text{ egy tetszőleges vektor.}$$

Tekintsük most a peremfeltételeket! Ezeket a megfelelő $\mathbf{c}$ megválasztásával elégíthetjük ki. Helyettesítsük be a fenti egyenletet $\mathbf{B_a}\mathbf{u}(a) + \mathbf{B_b}\mathbf{u}(b) = \mathbf{v}$ feltételbe!

$$\mathbf{v} = \mathbf{B_a}\underbrace{\mathbf{Y}(a)}_{\mathbf{I}}\mathbf{c} + \mathbf{B_b}\mathbf{Y}(b)\left(\mathbf{c} + \int_a^b \mathbf{Y}^{-1}(s)\mathbf{r}(s)\mathrm{d}s\right).$$

Átalakítjuk az egyenletet:

$$(\mathbf{B_a} + \mathbf{B_b}\mathbf{Y}(b))\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{B_b}\mathbf{Y}(b)\int_a^b \mathbf{Y}^{-1}(s)\mathbf{r}(s)\mathrm{d}s.$$

Vezessük be a $\mathbf{Q} := \mathbf{B_a} + \mathbf{B_b}\mathbf{Y}(b)$ jelölést, így $\mathbf{c}$-re a következő feladatot kapjuk:

$$\mathbf{Q}\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{B_b}\mathbf{Y}(b)\int_a^b \mathbf{Y}^{-1}(s)\mathbf{r}(s)\mathrm{d}s.$$

Ezekből következik az alábbi állítás.

1.2. Tétel. *[1] A fenti jelöléseket használva az $\mathbf{u}' = \mathbf{A}(x)u + \mathbb{R}(x), \mathbf{B_a}\mathbf{u}(a) + \mathbf{B_b}\mathbf{u}(b) = \mathbf{v}$ peremérték-feladatnak pontosan akkor létezik egyértelmű megoldása, amikor a $\mathbf{Q}$ mátrix reguláris. Emellett a megoldás*

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{Y}(x)\left[\mathbf{Q^{-1}}\left(\mathbf{v} - \mathbf{B_b}\mathbf{Y}(b)\int_a^b \mathbf{Y}^{-1}(s)\mathbb{R}(s)\mathrm{d}s\right) + \int_a^x \mathbf{Y}^{-1}(s)\mathbf{r}(s)\mathrm{d}s\right]$$

alakú.

1.4. Példa. *Állapítsuk meg, hogy az 1.2. feladatnak milyen $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$ peremfeltétel mellett létezik egyértelmű megoldása!*

Célunk a $\mathbf{Q} = \mathbf{B_a} + \mathbf{B_b}\mathbf{Y}(b)$ mátrix megtalálása és regularitásának vizsgálata. Ehhez szükségünk van az $u'' = -4u$ egyenlethez tartozó $\mathbf{A}(x)$ mátrixra:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \text{ emellett } \mathbf{B_a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B_b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az $\mathbf{Y}$ alapmegoldás 2×2-es mátrixok esetén a Hermite-féle interpolációs polinom segítségével számítható. Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, mivel ezek különbözők, az interpolációs polinomok a következők:

$$p(\lambda_1) = a_1(x)2i + a_0(x) = e^{2ix} = \cos(2x) + i\sin(2x)$$
$$p(\lambda_2) = -a_1(x)2i + a_0(x) = e^{-2ix} = \cos(2x) - i\sin(2x).$$

Ebből kapjuk, hogy $a_0(x) = \cos(2x)$ és $a_1(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}$.

Az alapmegoldás $\mathbf{Y}(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}\mathbf{A} + \cos(2x)\mathbf{I}$, vagyis

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \frac{\sin(2x)}{2} \\ -2\sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix}.$$

Ezért

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(2b) & \frac{\sin(2b)}{2} \end{pmatrix} \text{ alakú mátrix.}$$

A $\mathbf{Q}$ pontosan akkor reguláris, ha $\sin(2b) \neq 0$, vagyis $b \neq k\dfrac{\pi}{2}$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

1.3. Megjegyzés. *Ha $A(x) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ autonóm, azaz nem függ x-től, akkor $Y(x) = e^{xA}$ úgynevezett exponenciális mátrix, amelyet az $Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$ sor segítségével állíthatunk elő.*

2. fejezet

A véges differenciák módszere

A gyakorlatban általában a homogén egyenlet megoldásai nem meghatározhatók. A peremérték-feladatok megoldásához numerikus módszert alkalmazunk, ezek két csoportra oszthatók: vagy kezdetiérték-feladatra vezetjük vissza és ezt oldjuk meg numerikusan, vagy közvetlenül diszkretizáljuk a feladatot. Ebben a fejezetben ez utóbbit ismertetjük, amelynek lényege, hogy előállítunk egy rácshálót, és a függvény rácshálóbeli pontjaiban közelítjük a derivált értékét, így állítjuk elő a közelítő megoldást.

2.1. Diszkretizáció

Meghatározunk az $[a, b]$ intervallumon egy rácshálót.

Legyen a továbbiakban

$$\overline{\omega}_h := \left\{ x_i = a + ih : \;\; i = 0, 1, \ldots, N+1 \text{ és } h = \frac{b-a}{N+1} \right\}$$

úgynevezett ekvidisztáns rácsháló. Ennek belső pontjait jelöljük ω_h-val,

$$\omega_h := \left\{ x_i = a + ih : \;\; i = 1, \ldots, N \text{ és } h = \frac{b-a}{N+1} \right\}$$

és határpontjait γ_h-val,

$$\gamma_h := \{x_0 = a, x_{N+1} = b\} = \overline{\omega}_h \backslash \omega_h.$$

Jelölje $\mathbb{F}(\overline{\omega}_h)$ és $\mathbb{F}(\omega_h)$ az $\overline{\omega}_h$ illetve az ω_h rácshálón értelmezett függvények vektorterét, tehát azokat a függvényeket, amik csak a rácsháló pontjaiban vannak értelmezve. Az első derivált elsőrendben közelíthető az alábbi formulákkal:

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \mathcal{O}(h), \tag{2.1}$$

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h). \tag{2.2}$$

Másodrendben pedig a következő összefüggésekkel közelíthető:

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \tag{2.3}$$

A második derivált közelítésére az alábbi, másodrendben pontos közelítés alkalmazható:

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \tag{2.4}$$

2.2. Első peremfeltétel esete

Tekintsük először azt az esetet, amikor a határpontokban a függvényértékek, azaz az első peremfeltétel adott.

Tegyük fel, hogy az (1.1)-(1.2) alapfeladatnak van egyértelmű $u(x) \in C^2[a,b]$ megoldása, ekkor erre a megoldásra az x_i rácspontokban a következő összefüggést kapjuk:

$$u''(x_i) = f(x_i, u(x_i), u'(x_i)) \quad i = 1, 2 \ldots, N$$
$$u(x_0) = \alpha; \;\; u(x_{N+1}) = \beta.$$

Az u megoldásfüggvény rácspontbeli értéleit, azaz az $u(x_i)$ értékeket szeretnénk közelíteni a fenti formulák segítségével, ezt $y(x_i)$-vel jelöljük, tehát $u(x_i) \approx y(x_i)$-et szeretnénk elérni. A (2.1), (2.3) és (2.4) közelítéseket az egyenletbe beírva három különböző, N+2 ismeretlenes egyenletrendszert kapunk $y(x_0), y(x_1), \ldots, y(x_{N+1})$ ismeretlenekre:

$$\frac{y(x_i+h) - 2y(x_i) + y(x_i-h)}{h^2} = f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_i+h) - y(x_i)}{h}\right), \tag{2.5}$$

$$\frac{y(x_i+h) - 2y(x_i) + y(x_i-h)}{h^2} = f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_i) - y(x_i-h)}{h}\right), \tag{2.6}$$

$$\frac{y(x_i+h) - 2y(x_i) + y(x_i-h)}{h^2} = f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_i+h) - y(x_i-h)}{2h}\right), \tag{2.7}$$

$$y(x_0) = \alpha; \;\; y(x_{N+1}) = \beta, \;\; i = 1, 2, \ldots, N.$$

Nyilván akkor eredményes a módszer, ha a fenti rendszernek van egyértelmű megoldása, amelyet hatékonyan megtalálhatunk és ennek értékei közel vannak $u(x_i)$ értékeihez. Szemléletesen elképzelve, erre annak is teljesülnie kell, hogy ha sűrítjük a rácshálót, akkor a közelítő megoldások sorozata az intervallumon, valamilyen értelemben tart a pontos megoldáshoz. A következőkben ezt a kérdést vizsgáljuk a lineáris esetre.

2.1. Definíció (Konvergencia). *Egy numerikus módszer konvergenciája a $t^* \in \overline{\omega}_h$ pontban minden h lépésközre azt jelenti, hogy az általa meghatározott numerikus megoldásra a rácsháló finomításával a pontos és a közelítő megoldás a rácspontokban, tehát a hibafüggvény a rácsfüggvények terének valamilyen normájában 0-hoz tart, azaz*

$$\lim_{h \to 0} \|u(x_i) - y(x_i)\| = \lim_{h \to 0} \|e_h\| = 0, \;\; \textit{és} \;\; x_i = t^*.$$

Ha $e_h = \mathcal{O}(h^p)$, azt mondjuk, hogy a módszer az adott normában p-ed rendű.

2.2.1. A lineáris eset

A következőkben a

$$u''(x) = p(x)u'(x) + q(x)u(x) + r(x), \quad x \in [a, b] \tag{2.8}$$
$$u(a) = \alpha; \quad u(b) = \beta \tag{2.9}$$

lineáris peremérték-feladat véges differenciás numerikus megoldásával és annak konvergenciájával foglalkozunk. Az alábbi tétel és annak következménye segítséget fog nyújtani a fenti módszerek konvergenciájának bizonyítására lineáris esetben.

2.1. Tétel. *A* (2.9) *lineáris peremérték-feladat* (2.5), (2.6) *és a* (2.7) *véges differenciás diszkretizációja*

$$a(x_i)y(x_i - h) + d(x_i)y(x_i) + c(x_i)y(x_i + h) = -r(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N$$
$$y(x_0) = \alpha; \quad y(x_{N+1}) = \beta$$

lineáris algebrai egyenletrendszert eredményez, ahol megfelelően kis h esetén mindhárom diszkretizációra érvényes a

$$|d(x_i)| - |a(x_i)| - |c(x_i)| = q(x_i) \tag{2.10}$$

egyenlőség.

Bizonyítás:

- A lineáris feladatra a (2.5) közelítés az $i = 1, 2, \ldots, N$ indexre az

$$\frac{y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h)}{h^2} = p(x_i)\frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} + q(x_i)y(x_i) + r(x_i)$$
$$y(x_0) = \alpha; \quad y(x_{N+1}) = \beta$$

  lineáris egyenletrendszer, amit ha átrendezünk, a következőt kapjuk:

$$-r(x_i) = \underbrace{\left(-\frac{1}{h^2}\right)}_{a(x_i)} y(x_i - h) + \underbrace{\left(\frac{2}{h^2} - \frac{1}{h}p(x_i) + q(x_i)\right)}_{d(x_i)} y(x_i) +$$

$$+ \underbrace{\left(-\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}p(x_i)\right)}_{c(x_i)} y(x_i + h). \tag{2.11}$$

  Ez megfelel a tétel (2.10) állításának, ugyanis megfelelően kis h esetén

$$|d(x_i)| - |a(x_i)| - |c(x_i)| = \frac{2}{h^2} + q(x_i) - \frac{1}{h}p(x_i) - \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}p(x_i) = q(x_i)$$

  érvényes.

- A (2.6) diszkretizáció a

$$\frac{y(x_i+h)-2y(x_i)+y(x_i-h)}{h^2}=p(x_i)\frac{y(x_i)-y(x_i-h)}{h}+q(x_i)y(x_i)+r(x_i)$$

lineáris algebrai egyenletrendszert eredményezi, ezt is átalakítjuk és kapjuk:

$$-r(x_i)=\underbrace{\left(-\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h}p(x_i)\right)}_{a(x_i)}y(x_i-h)+\underbrace{\left(\frac{2}{h^2}+\frac{1}{h}p(x_i)+q(x_i)\right)}_{d(x_i)}y(x_i)+$$

$$+\underbrace{\left(-\frac{1}{h^2}\right)}_{c(x_i)}y(x_i+h). \tag{2.12}$$

Az állítás második része is teljesül, mert

$$|d(x_i)|-|a(x_i)|-|c(x_i)|=\frac{2}{h^2}+\frac{1}{h}p(x_i)+q(x_i)-\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h}p(x_i)-\frac{1}{h^2}=q(x_i).$$

- A harmadik, a (2.7) séma pedig a

$$\frac{y(x_i+h)-2y(x_i)+y(x_i-h)}{h^2}=p(x_i)\frac{y(x_i+h)-y(x_i-h)}{h}+q(x_i)y(x_i)+r(x_i)$$

egyenletrendszerhez vezet, átalakítás után láthatjuk, hogy a megfelelő $a(x_i), d(x_i)$, $c(x_i)$ megválasztásával a tételben szereplő egyenletrendszerhez jutunk:

$$-r(x_i)=\underbrace{\left(-\frac{1}{h^2}-\frac{1}{2h}p(x_i)\right)}_{a(x_i)}y(x_i-h)+\underbrace{\left(\frac{2}{h^2}+q(x_i)\right)}_{d(x_i)}y(x_i)+$$

$$+\underbrace{\left(-\frac{1}{h^2}+\frac{1}{2h}p(x_i)\right)}_{c(x_i)}y(x_i+h). \tag{2.13}$$

Alkalmas kis h esetén érvényes az

$$|d(x_i)|-|a(x_i)|-|c(x_i)|=\frac{2}{h^2}+q(x_i)-\frac{1}{h^2}-\frac{1}{2h}p(x_i)-\frac{1}{h^2}+\frac{1}{2h}p(x_i)=q(x_i)$$

egyenlőség.

□

Következmény:

A lineáris peremérték-feladat véges differenciás közelítései felírhatók mátrixos alakban, így az egyenletrendszerünk az

$$\widetilde{L_h}\widetilde{y_h} = \widetilde{r_h}$$

jelölésekkel is leírható, ahol

$$\widetilde{L_h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a(x_1) & d(x_1) & c(x_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a(x_2) & d(x_2) & c(x_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a(x_3) & d(x_3) & c(x_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a(x_N) & d(x_N) & c(x_N) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{y_h} = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y(x_1) \\ y(x_2) \\ y(x_3) \\ \vdots \\ y(x_N) \\ y(x_{N+1}) \end{pmatrix} \text{ és } \widetilde{r_h} = -\begin{pmatrix} -\alpha \\ r(x_1) \\ r(x_2) \\ r(x_3) \\ \vdots \\ r(x_N) \\ -\beta \end{pmatrix}.$$

Az $\widetilde{L_h} \in \mathbb{R}^{(N+2)\times(N+2)}$ mátrix, az $\widetilde{y_h} \in \mathbb{R}^{N+2}$ és $\widetilde{r_h} \in \mathbb{F}(\overline{\omega}_h)$ vektor. Ha átrendezzük a második és az utolsó előtti sort, egy dimenzióval kisebb rendszert kapunk. A második sor $a(x_1)y(x_0) + d(x_1)y(x_1) + c(x_1)y(x_2) = -r(x_1)$, innen $y(x_0) = \alpha$ értékét ismerjük, ez az egyik peremfeltétel, ezt behelyettesítjük és átvisszük a másik oldalra, így a

$$d(x_1)y(x_1) + c(x_1)y(x_2) = -(r(x_1) - a(x_1)\alpha)$$

egyenletet kapjuk. Ugyanígy az N-edik sorba is behelyettesítjük $y(x_N) = \beta$ értékét:

$$a(x_N)y(x_N) + d(x_N)y(x_N) + c(x_N)y(x_N) = -r(x_N)$$
$$a(x_N)y(x_N) + d(x_N)y(x_N) = -(r(x_N) - c(x_N)\beta).$$

Ekkor tehát az egyenletrendszer az

$$L_h y_h = r_h$$

alakban írható fel az

$$L_h = \begin{pmatrix} d(x_1) & c(x_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a(x_2) & d(x_2) & c(x_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a(x_3) & d(x_3) & c(x_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a(x_{N-1}) & d(x_{N-1}) & c(x_{N-1}) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c(x_N) & d(x_N) \end{pmatrix},$$

$$y_h = \begin{pmatrix} y(x_1) \\ y(x_2) \\ y(x_3) \\ \vdots \\ y(x_{N-1}) \\ y(x_N) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad r_h = -\begin{pmatrix} r(x_1) - \alpha a(x_1) \\ r(x_2) \\ r(x_3) \\ \vdots \\ r(x_{N-1}) \\ r(x_N) - \beta c(x_N) \end{pmatrix}$$

jelöléseket használva, ahol $L_h \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $y_h \in \mathbb{R}^N$ és $r_h \in \mathbb{F}(\overline{\omega}_h)$. Az L_h együtthatómátrix tridiagonális, szigorúan diagonálisan domináns mátrix.

A következőkben megmutatjuk a módszerek konvergenciáját és konvergencia rendjét.

2.2. Tétel. *A* (2.5)*, a* (2.6) *és a* (2.7) *alakú véges differenciás diszkretizációk lineáris peremérték-feladat esetén konvergensek, emellett*

- *a* (2.7) *séma másodrendben,*
- *a* (2.5) *és a* (2.6) *séma elsőrendben*

konvergálnak a (2.8)-(2.9) *feladat megoldásához.*

Bizonyítás:

- A fejezet elején felírt közelítéseket Taylor-sorfejtéssel kifejtjük Lagrange-féle maradéktagot használva megfelelő ξ_i és ζ_i pontokban:

$$\frac{u(x_i+h)-u(x_i-h)}{2h} = \frac{u(x_i)+hu'(x_i)+\frac{h^2}{2}u''(x_i)+\frac{h^3}{6}u'''(\xi_1)}{2h} -$$
$$-\frac{u(x_i)-hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}u''(x_i)-\frac{h^3}{6}u'''(\xi_2)}{2h} = u'(x_i)+\frac{h^2}{6}u'''(\xi_3) \quad \text{és}$$

$$\frac{u(x_i+h)-2u(x_i)+u(x_i-h)}{h^2} =$$
$$= \frac{u(x_i)+hu'(x_i)+\frac{h^2}{2}u''(x_i)+\frac{h^3}{6}u'''(x_i)+\frac{h^4}{24}u''''(\zeta_1)}{h^2} - \frac{2u(x_i)}{h^2} +$$
$$+\frac{u(x_i)-hu'(x_i)+\frac{h^2}{2}u''(x_i)-\frac{h^3}{6}u'''(x_i)+\frac{h^4}{24}u''''(\zeta_2)}{h^2} =$$
$$= u''(x_0)+\frac{h^2}{12}u''''(\zeta_3)$$

összefüggéseket kapjuk. Ezeket behelyettesítjük a lineáris feladatba az első és második derivált helyére:

$$\frac{u(x_i+h)-2u(x_i)+u(x_i-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}u''''(\zeta_3) =$$
$$= p(x_i)\left(\frac{u(x_i+h)-u(x_i-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}u'''(\xi_3)\right) + q(x_i)u(x_i) + r(x_i).$$

Átrendezve az egyenlőséget

$$\left(-\frac{1}{h^2}+\frac{p(x_i)}{2h}\right)u(x_i+h)+\left(\frac{2}{h^2}+q(x_i)\right)u(x_i)+$$
$$+\left(-\frac{1}{h^2}-\frac{p(x_i)}{2h}\right)u(x_i-h)=-r(x_i)-h^2\left(\frac{1}{12}u''''(\zeta_3)-p(x_i)\frac{1}{6}u'''(\xi_3)\right)$$

alakhoz jutunk. Legyen $g(x_i) := \frac{1}{12}u''''(\zeta_3)-p(x_i)\frac{1}{6}u'''(\xi_3)$, (2.13) jelöléseivel felírva kapjuk:

$$a(x_i)u(x_i-h)+d(x_i)u(x_i)+c(x_i)u(x_i+h)=-r(x_i)-h^2g(x_i).$$

Az előző tételben szereplő $a(x_i)y(x_i-h)+d(x_i)y(x_i)+c(x_i)y(x_i+h)=-r(x_i)$ egyenlőséget kivonjuk a $a(x_i)u(x_i-h)+d(x_i)u(x_i)+c(x_i)u(x_i+h)=-r(x_i)-h^2g(x_i)$ összefüggésből, így egy olyan egyenletrendszert kapunk, amiben a hibavektor is szerepel:

$$a(x_i)e_{i-1}+d(x_i)e_i+c(x_i)e_{i+1}=-h^2g(x_i),\quad i=1,2,\dots,N.$$

Mivel

$$e_0=u(x_0)-y(x_0)=\alpha-\alpha=0 \text{ és}$$
$$e_{N+1}=u(x_{N+1})-y(x_{N+1})=\beta-\beta=0,$$

ezért

$$e_0=e_{N+1}=0.$$

Az i-edik egyenletet felírjuk és átrendezzük:

$$d(x_i)e_i=-a(x_i)e_{i-1}-c(x_i)e_{i+1}-h^2g(x_i).$$

Abszolútértékben becsülve az

$$|d(x_i)||e_i|\le|a(x_i)||e_{i-1}|+|c(x_i)||e_{i+1}|+h^2|g(x_i)|\le$$
$$\le(|a(x_i)|+|c(x_i)|)\|e_h\|_\infty+h^2\|\mathbf{g}\|_\infty$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ahol $\mathbf{g}$ a $g(x_i)$ koordinátájú vektort jelöli. $|e_{i-1}|$ és $|e_{i+1}|$ felülről becsülhető $\|e_h\|_\infty$-val, mert $\max\limits_i|e_i|=\|e_h\|_\infty$ teljesül. Jelölje i_0 azt az indexet, ahol $\|e_h\|_\infty=|e_{i_0}|$, nyilván ez az i_0 nem lehet 0 vagy $N+1$, mivel $e_0=e_{N+1}=0$. A fenti egyenlet minden $i=1,2,\dots,N$ indexre érvényes, így az $i=i_0$-ra is:

$$|d(x_{i_0})|\|e_h\|_\infty\le(|a(x_{i_0})|+|c(x_{i_0})|)\|e_h\|_\infty+h^2\|\mathbf{g}\|_\infty.$$

Átrendezés után kapjuk az

$$(|d(x_{i_0})|-|a(x_{i_0})|-|c(x_{i_0})|)\|e_h\|_\infty\le h^2\|\mathbf{g}\|_\infty \quad \text{alakú kifejezést.}$$

A 2.1. Tétel szerint $|d(x_{i_0})| - |a(x_{i_0})| - |c(x_{i_0})| = q(x_{i_0})$. Erről tudjuk, hogy ha pozitív, a lineáris peremérték-feladatnak létezik egyértelmű megoldása tetszőleges peremfeltétel mellett, ez volt az 1.1. Tétel lineáris esetre vonatkozó következménye. Mivel $\min\limits_{[a,b]} q > 0$ is igaz, így az

$$\|e_h\|_\infty \leq h^2 \frac{\|\mathbf{g}\|_\infty}{\min\limits_{[a,b]} q}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az $\frac{1}{12}u''''(\zeta_3) - p(x_i)\frac{1}{6}u'''(\xi_3)$ kifejezést jelöltük $g(x_i)$-vel. Így g maximumnormában felülről becsülhető a következőkkel:

$$\|e_h\|_\infty \leq h^2 \frac{\|\mathbf{g}\|_\infty}{\min\limits_{[a,b]} q} \leq h^2 \frac{\left(\frac{M_4}{12} + \frac{\max_{[a,b]} |p| M_3}{6}\right)}{\min\limits_{[a,b]} q}, \quad \text{ahol } M_j = \max_{[a,b]} |u^{(j)}|.$$

Tehát $h \to 0$ esetén a hiba másodrendben tart 0-hoz.

- Az elsőrendű módszer Taylor-sorfejtése az alábbi módon néz ki:

$$\frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} = \frac{\left(u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(\xi)\right) - u(x_i)}{h} =$$
$$= u'(x_i) + \frac{h}{2}u''(\xi)$$

$$\frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} = \frac{u(x_i) - \left(u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(\zeta)\right)}{h} =$$
$$= u'(x_i) - \frac{h}{2}u''(\zeta).$$

A bizonyítás menete nagyon hasonló az előző esethez, ezért nem részletezzük.

□

Eddig csak azt az esetet vizsáltuk, amikor $q(x) > 0$ az $[a, b]$ intervallumon. Most megnézzük, mi a helyzet akkor, ha $p = q = 0$, tehát az

$$u''(x) = r(x), \quad x \in [a, b] \tag{2.14}$$
$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \tag{2.15}$$

peremérték-feladatot vizsgáljuk. Alkalmazzuk a (2.4) közelítést:

$$\frac{y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h)}{h^2} = r(x_i), \quad i = 0, 2, \ldots, N - 1 \tag{2.16}$$
$$y_0(a) = \alpha, \quad y_{N+1}(b) = \beta \tag{2.17}$$

Először felírjuk a módszer mátrixos alakját, majd belátjuk, hogy a diszkrét feladatnak létezik egyértelmű megoldása, ehhez megmutatjuk, hogy az együtthatómátrix M-mátrix, ezt követően megmutatjuk, hogy a diszkretizáció konvergál a (2.14) feladat megoldásához.

A 2.1. Tétel jelöléseinek megfelelően $a(x_i) = -\frac{1}{h^2}, d(x_i) = \frac{2}{h^2}, c(x_i) = -\frac{1}{h^2}$. Az egyenletrendszer 16. oldalon szereplő mátrixos felírásába behelyettesíthetjük $a(x_i)$, $d(x_i)$ és $c(x_i)$ értékeit, így kapjuk az

$$\mathbf{A_h} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b_h} = \begin{pmatrix} -r(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ -r(x_i) \\ -r(x_N) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

alakú felírást, ahol $i = 2, 3, \ldots, N-1$.

Tehát ez a peremérték-feladat felírható

$\mathbf{A_h y_h} = \mathbf{b_h}$ alakban.

2.3. Tétel. *Az $\mathbf{A_h} \in \mathbf{R^{N\times N}}$ mátrix M-mátrix, vagyis olyan négyzetes mátix, aminek diagonálison kívüli elemei nempozitívak és amelyhez létezik egy olyan pozitív vektor, amivel megszorozva pozitív vektort kapunk.*

Bizonyítás:

- A diagonálison kívüli elemek $-\frac{1}{h^2}$ vagy 0, tehát nempozitívak.
- Legyen a $\mathbf{g_h} \in \mathbb{R}^N$ vektor i-edik koordinátája $1 + ih((b-a) - ih)$, ahol $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

  Ekkor $\mathbf{g_h} = \begin{pmatrix} 1 \\ > 1 \\ \vdots \\ > 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alakú.

  Vizsgáljuk meg, hogy $\mathbf{A_h}$-val szorozva valóban pozitív vektort kapunk-e!

$$(\mathbf{A_h g_h})_i = 1, \quad \text{ha } i = 0, \ \text{ vagy } i = N-1.$$
$$(\mathbf{A_h g_h})_i = -\frac{1}{h^2}(\mathbf{g_h})_{i-1} + \frac{2}{h^2}(\mathbf{g_h})_i - \frac{1}{h^2}(\mathbf{g_h})_{i+1} =$$
$$= -\frac{1}{h^2}(1 + (i-1)h((b-a) - (i-1)h) + \frac{2}{h^2}(1 + ih((b-a) - ih)) -$$
$$-\frac{1}{h^2}(1 + (i+1)h((b-a) - (i+1)h) = \cdots = 2, \ \text{ ha } i = 1, \ldots, N-2$$

Tahát az $\mathbf{A_h}$ mátrix teljesíti az M-mátrix definíciójának kritériumait.

$\square$

Következmény:

Mivel az M-mátrixnak van inverze, és az inverz nemnegatív, így létezik nemnegatív $\mathbf{A_h^{-1}}$, ebből következik, hogy az $\mathbf{A_h y_h} = \mathbf{b_h}$ egyenletrendszernek van egyértelmű megoldása, amely a következő:

$$\mathbf{y_h} = \mathbf{A_h^{-1} b_h}.$$

Az M-mátrix egy másik jellemzője, hogy inverze végtelen normában felülről becsülhető az

$$\|\mathbf{A_h^{-1}}\|_\infty \leq \frac{\|\mathbf{g_h}\|_\infty}{\min\limits_{0\leq i\leq N-1}(\mathbf{A_h g_h})_i} \quad \text{képlettel.}$$

Jelen esetben a nevező $\min(\mathbf{A_h g_h})_i = 1$, a számláló pedig a számtani- mértani középre vonatkozó becslés alapján:

$$(\mathbf{g_h})_i = 1 + ih((b-a) - ih) \leq 1 + \left(\frac{ih + ((b-a) - ih)}{2}\right)^2 = 1 + \frac{(b-a)^2}{4},$$

minden $i = 1, \ldots, N-2$ esetén, ebből következik, hogy

$$\|\mathbf{A_h^{-1}}\|_\infty \leq \frac{4 + (b-a)^2}{4}.$$

A 2.1. Definíció szerint a globális hiba $e_h(x_i) = y_h(x_i) - u(x_i)$, ebből következik, hogy $y_h(x_i) = e_h(x_i) + u(x_i)$ egyenlőség is érvényes. Így a (2.16) diszkretizációba behelyettesítve kapjuk, hogy

$$frace(x_i + h) + u(x_i + h) - 2e(x_i) - 2u(x_i) + e(x_i - h) + u(x_i - h)h^2 = r(x_i).$$

Ezt átrendezzük:

$$\frac{e(x_i+h) - 2e(x_i) + e(x_i-h)}{h^2} = \frac{-u(x_i+h) + 2u(x_i) - u(x_i-h)}{h^2} + r(x_i) =$$
$$= -u''(x_i) + \mathcal{O}(h^2) + u''(x_i), \quad \text{azaz}$$
$$\frac{e(x_i+h) - 2e(x_i) + e(x_i-h)}{h^2} = \mathcal{O}(h^2) =: \Psi_i$$

eredményhez jutunk, ha $i = 1, \ldots, N-2$.

Ezt az egyenletet hibaegyenletnek nevezzük az alábbi jelöléssel:

$$\mathbf{A_h} e_h = \Psi_h \in \mathbb{R}^N, \ \text{ahol} \ (\Psi_h)_i = \begin{cases} 0, & \text{ha } i = 0, \ \text{vagy } i = N-1 \\ \mathcal{O}(h^2), & \text{ha } i = 1, \ldots, N-2. \end{cases}$$

2.4. Tétel. *A* (2.16) *véges differenciás séma konvergál a* (2.14) *feladat megoldásához.*

Bizonyítás: A hibaegyenletből adódóan e_h-ra érvényes az $e_h = \mathbf{A_h^{-1}}\Psi_h$ összefüggés. Ezért a hiba végtelen normában felülről becsülhető a

$$\|e_h\|_\infty = \|\mathbf{A_h^{-1}}\Psi_h\|_\infty \leq \|\mathbf{A_h^{-1}}\|_\infty\|\Psi_h\|_\infty = \frac{4+(b-a)^2}{4}\mathcal{O}(h^2) =$$
$$= \text{Const}\mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(h^2)$$

formulákkal. Ebből következik, hogy

$$\lim_{h\to 0}\|e_h\|_\infty = 0.$$

Definiciónk alapján ez a konvergenciát jelenti.

□

2.2.2. Matlab program

Az

$$u''(x) = -4,$$
$$u(0) = 1 \text{ és } u\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

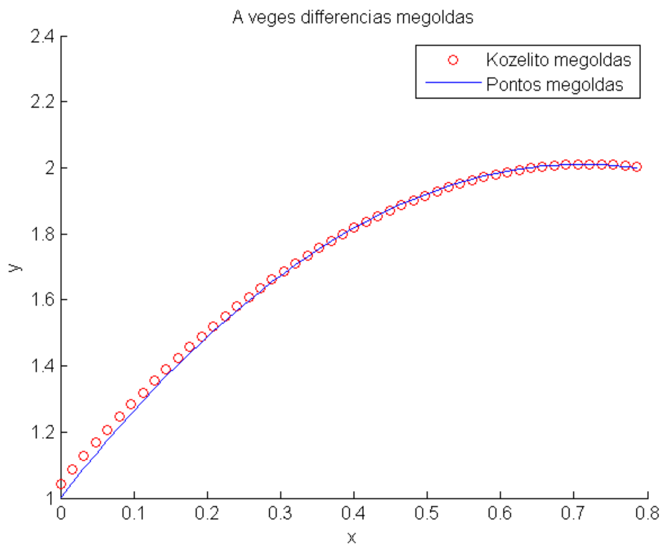
példát matlab program segítségével is megoldjuk.

A program kódja:

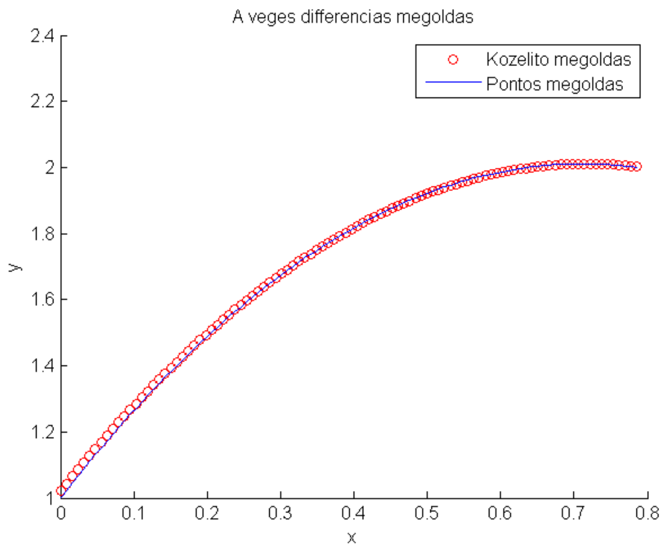
```
function[x,y]=vegesdifferencias(N)
close all
h=(pi/4)/(N+1);
L=zeros(N, N);
L(1,1)=2/h^2;
L(1,2)=-1/h^2;
L(N,N-1)=-1/h^2;
L(N,N)=2/h^2;
for i=2:N-1
      L(i,i-1)=-1/h^2;
      L(i,i)=2/h^2;
      L(i,i+1)=-1/h^2;
end
L
r=zeros(N,1);
r(1)=4+1/h^2;
for i=2:N-1
      r(i)=4;
end
```

```
r(N)=4+(2/h^2);
r
y=L\r;
x=linspace(0, pi/4, N);
hold on;
u=-2*x.^2+(4/pi+pi/2)*x+1;
plot(x, y, 'r', x, u, 'b');
xlabel('x');
ylabel('y');
title ('A veges differencias megoldas');
legend('Kozelito megoldas', Pontos megoldas');
end
```

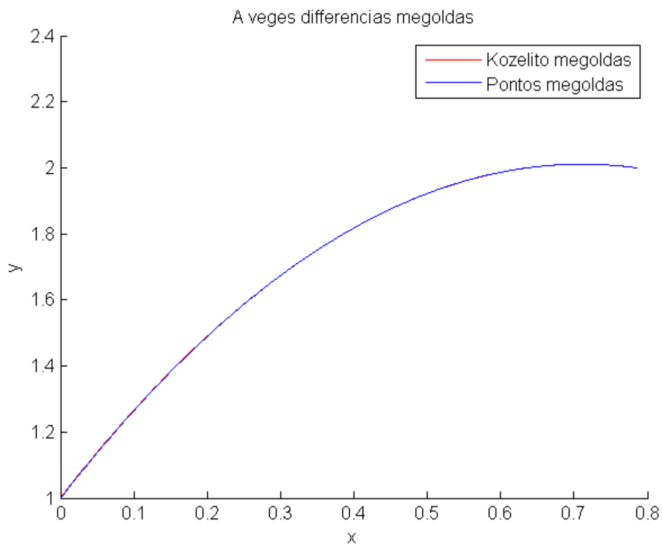
Különböző osztópontokra lefuttatva az alábbi ábrák mutatják a közelítő és a pontos megoldás eltérését.



2.1. ábra. A közelítést pontokkal jelölve a megoldás $N = 50$ osztópont esetén



2.2. ábra. A közelítés a pontos megoldáshoz képest $N = 100$ osztópont esetén



2.3. ábra. A megoldás $N = 1000$ osztópont esetén

2.3. Második peremfeltétel esete

Most áttérünk arra az esetre, amikor a határpontokban a függvény deriváltjának értéke, vagyis a második peremfeltétel adott. Ekkor a feladatunk az

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x))$$
$$u'(a) = \alpha; \;\; u'(b) = \beta$$

másodfokú differenciálegyenlet. A közelítő megoldás megtalálásához $u(x)$ függvényt fogjuk közelíteni $\overline{\omega}_h$ rácspontokban a (2.3) és a (2.4) formulák segítségével. Beírjuk a központi differenciákat az egyenletbe és az

$$\frac{y(x_i+h) - 2y(x_i) + y(x_i-h)}{h^2} = f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_i+h) - y(x_i-h)}{2h}\right),$$
$$\frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h} = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} = \alpha;$$
$$\frac{y(x_{N+1}) - y(x_{N+1}-h)}{h} = \frac{y(x_{N+1}) - y(x_N)}{h} = \beta$$

egyenletrendszert kapjuk az $y(x_i)$ ismeretlenekre, ahol $i = 1, 2, \ldots, N$.

2.3.1. A lineáris eset

A lineáris kétpontos peremérték-feladat véges differenciás közelítése a rácspontokban az

$$\frac{y(x_i+h) - 2y(x_i) + y(x_i-h)}{h^2} = p(x_i)\frac{y(x_i+h) - y(x_i)}{h} + q(x_i)y(x_i) + r(x_i),$$
$$\frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} = \alpha; \;\; \frac{y(x_{N+1}) - y(x_N)}{h} = \beta,$$

egyenletrendszer alakjában írható fel, ezt átrendezve kapjuk az

$$-r(x_i) = \left[-\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{h}\right] y(x_i+h) + \left[\frac{2 - p(x_i)}{h} + q(x_i)\right] y(x_i) + \left[-\frac{1}{h^2}\right] y(x_i-h)$$
$$\frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} = \alpha; \;\; \frac{y(x_{N+1}) - y(x_N)}{h} = \beta,$$

egyenletet. Az első peremfeltételre felírt tételek ezekre is érvényesek lesznek.

Tekintsük most a következő speciális esetet:

$$u''(x) - c(x)u(x) = r(x), \;\; x \in [a, b] \;\text{ és }\; c > 0,$$
$$u'(a) = 0, \;\; u'(b) = 0$$

peremérték-feladatot vizsgáljuk, az általánosság megsértése nélkül vehető a peremfeltétel értéke 0-nak. Alkalmazzuk a (2.4) közelítést:

$$\frac{y(x_i+h)-2y(x_i)+y(x_i-h)}{h^2}-c(x_i)y(x_i)=r(x_i),\;\; i=1,2,\ldots,N, \tag{2.18}$$

azaz

$$-\frac{1}{h^2}y(x_i+h)+\left(\frac{2}{h^2}+c(x_i)\right)y(x_i)-\frac{1}{h^2}y(x_i-h)=-r(x_i) \quad \text{és}$$

$$\frac{y(x_1)-y(x_0)}{h}=0,\;\; \frac{y(x_{N+1})-y(x_N)}{h}=0. \tag{2.19}$$

A (2.19) kifejezésekből következik, hogy $y(x_1)=y(x_0)$ és $y(x_{N+1})=y(x_N)$, így a (2.18) egyenlet $i=1$, valamint $i=N$ indexre átírható a

$$-\frac{1}{h^2}y(x_2)+\left(\frac{1}{h^2}+c(x_1)\right)y(x_1)=-r(x_1),$$
$$\left(\frac{1}{h^2}+c(x_N)\right)y(x_N)-\frac{1}{h^2}y(x_{N-1})=-r(x_N)$$

egyszerűbb alakba.

Ennek segítségével feladatunk a második peremfeltétellel is felírható $\widetilde{L_{h2}}\widetilde{y_h}=\widetilde{r_h}$ mátrixos formában, ahol

$$\widetilde{L_{h_2}}=\begin{pmatrix} \frac{1}{h^2}+c(x_1) & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+c(x_2) & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+c(x_3) & -\frac{1}{h^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+c(x_{N-1}) & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2}+c(x_N) \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{y_h}=\begin{pmatrix} y(x_1) \\ y(x_2) \\ y(x_3) \\ \vdots \\ y(x_{N-1}) \\ y(x_N) \end{pmatrix} \quad \text{és} \;\; \widetilde{r_h}=-\begin{pmatrix} r(x_1) \\ r(x_2) \\ r(x_3) \\ \vdots \\ r(x_{N-1}) \\ r(x_N) \end{pmatrix}.$$

Ahogy az előző esetnél, itt is az $\widetilde{L_{h_2}}\in\mathbb{R}^{N\times N}$, $\widetilde{y_h}\in\mathbb{R}^N$ és $\widetilde{r_h}\in\mathbb{F}(\overline{\omega}_h)$. Az $\widetilde{L_{h_2}}$ mátrix M-mátrix, ugyanis az előjelstruktúrája megfelelő, és a 2.3. Tétel bizonyításában felhasznált $\mathbf{g_h}$ vektorral, amelynek koordinátái $1+ih((b-a)-ih)$ alakúak, beszorozva pozitív vektort kapunk. Ebből következik, hogy az inverz mátrix végtelen normában felülről becsülhető egy konstans értékkel, ami biztosítja a stabilitást.

A konvergencia bebizonyításához felírjuk a hibaegyenletet, az előző esetben látott módszerrel. Először is az $e_h(x_i) = y_h(x_i) - u(x_i)$ globális hibát behelyettesítjük a diszkretiációba:

$$\frac{e(x_i+h)+u(x_i+h)-2e(x_i)-2u(x_i)+e(x_i-h)+u(x_i-h)}{h^2} -$$
$$-c(x_i)(e(x_i)+u(x_i)) = r(x_i).$$

Az egyenlet átrendezésével az

$$\frac{e(x_i+h)-2e(x_i)+e(x_i-h)}{h^2} - c(x_i)e(x_i) = \frac{-u(x_i+h)+2u(x_i)-u(x_i-h)}{h^2} +$$
$$+c(x_i)u(x_i)+r(x_i) = -u''(x_i)+\mathcal{O}(h^2)+c(x_i)u(x_i)+u''(x_i)-c(x_i)u(x_i), \quad \text{azaz}$$
$$\frac{e(x_i+h)-2e(x_i)+e(x_i-h)}{h^2} = \mathcal{O}(h^2) = \Psi_i$$

eredményhez jutunk, ha $i = 1, \ldots, N-2$. És $(\Psi_h)_i = \mathcal{O}(h)$, ha $i = 0$, vagy $i = N+1$.

Mindezeknek köszönhetően a globális hiba maximum normában felülről becsülhető $\mathcal{O}(h)$ értékkel és tudjuk, hogy érvényesül a stabilitás ebből következik, hogy a módszer első rendben konvergens.

2.4. Harmadik peremfeltétel esete

A harmadik, vagyis Robin és Newton peremfeltétele az, amikor a határpontokban a függvény és deriváltjának lineáris kombinációjának értéke adott. Tehát a feladatunk az

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x))$$
$$u(a) + u'(a) = \alpha; \quad u(b) + u'(b) = \beta$$

differenciálegyenlet, ami az eddigiek általánosítása. Az $u(x)$ megoldást közelíteni tudjuk az $\overline{\omega}_h$ pontokban a (2.3) és a (2.4) formulák segítségével:

$$\frac{y(x_i+h) - 2y(x_i) + y(x_i-h)}{h^2} = f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_i+h) - y(x_i-h)}{2h}\right),$$
$$y(x_0) + \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h} = \frac{y(x_1) + (h-1)y(x_0)}{h} = \alpha;$$
$$y(x_{N+1}) + \frac{y(x_{N+1}) - y(x_{N+1}-h)}{h} = \frac{(h+1)y(x_{N+1}) - y(x_N)}{h} = \beta,$$

ahol $i = 1, 2, \ldots, N$.

2.4.1. A lineáris eset

A lineáris peremérték-feladat véges differenciás közelítése a rácspontokban felírható

$$\frac{y(x_i+h) - 2y(x_i) + y(x_i-h)}{h^2} = p(x_i)\frac{y(x_i+h) - y(x_i)}{h} + q(x_i)y(x_i) + r(x_i),$$
$$\frac{y(x_1) + (h-1)y(x_0)}{h} = \alpha; \quad \frac{(h+1)y(x_{N+1}) - y(x_N)}{h} = \beta$$

alakjában. Itt is a következő példát vizsgáljuk részletesen:

$$u''(x) - c(x)u(x) = r(x), \quad x \in [a, b]$$
$$u(a) + u'(a) = 0, \quad u(b) + u'(b) = 0.$$

Alkalmazva a (2.4) közelítést

$$\frac{y(x_i+h) - 2y(x_i) + y(x_i-h)}{h^2} - c(x_i)y(x_i) = r(x_i), \quad i = 0, 2, \ldots, N-1, \tag{2.20}$$

$$\frac{y(x_1) + (h-1)y(x_0)}{h} = 0; \quad \frac{(h+1)y(x_{N+1}) - y(x_N)}{h} = 0 \tag{2.21}$$

alakokhoz jutunk, mely átalakítható a következő módon:

$$-\frac{1}{h^2}y(x_i+h) + \left(\frac{2}{h^2} + c(x_i)\right)y(x_i) - \frac{1}{h^2}y(x_i-h) = -r(x_i) \text{ és}$$
$$y(x_0) = -\frac{1}{h-1}y(x_1), \quad y(x_{N+1}) = -\frac{1}{h+1}y(x_N).$$

Az egyenletrendszerünk együtthatómátrixa a következő:

$$\widetilde{L_{h3}} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+c(x_1)h^2+\frac{1}{h-1} & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+c(x_2)h^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2+c(x_3)h^2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2+c(x_{N-1})h^2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2+c(x_N)h^2+\frac{1}{h+1} \end{pmatrix}$$

Az $\widetilde{y_h}$ és az $\widetilde{r_h}$ vektorok pedig ugyanazok lesznek, mint a második peremfeltétel esetén. Érdekes módon a 2.3. Tétel bizonyításában alkalmazott $\mathbf{g_h}$ vektor alkalmas a $\widetilde{L_{h3}}$ mátrix M-mátrix voltának bizonyítására, amellett, hogy az előjelstruktúra itt is megfelelő.

Ugyanazon a gondolatmeneten végighaladva, mint az előző esetekben megkapjuk, hogy a fenti véges differenciál séma elsőrendben konvergál a kitűzött feladat megoldásához.

3. fejezet

A belövéses módszer

A peremérték-feladatok numerikus megoldása kezdetiérték-feladatra való visszavezetéssel

3.1. A módszer alapötlete

A peremérték-feladat numerikus megoldását visszavezetjük egy megfelelő kezdetiérték problémára. Az első fejezetben az $\mathbf{u} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ vektor segítségével írtuk fel a peremérték-feladatot rendszer alakjában, ahol $\mathbf{u} = (u_1(x), u_2(x))$ vektor és a komponensei $u_1(x) = u(x), u_2(x) = u'(x)$. Ekkor az egyenletrendszer a következő alakú:

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= f(x, u_1, u_2), \end{aligned}\right\} \ \mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \ \ x \in [a,b]$$

$$u_1(a) = \alpha; \ \ u_1(b) = \beta.$$

Ehelyett az

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \ \ x \in [a,b] \tag{3.1}$$

$$\mathbf{u}(a) = \mathbf{d} \tag{3.2}$$

feladatot oldjuk meg. A $\mathbf{d}$ vektor első koordinátáját $u_1(a) = \alpha$ határozza meg, második komponensét azonban nem ismerjük, feltételünk, hogy $u_2(a) = u_2'(a)$ teljesül, ezt fogjuk c-vel jelölni, azaz

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathsf{c} \end{pmatrix}.$$

A belövéses módszer lényege az, hogy ezt a c paramétert úgy határozzuk meg, hogy a (3.1) feladat első koordinátafüggvényének megoldása az $x = b$ pontban a β értéket vegye fel. Jelölje $\mathbf{u}(x, \mathsf{c})$ az egyenletrendszer c-től függő megoldását. Eredeti problémánkat tehát sikerült visszavezetnünk c állandó meghatározására, amellett, hogy teljesüljön az

$$u_1(b, \mathsf{c}) = \beta$$

egyenlőség.

Ha bevezetjük a $\varphi(\mathtt{c}) = u_1(b, \mathtt{c}) - \beta$ jelölést, a $\varphi(\mathtt{c}) = 0$ nemlineáris egyenletet kell megoldanunk, amelyben $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvény. Megoldására több ismert módszert is megmutatunk.

3.1.1. Intervallum-felező módszer

Az intervallum-felező módszer lényege, hogy keresünk olyan $\mathtt{c}_1$, $\mathtt{c}_2$ értékeket, amelyekre $\varphi(\mathtt{c}_1)\varphi(\mathtt{c}_2) < 0$, mert ekkor a $(\mathtt{c}_1, \mathtt{c}_2)$ nyílt intervallumon biztosan van az egyenletnek gyöke, amelyet megtalálhatunk, ha megkeressük a végpontok számtani közepét, és megvizsgáljuk, hogy a $\varphi(\mathtt{c}_1)\varphi(\frac{\mathtt{c}_1+\mathtt{c}_2}{2})$, vagy a $\varphi(\frac{\mathtt{c}_1+\mathtt{c}_2}{2})\varphi(\mathtt{c}_2)$, kisebb vagy egyenlő-e, mint 0. Ha egyenlő, az átlag lesz a gyök. Ha nem, arra az intervallumfélre folytatjuk az eljárást, aminek végpontjainak szorzata negatív. Addig folytatjuk ezt, amíg egy előre meghatározott $\varepsilon > 0$ számnál kisebb lesz a végpontok értékeinek különbsége.

A belövéses módszer során az intervallum-felező algoritmushoz hozzátartozik a φ függvény $x = b$ pontban felvett értékét sok $\mathtt{c}_\mathtt{i}$-et behelyettesítve ki kell számolnunk Cauchy-feladatra vonatkozó numerikus módszerrel.

1. Kezdetben tehát rögzítünk egy $\mathtt{c}$ értéket.
2. Majd megoldjuk a
$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \quad x \in [a, b]$$
$$\mathbf{u}(a) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathtt{c} \end{pmatrix}$$
kezdetiérték-feladatot egy ismert numerikus módszer segítségével.
3. Majd keresünk olyan $\mathtt{c}_1$ és $\mathtt{c}_2$ érékeket, amikre $x = b$ pontbeli megoldása ellentétes előjelűek lesznek.
4. Ezt követően kiszámoljuk ezt a kezdetiérték-feladatot $\mathtt{c}_3 = \frac{\mathtt{c}_1+\mathtt{c}_2}{2}$-vel.
5. A 4. lépés megoldására megint keresünk $\mathtt{c}_4$ és $\mathtt{c}_5$ értékeket, amik ellentétes előjelűek, majd megkapjuk a $\mathtt{c}_6 = \frac{\mathtt{c}_4+\mathtt{c}_5}{2}$ pontot.
6. Így folytatjuk tovább az eljárást, amíg a végpontok különbsége kisebb, mint ε.

3.1.2. Húrmódszer

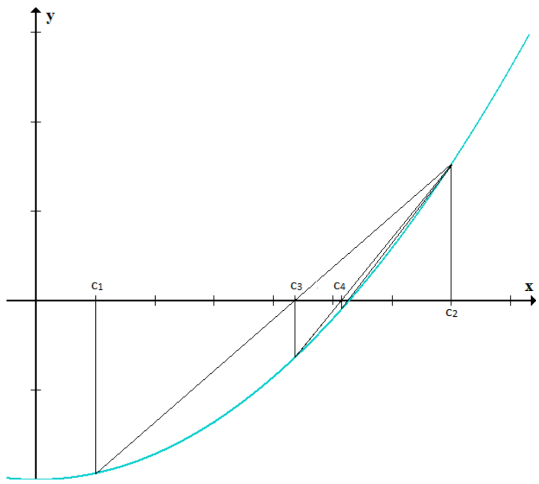
A húrmódszer elkezdéséhez ugyanúgy olyan $\mathtt{c}_1$, $\mathtt{c}_2$ értékeket keresünk az (a, b) intervallumon, amelyekre $\varphi(\mathtt{c}_1)\varphi(\mathtt{c}_2) < 0$. Abban tér el az előző módszertől a folytatás, hogy másképp találjuk meg gyököt. Az eljárás lebonyolításához írjuk fel az $(\mathtt{c}_1, \varphi(\mathtt{c}_1))$ és a $(\mathtt{c}_2, \varphi(\mathtt{c}_2))$ pontokon keresztülmenő húrt, azaz a pontokon átmenő egyenes egyenletét:

$$\varphi(\mathtt{c}_2) - \varphi(\mathtt{c}_1) = \frac{(\mathtt{c}_2 - \mathtt{c}_1)(y - \varphi(\mathtt{c}_1))}{x - \mathtt{c}_1}.$$

Legyen $(\mathtt{c}_3, 0)$ az a pont, ahol a húr és az x tengely metszi egymást. Behelyettesítve a fenti képletbe és átrendezve az egyenletet kapjuk, hogy

$$\mathtt{c}_3 = \mathtt{c}_1 + \frac{-\mathtt{c}_2 \cdot \varphi(\mathtt{c}_1) + \mathtt{c}_1 \cdot \varphi(\mathtt{c}_1)}{\varphi(\mathtt{c}_2) - \varphi(\mathtt{c}_1)}. \tag{3.3}$$

Ekkor igaz az, hogy ha $\varphi(\mathtt{c}_3) = 0$, megtaláltuk a φ egyetlen gyökét az intervallumon, ha viszont $\varphi(\mathtt{c}_3) \neq 0$, vagy a $(\mathtt{c}_1, \mathtt{c}_3)$ vagy a $(\mathtt{c}_3, \mathtt{c}_2)$ intervallumon folytatkjuk az eljárást aszerint, hogy a φ függvénybe behelyettesítve a végpontokat, melyek ellentétes előjelűek.



3.1. ábra. A húrmódszer

A belövéses módszer húrmódszeres algoritmusa a felezőmódszerhez nagyon hasonló, a különbség csak a 4. lépésben van, az új $\mathtt{c}_\mathtt{i}$ értéket a (3.3) képlet segítségével kapjuk.

3.1.3. Szelőmódszer

A szelőmódszer előnye, hogy az előzőektől eltérően nincs szükség ellentétes előjelű alappontok keresésére, hátránya viszont, hogy létezik olyan eset, amelyben nem találja meg a gyököt. A módszer egy pontsorozatot állít elő, a következő módon: legyen a $\mathtt{c}^{(0)} = a$ és a $\mathtt{c}^{(1)} = b$, az ezekhez tartozó $\varphi(\mathtt{c}^{(0)})$ és $\varphi(\mathtt{c}^{(1)})$ pontokon keresztül húzunk egy szelőt, az $\mathtt{c}^{(2)}$ pont a szelő és az X tengely metszete lesz. Ezt követően $\varphi(\mathtt{c}^{(1)})$ illetve $\varphi(\mathtt{c}^{(2)})$ pontokon át húzzuk a szelőt, és az eljárást addig a k-adik lépésig folytatjuk, amíg $|\varphi(\mathtt{c}^{(k)})| < \varepsilon$ egy előre meghatározott $\varepsilon > 0$ értékre. Ekkor a $\mathtt{c}^{(i)}$ sorozat a φ függvény gyökéhez fog tartani.

A belövéses módszer algoritmusa az alábbi, ha a szelőmódszert alkalmazzuk:

1. Választunk tetszőleges $\mathtt{c}^{(0)}$ és $\mathtt{c}^{(1)}$ értékeket.
2. Megoldjuk az

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \quad x \in [a, b]$$
$$\mathbf{u}(a) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathtt{c}^{(0)} \end{pmatrix}$$

Cauchy-feladatot egy ismert numerikus módszer segítségével, majd $\mathsf{c}^{(1)}$-et behelyettesítve is megkeressük a megoldást.

3. A helyettesítési értékek kiszámolhatók $\varphi(\mathsf{c}^{(0)}) = u_1(b, \mathsf{c}^{(0)}) - \beta$ és $\varphi(\mathsf{c}^{(1)}) = u_1(b, \mathsf{c}^{(1)}) - \beta$ képletek segítségével.

4. Meghatározzuk a $\mathsf{c}^{(2)}$ pontot, ahol ez a közelítés 0 értéket vesz fel:

$$\mathsf{c}^{(2)} = \mathsf{c}^{(1)} - \left(\frac{\mathsf{c}^{(1)} - \mathsf{c}^{(0)}}{\varphi(\mathsf{c}^{(1)}) - \varphi(\mathsf{c}^{(0)})} \right) \varphi(\mathsf{c}^{(1)})$$

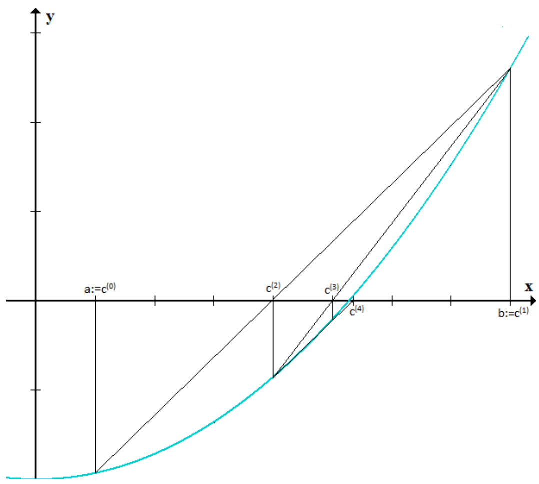
5. Behelyettesítjük $\mathsf{c}^{(2)}$-t a fenti kezdetiérték-feladatba, kiszámítjuk a megoldását egy numerikus módszerrel és meghatározzuk $\varphi(\mathsf{c}^{(2)})$ értéket.

6. Az aloritmust így folytatjuk tovább a

$$\mathsf{c}^{(k)} = \mathsf{c}^{(k-1)} - \left(\frac{\mathsf{c}^{(k-1)} - \mathsf{c}^{(k-2)}}{\varphi(\mathsf{c}^{(k-1)}) - \varphi(\mathsf{c}^{(k-2)})} \right) \varphi(\mathsf{c}^{(k-1)})$$

   képlet segítségével, majd kiszámítjuk a $\varphi(\mathsf{c}^{(k)})$-t is.

7. Akkor fejezzük be az eljárást, ha a $|\varphi(\mathsf{c}^{(k)})| < \varepsilon$ egy előre kijelölt $\varepsilon > 0$ határra.



3.2. ábra. A szelőmódszer

3.1.4. Newton-módszer

A Newton-módszer is létrehoz egy pontsorozatot, amely másodrendben tart a függvény gyökéhez. A zéruspont megtalálásához az algoritmus kiindul az intervallum egyik végpontjából, ez lesz a $\mathsf{c}^{(0)}$ érték. Ezután a $\varphi(\mathsf{c}^{(0)})$ pontból érintőt húzunk, ahol ez metszi az x tengelyt, az a pont lesz a $\mathsf{c}^{(1)}$, majd megkeressük a $\varphi(\mathsf{c}^{(1)})$-ből húzott érintő x tengellyel vett metszetét, így kapjuk az $\mathsf{c}^{(2)}$ közelítést, és így haladunk tovább, amíg elérünk egy $\varepsilon > 0$ határt, tehát ha $|\varphi(\mathsf{c}^{(k)})| < \varepsilon$.

A $\mathsf{c}^{(k+1)} = \mathsf{c}^{(k)} - \dfrac{\varphi(\mathsf{c}^{(k)})}{\varphi'(\mathsf{c}^{(k)})}, \quad k = 0, 1, \dots$

iterációval megtalálhatjuk a sorozat elemeit. Kérdéses viszont a $\varphi'(\mathsf{c}^{(k)})$ értékének kiszámítása. Ehhez a következőkben a (3.1) feladatot vissza fogjuk vezetni egy négyismeretlenes elsőrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer kezdetiérték-feladatára. A belövéses módszer tulajdonképpen azt jelenti, hogy az

$$
\begin{aligned}
&u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) \quad x \in (a, b),\\
&u(a) = \alpha; \;\; u'(a) = \mathsf{c}
\end{aligned}
$$

feladatot oldjuk meg, megfelelő $\mathsf{c} \in \mathbb{R}$ választással. Legyen ennek megoldása $u(x, \mathsf{c})$ függvény, ezt beírva kapjuk az

$$
\begin{aligned}
&u''(x, \mathsf{c}) = f(x, u(x, \mathsf{c}), u'(x, \mathsf{c})) \quad x \in (a, b),\\
&u(a, \mathsf{c}) = \alpha; \;\; u'(a, \mathsf{c}) = \mathsf{c}
\end{aligned}
$$

összefüggést. Lederiváljuk a c paraméter szerint, azt kapjuk, hogy:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u''}{\partial \mathsf{c}}(x, \mathsf{c}) = \frac{\partial f(x, u(x, \mathsf{c}), u'(x, \mathsf{c}))}{\partial u(x, \mathsf{c})} \frac{\partial u}{\partial \mathsf{c}}(x, \mathsf{c}) + \frac{\partial f(x, u(x, \mathsf{c}), u'(x, \mathsf{c}))}{\partial u'(x, \mathsf{c})} \frac{\partial u'}{\partial \mathsf{c}}(x, \mathsf{c})\\
&\frac{\partial u(a, \mathsf{c})}{\partial \mathsf{c}} = 0; \;\; \frac{\partial u'(a, \mathsf{c})}{\partial \mathsf{c}} = 1.
\end{aligned}
$$

Bevezetjük a

$$
w(x) := \frac{\partial u}{\partial \mathsf{c}}(x, \mathsf{c})
$$

függvényt, beírva az egyenletbe

$$
\begin{aligned}
&w''(x) = \frac{\partial f(x, u(x, \mathsf{c}), u'(x, \mathsf{c}))}{\partial u(x, \mathsf{c})} w(x) + \frac{\partial f(x, u(x, \mathsf{c}), u'(x, \mathsf{c}))}{\partial u'(x, \mathsf{c})} w'(x)\\
&w(a) = 0; \;\; w'(a) = 1
\end{aligned}
$$

kifejezéshez jutunk.

A négyismeretlenes elsőrendű rendszerhez vezessünk be új függvényeket:

$$
v_1(x) = u(x, \mathsf{c}); \; v_2(x) = u'(x, \mathsf{c}); \; v_3(x) = w(x); \; v_4(x) = w'(x).
$$

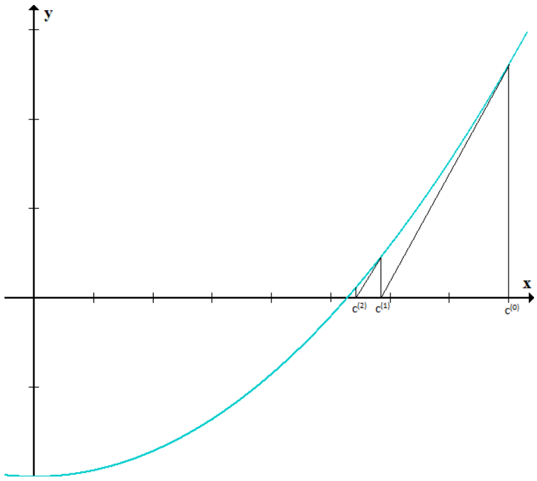
Az előzőek alapján a

$$
\begin{aligned}
&v_1'(x) = v_2(x),\\
&v_2'(x) = f(x, v_1(x), v_2(x)),\\
&v_3'(x) = v_4(x),\\
&v_4'(x) = \frac{\partial f(x, v_1(x), v_2(x))}{\partial v_1(x)} v_3(x) + \frac{\partial f(x, v_1(x), v_2(x))}{\partial v_2(x)} v_4(x),\\
&v_1(a) = \alpha; \; v_2(a) = \mathsf{c}; \; v_3(a) = 0; \; v_4(a) = 1
\end{aligned}
$$

négyismeretlenes elsőrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer kezdetiérték-feladatát kapjuk, amit az $[a, b]$ intervallumon megoldva meghatározhatjuk az ismeretlen függvényeket.

A $\varphi'(\mathsf{c}^{(k)})$ értéket ennek segítségével már meg tudjuk határozni, ugyanis

$$
\begin{aligned}
&v_3(b) = w(b) = \frac{\partial u}{\partial \mathsf{c}}(b, \mathsf{c}) \text{ és} \\
&\varphi(\mathsf{c}) = u_1(b, \mathsf{c}) - \beta.
\end{aligned}
$$



3.3. ábra. A Newton-módszer

A belövéses módszer algoritmusa a Newton-módszert felhasználva a következő:

1. Kiválasztunk egy $\mathsf{c}^{(0)}$ értéket, egy elsőrendű módszerrel.
2. Megoldjuk a $\mathsf{c} = \mathsf{c}^{(0)}$ megválasztással a fenti négyismeretlenes rendszer Cauchy-feladatát egy ismert numerikus módszerrel.
3. Kiszámoljuk a $\varphi(\mathsf{c}^{(0)}) = v_1(b)$ és $\varphi'(\mathsf{c}^{(0)}) = v_3(b)$ értékeket.
4. A $\mathsf{c}^{(k+1)} = \mathsf{c}^{(k)} - \frac{\varphi(\mathsf{c}^{(k)})}{\varphi'(\mathsf{c}^{(k)})}$ képlet segítségével kiszámoljuk $\mathsf{c}^{(k)}$ közelítést, ahol $k = 1, 2, \ldots$
5. Az iterációt addig folytatjuk, amíg $|\varphi(\mathsf{c}^{(k)})| < \varepsilon$ egy előre megadott $\varepsilon > 0$ számra.

4. fejezet

Függelék: Az M-mátrix

Dolgozatomban több bizonyításban felhasználtam az M-mátrixok tulajdonságait, ezért ebben a fejezetben röviden ismertetem a legfontosabb rávonatkozó tételeket. [1]

4.1. Definíció (M-mátrix). *Egy $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mátrixot M-mátrixnak nevezünk, ha a diagonálison kívüli elemei nempozitívak, és van olyan pozitív $g \in \mathbb{R}^m$ vektor, amellyel $Ag > 0$.*

4.1. Tétel (Az M-mátrixokra vonatkozó alaptétel). *Ha az A mátrix M-mátrix, akkor reguláris és $A^{-1} \geq 0$.*

4.2. Tétel. *Egy M-mátrix főátlójának elemei pozitívak.*

4.3. Tétel. *Ha az A mátrix M-mátrix, akkor inverze normában felülről becsülhető az*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\|g\|_\infty}{\min\limits_i (Ag)_i}$$

összefüggéssel.

5. fejezet

Összefoglalás

Dolgozatomban két numerikus módszert mutattam be egydimenziós peremérték-feladatok megoldására. A véges differenciás approximáció az első peremfeltétel esetén másodrendű, második és harmadik feltételnél elsőrendű konvergenciát eredményezett. A módszer különösen is hatékony lineáris feladatok esetén.

Ha az $u'' = f(x, u(x), u'(x))$ képletben az f függvény nemlineáris, érdemes a belövéses módszer algoritmusát alkalmazni. Míg az intervallum-felező, húr- és szelőmódszerrel elsőrendű, a Newton-módszerrel másodrendű konvergencia érhető el, hátránya viszont, hogy a konvergenciához további feltételekre van szükség.

A magasabb rendű differenciálegyenlet esetén a véges differenciás séma már nehezen alkalmazható, a gyakorlatban leggyakrabban használt algoritmus a végeselem módszer, amely azon az ötleten alapul, hogy a feladat megoldását szakaszonként polinomfüggvényekkel közelítjük.

Irodalomjegyzék

[1] Faragó István: *Numerikus modellezés és közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldási módszerei.*, 2013., (internetjegyzet)

[2] Faragó István, Horváth Róbert: *Numerikus módszerek.*, 2013.

[3] Faragó István, Fekete Imre, Horváth Róbert: *Numerikus módszerek példatár.*, 2013.

[4] Stoyan Gisbert, Takó Galina: *Numerikus módszerek II.*, 1995.

[5] Simon Péter, Tóth János: *Differenciálegyenletek.*, 2005.

[6] `http://aries.ektf.hu/~holovacs/numerikus` *(2015. 04. 28.)*