

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Modellezés egy- és többdimenziós lineáris folyamatokkal

Szakdolgozat

Készítette: Zámbo Anita
Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Pröhle Tamás
Matematika Intézet
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



Budapest

2015

NYILATKOZAT

Név: Zámbo Anita

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

ETR azonosító: BTLDMC

Szakedolgozat címe: Modellezés egy- és többdimenziós lineáris folyamatokkal

A szakedolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2015 május 29.

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Címlap	1
Nyilatkozat	i
Tartalomjegyzék	ii
Bevezetés	iv
1. Alapvető fogalmak	1
1.1. Bevezető	1
1.2. Gyakran használt operátorok	1
1.3. Lineáris szűrő modell	2
1.4. Autoregresszív modellek	2
1.5. Mozgóátlag modellek	4
1.6. Összetett autoregresszív-mozgóátlag modellek	5
2. Lineáris stacionárius modellek tulajdonságai	6
2.1. Lineáris modellek tulajdonságai	6
2.1.1. Az AR és az MA paraméterek közti kapcsolat	7
2.1.2. Lineáris folyamatok autokovariancia generátorfüggvénye	8
2.1.3. Lineáris folyamatok stacionaritási és invertálhatósági feltétele	8
2.2. Autoregresszív folyamatok	9
2.2.1. AR folyamatok stacionaritási és invertálhatósági feltételei	9
2.2.2. Autoregresszív folyamatok autokorreláció függvénye	11
2.2.3. Autoregresszív paraméterek az autokorreláció függvényében	12
2.2.4. Variancia	13
2.2.5. Elsőrendű autoregresszív (Markov) folyamat	13
2.2.6. Másodrendű autoregresszív folyamat	14
2.2.7. Parciális autokorreláció függvény	15
2.3. Mozgóátlag folyamatok	17
2.3.1. MA folyamatok stacionaritási és invertálhatósági feltételei	17
2.3.2. Mozgóátlag folyamatok autokorreláció függvénye	18
2.3.3. Elsőrendű mozgóátlag folyamat	19
2.3.4. Másodrendű mozgóátlag folyamat	20
2.4. Dualitás az autoregresszív és mozgóátlag folyamatok között	21
2.5. Autoregresszív-mozgóátlag folyamatok	22
2.5.1. Stacionaritási és invertálhatósági feltételek	22
2.5.2. Autokorreláció függvény	24
2.5.3. Variancia	24
2.5.4. Parciális autokorreláció függvény	25
2.5.5. Az ARMA(1,1) folyamat	25
3. VARMA modell	28
3.1. Vektor ARMA folyamatok	28
3.2. Polinom mátrixok tulajdonságai	29
3.3. VARMA folyamatok Kronecker indexei	31

3.4. VARMA folyamatok echelon formája	31
3.5. VARMA folyamatok kanonikus formái	33
4. VARMA becslés	36
4.1. Az algoritmus paramétereinek felépítése	36
4.2. A Dufour-Pelletier féle három lépéses algoritmus	41
4.3. Egy tesztfuttatás és az eredménye	43
Irodalomjegyzék	46

Bevezetés

Az első két fejezet az egydimenziós ARMA folyamatokkal kapcsolatos legfontosabb tudnivalókat foglalja össze. E fejezetek anyaga kevéssel halad túl az egyetemi tananyag keretein. Inkább csak annak nagyobb részletezésében, kisebb kiegészítéseiben van jelentősége.

Az első fejezet a lineáris folyamatokkal kapcsolatos alapfogalmakat, a második az egydimenziós AR, MA és ARMA folyamatok néhány fontos tulajdonságát foglalja össze.

A dolgozat harmadik és negyedik fejezete többdimenziós lineáris folyamatokkal foglalkozik. A többdimenziós lineáris folyamat formálisan az egydimenziósakkal azonos strukturájú. Ám az, hogy a többdimenziós polinom mátrixok szorzása – szemben az egydimenziós esettel – nem kommutatív, minőségbelileg új helyzetet jelent. Többek között azzal a következménnyel, hogy e folyamatok identifikálásához a fokszám megadásán kívül olyan feltételekre is szükség van, amelyek az egydimenziós feltételek ismeretében teljességgel váratlanok. Nevezetesen ahhoz, hogy egy VARMA (vektor ARMA) formában felírt folyamat egyértelmű legyen nem elégséges a fokszámok megadása, hanem további, egészen más jellegű egyértelműsítő feltételek is szükségesek.

A harmadik fejezet a többdimenziós ARMA folyamatok néhány egyértelműsítő módszerét mutatja be. A negyedik fejezet a többdimenziós ARMA, azaz a VARMA folyamatok egy, a szokványos kétlépéses, regresszió alapuló becslő módszerét egy újabb lépéssel módosító eljárását ismerteti. A fejezet végén az előzőekben leírt háromlépéses módszer egy megvalósítását és teszt futtatását ismerteti.

1. Alapvető fogalmak

1.1. Bevezető

A valóságban sok problémát időtől függő változónak kell tekintenünk, melyekben rengeteg az olyan ismeretlen tényező, amelyek jövőbeni viselkedésének becslésére nem írhatunk determinisztikus modellt. Mindazonáltal lehetséges olyan modellek építése, levezetése, amelyekkel meghatározhatjuk a folyamat jövőbeni értékeit adott hibahatárok között. Az ilyen modelleket valószínűségi vagy sztochasztikus modellnek nevezzük.

Fontos, hogy különbséget tegyünk a valószínűségi modell és a sztochasztikus folyamat, vagyis az úgynevezett megfigyelt idősor között. Az N egymást követő megfigyelésből álló y_1, \dots, y_N idősort úgy tekintjük, mint egy sokdimenziós valószínűségi változó megfigyelését, ahol az egyes dimenziók, azaz y_k értékek egymástól nem feltétlenül függetlenek. A 3. és 4. fejezetben olyan esetekkel is foglalkozni fogunk, ahol az egyes koordináták, az y_k értékek maguk is többdimenziósak. A sztochasztikus folyamatot leggyakrabban egyszerűen csak folyamatnak nevezzük.

Az idősorok sztochasztikus modelljeinek egy figyelemreméltó és fontos csoportját alkotják az úgynevezett stacionárius modellek, melyeknél feltételezzük, hogy a folyamat egyensúlyban marad egy konstans átlagos szint mentén. Ebben a dolgozatban is az ebbe a csoportba tartozó folyamatokat tárgyaljuk. Emellett egy másik fontos csoportot alkotnak a nemstacionárius modellek, melyeket gyakran alkalmaznak például az iparban, az üzleti életben és gazdaságban, ahol számos idősor gyakran jobban jellemezhető nemstacionárius modellekkel.

1.2. Gyakran használt operátorok

Sokszor alkalmaznunk kell az L visszafelé eltolás operátort, amit a következőképp definiálunk:

$$Ly_t = y_{t-1}, \text{ ismételt alkalmazás esetén: } L^m y_t = y_{t-m}.$$

Az inverz műveletet az $F = L^{-1}$ előre tolás operátorral végezhethetjük el, melyet a következőképpen definiálunk:

$$Fy_t = y_{t+1}, \text{ ismételt alkalmazás esetén: } F^m y_t = y_{t+m}.$$

1.3. Lineáris szűrő modell

Az alkalmazott sztochasztikus modellek tipikusan azon a feltevésen alapulnak, hogy a megfigyelt idősorok, amelyekben az egymást követő értékek összefüggőek, előállíthatóak olyan a_t véletlen zaj sorozatokból, amelyeknek tagjai függetlenek és azonos eloszlás szerinti.

A zaj értékekről – a függetlenségen és az azonos eloszlásúságon kívül – általában azt is feltesszük, hogy normális eloszlásúak, várható értékük 0 és varianciájuk egy σ_a^2 konstans. Az ilyen $\dots, a_{t-1}, a_t, a_{t+1}, \dots$ véletlen változók sorozatát fehérzaj folyamatnak nevezzük.

A megfigyelt folyamatokról pedig azt tételezzük fel, hogy azok a megfelelő a_t fehérzaj folyamatból egy megfelelő, úgynevezett lineáris szűrő által keletkeznek. E szűrők szerint a folyamat t időpontbeli y_t értéke egyszerűen egy súlyozott összege az összes nem későbbi $a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots$ zajértéknek, egy esetleg nem nulla μ_t átlagérték mellett:

$$y_t = \mu_t + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = \mu_t + \psi(L)a_t.$$

Általában μ_t egy konstans, lineáris vagy exponenciálisan növekvő paraméter, amely a folyamat "szintjét" (vagy másképpen átlagértékét, trendjét) határozza meg, és

$$\psi(z) = 1 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \dots$$

a $z \Leftrightarrow L$ mellett a $\psi(L) + \mu_t$ az a lineáris operátor, amely a_t folyamatot az y_t folyamattá alakítja. A $\psi(z)$ függvényt a szűrő átviteli függvényének nevezzük. A súlyok által alkotott ψ_1, ψ_2, \dots sorozat - alkalmilag - lehet véges vagy végtelen. Ha a sorozat véges vagy pedig végtelen, és a következőképpen abszolút összegezhető:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty,$$

akkor azt mondjuk, hogy a szűrő stabil és az y_t folyamat stacionárius. Egyébként y_t nemstacionárius. A μ_t -nek ebből a szempontból nincs konkrét jelentése, mindössze a folyamat szintjének referencia pontját határozza meg.

1.4. Autoregresszív modellek

A sztochasztikus modellek közül a gyakorlatban előforduló idősorok reprezentációjában nagyon fontosak az úgynevezett autoregresszív modellek. Ezeknél a folyamat jelenbeli értékét egy additív zaj mellett, a folyamat korábbi értékeinek véges, lineáris aggregációjaként fejezzük ki.

Jelölje a folyamat időben egymástól egyenlő távolságra lévő $t, t-1, t-2, \dots$ pillanatbeli értékeit rendre $y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$, a μ_t -től való eltérést pedig $\tilde{y}_t, \tilde{y}_{t-1}, \tilde{y}_{t-2}, \dots$ azaz legyen $\tilde{y}_t = y_t - \mu_t$, tetszőleges t időpontban. Ekkor az

$$\tilde{y}_t = \varphi_1 \tilde{y}_{t-1} + \varphi_2 \tilde{y}_{t-2} + \dots + \varphi_p \tilde{y}_{t-p} + a_t$$

modellt p -edrendű autoregresszív (AR) modellnek nevezzük. Az autoregresszív operátort a

$$\varphi(L) = 1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_p L^p$$

képlettel definiálva a modell a következő alakban is felírható:

$$\varphi(L)\tilde{y}_t = a_t.$$

A modell tehát $p + 2$ ismeretlen paramétert tartalmaz: éspedig a $\mu, \varphi_1, \dots, \varphi_p, \sigma_a^2$ -t. E paraméterek egy megfigyelt folyamat esetén általában ismeretlenek. Ezért legtöbbször a rendelkezésre álló adatokból kell megbecsülnünk ezeket.

Belátható, hogy az AR modell egy speciális esete a korábban definiált lineáris szűrő modellnek. Tehát az \tilde{y}_t AR folyamat tekinthető úgy, mint egy $\varphi^{-1}(z)$ átviteli függvényű lineáris szűrő modell kimenete, egy megfelelő a_t bemeneti folyamat esetén.

Fejezzük ki ugyanis \tilde{y}_{t-1} -et az AR folyamatot megadó képlet segítségével:

$$\tilde{y}_{t-1} = \varphi_1 \tilde{y}_{t-2} + \varphi_2 \tilde{y}_{t-3} + \dots + \varphi_p \tilde{y}_{t-p-1} + a_{t-1}.$$

És hasonlóképpen a \tilde{y}_{t-2} folyamat értéket, és így tovább. Megfelelő feltételek fennállása esetén az a_t értékek egy végtelen, súlyozott sorösszegéhez jutunk, mert a korábbi \tilde{y}_t értékek elhanyagolható súllyal szerepelnek. Így látható, hogy a

$$\varphi(L)\tilde{y}_t = a_t$$

egyenlet ekvivalens a következővel:

$$\tilde{y}_t = \psi(L)a_t,$$

ahol

$$\psi(z) = \varphi^{-1}(z),$$

ez azt mutatja, hogy egy véges AR folyamat felírható egy végtelen MA folyamat formájában. Az AR folyamatok lehetnek stacionáriusak és nemstacionáriusak. A stacionaritáshoz szükséges feltételeket a dolgozat következő fejezetében tárgyaljuk.

A gyakorlatban az első és a másodrendű autoregresszív folyamatok bírnak a legnagyobb jelentőséggel.

Az elsőrendű autoregresszív folyamat általános alakja:

$$\tilde{y}_t = \varphi_1 \tilde{y}_{t-1} + a_t.$$

A másodrendű autoregresszív folyamat általános alakja:

$$\tilde{y}_t = \varphi_1 \tilde{y}_{t-1} + \varphi_2 \tilde{y}_{t-2} + a_t.$$

1.5. Mozgóátlag modellek

A sztochasztikus modellek egy másik, szintén nagy jelentőséggel bíró csoportját az úgynevezett mozgóátlag modellek alkotják. E modellek esetén az \tilde{y}_t folyamat értékeit végecsok, q darab korábbi a_t érték függvényeként írjuk fel. Pontosabban, ha a folyamat egy megfelelő a_t zaj mellett az:

$$\tilde{y}_t = a_t - \vartheta_1 a_{t-1} - \vartheta_2 a_{t-2} - \dots - \vartheta_q a_{t-q}$$

alakba írható, akkor azt mondjuk, hogy a folyamat q -adrendű mozgóátlag.

A mozgóátlag operátort a

$$\vartheta(L) = 1 - \vartheta_1 L - \vartheta_1 L^2 - \dots - \vartheta_q L^q$$

képlettel definiálva a modell felírható röviden a következő alakban:

$$\tilde{y}_t = \vartheta(L)a_t.$$

Tehát a mozgóátlag folyamatot tekinthetjük egy lineáris szűrő modell \tilde{y}_t kimenetének $\vartheta(z)$ átviteli függvénnyel és a_t bemeneti folyamattal.

A modell (mint látható) $q + 2$ ismeretlen paramétert tartalmaz: $\mu, \vartheta_1, \dots, \vartheta_q, \sigma_a^2$. Ezek általában ismeretlenek, ezért értéküket legtöbbször a megfigyelt adatokból kell megbecsülni.

Gyakorlatban, a mozgóátlag folyamatok körében is az első- és másodrendűek bírnak a legnagyobb jelentőséggel.

Az elsőrendű mozgóátlag folyamat általános alakja:

$$\tilde{y}_t = a_t - \vartheta_1 a_{t-1} = (1 - \vartheta_1 L)a_t.$$

Mint könnyen belátható, ez a folyamat ha a $|\vartheta_1| < 1$, akkor felírható egy végtelen autoregresszív folyamatként a következőképp az általános alakból:

$$(1 - \vartheta_1 L)^{-1} \tilde{y}_t = a_t$$

aminek alapján

$$\tilde{y}_t = -\vartheta_1 \tilde{y}_{t-1} - \vartheta_1^2 \tilde{y}_{t-2} - \dots + a_t.$$

Másodrendű mozgóátlag folyamat általános alakja:

$$\tilde{y}_t = a_t - \vartheta_1 a_{t-1} - \vartheta_2 a_{t-2}.$$

1.6. Összetett autoregresszív-mozgóátlag modellek

Az idősor modellek hatékonyságának növeléséhez néha előnyös autoregresszív és mozgóátlag elemeket egyszerre belevenni a modellbe. Így jutunk az úgynevezett összetett autoregresszív és mozgóátlag (továbbiakban: autoregresszív-mozgóátlag vagy ARMA) folyamatokhoz.

Az autoregresszív-mozgóátlag folyamatok általános alakja a következő:

$$\tilde{y}_t = \varphi_1 \tilde{y}_{t-1} + \dots + \varphi_p \tilde{y}_{t-p} + a_t - \vartheta_1 a_{t-1} - \dots - \vartheta_q a_{t-q}.$$

Ugyanez rövid formában:

$$\varphi(L)\tilde{y}_t = \vartheta(L)a_t.$$

Egy ilyen modellnek, mint az látható, $p+q+2$ paramétere van: $\mu, \varphi_1, \dots, \varphi_p; \vartheta_1, \dots, \vartheta_q, \sigma_a^2$. E paraméterek általában ismeretlenek, és a rendelkezésre álló adatokból kell megbecsülnünk őket.

Mivel az autoregresszív-mozgóátlag modell a következő formában is felírható:

$$\tilde{y}_t = \varphi^{-1}(L)\vartheta(L)a_t = \frac{\vartheta(L)}{\varphi(L)}a_t,$$

ezért az összetett autoregresszív-mozgóátlag folyamatot tekinthetjük úgy mint egy olyan lineáris szűrő modell \tilde{y}_t kimenetét az a_t bemeneti folyamattal, amelynek átviteli függvénye a $\vartheta(z)$ és a $\varphi(z)$ hányadosa.

Mivel $\tilde{y}_t = y_t - \mu_t$, ahol a μ_t a \tilde{y}_t stacionaritása mellett az y_t folyamat várható értéke, azaz ha $\mu_t = E[y_t]$ és ha a $\mu_t = \mu$ konstans, akkor az általános $ARMA(p, q)$ folyamat könnyen felírható ekvivalensen az eredeti y_t folyamat tagjaival kifejezve:

$$\varphi(L)y_t = \tilde{\vartheta}_0 + \vartheta(L)a_t,$$

ahol a modell $\tilde{\vartheta}_0$, konstans tagja a következőképp írható fel:

$$\tilde{\vartheta}_0 = (1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \dots - \varphi_p)\mu.$$

Az AR, MA és ARMA modellekkel többnyire megfelelően reprezentálhatók olyan valós idősorok, amelyekben a p, q paraméterek nem nagyobbak kettőnél.

2. Lineáris stacionárius modellek tulajdonságai

2.1. Lineáris modellek tulajdonságai

Egy általános lineáris sztochasztikus modell alkalmazásakor azt feltételezzük, hogy az idősort véletlen (független, korrelálatlan) zaj lineáris összegzése generálja. Gyakorlati reprezentációkhoz olyan modelleket szeretnénk alkalmazni, amelyek kevés paramétert tartalmaznak. Ez a takarékoság gyakran elérhető alacsony fokszámú autoregresszív és mozgóátlag komponens figyelembe vételével.

Általános lineáris folyamat két ekvivalens formája

Az előző részben láthattuk, hogy a sztochasztikus folyamatok reprezentációját tekinthetjük egy lineáris szűrő kimenetének, melynek bemenete a_t fehérzaj folyamat. Így a folyamat felírható az

$$\tilde{y}_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j a_{t-j} \quad (1)$$

formában, ahol $\tilde{y}_t = y_t - \mu$ a folyamatnak a saját átlagértékétől (esetleg saját trendjétől) való eltérése. Az (1) szerinti lineáris folyamat modell az \tilde{y}_t folyamatot az a_t fehérzaj folyamat jelen- és múltbeli értékeinek súlyozott összegeként állítja elő. Az a_t fehérzaj folyamatot tekinthetjük úgy, mint egy zajt, ami a megfigyelt folyamatot generálja. Ez egy 0 várható értékű és konstans varianciájú, korrelálatlan véletlen változók sorozata, melyre

$$E[a_t] = 0$$

és

$$\text{var}[a_t] = \sigma_a^2.$$

Az a_t véletlen változók korrelálatlanságából következik, hogy ezek autokovariancia-függvénye

$$\gamma_k = E[a_t a_{t+k}] = \sigma_a^2, \text{ ha } k = 0$$

és

$$\gamma_k = E[a_t a_{t+k}] = 0, \text{ ha } k \neq 0.$$

Így az a_t fehérzaj autokorreláció függvénye felírható a következő, egyszerű formában:

$$\rho_k = 1, \text{ ha } k = 0$$

és

$$\rho_k = 0, \text{ ha } k \neq 0.$$

Ahhoz, hogy az (1) szerinti lineáris \tilde{y}_t folyamat egy valódi stacionárius folyamatot reprezentáljon, kell, hogy a ψ_j együtthatók négyzetösszege véges legyen: $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$. Az (1)-es lineáris folyamat modell - a megfelelő körülmények között - azt is magában foglalja, hogy \tilde{y}_t felírható az \tilde{y}_t korábbi értékeinek súlyozott összegeként egy hozzáadott a_t hibataggal:

$$\tilde{y}_t = \pi_1 \tilde{y}_{t-1} + \pi_2 \tilde{y}_{t-2} + \dots + a_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{y}_{t-j} + a_t. \quad (2)$$

Ezt az alternatív formát tekinthetjük egy olyanak, ahol a y_t μ -tól való eltérését regresszáljuk a folyamat korábbi értékeinek μ -tól való eltéréseire.

2.1.1. Az AR és az MA paraméterek közti kapcsolat

A φ és ψ súlyok közötti kapcsolat vizsgálatához a korábban definiált L visszaléptető operátort használjuk, mely szerint az $Ly_t = y_{t-1}$, innen $L^m y_t = y_{t-m}$.

Az (1) által definiált lineáris folyamat általában felírható a következő formában:

$$\tilde{y}_t = \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j L^j\right) a_t$$

vagy

$$\tilde{y}_t = \psi(L) a_t, \quad (3)$$

ahol

$$\psi(z) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j$$

$\psi_0 = 1$ esetén. Az \tilde{y}_t és a_t folyamatokat összekapcsoló lineáris szűrő $\psi(z)$ átviteli függvényét tekinthetjük úgy, mint a ψ_j súlyok generátorfüggvényét.

A (2)-es képletet egyszerűbb alakra hozva a következőket kapjuk:

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j L^j\right) \tilde{y}_t = a_t$$

vagy

$$\pi(L) \tilde{y}_t = a_t. \quad (4)$$

Így megkapjuk a π súlyok generátorfüggvényét:

$$\pi(z) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z^j.$$

Az \tilde{y}_t folyamatra alkalmazva előbb a (4) majd a (3) szerinti egyenlőséget, azt kapjuk, hogy:

$$\psi(L) \pi(L) \tilde{y}_t = \psi(L) a_t = \tilde{y}_t.$$

Tehát $\psi(z) \pi(z) = 1$ vagyis

$$\pi(z) = \psi^{-1}(z).$$

Ezt az összefüggést használva a ψ együtthatók ismeretében megkapjuk a π együtthatókat és fordítva.

2.1.2. Lineáris folyamatok autokovariancia generátorfüggvénye

Az adatelemzés és a modellillesztés alapvető eszköze az autokovariancia függvény. Az (1) alakú lineáris folyamat autokovariancia függvénye a következőképp adható meg:

$$\gamma_k = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}.$$

Ez alapján $k = 0$ megválasztással az y_t varianciája a következő:

$$\gamma_0 = \sigma_y^2 = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2. \quad (5)$$

Mint látható, a stacionaritáshoz szükséges korábbi feltétel, miszerint $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, megegyezik azzal, hogy az y_t folyamat varianciája véges legyen.

Az autokovarianciák felírásának egy másik módja, ha a kovarianciák

$$\gamma(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k z^k$$

generátorfüggvényéből indulunk ki. Itt a γ_0 variancia a $z^0 = 1$ együtthatója. Míg a γ_k , azaz a k . autokovariancia az z^j -nek és az z^{-j} -nek az együtthatója. Így

$$\gamma(z) = \sigma_a^2 \psi(z) \psi(z^{-1}).$$

A valóságban azonban gyakran külön kell kezelniük azokat az eseteket, amikor a $\gamma(z)$ -ben a $|z| < 1$, $|z| = 1$, illetve amikor a $|z| > 1$, vagyis amikor a z komplex értékei az egységkörön belül, az egységkörön vagy azon kívül esnek.

2.1.3. Lineáris folyamatok stacionaritási és invertálhatósági feltétele

Stacionaritási feltétel

Az (5) sorozat konvergenciája biztosítja, hogy a folyamatnak létezik véges varianciája. Az autokovarianciáknak és autokorrelációknak teljesíteniük kell bizonyos feltételeket a stacionaritás biztosításához. Egy (1)-es alakban felírt lineáris folyamat esetében ezek a feltételek biztosítottak a következő egyszerű feltétel által: $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Ez ekvivalens azzal, hogy $\psi(z)$ -nek, vagyis a ψ súlyok generátorfüggvényének, konvergensenek kell lennie $|z| \leq 1$ esetén, vagyis az egységkörön és azon belül.

Invertálhatósági feltétel

Most olyan korlátozást adunk a π súlyokra, amely biztosítja azt a tulajdonságot, amit invertálhatóságnak nevezünk. (Az invertálhatóság feltétele független a stacionaritás feltételeitől, és alkalmazható a nemstacionárius modellekre is.) Hogy illusztráljuk a invertálhatóság alapötletét, tekintsük a következő modellt:

$$\tilde{y}_t = (1 - \vartheta L)a_t. \quad (6)$$

Fejezzük ki az a értékeit a \tilde{y} jelenlegi és múltbéli értékeivel. Ekkor a (6)-os képlet alapján a következőt kapjuk:

$$a_t = (1 - \vartheta L)^{-1} \tilde{y}_t = (1 + \vartheta L + \vartheta^2 L^2 + \dots + \vartheta^k L^k)(1 - \vartheta^{k+1} L^{k+1})^{-1} \tilde{y}_t,$$

vagyis

$$\tilde{y}_t = -\vartheta \tilde{y}_{t-1} - \vartheta^2 \tilde{y}_{t-2} - \dots - \vartheta^k \tilde{y}_{t-k} + a_t - \vartheta^{k+1} a_{t-k-1}.$$

Ha $|\vartheta| < 1$, és k tart a végtelenbe, a következő végtelen sorhoz jutunk:

$$\tilde{y}_t = -\vartheta \tilde{y}_{t-1} - \vartheta^2 \tilde{y}_{t-2} - \dots - \vartheta^k \tilde{y}_{t-k} + a_t,$$

tehát kimondhatjuk, hogy a sor invertálható.

A (6) szerinti folyamat bármely ϑ érték esetén stacionárius folyamatot definiál. De mint látható, ha $|\vartheta| \geq 1$, akkor a \tilde{y}_t pillanatnyi értéke a k növekedésével növekvő súlyokkal függ a $\tilde{y}_{t-1}, \tilde{y}_{t-2}, \dots, \tilde{y}_{t-k}$ értékektől. Ezt zárja ki a $|\vartheta| < 1$ feltétel.

Ha a folyamat invertálható, akkor a (2) szerint felírt modell π súlyait kapjuk meg, tehát a $j = 0, 1, \dots$ -ra, $\pi_j = -\vartheta_j$.

Ezek alapján a előbbi feltétel ekvivalens a következővel: $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty \equiv \sum_{j=0}^{\infty} |\vartheta|^j$, vagyis a

$$\pi(z) = (1 - \vartheta z)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \vartheta^j z^j$$

sorozat konvergens minden $|z| \leq 1$ esetén, vagyis az egységkörön és azon belül.

Általában a lineáris folyamat akkor invertálható és írható fel $\pi(L)\tilde{y}_t = a_t$ alakban, ha a π_j súlyoknak létezik abszolút összege, vagyis $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$, amely egyúttal azt is jelenti, hogy a $\pi(z)$ sorozat konvergens az egységkörön és azon belül.

Összefoglalva: egy (1) szerinti lineáris folyamat stacionárius, ha a $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ és invertálható, ha $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$, ahol $\pi(z) = \psi^{-1}(z) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z^j$.

A következőkben megvizsgáljuk az AR, MA és ARMA folyamatok legfontosabb jellemzőit, tekintve varianciájukat, autokorreláció függvényüket valamint, hogy milyen feltételeket kell szabnunk paramétereikre a stacionaritás és invertálhatóság biztosításához.

2.2. Autoregresszív folyamatok

2.2.1. AR folyamatok stacionaritási és invertálhatósági feltételei

Egy

$$\tilde{y}_t = \varphi_1 \tilde{y}_{t-1} + \varphi_2 \tilde{y}_{t-2} + \dots + \varphi_p \tilde{y}_{t-p} + a_t$$

vagy másképp

$$(1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_p L^p) \tilde{y}_t = a_t$$

p -edrendű autoregresszív folyamat $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ megválasztható paramétereinek ki kell elégítenie néhány feltételt, hogy a folyamat stacionárius legyen. Ennek szemléltetéshez tekintsük az elsőrendű autoregresszív folyamatot:

$$(1 - \varphi_1 L) \tilde{y}_t = a_t,$$

ami felírható

$$\tilde{y}_t = (1 - \varphi_1 L)^{-1} a_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j a_{t-j}$$

formában. Innen

$$\psi(z) = (1 - \varphi_1 z)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j z^j.$$

Ahogy azt az előző részben megmutattuk, a stacionaritáshoz $\psi(z)$ -nek konvergensenek kell lennie $|z| \leq 1$ esetén. Tehát egy $AR(1)$ folyamat φ_1 paraméterének ki kell elégítenie az $|\varphi_1| < 1$ feltételt a stacionaritás biztosításához.

Mivel az $1 - \varphi_1 z = 0$ egyenlet gyöke $z = \varphi_1^{-1}$, így ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy a $1 - \varphi_1 z = 0$ egyenlet gyökei az egységkörön kívülre essenek.

A $\tilde{y}_t = \varphi^{-1}(L)a_t$ alakú általános $AR(p)$ folyamat karakterisztikus polinomja felírható a

$$\varphi(z) = (1 - G_1 z)(1 - G_2 z) \cdots (1 - G_p z)$$

formában, ahol $G_1^{-1}, \dots, G_p^{-1}$ a $\varphi(z) = 0$ gyökei. Ha a gyökök egyszeresek, akkor $\varphi^{-1}(z)$ parciális törtekre bontva:

$$\varphi^{-1}(z) = \sum_{i=1}^p \frac{K_i}{1 - G_i z}.$$

Ezt felhasználva, az \tilde{y}_t folyamat

$$\tilde{y}_t = \varphi^{-1}(z)a_t = \sum_{i=1}^p \frac{K_i}{1 - G_i z} a_t$$

alakú. Vagyis az $AR(p)$ folyamatot p db elsőrendű autoregresszív folyamat összegeként állítottuk elő. Ezért, ha $\psi(z) = \varphi^{-1}(z)$ egy konvergens sorozat $|z| \leq 1$ esetén, vagyis ha a $\psi_j = \sum_{i=1}^p K_i G_i^j$ súlyoknak létezik abszolút összege, akkor az $AR(p)$ folyamat stacionaritásához az kell, hogy $|G_i| < 1$ teljesüljön minden $i = 1, 2, \dots, p$ esetén. Ezzel ekvivalens, hogy a $\varphi(z) = 0$ gyökeinek kívül kell esnie az egységkörön.

A $\varphi(z)\psi(z) = 1$ egyenlőségből pedig közvetlenül következik, hogy az $AR(p)$ folyamatra a ψ_j súlyok kielégítik a

$$\psi_j = \varphi_1 \psi_{j-1} + \varphi_2 \psi_{j-2} + \dots + \varphi_p \psi_{j-p}$$

egyenletrendszer, ha $\psi_0 = 1$ és $\psi_j = 0$, minden $j < 0$ esetén. Ennek alapján a ψ_j súlyok könnyen kiszámíthatók rekurzívan a φ_i , $i = 1, 2, \dots$ értékekből.

Stacionárius AR(p) folyamat esetén a

$$\pi(z) = \varphi(z) = 1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 + \dots + \varphi_p z^p$$

sorozat véges, ezért az invertálhatóság biztosításához nem kell további korlátozásokat tennünk a folyamat paramétereire.

2.2.2. Autoregresszív folyamatok autokorreláció függvénye

A stacionárius autoregresszív folyamatok autokorreláció függvényének egy fontos rekurzív összefüggésére találunk, ha az

$$\tilde{y}_t = \varphi_1 \tilde{y}_{t-1} + \varphi_2 \tilde{y}_{t-2} + \dots + \varphi_p \tilde{y}_{t-p} + a_t$$

egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk \tilde{y}_{t-k} -val:

$$\tilde{y}_{t-k} \tilde{y}_t = \varphi_1 \tilde{y}_{t-k} \tilde{y}_{t-1} + \varphi_2 \tilde{y}_{t-k} \tilde{y}_{t-2} + \dots + \varphi_p \tilde{y}_{t-k} \tilde{y}_{t-p} + \tilde{y}_{t-k} a_t.$$

Mindkét oldal várható értékét véve, és a folyamat 0 várható értékét figyelembe véve, a következő egyenlethez jutunk:

$$\gamma_k = \varphi_1 \gamma_{k-1} + \varphi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \varphi_p \gamma_{k-p}, k > 0. \quad (7)$$

Az $E[y_{t-k}, a_t]$ eltűnik, ha $k > 0$, mivel y_{t-k} csak $t - k$ időpillanatig foglalja magában az $a_{t-k}, a_{t-k-1}, \dots$ zajértékeket, amik korrelálatlanok a_t -vel. A (7)-es egyenlet mindkét oldalát leosztva $\gamma_0 = (\sqrt{\gamma_0})^2$ -tel, láthatjuk, hogy az autokorreláció függvény kielégíti a következő egyenletrendszer:

$$\varrho_k = \varphi_1 \varrho_{k-1} + \varphi_2 \varrho_{k-2} + \dots + \varphi_p \varrho_{k-p}, k > 0. \quad (8)$$

Ezt átalakítva azt kapjuk, hogy

$$\varphi(L) \varrho_k = 0,$$

ahol $\varphi(z) = 1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 - \dots - \varphi_p z^p$, és a $\varphi(L)$ a $\varphi(z)$ "értéke" az L helyen.

Ha

$$\varphi(z) = \prod_{i=1}^p (1 - G_i z),$$

és a $\varphi(z)$ gyökei: $G_1^{-1}, G_2^{-1}, \dots, G_p^{-1}$, melyekre igaz, hogy $|G_i| < 1$ és különbözőek, akkor a (8)-as egyenlet általános megoldásaként a folyamat autokorrelációira a következő képlet adódik:

$$\varrho_k = A_1 G_1^k + A_2 G_2^k + \dots + A_p G_p^k.$$

E felírás alapján látható, hogy az autokorreláció függvény aszimptotikus viselkedése a következő két féle lehet:

- 1. ha a G_i gyök valós,
akkor az autokorreláció-függvény csökkenő exponenciális.
- 2. ha a G_i, G_j gyökök komplex konjugáltak,
akkor az autokorreláció függvény csökkenő szinuszhullám.

Általában egy stacionárius autoregresszív folyamat autokorreláció függvénye csökkenő exponenciális és csökkenő szinuszfüggvény keverékéből áll.

2.2.3. Autoregresszív paraméterek az autokorreláció függvényében

Ha behelyettesítünk $k = 1, 2, \dots, p$ -t a (8)-as egyenletbe, egy $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_p$ -től függő, lineáris egyenletrendszert kapunk $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ -re:

$$\begin{aligned}\varrho_1 &= \varphi_1 + \varphi_2 \varrho_1 + \dots + \varphi_p \varrho_{p-1} \\ \varrho_2 &= \varphi_1 \varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varphi_p \varrho_{p-2} \\ &\vdots \\ \varrho_p &= \varphi_1 \varrho_{p-1} + \varphi_2 \varrho_{p-2} + \dots + \varphi_p,\end{aligned}$$

melyet mátrixos formában a következőképp írhatunk fel:

Legyen az AR modell együtthatóiból álló p elemű φ vektor:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{bmatrix}$$

Legyen a folyamat autokorrelációiból álló, szintén p elemű ϱ vektor:

$$\varrho = \begin{bmatrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \\ \vdots \\ \varrho_p \end{bmatrix}$$

Építsük fel a következő módon a folyamat autokorrelációiból álló $p \times p$ elemű P mátrixot:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \varrho_1 & \varrho_2 & \dots & \varrho_{p-1} \\ \varrho_1 & 1 & \varrho_2 & \dots & \varrho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varrho_{p-1} & \varrho_{p-2} & \varrho_{p-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

E jelölésekkel a fenti egyenletrendszer:

$$P\varphi = \varrho.$$

Ennek φ szerinti megoldása:

$$\varphi = P^{-1}\varrho.$$

2.2.4. Variancia

Ha $k = 0$, akkor az $E[\tilde{y}_{t-k}a_t] = E[\tilde{y}_t a_t]$ és ekkor az imént tett feltételek mellett $E[\tilde{y}_t a_t] = E[a_t^2] = \sigma_a^2$, mivel \tilde{y}_t folyamat felírásának a_t az egyetlen olyan tagja, amely korrelál az a_t -vel.

Így a (7)-esnek megfelelő egyenlet $k = 0$ -ra:

$$\gamma_0 = \varphi_1\gamma_{-1} + \varphi_2\gamma_{-2} + \cdots + \varphi_p\gamma_{-p} + \sigma_a^2.$$

Ezt leosztva $\gamma_0 = \sigma_y^2$ -tel és behelyettesítve $\gamma_k = \gamma_{-k}$, a σ_y^2 felírható a következő módon:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \varrho_1\varphi_1 - \varrho_2\varphi_2 - \cdots - \varrho_p\varphi_p} = \frac{\sigma_a^2}{\varphi(L)\varrho_0}. \quad (9)$$

2.2.5. Elsőrendű autoregresszív (Markov) folyamat

Stacionaritási feltétel

Az $\tilde{y}_t = \varphi_1\tilde{y}_{t-1} + a_t = a_t + \varphi_1a_{t-1} + \varphi_1^2a_{t-2} + \cdots$ elsőrendű autoregresszív folyamat φ_1 együttthatójának ki kell elégíteni a $|\varphi_1| < 1$ feltételt a folyamat stacionaritásához.

Autokorreláció függvény

A (8)-as összefüggést használva az elsőrendű autoregresszív folyamat autokorreláció függvénye:

$$\varrho_k = \varphi_k\varrho_{k-1}, k > 0,$$

felhasználva, hogy $\varrho_0 = 1$, a megoldása:

$$\varrho_k = \varphi_1^k.$$

Az autokorreláció függvény pozitív φ_1 esetén exponenciálisan tart a 0-hoz, és negatív φ_1 esetén oszcillál. Megjegyzés: $\varrho_1 = \varphi_1$.

Variancia

A (9)-es képleteket felhasználva a folyamat varianciája:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \varrho_1\varphi_1} = \frac{\sigma_a^2}{1 - \varphi_1^2}.$$

2.2.6. Másodrendű autoregresszív folyamat

Stacionaritási feltétel

A $\tilde{y}_t = \varphi_1 \tilde{y}_{t-1} + \varphi_2 \tilde{y}_{t-2} + a_t$ formában felírható, másodrendű autoregresszív folyamat stacionaritásának biztosításához a

$$\varphi(z) = 1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökeinek az egységkörön kívül kell esnie, ami azt jelenti, hogy a φ_1, φ_2 paramétereknek a következő háromszög-tartományon belül kell esniük:

$$\varphi_1 + \varphi_2 < 1$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 < 1$$

$$|\varphi_2| < 1 .$$

Autokorreláció függvény

A (8)-as képletből kiindulva az autokorreláció függvény kielégíti a

$$\varrho_k = \varphi_1 \varrho_{k-1} + \varphi_2 \varrho_{k-2} , k > 0,$$

másodrendű rekurzív egyenletet $\varrho_0 = 1$ és $\varrho_1 = \varphi_1 / (1 - \varphi_2)$ kezdőértékek mellett. Az általános képlet alapján ennek megoldása:

$$\varrho_k = A_1 G_1^k + A_2 G_2^k,$$

ahol G_1^{-1} és G_2^{-1} a karakterisztikus egyenlet gyökei, ha különbözőek:

- ha ezek a gyökök valósak, akkor az autokorreláció függvény csökkenő exponenciális függvények lineáris kombinációja.

- ha ezek a gyökök komplexek, akkor a folyamat álperiodikus viselkedést mutat, és úgy tekinthetjük, mint egy csillapított szinuszfüggvényt.

Yule-Walker egyenletek

A Yule-Walker egyenletek a $p = 2$ speciális esetben a következők:

$$\varrho_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \varrho_1$$

$$\varrho_2 = \varphi_1 \varrho_1 + \varrho_2,$$

amelyeket megoldva φ_1, φ_2 -re, a következőket kapjuk:

$$\varphi_1 = \frac{\varrho_1(1 - \varrho_2)}{1 - \varrho_1^2}$$

$$\varphi_2 = \frac{\varrho_2 - \varrho_1^2}{1 - \varrho_1^2}.$$

A fenti Yule-Walker egyenletet megoldhatjuk ϱ_1, ϱ_2 -re is:

$$\begin{aligned}\varrho_1 &= \frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \\ \varrho_2 &= \varphi_2 + \frac{\varphi_1^2}{1 - \varphi_2}.\end{aligned}$$

Ez az eredmény

- egyrészt magyarázatot ad a ϱ_k meghatározásakor alkalmazott kezdőértékekre,
- másrészt pedig együtt használva a stacionaritási feltételekkel megállapíthatjuk, hogy az AR(2) folyamat stacionaritásához a ϱ_1, ϱ_2 értékeinek ki kell elégíteniük a következő feltételeket:

$$\begin{aligned}|\varrho_1| &< 1 \\ |\varrho_2| &< 1 \\ \varrho_1^2 &< 1/2(\varrho_2 + 1).\end{aligned}$$

Variancia

A (9)-es képletből kiindulva a folyamat varianciája:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \varrho_1\varphi_1 - \varrho_2\varphi_2} = \frac{1 - \varphi_2}{1 + \varphi_2} \cdot \frac{\sigma_a^2}{(1 - \varphi_2)^2 - \varphi_2}.$$

2.2.7. Parciális autokorreláció függvény

Az modellépítés kezdetén nem tudjuk, hogy hányadrendű folyamatot illesztünk a megfigyelt idősorra. Ez a probléma ekvivalens azon szabad változók számának meghatározásával, amelyeket beveszünk a többváltozós regresszióba. Mint láthattuk, az autokorreláció függvénynek végtelensok nem 0 tagja van, de értékeit az első p tag meghatározza. Ezzel szemben a parciális autokorreláció függvénynek csak az első p tagja nem 0.

Jelölje $\varphi_{k,j}$ egy k -ad rendű autoregresszív folyamat j . együtthatóját, így $\varphi_{k,k}$ lesz az utolsó együttható. A (8)-as képletből kiindulva láthatjuk, hogy a $\varphi_{k,j}$ kielégíti a következő egyenletrendszer:

$$\varrho_j = \varphi_{k1}\varrho_{j-1} + \dots + \varphi_{k(k-1)}\varrho_{j-k+1} + \varphi_{kk}\varrho_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

azaz a Yule-Walker egyenleteket, amelyeket mátrixos formában is felírhatunk:

$$\begin{bmatrix} 1 & \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots & \varrho_{k-1} \\ \varrho_1 & 1 & \varrho_2 & \cdots & \varrho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho_{k-1} & \varrho_{k-2} & \varrho_{k-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{k1} \\ \varphi_{k2} \\ \vdots \\ \varphi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \\ \vdots \\ \varrho_k \end{bmatrix}$$

Ami a korábbi jelölések mellett, feltüntetve azt is, hogy k -adrendű folyamatról van szó:

$$P_k \varphi_k = \varrho_k.$$

E egyenletek megoldását jelentősen egyszerűsíti az, hogy ha a k dimenziós megoldás már ismert, akkor annak alapján a $k + 1$ dimenziós megoldása közvetlenül meghatározható. Az itt szereplő φ_{kk} a folyamat k -adrendű parciális autokorrelációja, ezeket az értékeket k függvényében parciális autokorreláció függvénynek nevezzük.

Egy p -edrendű autoregresszív folyamatra, a φ_{kk} parciális autokorreláció függvény $k \leq p$ tagja lesz nem nulla, és $p < k$ esetén minden tagja nulla, vagyis a egy p -edrendű autoregresszív folyamat parciális autokorreláció függvénye p -nél nagyobb értékekre 0.

A φ_{kk} mennyiséget azért nevezzük az y_t folyamat k . parciális autokorrelációjának, mert ez egyenlő az egymástól k távolságra levő y_t és y_{t-k} közötti, $y_{t-1}, \dots, y_{t-k+1}$ szerinti parciális korrelációval. Vagyis φ_{kk} az y_t és y_{t-k} közötti lineáris kapcsolatot méri a közbülső $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1}$ értékek hatásaival való korrigálás mellett.

A k . parciális autokorreláció kiszámítása

A legkisebb négyzetes hibák elmélete alapján belátható, hogy a $\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \dots, \varphi_{kk}$ azon értékei, amelyek a fenti egyenlet megoldásai, ugyanazok mint a regressziós együtthatók az y_t folyamat $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1}$ értékein vett lineáris regresszójában. Vagyis ezek a φ értékek rendre megfelelnek azoknak a b_1, b_2, \dots, b_k együtthatóknak, amelyek minimalizálják az

$$E[(y_t - b_0 - \sum_{i=1}^k b_i y_{t-i})^2]$$

várható értéket. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az y_t folyamat várható értéke 0. Ekkor az y_t -nek az $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1}$ értékeken alapuló legjobb közelítése, a legkisebb négyzetes hiba értelmében:

$$\hat{y}_t = \varphi_{k-1,1} y_{t-1} + \varphi_{k-1,2} y_{t-2} + \dots + \varphi_{k-1,k-1} y_{t-k+1}.$$

Hasonlóan az y_{t-k} folyamat $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1}$ jövőbeni értékeken alapuló legjobb lineáris közelítése, vagyis regressziója az

$$\hat{y}_{t-k} = \varphi_{k-1,1} y_{t-k+1} + \varphi_{k-1,2} y_{t-k+2} + \dots + \varphi_{k-1,k-1} y_{t-1}.$$

Mint hogy a folyamat k . parciális autokorrelációja:

$$\varphi_{k,k} = \text{corr}[y_t - \hat{y}_t, y_{t-k} - \hat{y}_{t-k}] = \varphi_{k,k} = \frac{\text{cov}[y_t - \hat{y}_t, y_{t-k} - \hat{y}_{t-k}]}{\text{var}[y_{t-k} - \hat{y}_{t-k}]},$$

felhasználva a két előző lineáris regressziót és azt, hogy

$$\sigma_{k-1}^2 = \text{var}[y_t - \hat{y}_t] = \text{var}[y_{t-k} - \hat{y}_{t-k}] = \gamma_0 \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \varphi_{k-1,i} \varrho_1\right),$$

a folyamat parciális autokorrelációira a

$$\varphi_{k,k} = \frac{\varrho_k - \sum_{i=1}^{k-1} \varphi_{k-1,i} \varrho_{k-i}}{1 - \sum_{i=1}^{k-1} \varphi_{k-1,i} \varrho_i}$$

kifejezés adódik.

2.3. Mozgóátlag folyamatok

2.3.1. MA folyamatok stacionaritási és invertálhatósági feltételei

Mivel a

$$\psi(z) = \vartheta(z) = 1 - \vartheta_1 z - \vartheta_2 z^2 - \dots - \vartheta_q z^q$$

sorozat véges, egy MA folyamat stacionaritásának biztosításához nem kell külön feltételeket szabnunk a folyamat paramétereire vonatkozóan.

Megmutatjuk, hogy melyek azok a feltételek, amelyeket egy

$$\tilde{y}_t = a_t - \vartheta_1 a_{t-1} - \dots - \vartheta_q a_{t-q}$$

vagy másképpen felírva:

$$\tilde{y}_t = (1 - \vartheta_1 L - \dots - \vartheta_q L^q) a_t \tag{10}$$

q -edrendű mozgóátlag folyamat $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_p$ paramétereinek ki kell elégítenie ahhoz, hogy az \tilde{y}_t folyamat invertálható legyen.

Korábban már láthattuk, hogy a $\tilde{y}_t = (1 - \vartheta_1 L) a_t$ elsőrendű mozgóátlag folyamat akkor invertálható, ha a $|\vartheta_1| < 1$, ugyanis ez a

$$\pi(z) = (1 - \vartheta_1 z)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \vartheta_1^j z^j$$

sorfejtés konvergenciájának a feltétele. Vagyis ekvivalensen, az $1 - \vartheta_1 z = 0$ egyenlet minden gyökének — esetünkben a $z = \vartheta_1^{-1}$ -nek — az egységkörön kívül kell elhelyezkednie.

A magasabb rendű MA folyamatok invertálhatósági feltételét magkaphatjuk, ha a (10)-es képlet szerint felírt mozgóátlag folyamatot a következő formába írjuk át, feltételezve a $\vartheta^{-1}(z)$ értelmezhetőségét:

$$a_t = \vartheta^{-1}(L) \tilde{y}_t .$$

Legyen a $\vartheta(z)$ gyöktényezős felbontása

$$\vartheta(z) = \prod_{i=1}^q (1 - H_i z).$$

Ezen felbontás alapján, feltételezve a gyökök egyszeres multiplicitását, a parciális törtekre bontás módszerével:

$$\pi(z) = \vartheta^{-1}(z) = \sum_{i=1}^q \frac{M_i}{1 - H_i z},$$

ami konvergens, ugyanis a $\pi_j = -\sum_{i=1}^q M_i H_i^j$ súlyoknak létezik abszolút összege, ha $|H_i| < 1$ minden $i = 1, 2, \dots, q$ esetén. Mivel a H_i -k a $\vartheta(z) = 0$ egyenlet gyökei, az iménti megfontolás alapján következik, hogy egy MA(q) folyamat invertálhatóságához az kell, hogy a

$$\vartheta(z) = 1 - \vartheta_1 z - \vartheta_2 z^2 - \dots - \vartheta_q z^q = 0$$

karakterisztikus polinom gyökei az egységkörön kívül helyezkedjenek el.

A $\pi(z)$ sorfejtés együtthatói a $\vartheta(z)\pi(z) = 1$ összefüggés alapján határozhatóak meg. Ugyanis emiatt a π_j súlyoknak ki kell elégíteniük a

$$\pi_j = \vartheta_1 \pi_{j-1} + \vartheta_2 \pi_{j-2} + \dots + \vartheta_q \pi_{j-q}, \quad j > 0$$

egyenleteket a $\pi_0 = -1$ és $\pi_j = 0$ $j < 0$ feltételek mellett. Ebből a pedig a π_j , minden j -re rekurzívan kiszámítható az ismert ϑ együtthatók függvényében.

2.3.2. Mozgóátlag folyamatok autokorreláció függvénye

A mozgóátlag folyamatok autokorreláció függvényének felírásához induljunk ki az autokovariancia képletéből:

$$\gamma_k = E[(a_t - \vartheta_1 a_{t-1} - \dots - \vartheta_q a_{t-q})(a_{t-k} - \vartheta_1 a_{t-k-1} - \dots - \vartheta_q a_{t-k-q})]. \quad (11)$$

Ennek alapján a folyamat varianciája:

$$\gamma_0 = (1 + \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \dots + \vartheta_q^2) \sigma_a^2$$

és az autokovarianciái:

$$\gamma_k = \begin{cases} (-\vartheta_k + \vartheta_1 \vartheta_{k+1} + \vartheta_2 \vartheta_{k+2} + \dots + \vartheta_{q-k} \vartheta_q) \sigma_a^2 & \text{ha } k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & \text{ha } k > q. \end{cases}$$

Amiből közvetlen adódik a keresett autokorreláció függvény:

$$\varrho_k = \begin{cases} \frac{-\vartheta_k + \vartheta_1 \vartheta_{k+1} + \vartheta_2 \vartheta_{k+2} + \dots + \vartheta_{q-k} \vartheta_q}{1 + \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \dots + \vartheta_q^2} & \text{ha } k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & \text{ha } k > q. \end{cases} \quad (12)$$

Láthatjuk, hogy egy MA(q) folyamat autokorreláció függvénye a q . tag felett 0, vagyis egy mozgóátlag folyamat autokorrelációi közül mindig csak végessok, legfeljebb az első q darab nem nulla.

A következőkben részletesen megvizsgáljuk a mozgóátlag folyamatok két legfontosabb, az első- és másodrendű esetét.

2.3.3. Elsőrendű mozgóátlag folyamat

Invertálhatóság és stacionaritás

Mint láthattuk, az

$$\tilde{y}_t = a_t - \vartheta_1 a_{t-1} = (1 - \vartheta_1 L)a_t$$

folyamat bármely ϑ_1 esetén stacionárius.

Ugyanakkor az invertálhatóság általános feltételéből következik, hogy az elsőrendű mozgóátlag folyamat invertálhatóságához a ϑ_1 paraméterének a $|\vartheta_1| < 1$ feltételnek kell eleget tennie. Ez nyilván megfelel annak a feltételnek, amit az elsőrendű autoregresszív folyamatokkal kapcsolatban közvetlenül is beláttunk.

Autokorreláció függvény

A (11) szerinti általános képletet felhasználva a folyamat varianciája:

$$\gamma_0 = (1 + \vartheta_1^2)\sigma_a^2.$$

A (12) szerinti általános képlet alapján az autokorreláció függvénye:

$$\varrho_k = \begin{cases} -\vartheta_1/(1 + \vartheta_1^2) & \text{ha } k = 1 \\ 0 & \text{ha } k \geq 2. \end{cases} \quad (13)$$

Az utóbbi érdekes következménye, hogy egy MA(1) folyamat ϱ_1 paraméterének eleget kell tennie a $|\varrho_1| < 1/2$ feltételnek.

Ugyanis az (13)-as képletet $k = 1$ -re felírva, néhány átalakítás után a következőt kapjuk:

$$\vartheta_1^2 + \frac{\vartheta_1}{\varrho_1} + 1 = 0.$$

Ennek a ϑ_1 szerinti gyökei:

$$(-1 \pm \sqrt{1 - 4\varrho_1^2})/2\varrho_1.$$

Mivel e gyökök szorzata 1, ha ϑ_1 megoldás, akkor ϑ_1^{-1} is az, de ha például ϑ_1 kielégíti az invertálhatóság feltételét, miszerint $|\vartheta_1| < 1$, akkor ϑ_1^{-1} már nagyobb egynél, amely esetén a folyamatunk nem invertálható.

Parciális autokorreláció függvény

Az (13) szerinti általános képlet alapján

$$\varrho_1 = -\vartheta_1/(1 + \vartheta_1^2), \text{ ha } k = 1$$

és a $\varrho_k = 0$ ha a $k > 1$. Ebből némi algebrai átalakítás után kapjuk, hogy a:

$$\varphi_{kk} = \frac{-\vartheta_1^k(1 - \vartheta_1^2)}{1 - \vartheta_1^{2(k+1)}}.$$

Ezért $\varphi_{kk} < \vartheta_1^k$ és a parciális autokorreláció függvényt egy csökkenő exponenciális függvény határozza meg. Ha ϱ_1 pozitív, vagyis ha ϑ_1 negatív, akkor a parciális autokorreláció függvény előjele váltakozó, oszcillál. Ha viszont ϱ_1 negatív, tehát ha a ϑ_1 pozitív, akkor a parciális autokorrelációk negatívak.

Ahogy azt már korábban is láthattuk, egy MA(1) folyamatot végtelen AR formába írva, a π_j súlyokra igaz, hogy $\pi_j = -\vartheta_1^j$. Emiatt nem is meglepő, hogy egy MA(1) folyamat φ_{kk} parciális autokorreláció-függvénye lényegében utánozza a π_j súlyok exponenciálisan csökkenő viselkedését.

Összehasonlítva az AR(1) folyamat paramétereire tett feltételekkel, érdekes párhuzamot vehetünk észre. Amíg egy MA(1) folyamat autokorreláció függvénye az első tag után azonosan 0, addig egy AR(1) folyamat autokorreláció függvénye a végtelenbe tarva exponenciálisan csökken. Ehhez hasonlóan, míg egy MA(1) folyamat parciális autokorreláció függvénye a végtelenbe tartva exponenciálisan csökken, addig az AR(1) folyamat parciális autokorreláció függvénye az első tag után azonosan 0. Az effajta kettősség általában is érvényes a magasabbrendű AR és MA folyamatok autokorreláció és parciális autokorreláció függvényeire.

2.3.4. Másodrendű mozgóátlag folyamat

Invertálhatósági és stacionaritási feltételek

A $\tilde{y}_t = a_t - \vartheta_1 a_{t-1} - \vartheta_2 a_{t-2}$ másodrendű mozgóátlag folyamat bármely ϑ_1 és ϑ_2 érték esetén stacionárius, az invertálhatóság biztosításához viszont az

$$1 - \vartheta_1 z - \vartheta_2 z^2 = 0$$

karakterisztikus polinom gyökeinek az egységkörön kívül kell elhelyezkedniük, vagyis elég kell tenniük a következő feltételeknek:

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 < 1$$

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 < 1$$

$$|\vartheta_2| < 1.$$

E feltételek megfelelnek az AR(2) folyamatnál tett stacionaritási feltételeknek.

Autokorreláció függvény

A (11) szerinti általános képletet felhasználva a folyamat varianciája:

$$\gamma_0 = (1 + \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2)\sigma_a^2$$

és szintén az általános képletet használva az autokorreláció függvénye:

$$\begin{aligned}\varrho_1 &= \frac{-\vartheta_1(1 - \vartheta_2)}{1 + \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2}, & k = 1 \\ \varrho_2 &= \frac{-\vartheta_2}{1 + \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2}, & k = 2 \\ \varrho_k &= 0, & k \geq 3.\end{aligned}$$

Tehát az autokorreláció-függvény nulla a 2. tag után! A korábbi képletek alapján észrevehető, hogy egy invertálható MA(2) folyamat első két autokorrelációjának kívül kell esnie a következő görbék által határolt területen:

$$\begin{aligned}\varrho_1 + \varrho_2 &= -0,5 \\ \varrho_2 - \varrho_1 &= -0,5 \\ \varrho_1^2 &= 4\varrho_2(1 - 2\varrho_2).\end{aligned}$$

Parciális autokorreláció függvény

Egy MA(2) folyamat parciális autokorreláció függvényének viselkedése és annak magyarázata az eddigi esetekhez viszonyítva lényegesen komplikáltabb. Összefoglalóan a következők érvényesek:

- Ha az előzőleg felírt karakterisztikus egyenlet gyökei valósak, akkor két exponenciális függvény összege dominálja.

- Ha viszont a karakterisztikus egyenleg gyökei komplexek, akkor csökkenő szinuszfüggvény határozza meg az autokorreláció függvényt.

Tehát hasonlóan viselkedik mint egy AR(2) folyamat autokorreláció függvénye.

2.4. Dualitás az autoregresszív és mozgóátlag folyamatok között

A korábban tárgyalt tulajdonságok, illetve az azok biztosítására vonatkozó feltételek a már említett párhuzamokon kívül további szempontokat vetnek fel az autoregresszív és mozgóátlag folyamatok közötti párhuzamokkal kapcsolatban.

A kétféle folyamat közötti dualitásnak 3 következményét mutatjuk be.

1. Egy p -edrendű stacionárius autoregresszív folyamatban szereplő a_t fehérzaj folyamatot felírhatjuk korábbi \tilde{y}_t értékek véges, súlyozott összegeként, illetve \tilde{y}_t korábbi a_t értékek végtelen, súlyozott összegeként.

$$\tilde{y}_t = \varphi^{-1}(L)a_t$$

2. Egy véges MA folyamatnak olyan autokorreláció függvénye van, amely egy bizonyos pont után azonosan 0. De mivel ekvivalens egy végtelen AR folyamattal, a parciális autokorreláció függvényének végtelen sok nemnulla tagja van. Emiatt a parciális autokorreláció függvényét csökkenő exponenciális és csökkenő szinuszfüggvények dominálják. Megfordítva egy AR folyamatnak olyan parciális autokorreláció függvénye van, amely egy bizonyos pont után konstans 0, de ez az autokorreláció függvény végtelen sok nem nulla, és csillapított exponenciális és csillapított szinuszfüggvények keverékéből áll.

3. Egy p -edrendű autoregresszív folyamat paramétereire ahhoz, hogy invertálható legyen, nem kell megkötéseket tennünk. A stacionaritásához viszont szükséges, hogy a $\varphi(z) = 0$ gyökei az egységkörön kívül helyezkedjenek el. Hasonlóképpen, egy q -adrendű mozgóátlag folyamat paramétereire nem kell megkötéseket tennünk a stacionaritás biztosítására, viszont az invertálhatósághoz kell, hogy a $\vartheta(z) = 0$ gyökei az egységkörön kívülre essenek.

2.5. Autoregresszív-mozgóátlag folyamatok

2.5.1. Stacionaritási és invertálhatósági feltételek

Ahogy azt már korábban is említettük, ahhoz, hogy a becslésünk pontosabb legyen, szükségünk lehet autoregresszív és mozgóátlag elemek együttes használatára a folyamat modelljének felírásakor. Így egy olyan autoregresszív-mozgóátlag (ARMA) modell keletkezik, amelyet általánosan a következőképp írhatunk fel:

$$\tilde{y}_t = \varphi_1\tilde{y}_{t-1} + \varphi_2\tilde{y}_{t-2} + \dots + \varphi_p\tilde{y}_{t-p} + a_t - \vartheta_1a_{t-1} - \vartheta_2a_{t-2} - \dots - \vartheta_qa_{t-q},$$

ugyanez operátoros alakban:

$$(1 - \varphi_1L - \varphi_2L^2 - \dots - \varphi_pL^p)\tilde{y}_t = (1 - \vartheta_1L - \vartheta_2L^2 - \dots - \vartheta_qL^q)a_t,$$

vagy tömörebben:

$$\varphi(L)\tilde{y}_t = \vartheta(L)a_t,$$

ahol $\varphi(L)$ illetve a $\vartheta(L)$ rendre p -ed és q -ad fokú $\varphi(z)$ és $\vartheta(z)$ karakterisztikus polinomjai a folyamat AR, illetve MA részének.

Az ARMA(p,q) folyamat kétféleképpen értelmezhető:

Egyrészt, mint egy olyan p -ed rendű autoregresszív folyamat, amelynek a e_t hibatagja egy q -ad rendű mozgóátlag folyamat. Vagyis úgy, hogy a folyamat a

$$\varphi(L)\tilde{y}_t = e_t \quad \text{ahol} \quad e_t = \vartheta(L)a_t$$

egyenletpár szerinti.

Másrészt, mint egy q -ad rendű mozgóátlag folyamatot, b_t autoregresszív folyamattal a következőképp:

$$\tilde{y}_t = \vartheta(L)b_t \quad \text{ahol} \quad \varphi(L)b_t = a_t,$$

így ugyanis $b_t = \varphi^{-1}(L)a_t$ tehát a

$$\varphi(L)\tilde{y}_t = \varphi(L)\vartheta(L)b_t = \varphi(L)\vartheta(L)\varphi^{-1}(L)a_t = \vartheta(L)a_t,$$

felhasználva, hogy egydimenziós folyamatok esetén a lineáris operátorok felcserélhetőek.

Könnyen látható, hogy az ARMA folyamat $\varphi(L)\tilde{y}_t = \varphi(L)a_t$ definíciós egyenletének jobb oldalán álló mozgóátlag tényezői nem befolyásolják azoknak a feltételeknek a teljesülését, amelyek mellett egy autoregresszív folyamat stacionárius. Ezért nyilvánvaló, hogy egy ARMA folyamat akkor stacionárius, ha a $\varphi(z) = 0$ karakterisztikus egyenletének gyökei az egységkörön kívül helyezkednek el.

Hasonlóképpen, a folyamat invertálhatóságának biztosításhoz a $\vartheta(z) = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökeinek kell az egységkörön kívül elhelyezkedniük.

A mondott feltételek mellett a stacionárius és invertálható ARMA(p,q) folyamatoknak létezik mind a végtelen mozgóátlag felírása a:

$$\tilde{y}_t = \psi(L)a_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}$$

formában, ahol $\psi(z) = \varphi(z)^{-1}\vartheta(z)$, mind pedig a végtelen autoregresszív felírása a

$$\pi(L)\tilde{y}_t = \tilde{y}_t - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \tilde{y}_{t-j} = a_t$$

formában, ahol $\pi(z) = \vartheta(z)^{-1}\varphi(z)$, azon feltétellel, hogy ψ_j és π_j súlyoknak az abszolút összege egyaránt véges.

A ψ_j súlyokat a $\varphi(z)\psi(z) = \vartheta(z)$ egyenlőségből határozhatjuk meg annak alapján, hogy a ψ_j súlyok eleget kell hogy tegyenek a

$$\psi_j = \varphi_1\psi_{j-1} + \varphi_2\psi_{j-2} + \cdots + \varphi_p\psi_{j-p} - \vartheta_j, \quad j > 0$$

egyenlőségeknek $\psi_0 = 1$ és $\psi_j = 0$, $j < 0$ és $\vartheta_j = 0$, $j > q$ esetén.

Hasonlóképpen a π_j súlyokat a $\vartheta(z)\pi(z) = \varphi(z)$ egyenlőségből határozzuk meg úgy, hogy a π_j súlyok eleget tegyenek a

$$\pi_j = \vartheta_1\psi_{j-1} + \vartheta_2\psi_{j-2} + \cdots + \vartheta_q\psi_{j-q} - \varphi_j, \quad j > 0$$

egyenlőségnek $\pi_0 = -1$ és $\pi_j = 0, j < 0$ és $\varphi_j = 0, j > q$ esetén.

Ugyanis a bemutatott relációkból valamennyi ψ_j és π_j súly rekurzívan könnyen kiszámítható a φ és ϑ együtthatókkal kifejezve.

2.5.2. Autokorreláció függvény

Az összetett folyamat autokorreláció függvényét ugyanazzal az egyszerű módszerrel származtathatjuk, mint amellyel azt korábban az autoregresszív folyamatok esetén tettük. Ha a definíciós egyenletet megszorozzuk \tilde{y}_{t-k} -val és a várhatóértékét vesszük, akkor láthatjuk, hogy az autokovariancia-függvény kielégíti a

$$\gamma_k = \varphi_1\gamma_{k-1} + \cdots + \varphi_p\gamma_{k-p} + \gamma_{ya}(k) - \vartheta_1\gamma_{ya}(k-1) - \cdots - \vartheta_q\gamma_{ya}(k-q)$$

egyenletet, ahol $\gamma_{ya}(k)$ az y és a folyamatok közötti a $\gamma_{ya}(k) = E[\tilde{y}_{t-k}a_t]$ képlettel definiált keresztkovariancia. Mivel \tilde{y}_{t-k} csak olyan zaj értékektől függ, amelyek $t-k$ idő utániak, a végtelen mozgóátlag folyamat felírásából, miszerint

$$\tilde{y}_{t-k} = \psi(L)a_{t-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-k-j},$$

az következik, hogy

$$\gamma_{ya}(k) = \begin{cases} 0 & \text{ha } k > 0 \\ \psi_{-k}\sigma_a^2 & \text{ha } k \leq 0. \end{cases}$$

A következő tények hasznosak autoregresszív-mozgóátlag sorok fokszámainak meghatározásánál is.

Ha $q-p < 0$, akkor az egész ϱ_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) autokorreláció függvény egy lecsengő exponenciális és szinuszfüggvény lineáris kombinációjából fog állni, aminek természetét a $\varphi(z)$ karakterisztikus polinom mellett a kezdeti értékek szabják meg.

Ha viszont $q-p \geq 0$, akkor $q-p+1$ kezdeti értékünk lesz, ami nem követi ezt az általános mintát.

2.5.3. Variancia

A variancia meghatározásához a következő egyenletet vehetjük figyelembe: ha $k = 0$, akkor

$$\gamma_0 = \varphi_1\gamma_{k-1} + \cdots + \varphi_p\gamma_{k-p} - \sigma_a^2(\vartheta_k\psi_0 + \vartheta_{k+1}\psi_1 + \cdots - \vartheta_q\psi_{q-k})$$

a $\vartheta_0 = -1$ feltétel mellett. Ez az egyenlet ugyanis a $k = 1, 2, \dots, p$ esetekre korábban felírt p darab egyenlet megoldását felhasználva, a kapott $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ értékek alapján megadja a γ_0 értékét is.

2.5.4. Parciális autokorreláció függvény

Az ARMA folyamat felírható

$$a_t = \vartheta^{-1}(L)\varphi(L)\tilde{y}_t$$

formában, ahol $\vartheta^{-1}(L)$ egy végtelen sorozat L -ben. Emiatt az ARMA folyamatok parciális autokorreláció függvénye is végtelensok nemnulla tagot tartalmaz. Ugyanakkor előfordulhat, hogy az autokorreláció függvény egy tiszta mozgóátlag folyamat parciális autokorreláció függvényéhez hasonlóan viselkedik, vagyis a függvény egy lecsengő exponenciális és szinuszfüggvény keveréke, a mozgóátlag folyamat rendjétől és az általa tartalmazott paraméterek értékeitől függően.

2.5.5. Az ARMA(1,1) folyamat

Az idősorok modellezésében az ARMA folyamatok közül az elsőrendű autoregresszív-elsőrendű mozgóátlag, röviden ARMA(1,1) folyamat bír a legnagyobb gyakorlati jelentőséggel bír.

Egy ilyen folyamat a következőképpen írható fel:

$$\tilde{y}_t - \varphi_1\tilde{y}_{t-1} = a_t - \vartheta_1a_{t-1} .$$

Ugyanez zártabb formában:

$$(1 - \varphi_1L)\tilde{y}_t = (1 - \vartheta_1L)a_t .$$

Stacionaritási és invertálhatósági feltételek

Az elsőrendű autoregresszív-elsőrendű mozgóátlag folyamat stacionárius, ha $|\varphi_1| < 1$, és invertálható, ha $|\vartheta_1| < 1$. Tehát az elfogadható paraméterpárok egy négyzet területén belül helyezkednek el. Valamint a végtelen MA felírásakor használt ψ_j együtthatókra érvényesek a következők:

$$\psi_1 = \varphi_1\psi_0 - \vartheta_1 = \varphi_1 - \vartheta_1$$

és

$$\psi_j = \varphi_1\psi_{j-1}, \text{ ha } j > 1 .$$

Ezekből az összefüggésekből látható, hogy egy ARMA(1,1) folyamat ψ_j súlyai kiszámíthatók a

$$\psi_j = (\varphi_1 - \vartheta_1)\varphi_1^{j-1}$$

képlettel, $j \geq 1$ esetén. Továbbá a végtelen AR formájú felírásakor használt π_j súlyok pedig a

$$\pi_j = (\varphi_1 - \vartheta_1)\vartheta_1^{j-1}$$

képlettel számíthatók ki, $j \geq 1$ esetén.

Autokorreláció függvény

Az autokorrelációkat általános esetben megadó képletek alapján:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \varphi_1 + \sigma_a^2(1 - \vartheta_1\psi_1) \\ \gamma_1 &= \varphi_1\gamma_0 + \vartheta_1\sigma_a^2 \\ \gamma_k &= \varphi_1\gamma_{k-1} \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

ha $\psi_1 = \varphi_1 - \vartheta_1$.

Az első két egyenletet γ_0 és γ_1 -re megoldva látjuk, hogy a folyamat autokovariancia függvénye:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1 + \vartheta_1^2 + 2\varphi_1\vartheta_1}{1 - \varphi_1^2} \sigma_a^2 \\ \gamma_1 &= \frac{(1 - \varphi_1\vartheta_1)(\varphi_1 - \vartheta_1)}{1 - \varphi_1^2} \sigma_a^2 \\ \gamma_k &= \varphi_1\gamma_{k-1} \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből látható, hogy $\varrho_k = \varphi_1\varrho_{k-1}$, $k \geq 2$. Ennek alapján pedig a ϱ_k explicit is megadható: $\varrho_k = \varrho_1\varphi_1^{k-1}$, $k > 1$ esetén. Tehát – mint az nyilvánvaló – az autokorreláció függvény tényleg exponenciálisan csökken a ϱ_1 kezdeti értéktől, ami viszont egyaránt függ a ϑ_1 és a φ_1 értékétől is.

Ha φ_1 pozitív, akkor az autokorrelációk exponenciális csökkennek. Ha φ_1 negatív, akkor az autokorrelációk abszolút értéke csökken, az előjele pedig váltakozik. Sőt észrevehetjük, hogy a ϱ_1 előjele a $\varphi_1 - \vartheta_1$ előjelétől függ, és befolyásolja a többi ϱ érték előjelét.

Az első két autokorreláció kifejezhető a folyamat ϑ_1 és φ_1 paramétereinek segítségével is:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{(1 - \varphi_1\vartheta_1)(\varphi_1 - \vartheta_1)}{1 + \vartheta_1^2 + 2\varphi_1\vartheta_1} \\ \varrho_2 &= \varphi_1\varrho_1. \end{aligned}$$

A korább bemutatott stacionaritási és invertálhatósági feltételeket felhasználva megmutatható, hogy ϱ_1 -nek és ϱ_2 -nek a következő tartományon belül kell elhelyezkedniük:

$$\begin{aligned} |\varrho_2| &< |\varrho_1| \\ \varrho_2 &> \varrho_1(2\varrho_1 + 1), \varrho_1 < 0 \\ \varrho_2 &> \varrho_1(2\varrho_1 - 1), \varrho_1 > 0. \end{aligned}$$

Parciális autokorreláció függvény

Az ARMA(1,1) folyamat parciális autokorreláció függvényének kezdeti értéke egyetlen tagból, a $\varphi_{11} = \varrho_1$ -ből áll. És a továbbiakban úgy viselkedik, mint egy tisztán MA(1) folyamat parciális autokorreláció függvénye, vagyis egy csökkenő exponenciális majorálja.

Ezért, ha φ_1 pozitív, akkor a parciális autokorreláció függvény egy egyenletesen csökkenő exponenciális függvényként viselkedik, amelyik ϱ_1 értéktől kezdve csökken, és előjelét a $\varphi_1 - \vartheta_1$ előjele határozza meg. Hasonlóképp, ha φ_1 negatív, akkor a parciális autokorreláció függvény egy oszcilláló exponenciális függvényt követ, amelyik a ϱ_1 értéktől kezdődően csökken, és az előjelét szintén a $\varphi_1 - \vartheta_1$ előjele határozza meg.

3. VARMA modell

3.1. Vektor ARMA folyamatok

Tekintsük az y_t , k -dimenziós 0 várható értékű VARMA (p,q) folyamat általános alakját:

$$y_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^q \vartheta_j a_{t-j} ,$$

ahol az a_t szintén k -dimenziós, időben korrelálatlan sorozat valamely (Ω, A, P) valószínűségi mezőn.

Az y_t és a_t vektorokat tehát k db egyváltozós idősor alkotja, méghozzá a következők szerint:

$$y_t = [y_{t,1}, y_{t,2}, \dots, y_{t,k}]' \quad \text{és} \quad a_t = [a_{t,1}, a_{t,2}, \dots, a_{t,k}]' .$$

A VARMA folyamat definíciója az egydimenziós esethez hasonlóan működő L visszaléptető operátor segítségével zártabb változatban is felírható a:

$$\varphi(L)y_t = \vartheta(L)a_t$$

formában, ahol a $\varphi(z)$ egy p -ed, és $\vartheta(z)$ pedig egy q -ad rendű polinom mátrix a következők szerint: $\varphi(z) = I - \varphi_I(z)$ és

$$\varphi_I(z) = \varphi_1 z + \dots + \varphi_p z^p$$

valamint $\vartheta(z) = I + \vartheta_I(z)$ és

$$\vartheta_I(z) = \vartheta_1 z + \dots + \vartheta_q z^q .$$

Ezek alapján y_t és a_t folyamatokra felírhatóak a következő egyenletek:

Egyrészt

$$y_t = \varphi_I(L)y_t + a_t + \vartheta_I(L)a_t ,$$

másrészt

$$a_t = y_t - \varphi_I(L)y_t - \vartheta_I(L)a_t .$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy az y_t egy stacionárius folyamat, tehát hogy a $\varphi(z)$ gyökei az egységkörön kívül helyezkednek el, vagyis hogy

$$\det[\varphi(z)] \neq 0 \quad \forall |z| \leq 1 ,$$

valamint feltesszük, hogy az y_t invertálható, tehát azt, hogy a $\vartheta(z)$ gyökei az egységkörön kívül helyezkednek el, vagyis hogy

$$\det[\vartheta(z)] \neq 0 \quad \forall |z| \leq 1 .$$

Továbbá feltesszük, hogy az a_t fehérzaj folyamat 0 várható értékű, és hogy az a_t varianciája a t -től, azaz az időtől független állandó: $\text{var}(a_t) = \sigma_a^2$.

A mondott feltételek mellett az y_t folyamat felírható végtelen vektor-autoregresszív (továbbiakban: VAR) formában:

$$\pi(L)y_t = a_t ,$$

ahol a $\pi(z) = \vartheta(z)^{-1}\varphi(z) = I_k - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i z^i$,

és szintén felírható végtelen vektor-mozgóátlag (továbbiakban: VMA) formában:

$$y_t = \psi(L)a_t ,$$

ahol a $\psi(z) = \varphi(z)^{-1}\vartheta(z) = I_k - \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j z^j$.

A továbbiakban a $\varphi(z)$ mátrixpolinom i . sorának j . oszlopában álló polinomot jelölje $\varphi_{ij}(z)$.

3.2. Polinom mátrixok tulajdonságai

A *diag* operátor egy olyan diagonális mátrixot képez, amelynek minden eleme nulla, kivéve a diagonálisbelieket, amelyek viszont a leképezett mátrix diagonálisbeli elemeivel azonosak.

Például

$$\text{diag}[\varphi_{ii}(z)] = \text{diag}[\varphi_{11}(z), \dots, \varphi_{kk}(z)] = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varphi_{kk}(z) \end{bmatrix}$$

ahol $\varphi_{ii}(z) = 1 - \varphi_{ii,1}z - \cdots - \varphi_{ii,p}z^p$, minden $i = 1, \dots, k$ -ra egy p -ed rendű polinom.

A *det()* és az *adj()* operációkkal az argumentumukba kerülő mátrixok determinánsát, illetve adjungáltját jelöljük. Ezeket a műveleteket hasonlóan értelmezzük, mint a valós számokon értelmezett mátrixok esetében. Az így kapott determináns tehát egy polinom, az adjungált pedig egy polinomok fölötti mátrixot eredményez.

A polinomok feletti mátrixok, — másként értelmezve — a mátrix együtthatós polinomok fontos tulajdonsága, hogy a szorzásuk nem kommutatív, és hogy egy polinom mátrixnak lehet az inverze is (véges) polinom mátrix. Szemben a valós együtthatós polinomokkal, amikor a polinom inverze mindig végtelen hatványsor. E tulajdonságok bemutatására három egyszerű példát adunk.

Példa 1.

A polinom mátrixok szorzása általában nem kommutatív, miként a valós számok feletti mátrixok szorzása sem kommutatív. Példa erre a 2×2 méretű mátrixok körében a

következő:

$$\begin{bmatrix} 1+2z & 2+3z \\ 3+4z & 4+5z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5+4z & 4+2z \\ 3+2z & 2+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11+27z+14z^2 & 8+18z+7z^2 \\ 27+55z+26z^2 & 20+36z+13z^2 \end{bmatrix}$$

ugyanakkor:

$$\begin{bmatrix} 5+4z & 4+2z \\ 3+2z & 2+z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2z & 2+3z \\ 3+4z & 4+5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17+36z+16z^2 & 26+51z+22z^2 \\ 9+19z+8z^2 & 14+27z+11z^2 \end{bmatrix}$$

Példa 2.

Egy polinom mátrix determinánása általában egy polinom, de e determináns polinom mint polinom lehet 0-ad fokú, azaz konstans polinom.

Erre nyilvánvaló példa minden olyan polinom mátrix, amely olyan háromszög mátrix, amelynek a diagonálisa végig 0-ad fokú polinomokból áll.

A 2×2 méretű mátrixok körében valamivel bonyolultabb példa konstans determinánsú polinom-mátrixra a következő:

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1+2z & 1+5z+2z^2 \\ 1 & 2+x \end{bmatrix} \right) = 1$$

Példa 3.

A polinom mátrixoknak lehet az inverze is (véges fokszámú) polinom mátrix.

A 2×2 méretű mátrixok körében az előző példa alapján könnyen adódik, hogy:

$$\begin{bmatrix} 1+2z & 1+5z+2z^2 \\ 1 & 2+z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2+z & -1-5z-2z^2 \\ -1 & 1+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A jelenség 'oka' természetesen az, hogy a bemutatott mátrixok determinánása egy 0-ad fokú polinom, tehát az inverz az adjungált mátrix (ami nyilván polinom mátrix) konstansszorososa.

Megjegyzés

Az egydimenziós folyamatok tulajdonságait ismertető első két fejezetben bemutattuk, hogy a véges AR folyamatok csak mint *végtelen* MA folyamatok írhatóak fel, és hogy a véges MA folyamatok is csak mint *végtelen* AR folyamatok írhatóak fel. Ez, a polinom mátrixok bemutatott tulajdonságai miatt, a többdimenziós folyamatok esetén nem feltétlenül érvényes. Viszont a VARMA folyamatok kanonikus felírásához — mint majd láthatjuk, — szépen felhasználható az, hogy a mátrixok inverze az adjungált (véges) mátrix és a determináns hányadosával egyenlő.

3.3. VARMA folyamatok Kronecker indexei

VARMA folyamatok autokovariancia mátrixai

Legyen a $k \times k$ méretű Γ_ℓ az y_t folyamat ℓ . autokovariancia mátrixa, azaz legyen

$$\Gamma_\ell = \text{cov}(y_t, y_{t+\ell}).$$

Ha a többdimenziós VARMA folyamatot definiáló egyenlőség mindkét oldalán álló kifejezéseket megszorozzuk $y_{t+\ell}$ -el és vesszük az így kapott szorzatösszegek várható értékét, akkor, $\ell > q$ esetén a

$$\Gamma_\ell - \varphi_1 \Gamma_{\ell-1} - \dots - \varphi_p \Gamma_{\ell-p} = 0$$

egyenlőséghez jutunk. Ha viszont $\ell \leq q$, akkor az egyenlőség jobb oldalára egy olyan $k \times k$ méretű, nem feltétlenül 0 mátrix kerül, amely σ_a -tól és ϑ -tól függ.

Az y_t VARMA folyamat Kronecker indexei

Legyen H_s a VARMA folyamat autokovariancia mátrixaiból képezett

$$H_s = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \dots & \Gamma_s \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 & \dots & \Gamma_{s+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_s & \Gamma_{s+1} & \dots & \Gamma_{2s-1} \end{pmatrix}$$

Hankel mátrix.

Mivel a H_s -t egy VARMA folyamat autokovarianciáiból képeztük, van egy olyan m , ami-re ha $s \geq m$ akkor a $\text{rang}(H_s) = m$. Ezt az m rangot nevezzük a folyamat McMillan rangjának.

Vegyük a $H_s = H_m$ blokkmátrixot és legyen $h_{\ell,j}$ e mátrix azon sora, amely az ℓ . mátrix-sorbeli mátrixok j . soraiból áll. Azaz legyen a $h_{\ell,j}$ a H_m mátrix $(\ell - 1)k + j$. sora. Azt mondjuk, hogy a folyamat j . koordinátájának Kronecker indexe n_j , ha a $h_{n_j,j}$ sor még független az őt megelőző soroktól, ám a $h_{n_j+1,j}$ (a j . koordinátának megfelelő sor következő előfordulása) már nem.

3.4. VARMA folyamatok echelon formája

Egy VARMA folyamat paramétereit az általános alakban nem lehet hatékonyan megbecsülni, mert a benne szereplő paraméterek nincsenek egyérelműen meghatározva. Ugyanis egy-egy folyamatnak adott p, q paraméterek esetén további megkötések híján több ekvivalens felírása lehetséges. A problémát részben az okozza, hogy vannak olyan nem nulldfokú polinom mátrixok, amelyeknek a determinánsa 1, és található olyan példa amely mellett egy ilyen mátrixszal vett szorzás a $[\varphi(z) : \vartheta(z)]$ felírásnak a fokszámait nem, csak a paramétereit változtatja meg.

Két VARMA felírás ekvivalenciájának értelmezése

Egy $[\varphi(z) : \vartheta(z)]$ módon adott y_t VARMA(p,q) folyamat nyilván felírható a következő

$$y_t = (\varphi_0 - \varphi_1 L - \dots - \varphi_p L^p)^{-1} (\vartheta_0 + \vartheta_1 L + \dots + \vartheta_q L^q) a_t ,$$

vagy az alábbi zártabb

$$y_t = \varphi^{-1}(L) \vartheta(L) a_t = \psi(L) a_t$$

formában.

Azt mondjuk, hogy két VARMA folyamat ekvivalens, ha a felírásukhoz tartozó karakterisztikus polinomok alapján számolt $\psi(z) = \varphi^{-1}(z) \vartheta(z)$ megegyezik.

Ahhoz, hogy egy folyamat VARMA reprezentációjának egyértelműségét biztosítsuk, megszorításokat kell tennünk az AR és MA operátorokra. Vagyis kell, hogy a $\varphi(z)$ és $\vartheta(z)$ polinommatrixoknak csak egyetlen $\psi(z) \sim \text{MA}(\infty)$ felírás feleljen meg.

Először is határozzuk meg, hogy többdimenziós esetben mi a megfelelője az egydimenziós esetbeli relatív prím tulajdonságnak. Azt a feltételt keressük, amely mellett a $\varphi(z)$ és $\vartheta(z)$ nem kiegyszerűsíthető, amikor a $\varphi(z)^{-1} \vartheta(z)$ polinommatrixot számítjuk. Ez akkor teljesül, ha $\varphi(z)$ és $\vartheta(z)$ balról relatív prím.

A $\psi(\varphi(z), \vartheta(z)) = \varphi(z)^{-1} \vartheta(z)$ mátrix operátorra azt mondjuk, hogy balról relatív prím, ha bármely $D(z)$, $\overline{\varphi}(z)$, $\overline{\vartheta}(z)$ esetén, ha

$$D(z) \psi(\overline{\varphi}(z), \overline{\vartheta}(z)) = \psi(\varphi(z), \vartheta(z))$$

akkor $D(z)$ unimoduláris, azaz $\det D(z)$ nulladfokú, nem nulla, konstans mátrix.

Ahhoz, hogy a fenti felírásbeli polinom mátrixokra biztosan teljesüljön a bal oldali relatív prím tulajdonság, korlátozásokat kell tennünk. Biztosítanunk kell, hogy az egyetlen unimoduláris $D(z)$ operátor az előző egyenlőségben a $D(z) = I(k)$, tehát egy $k \times k$ méretű identitás mátrix legyen. Több felírás is létezik, amely garantálja a bal oldali relatív prím operátor egyértelműségét. A szakirodalomban leggyakrabban használt ilyen felírás az echelon forma.

Az 'echelon' forma

Az 'echelon', azaz lépcsős forma azt jelenti, hogy a VARMA folyamat $\varphi(z)$ és $\vartheta(z)$ polinom mátrixai esetén, a folyamat egyértelmű felírása és identifikálhatósága érdekében nem csak a két mátrixbeli polinomok maximális fokszámát, – nemis csak szigorúbban, soronként véve a polinomok maximális fokszámát kötjük meg, hanem bizonyos értelemben lépcsőzetesen azt is, hogy a polinom mátrixokban egyes együthetők (strukturálisan) nullák legyenek.

Legyenek a k komponensű y_t VARMA folyamat Kronecker indexei n_1, \dots, n_k .

Azt mondjuk, hogy a k komponensű y_t VARMA folyamat lépcsős-VARMA formában van felírva, ha a folyamat $[\varphi(z), \vartheta(z)]$ karakterisztikus polinomjai a következő tulajdonságokkal bírnak:

- a $[\varphi(z), \vartheta(z)]$ mátrix i . sorában, legfeljebb n_i a polinomok fokszáma, $i = 1, 2, \dots, k$ -ra
- $\varphi_{i,i;0} = 1, i = 1, 2, \dots, k$
- $\varphi_{i,j;0} = \vartheta_{i,j;0}, i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, k,$
- $\varphi_{i,j;m} = 0$ ha $m = 0, \dots, n_i - n_{i,j}$ és $i \neq j,$
ahol $n_{i,j} = \min(n_i + 1, n_j),$ ha $j < i$ és $\min(n_i, n_j)$ ha $j > i.$

Ugyanez szavakban összefoglalva:

- a $\varphi(z)$ mátrix diagonálisának i . pozíciójában minden $i = 1, \dots, k$ -ra olyan, legfeljebb n_i fokszámú polinom áll, amelynek konstans tagja 1
- a $\varphi(z)$ mátrix i . sorában a diagonálison kívüli polinomok fokszáma is legfeljebb $n_i,$ de ezen polinomok együthatói közül csak az $n_{i,j}$ darab legmagasabb fokszámú nem 0
- a $\vartheta(z)$ mátrixpolinom konstansmátrixa megegyezik a $\varphi(z)$ konstansmátrixával, és minden $i = 1, \dots, k$ -ra, az i . sorbeli elemek mind legfeljebb n_i fokú polinomok.

Belátható, hogy a VARMA modellekre az echelon forma kanonikus forma. Azaz olyan feltételeket jelent, amelyek mellett a folyamat paraméter rendszere, a fenti ekvivalencia értelmében egyértelműen meghatározható.

Mint látható, az echelon forma meglehetősen összetett kritériumokat jelent a VARMA(p,q) modell karakterisztikus polinomjaira nézve. De az echelon feltételek nem enyhíthetőek. Látható, hogy egy echelon formában felírt VARMA modell két, p és q fokszám paramétere nyilván a $\max(n_1, \dots, n_k)$ -val egyenlő. De mint arra korábban utaltunk, ez a két paraméter már nem egyértelműsítene az VARMA(p,q) folyamat felírását.

Több megoldás is keletkezett VARMA folyamatok echelon forma szerinti paramétereinek meghatározására. E modell illesztési eljárásainak alapvető problémája, hogy a becslés elkészítéséhez szükség van előzőleg a Kronecker indexek egy kielégítő becslésére. Ez a kapcsolódó numerikus módszereket meglehetősen bonyolultá teszi. Ugyanakkor a következő fejezetekben bemutatott eljárás az egydimenziós folyamatok esetén bevált regressziós módszer egy olyan többdimenziós kiterjesztése, amely sokkal egyszerűbb algoritmust eredményez. Ezen eljárások tárgyalásához szükséges, hogy bemutassuk a VARMA folyamatok néhány további kanonikus formáját.

3.5. VARMA folyamatok kanonikus formái

Ha egy

$$\varphi(L)y_t = \vartheta(L)a_t$$

formában felírt egyenlet mindkét oldalát balról megszorozzuk a $\varphi(L)$ mátrix adjungáltjával, akkor, mivel

$$\text{adj}(\varphi(L))\varphi(L) = \det(\varphi(L)),$$

a folyamat egy olyan speciális felírását nyerjük, amelyben az AR operátor egy diagonális polinommátrix, amelynek diagonálisában ráadásul azonos, a $\det(\varphi(L))$ -lel egyenlő polinomok szerepelnek.

Az $\text{adj}(\vartheta(L))$ -lel való balról szorzás hasonló módon, a jobb oldalon eredményez egyszerű operációt.

E két ‘egyszerű’ felírás hátránya, hogy a $\det(\varphi(z))$ illetve a $\det(\vartheta(z))$ polinomok nagyon magas, akár kp illetve kq fokszámúak is lehetnek. E problémán segíthet valamennyit a következő észrevétel:

Például a $\varphi(z)$ esetén, ha a $\varphi(z)$ egyes oszlopaiban szereplő polinomoknak van közös osztójuk, és ez az osztó a j . oszlopban $d_j, j = 1, \dots, k$ akkor a megfelelő

$$D(z) = \text{diag}(d_1(z), \dots, d_k(z))$$

mátrix segítségével a $\varphi(L)$ operáció polinomja a $\varphi(z) = \bar{\varphi}(z)D(z)$ szorzat alakba írható egy megfelelő $\bar{\varphi}(z)$ polinommátrix segítségével. Ekkor az AR operáció diagonális alakra hozásához elég az egyenletet balról csak az $\bar{\varphi}(L)$ adjungáltjával beszorozni, hiszen a $\det(\bar{\varphi}(L))D(z)$ is diagonális mátrix.

Így egy olyan felíráshoz jutunk, amelyre az AR operáció diagonális, ám a fokszáma várhatóan alacsonyabb mint a korábbi esetben. Hasonló egyszerűsítés a $\vartheta(z)$ esetén is alkalmazható.

Ezeket az észrevételeket figyelembe véve 4 olyan reprezentációt mutatunk be, amelyek a VARMA modell kanonikus formái, és vehetők egyszerűen úgy is, mint a VAR illetve a VMA modell többdimenziós esetekre való kiterjesztései.

1. Final, azaz végső AR folyamat

Azt mondjuk, hogy a $[\varphi(z) : \vartheta(z)]$ polinomokkal felírt VARMA folyamat végső AR formában van, ha a $\varphi(z)$ mátrix diagonális és a diagonálisában szereplő polinomok egyenlők.

2. Diagonal, azaz diagonális AR folyamat

Azt mondjuk, hogy a $[\varphi(z) : \vartheta(z)]$ polinomokkal felírt VARMA folyamat diagonális AR formában van, ha a $\varphi(z)$ mátrix polinom diagonális.

3. Final, azaz végső MA folyamat

Azt mondjuk, hogy a $[\varphi(z) : \vartheta(z)]$ polinomokkal felírt VARMA folyamat végső MA formában van, ha a $\vartheta(z)$ mátrix polinom diagonális és a diagonálisában szereplő polinomok egyenlők.

4. Diagonal, azaz diagonális MA folyamat

Azt mondjuk, hogy a $[\varphi(z) : \vartheta(z)]$ polinomokkal felírt VARMA folyamat diagonális MA formában van, ha a $\vartheta(z)$ mátrixpolinom diagonális.

Állítás

Tetszőleges VARMA folyamat a fenti 4 forma mindegyikében identifikálható, vagyis a foksámok megadása után a folyamat megfelelő paraméterei becsülhetők.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy a paraméterezés nem egyértelmű, a $[\varphi(z) : \vartheta(z)]$ felírás mellett van egy másik, ugyanolyan feltételeknek elegettevő $[\bar{\varphi}(z) : \bar{\vartheta}(z)]$ paraméterezés is. Ez azt jelenti, hogy a folyamat ARMA formáját VAR(∞) formába átírva teljesül, hogy

$$\vartheta(z)^{-1}\varphi(z) = \bar{\vartheta}(z)^{-1}\bar{\varphi}(z).$$

Vagyis megfelelő invertálhatósági feltétel mellett érvényes, hogy

$$\bar{\vartheta}(z)\vartheta(z)^{-1} = \bar{\varphi}(z)\varphi(z)^{-1} = \Delta(z),$$

ahol a $\Delta(z)$ egy diagonális polinom mátrix, ugyanis a definiált felírások esetén vagy a $\varphi(z)$ vagy a $\vartheta(z)$ diagonális.

A $\Delta(z)$ diagonálisában a fenti definíció okán polinomtörtek vannak, jelölje ezeket $e_i(z)/f_i(z)$, egy-egy megfelelően megválasztott relatív prím $f_i(z)$, $e_i(z)$ polinom pár segítségével.

Előbb belátjuk, hogy ezek a törtek polinomok, majd azt is, hogy ezek a polinomok 1-el egyenlő, konstans polinomok.

Az egyenlőség miatt $i, j = 1, \dots, k$ -ra

$$\bar{\varphi}_{i,j}(z) \frac{e_i(z)}{f_i(z)} = \varphi_{i,j}(z) \quad \bar{\vartheta}_{i,j}(z) \frac{e_i(z)}{f_i(z)} = \vartheta_{i,j}(z),$$

ami a $\varphi(z)$ és a $\vartheta(z)$ közül a diagonálisra természetesen csak az $i = j$ mellett jelent megkötést.

Ha az $f_i(z)$ nem nulladfokú, akkor az $f_i(z)$ minden gyöktényezője, a $\bar{\varphi}_{i,j}(z)$ -nek és a $\bar{\vartheta}_{i,j}(z)$ -nek is gyöktényezője, tehát azok nem relatív prímelek, és ez ellentmond a paraméterezéskor tett kikötéseknek. Tehát az $f_i(z)$ polinomok konstans polinomok.

De ekkor az $e_i(z)$ polinomok gyöktényezőre érvényes, hogy azok a $\varphi_{i,j}(z)$ -nek és a $\vartheta_{i,j}(z)$ -nak is gyöktényezői. Márpedig azok relatív prím voltát szintén feltettük a paraméterezéskor.

Vagyis az állítás igaz.

4. VARMA becslés

Ebben a fejezetben egy olyan egységes algoritmussal foglalkozunk, amely az előző fejezet végén ismertetett 4 kanonikus forma bármelyikének alkalmazása mellett, három lépésben talál a folyamat VARMA modelljének paramétereire megfelelő becslést. Ahhoz, hogy az algoritmus a 4 különböző módon meghatározott modell esetén egységesen működhessen az szükséges, hogy a modellek paramétereit a konkrét modell típustól független, egységes formában írjuk fel.

Először bemutatjuk a négy kanonikus modell egységes paraméterezését. Majd röviden ismertetjük azt az algoritmust amelyet JM Dufour és D Pelletier ajánl. Végül közöljük az algoritmus egy saját magunk által \mathbf{R} nyelven készült implementációjának struktúráját és e program egy tesztfutásának egy részeredményét.

4.1. Az algoritmus paramétereinek felépítése

Az algoritmus leírásakor technikai szükség a $\varphi(z)$ és $\vartheta(z)$ paraméter polinomok átírása egy egységes γ vektorba, valamint egy adott időpontban a múltbeli megfigyelések és zaj értékek (illetve azok becsléseinek) szintén egy egységes Z mátrix formában való kezelése. Ugyanis ez az átírás teszi majd lehetővé, hogy az algoritmus végrehajtásakor a szükséges műveleteket egyrészt azonos módon, másrészt hagyományos mátrix szorzásokként végezhessük el. Emellett a bemutatott átírás azért is hasznos, mert kiemeli az algoritmus elméleti hátterét.

A folyamat paramétereit tartalmazó γ vektor felépítése

Először a γ vektor elkészítési módját mutatjuk be, final-AR, diagonal-AR, final-MA és diagonal-MA formában felírt folyamatok esetén.

A γ paraméter vektor mindig két részből áll:

$$\gamma = (\gamma_{AR}, \gamma_{MA})'$$

Olymódon, hogy a γ_{AR} rész az aktuális VARMA operáció AR részének, γ_{MA} rész pedig az operáció MA részének paramétereit tartalmazza.

A γ vektor felépítése final-AR forma esetén

Ha egy VARMA folyamat final-AR formában van, akkor a folyamat a

$$\varphi(L)y_t = \vartheta(L)a_t$$

egyenlet szerinti, vagyis a folyamat kielégíti a

$$y_t - \varphi_1 y_{t-1} - \cdots - \varphi_p y_{t-p} = a_t + \vartheta_1 a_{t-1} + \cdots + \vartheta_q a_{t-q}$$

egyenletet, ahol a $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ konstansok, a $\vartheta_1, \dots, \vartheta_q$ pedig $k \times k$ méretű mátrixok. Ebből nyilvánvaló, hogy a folyamatnak $p + qk^2$ paramétere van, vagyis az e modelltől készített γ lineáris paraméter vektornak is $p + qk^2$ eleme van a következők szerint:

A γ_{AR} az AR együtthatóit tartalmazza, tehát p elemű:

$$\gamma_{AR} = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)'$$

A γ_{MA} az MA együtthatóit tartalmazza előbb az első koordinátára egymás után, a $t - 1$, majd a $t - 2$ stb, végül a $t - q$ időponthoz tartozó k darab együtthatót, majd ugyanezt a második koordinátára, és végül a k -ra, a következő módon:

$$\gamma_{MA} = \begin{pmatrix} \vartheta_{1,1;1}, \dots, \vartheta_{1,k;1}, & \vartheta_{1,1;2}, \dots, \vartheta_{1,k;2}, & \dots, & \vartheta_{1,1;q}, \dots, \vartheta_{1,k;q} \\ \vartheta_{2,1;1}, \dots, \vartheta_{2,k;1}, & \vartheta_{2,1;2}, \dots, \vartheta_{2,k;2}, & \dots, & \vartheta_{2,1;q}, \dots, \vartheta_{2,k;q} \\ \vdots & & & \\ \vartheta_{k,1;1}, \dots, \vartheta_{k,k;1}, & \vartheta_{k,1;2}, \dots, \vartheta_{k,k;2}, & \dots, & \vartheta_{k,1;q}, \dots, \vartheta_{k,k;q} \end{pmatrix}' .$$

Vagyis a γ_{MA} egy k^2q méretű vektor. Az γ_{MA} az első sorában előbb $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_q$ paramétermátrix első sorának elemeit tartalmazza. Utána ugyanezt a második sorra és így tovább, végül az utolsó folyamat-koordináta MA részének megfelelő paramétereket tartalmazza. Vagyis a γ_{MA} paraméter vektor rész a $[\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_q]$ paraméter mátrix sorfolytonos felsorolásával egyenlő.

Tehát egy final-AR folyamat esetén a γ paraméter vektor mérete tényleg: $(p + kq^2) \times 1$.

A γ paraméter vektor felépítése diagonal-AR, a final-MA és a diagonal-MA esetén lényegében ugyanolyan, mint a most bemutatott final-AR esetben.

A γ vektor felépítése diagonal-AR esetén

Ha egy VARMA folyamat diagonal-AR formában van, akkor a folyamat a

$$\varphi(L)y_t = \vartheta(L)a_t$$

egyenlet szerinti, ahol a $\varphi(z)$ polinommátrix egy diagonális mátrix, de most e mátrix diagonálisában szereplő polinomok nem feltétlen azonosak, sőt még a fokszámok sem feltétlen ugyanazok.

Ennek megfelelően a γ_{AR} paraméter rész a következők szerint módosul:

$$\gamma_{AR} = (\varphi_{1;1}, \dots, \varphi_{1;p_1}, \varphi_{2;1}, \dots, \varphi_{2;p_2}, \dots, \varphi_{k;1}, \dots, \varphi_{k;p_k})'$$

A γ_{AR} tehát $\sum_{j=1}^k p_j$ elemű. Előbb az első koordináta, majd a második koordináta, stb, végül a k . koordináta AR polinomjának paramétereit tartalmazza.

A γ_{MA} paraméter rész viszont a final-AR γ_{MA} vektorával azonos struktúrájú.

Tehát egy diagonal-AR folyamat esetén a γ vektor mérete: $(\sum_{j=1}^k p_j + k^2q) \times 1$.

A γ vektor felépítése final-MA esetén

Final-MA esetén a folyamat egy

$$\varphi(L)y_t = \vartheta(L)a_t$$

formájú egyenletet elégít ki, ahol a $\varphi(z)$, azaz a MA operátor diagonális és a diagonálisának mindegyik eleme egyenlő.

A γ_{MA} vektor ennek megfelelően a koordináták közös MA polinomjának paramétereit az indexük növekvő sorrendjében tartalmazza:

$$\gamma_{\text{MA}} = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_q)',$$

vagyis a γ_{MA} vektor q elemű.

Final-MA esetén az AR operátor egy általános k dimenziós p -edrendű AR operátor. Az elemeit a γ_{AR} vektor ugyanabban a sorrendben sorolja fel, mint a diagonal- és final-AR folyamat esetén az MA operátor paramétereit, vagyis:

$$\gamma_{\text{AR}} = \left(\begin{array}{cccc} \varphi_{1,1;1}, \dots, \varphi_{1,k;1}, & \varphi_{1,1;2}, \dots, \varphi_{1,k;2}, & \dots, & \varphi_{1,1;p}, \dots, \varphi_{1,k;p} \\ \varphi_{2,1;1}, \dots, \varphi_{2,k;1}, & \varphi_{2,1;2}, \dots, \varphi_{2,k;2}, & \dots, & \varphi_{2,1;p}, \dots, \varphi_{2,k;p} \\ \vdots & & & \\ \varphi_{k,1;1}, \dots, \varphi_{k,k;1}, & \varphi_{k,1;2}, \dots, \varphi_{k,k;2}, & \dots, & \varphi_{k,1;p}, \dots, \varphi_{k,k;p} \end{array} \right)' .$$

Tehát most egy k^2p hosszú vektort nyertünk, amely előbb az első, majd a második és így tovább, legvégül az utolsó koordináta φ polinomjainak paramétereit tartalmazza úgy, hogy e polinomokból előbb a $t - 1$, majd a $t - 2$ stb, végül a $t - p$ időponthoz tartozó k darab együtthatót veszi sorra. Azaz a γ_{AR} paraméter vektor rész a $[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q]$ paraméter mátrix sorfolytonos felsorolásával egyenlő.

Tehát egy final-MA folyamat esetén a γ vektor mérete: $(k^2p + q) \times 1$.

A γ vektor felépítése diagonal-MA esetén

Ha egy VARMA folyamat diagonal-MA formában van felírva, akkor a folyamat a

$$\varphi(L)y_t = \vartheta(L)a_t$$

egyenlet szerinti, egy diagonális $\vartheta(z)$ polinommátrix szerint.

A diagonal-MA γ vektorának γ_{MA} része azonos a final-MA γ_{AR} vektorával.

A γ_{MA} paraméter rész viszont a következők szerint módosul:

$$\gamma_{\text{MA}} = (\vartheta_{1;1}, \dots, \vartheta_{1;q_1}, \vartheta_{2;1}, \dots, \vartheta_{2;q_2}, \dots, \vartheta_{k;1}, \dots, \vartheta_{k;q_k})' .$$

Tehát a γ_{MA} hossza: $\sum_{j=1}^k q_j$ és előbb az első koordináta, majd a második koordináta és így tovább, végül az utolsó koordináta MA polinomjának paramétereit tartalmazza.

Tehát a diagonal-MA folyamat esetén a γ vektor mérete: $(k^2p + \sum_{j=1}^k q_j) \times 1$.

A folyamat és a zaj becslés múltbeli adatait tartalmazó \mathbf{Z} vektor felépítése

A dolgozat következő részében az idő paraméter a függvények, vektorok, mátrixok argumentumában szerepel, hogy elkerüljük az indexenek torlódását.

A $\mathbf{Z}_{a,y}(t-1)$ mátrix az y_t megfigyelésekből és az a_t fehérzajból, illetve annak becslült értékeiből felépülő mátrix. A mátrix minden esetben két részből áll, az első részét mindig az y_t megfigyelések, a második részét pedig az a_t zaj, illetve a zajnak az indexben megadott, becslült értékei határozzák meg.

A felépítés leírásához bevezetjük az y_t megfigyelésekből, illetve az a_t zajokból (pontosabban annak becsléseiből) álló következő négyfajta sorvektort:

Az $\mathbf{y}_j(t-1)$ az y_j koordináta p_j hosszú múltja:

$$\mathbf{y}_j(t-1) = (y_j(t-1), \dots, y_j(t-p_j)),$$

azaz $j = 1, 2, \dots, k$ -ra ez egy-egy p_j hosszú sorvektor.

Az $\mathbf{a}_j(t-1)$ az a_j koordináta q_j hosszú múltja:

$$\mathbf{a}_j(t-1) = (a_j(t-1), \dots, a_j(t-q_j)),$$

azaz $j = 1, 2, \dots, k$ -ra ez egy-egy q_j hosszú sorvektor.

Az $\mathbf{y}(t-1)$ a k dimenziós y_t idősor p hosszú, t időpontbeli teljes, k dimenziós múltja, vagyis a $t-1, t-2, \dots, t-k$ időpontbeli értékeket tartalmazza, azaz

$$\mathbf{y}(t-1) = (y_1(t-1), \dots, y_k(t-1), y_1(t-2), \dots, \dots, y_k(t-p)),$$

ami egy kp hosszú sorvektor.

Az $\mathbf{a}(t-1)$ a k dimenziós a_t idősor q hosszú, t időpontbeli teljes, k dimenziós múltja, azaz

$$\mathbf{a}(t-1) = (a_1(t-1), \dots, a_k(t-1), a_1(t-2), \dots, \dots, a_k(t-q)),$$

ami egy kq hosszú sorvektor.

A most definiált sorvektorokat az egyes megfigyelésektől és zaj értékektől a kövér szedés különbözteti meg. E sorvektorok a zárójelben jelzett időpontban kezdődő múltat írják le. Általában nem lesz szükség az időpont megjelölésekre, ezért azt többször elhagyjuk.

A $\mathbf{Z}_{a,y}(t-1)$ mátrix final-AR esetén

Final-AR esetén a $\mathbf{Z}_{a,y}(t-1)$ mátrix az első részében y_t megfigyelések koordinátáinak múltját tartalmazza, $j = 1, 2, \dots, k$ -ra egységesen, $p_j = p$ hosszban.

A $\mathbf{Z}_{a,y}(t-1)$ mátrix második részében diagonálisan, minden sorában, a zaj teljes k dimenziós q -ad rendű múltját tartalmazza, a következők szerint:

$$\mathbf{Z}_{a,y}(t-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t-1) & \mathbf{a}(t-1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_k(t-1) & 0 & \cdots & \mathbf{a}(t-1) \end{bmatrix}$$

Tehát final-AR esetén a $\mathbf{Z}_{a,y}(t-1)$ mátrix mérete: $k \times (p + k^2q)$.

A $\mathbf{Z}_{a,y}(t-1)$ mátrix diagonal-AR esetén

Diagonal-AR esetén a $\mathbf{Z}_{a,y}(t-1)$ mátrix mindkét részében diagonálisan tartalmazza a múltat. Az első részében $j = 1, 2, \dots, k$ -ra az y_j koordinátáét p_j hosszban, a második részében pedig mindegyik koordinátára egységesen a zaj t időponthoz tartozó k dimenziós teljes q -adrendű múltját a következők szerint:

$$\mathbf{Z}_{a,y}(t-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t-1) & \cdots & 0 & \mathbf{a}(t-1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{y}_k(t-1) & 0 & \cdots & \mathbf{a}(t-1) \end{bmatrix}$$

Tehát diagonal-AR esetén a $\mathbf{Z}_{a,y}(t-1)$ mátrix mérete: $k \times (\sum_{j=1}^k p_j + k^2q)$.

A $\mathbf{Z}_{a,y}(t-1)$ mátrix final-MA esetén

Final-MA esetén a $\mathbf{Z}_{a,y}(t-1)$ mátrix első része a diagonálisban az y_t folyamat t időpontbeli k dimenziós teljes p -edrendű múltját tartalmazza, a második része pedig a zaj mindegyik koordinátájára egységesen a zaj megfelelő koordinátáinak $q_j = q$ hosszú múltját a következők szerint:

$$\mathbf{Z}_{a,y}(t-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t-1) & \cdots & 0 & \mathbf{a}_1(t-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{y}(t-1) & \mathbf{a}_k(t-1) \end{bmatrix}$$

Tehát final-MA esetén a $\mathbf{Z}_{a,y}(t-1)$ mátrix mérete: $k \times (k^2p + q)$.

A $\mathbf{Z}_{a,y}(t-1)$ mátrix diagonal-MA esetén

Diagonal-MA esetén a $\mathbf{Z}_{a,y}(t-1)$ első része megegyezik a final-MA formában felírt folyamathoz tartozó mátrix első részével, a második részében pedig a zajra vonatkozó múltat is diagonálisan tartalmazza. Minden koordinátára vonatkozóan esetleg különböző

$q_j, j = 1, 2, \dots, k$ hosszban, a következők szerint:

$$\mathbf{Z}_{a,y}(t-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t-1) & \cdots & 0 & \mathbf{a}_1(t-1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{y}(t-1) & 0 & \cdots & \mathbf{a}_k(t-1) \end{bmatrix}$$

Tehát diagonal-MA esetén a $\mathbf{Z}_{a,y}(t-1)$ mátrix mérete: $k \times (k^2 p + \sum_{j=1}^k q_j)$.

4.2. A Dufour-Pelletier féle három lépéses algoritmus

Az algoritmus az előző pontban ismertett γ és \mathbf{Z} jelöléseket alkalmazva formálisan azonos lépésekből áll mind a négy modell esetén, a következők szerint:

1. lépés

Készítsük el a k dimenziós y_t folyamat egy kellően magas fokszámú VAR modelljét. Jelölje a modell fokszámát n , és a modell együtthatói legyenek a $k \times k$ méretű $\tilde{\Pi}_1, \dots, \tilde{\Pi}_n$ mátrixok. Legyen \tilde{a}_t az a folyamat, amelyik az y_t folyamatot az $AR_{\tilde{\Pi}}$ szerint generálja, azaz legyen

$$\tilde{a}_t = y_t - \sum_{j=1}^n \tilde{\Pi}_j y_{t-j} = \tilde{\Pi}(L)y_t.$$

Legyen $\Sigma_{\tilde{a}}$ az \tilde{a}_t folyamat kovarianciájának a becslése, azaz legyen:

$$\Sigma_{\tilde{a}} = \sum_{t=n+1}^T \tilde{a}_t \tilde{a}_t' / T.$$

2. lépés

Vegyük az y_t regresszióját a saját \mathbf{y}_{t-1} -el és az \tilde{a}_t folyamat $\tilde{\mathbf{a}}_{t-1}$ -el jelölt múltjára vonatkozóan, a $\mathbf{Z}_{\tilde{\mathbf{a}},\mathbf{y}}(t-1)$ tervmátrixnak megfelelően, figyelembe véve a $\Sigma_{\tilde{a}}$ kovarianciát. Azaz tekintsük az

$$y_t = \mathbf{Z}_{\tilde{\mathbf{a}},\mathbf{y}}(t-1)\gamma + \hat{a}(t)$$

regressziós feladatot ismert $y_t, \mathbf{Z}_{\tilde{\mathbf{a}},\mathbf{y}}(t-1)$ és becsülendő γ mellett, amely függ attól, hogy a 4 modell melyikét illesztjük. Az imént felírt regressziós feladat $\tilde{\gamma}$ -mal jelölt, általános legkisebb négyzetek módszerével vett megoldását a következő képlettel adhatjuk meg:

$$\tilde{\gamma} = \left(\sum_{t=n}^T \mathbf{Z}'_{\tilde{\mathbf{a}},\mathbf{y}}(t-1) \Sigma_{\tilde{a}}^{-1} \mathbf{Z}_{\tilde{\mathbf{a}},\mathbf{y}}(t-1) \right)^{-1} \left(\sum_{t=n}^T \mathbf{Z}'_{\tilde{\mathbf{a}},\mathbf{y}}(t-1) \Sigma_{\tilde{a}}^{-1} y_t \right)$$

Legyen az $\hat{a}(t)$ az a folyamat amely a $\tilde{\gamma}$ paramétereknek megfelelő a $\tilde{\varphi}, \tilde{\vartheta}$ paraméterek szerinti

$$\tilde{\varphi}(L)y(t) = \tilde{\vartheta}(L)\hat{a}(t)$$

VARMA $[\tilde{\varphi}, \tilde{\vartheta}]$ modell alapján az y_t folyamatot generálja. Továbbá legyen az x_t az y_t -re, a \hat{v}_t pedig az \hat{a}_t -re épülő $AR_{\tilde{\vartheta}}$ folyamat, vagyis feltesszük, hogy

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(L)y(t) &= \tilde{\vartheta}(L)\hat{a}(t), \\ \tilde{\vartheta}(L)x(t) &= y(t), \\ \tilde{\vartheta}(L)\hat{v}(t) &= \hat{a}(t).\end{aligned}$$

Továbbá jelölje $\hat{w}(t)$ az e folyamatok alapján számolt

$$\hat{w}(t) = x(t) + \hat{a}(t) - \hat{v}(t)$$

folyamatot. Legyen $\Sigma_{\hat{a}}$ az \hat{a}_t folyamat kovarianciájának a becslése, azaz legyen:

$$\Sigma_{\hat{a}} = \sum_{t=n+1}^T \hat{a}_t \hat{a}_t' / T.$$

Legyen a $\mathbf{V}_{\hat{a}}(t)$ tervmátrix, a $\mathbf{Z}_{\hat{a}}(t)$ tervmátrixnak az $AR_{\tilde{\vartheta}}$ modell inverze alapján vett transzformáltja, azaz $\mathbf{V}_{\hat{a}}(t)$ legyen a

$$\tilde{\vartheta}(L)\mathbf{V}_{\hat{a}}(t) = \mathbf{Z}_{\hat{a}}(t)$$

rekurzív egyenlet szerinti.

3. lépés

Vegyük a $\hat{w}(t)$ folyamat $\mathbf{V}_{\hat{a}}(t)$ tervmátrix szerinti regresszióját, figyelembe véve a $\Sigma_{\hat{a}}$ kovarianciát, azaz tekintsük a

$$\hat{w}(t) = \mathbf{V}_{\hat{a}}(t)\gamma + a(t)$$

regressziós feladatot ismert $\hat{w}(t)$, $\mathbf{V}_{\hat{a}}(t)$ és becsülendő γ mellett. Legyen a $\hat{\gamma}$ regresszió általános legkisebb négyzetek módszerével vett megoldása, tehát legyen:

$$\hat{\gamma} = \left(\sum_{t=n}^T \mathbf{V}_{\hat{a}}'(t-1) \Sigma_{\hat{a}}^{-1} \mathbf{V}_{\hat{a}}(t-1) \right)^{-1} \left(\sum_{t=n}^T \mathbf{V}_{\hat{a}}'(t-1) \Sigma_{\hat{a}}^{-1} \hat{w}(t) \right)$$

Az algoritmus eredménye a VARMA folyamat (φ, ϑ) paramétereinek azon $(\hat{\varphi}, \hat{\vartheta})$ becslése, amelyet a 3. lépésben nyert $\hat{\gamma}$ becslés alapján írhatunk fel.

A módszer helyes voltának belátása

Ahhoz, hogy a bemutatott algoritmus jó, azt kell megmutatni, hogy a $\hat{\gamma}$ asszimptotikusan megegyezik a meghatározandó γ paraméterrel. Ez pedig a következő egyenlet sorozat alapján bizonyítható.

Írjuk fel a $\widehat{w}(t)$ sorozatot a 2. lépésben meghatározottak szerint, vegyük figyelembe, hogy

$$\widehat{w}(t) = \widehat{a}(t) + x(t) - \widehat{v}(t)$$

ahol $x(t) = \tilde{\vartheta}^{-1}(L)y(t)$ és $\widehat{v}(t) = \tilde{\vartheta}^{-1}(L)\widehat{a}(t)$.

A paraméterek definíciója szerint

$$y(t) = \mathbf{Z}(t-1)\gamma + a(t).$$

Azonos átalakításokkal és egy $-a(t) + a(t)$ hozzáadásával adódik, hogy

$$\begin{aligned} \widehat{w}(t) &= \widehat{a}(t) + x(t) - \widehat{v}(t) = \widehat{a}(t) + \tilde{\vartheta}^{-1}(L)y(t) - \tilde{\vartheta}^{-1}(L)\widehat{a}(t) = \\ &= \widehat{a}(t) + \tilde{\vartheta}^{-1}(L)Z(t-1)\gamma + a(t) - \tilde{\vartheta}^{-1}(L)\widehat{a}(t) = \\ &= \widehat{a}(t) + V(t-1)\gamma - \vartheta^{-1}(L)(\widehat{a}(t) - a(t)) = \\ &= V(t-1)\gamma + a(t) + (I + \tilde{\vartheta}^{-1}(L))(\widehat{a}(t) - a(t)) . \end{aligned}$$

Mint ahogy az utolsó sorban a harmadik tag nagyságrendje $\mathcal{O}(T^{1/2})$, a bemutatott egyenlőség-sorozat tényleg igazolja az állítást.

4.3. Egy tesztfuttatás és az eredménye

Egy olyan **R** programot készítettünk ami a fenti illesztő algoritmust valósítja meg diagonális MA felírás esetén.

Azért a diagonális MA formát választottuk a lehetséges kanonikus formák közül, mert ez a modell úgy áll közel a VAR formához, hogy a megfelelő diagonális MA operátor sem tartalmaz megkötéseket az egyes koordinátákhoz tartozó MA polinomok egyenlőségére vonatkozóan.

Az illesztéshez szükséges programrendszer felépítése

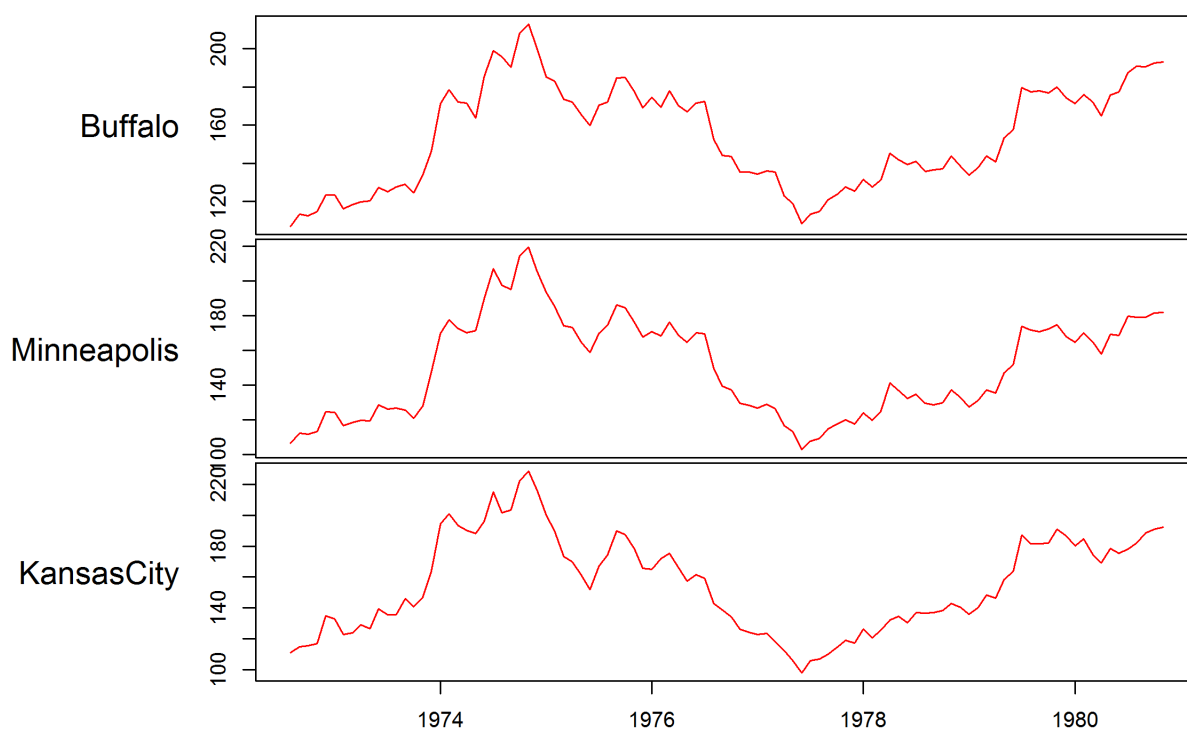
A programrendszer követi a Dufour-Pelletier féle algoritmus előző pontban leírt adaptációját.

A főprogram 6 részprogramot hív. A részprogramok a paraméter objektumok kezelését végzik a következők szerint.

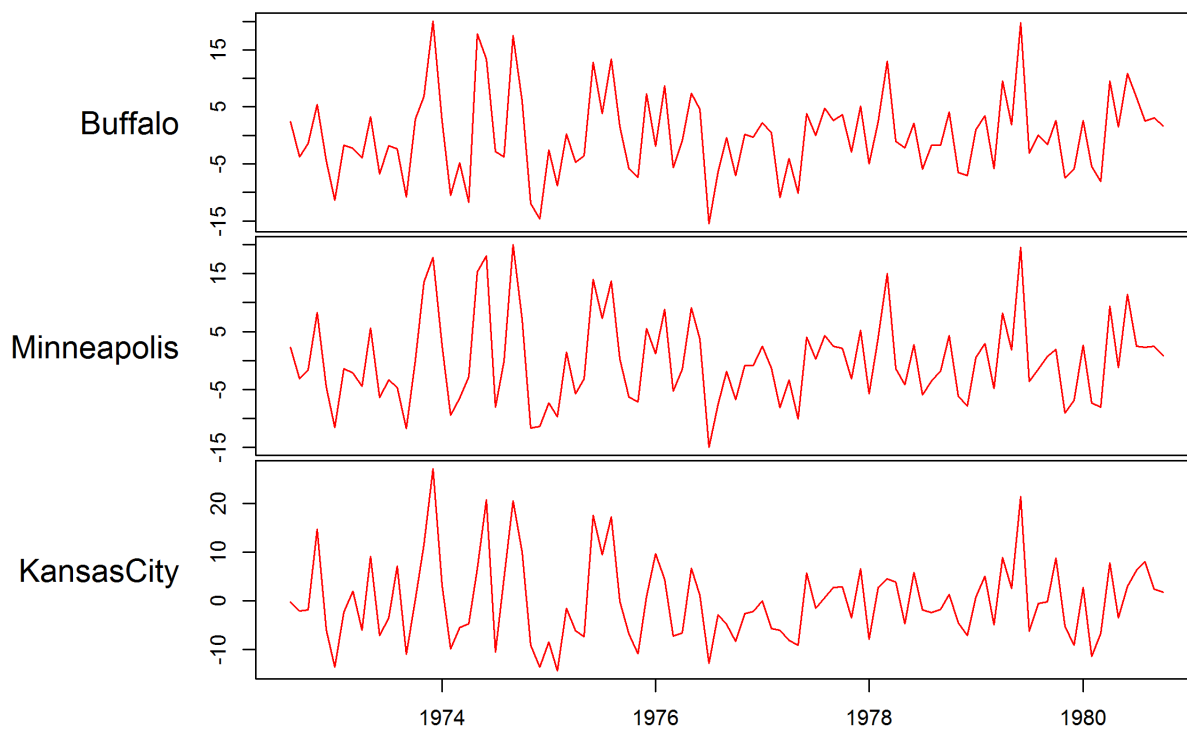
v2a		képezi a γ vektor array típusú polinom mátrix interpretációját
y2a_ARi		képezi a \tilde{a}_t folyamatot
y2a_ARMAi		képezi a \hat{a}_t folyamatot
y2x_AR		képezi az x_t folyamatot
Z		y_t és a_t -ből képezi a \mathbf{Z}_t múlt-mátrixot
VTeto		elkészíti a \mathbf{V}_t tervmátrix folyamatot

A főprogram neve: DP3Lepes, úgy mint ‘Dufour-Pelletier három lépés’. Ez az eljárás, minthogy jelenleg diagonal-MA modellekre működik, az y vektorban tárolt, feldolgozandó idősor mellett még két paraméter objektumot vár. Egyrészt a modell AR részének fokszámát, másrészt a modell MA részének diagonálisában álló polinomok fokszámát. Teszt adatként az idősor elemzési környezetben klasszikusnak számító ‘flour-data’ adatsort vettük. Ez havi liszt áradatakat tartalmaz, 1972 augusztus és 1980 november közt Buffalo, Minneapolis és Kansas City tőzsdéiről véve.

A feldolgozott adatok képe az alábbi:



A második ábra a nyert modell szerint becsült maradékok képe:



A nyert eredmények csak annyit mutatnak, hogy a módszer működőképes. A módszer minősítéséhez, az modellek értékeléséhez az eredmények részletesebb vizsgálata szükséges.

Hivatkozások

- [1] JM Dufour & D Pelletier, *Dufour JM, Pelletier D. 2011. Practical methods for modelling weak VARMA processes: identification, estimation and specification with a macroeconomic application, Discussion Paper, McGill University, CIREQ and CIRANO*,
- [2] Tusnády G & Ziermann M, *Idősorok analízise*, Műszaki Könyvkiadó, 1986.
- [3] Pröhle T, *Többdimenziós ARMA folyamatok paraméterbecslése*, Kézirat, 2014.
- [4] George E. P. Box & Gwilym M. Jenkins & Gregory C. Reinsel, *Time Series Analysis - Forecasting and Control*, Prentice-Hall, 1994.
- [5] H Lüthkepohl, *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer, 2005.
- [6] PJ Brockwell, RA Davis, *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer, 2002.