Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai
Tanszék

Többváltozós feltételes szélsőérték-számítás

Szakdolgozat

Készítette:

Kopis Flóra Júlia

matematikai elemző szakos
hallgató

Témavezető:

Pfeil Tamás

adjunktus

Budapest

2016

Tartalomjegyzék

Bevezetés **1**

1. Elméleti összefoglaló **2**

1.1. Parciális derivált 2

1.2. Szélsőérték 4

1.3. Feltételes szélsőérték 5

2. Matematikai alkalmazások **7**

2.1. A feltételes szélsőérték-számítás alkalmazása két példán 7

2.2. Trigonometriai összefüggések és a feltételes szélsőérték-számítás 12

2.3. A feltételes szélsőérték-számítás geometriai alkalmazásai 16

2.4. Nevezetes egyenlőtlenségek bizonyítása feltételes szélsőérték segítségével . . 23

3. Egy közgazdaságtani alkalmazás **30**

3.1. Fogyasztáselmélet 30

3.2. Gossen II. törvénye 31

3.3. Példa a jövedelem optimális elköltésére n árucikk esetén 32

Irodalomjegyzék **34**

Köszönetnyilvánítás **35**

Bevezetés

Szakdolgozatom témája a többváltozós függvények feltételes szélsőértékeinek keresése. Az elméleti összefoglaló keretein belül a szélsőérték-számítás problémájának megoldásához szükséges definíciókat és tételeket ismertetem, valamint a feltétel nélküli és a feltételes szélsőérték létezésének szükséges és elégséges feltételeit mondom ki. Majd pedig a többváltozós feltételes szélsőérték-számítás különböző területeken való alkalmazásával foglalkozom.

Először két példán keresztül mutatom be a feltételes szélsőérték-feladatok megoldásának menetét, illetve különböző módszereket felhasználva bizonyítom be a feltételes szélsőérték létezését. A második alfejezetben trigonometrikus függvények két szorzatának feltételes maximumát keresem meg, a harmadikban geometriai problémákat oldok meg feltételes szélsőérték-számítási feladatként, míg a negyedikben nevezetes egyenlőtlenségeket bizonyítok be feltételes szélsőérték segítségével.

Végül érdekességként bemutatok egy közgazdaságtani, a fogyasztáselmélet területéről származó tipikus feltételes szélsőérték-számítási problémát és annak megoldási módszerét.

1. fejezet

Elméleti összefoglaló

1.1. Parciális derivált

1. Definíció. *Legyen az $f\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezve az $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ pontban. Rögzítsük az $a = (a_1, \dots, a_p)$ pont koordinátáit az i-edik koordináta kivételével, és tekintsük az*

$$f_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p),\ \ D(f_i) = \{t \in \mathbb{R} : a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p\}$$

egyváltozós függvényt. Ha az f_i függvény differenciálható az a_i pontban, akkor az a_i pontbeli deriváltat az f függvény a pontban vett i-edik parciális deriváltjának nevezzük, melyet $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ jelöl. Azaz

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p))'(a_i)$$

feltéve, hogy a derivált létezik.

Az $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény i-edik parciális deriváltfüggvényén azt a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ függvényt értjük, amely azon a pontokban van értelmezve, ahol f i-edik parciális deriváltja létezik, és ott az értéke $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

2. Definíció. *Legyen $f\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ értelmezve az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban. Ha a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ parciális deriváltfüggvény értelmezve van az a pontban és létezik j-edik parciális deriváltja az a pontban, akkor ezt az f függvény a pontbeli ji-edik másodrendű parciális deriváltjának nevezzük, melyet $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ jelöl.*

Ha $i = j$, akkor tiszta, ha pedig $i \neq j$, akkor vegyes másodrendű parciális deriváltakról beszélünk.

Az f függvény ji-edik másodrendű parciális deriváltfüggvényén azt a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ függvényt értjük, amely azon a pontokban van értelmezve, ahol f ji-edik parciális deriváltja létezik, és ott az értéke $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

1. Tétel (Young tétele)**.** *Ha az $f\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény és a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \dfrac{\partial f}{\partial x_j}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ parciális deriváltfüggvényei minden $i, j = 1, \dots, p$ esetén értelmezve vannak az a pont egy környezetében, és valamennyi folytonos az a pontban, akkor a vegyes parciális deriváltakra minden $i, j = 1, \dots, p$ esetén teljesül, hogy*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

3. Definíció. *Legyen $f\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek az $a \in D(f)$ pontban létezik minden másodrendű parciális deriváltja. Ekkor a másodrendű parciális deriváltakból alkotott*

$$H_f(a) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_p}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(a) \end{bmatrix}$$

négyzetes mátrixot az f függvény a pontbeli Hesse- mátrixának nevezzük.

4. Definíció. *Legyen az $f\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezve a $H \subset \mathbb{R}^p$ nyílt halmazon. Ha f minden parciális deriváltfüggvénye létezik és folytonos a H halmazon, akkor az f függvényt folytonosan differenciálhatónak nevezzük a H halmazon.*

Ha f minden első- és másodrendű parciális deriváltfüggvénye létezik és folytonos a H halmazon, akkor az f függvényt kétszer folytonosan differenciálhatónak nevezzük a H halmazon.

1.2. Szélsőérték

5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in D(f)$ pontban lokális maximuma (illetve lokális minimuma) van, ha az a pontnak van olyan U környezete, amelyben minden $x \in U \cap D(f)$ esetén $f(x) \leq f(a)$ (illetve $f(x) \geq f(a)$). Ekkor az a pontot az f függvény lokális maximumhelyének (illetve lokális minimumhelyének) nevezzük.*

Ha minden $x \in (U \cap D(f)) \setminus \{a\}$ pontra $f(x) < f(a)$ (illetve $f(x) > f(a)$), akkor szigorú lokális maximumról és maximumhelyről (illetve minimumról és minimumhelyről) beszélünk.

A lokális maximumot, illetve minimumot közösen lokális szélsőértéknek, a lokális maximumhelyet, illetve minimumhelyet közösen lokális szélsőértékhelynek nevezzük.

2. Tétel. *Ha az $f\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ függvénynek lokális szélsőértéke van az $a \in D(f)$ pontban, és f-nek létezik minden parciális deriváltja az a pontban, akkor $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ minden $i = 1, \ldots, p$ indexre.*

3. Tétel (Weierstrass tétele)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és $A \subset \mathbb{R}^p$ korlátos és zárt halmaz. Ekkor f korlátos az A halmazon, és az ott felvett értékei között van legnagyobb és van legkisebb függvényérték.*

4. Tétel. *Legyen $f\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény, és tegyük fel. hogy az f függvénynek létezik az összes parciális deriváltja az értelmezési tartománya minden belső pontjában. Ekkor f a legnagyobb (illetve a legkisebb) értékét vagy $D(f)$ határán vagy $D(f)$ egy olyan $a \in \mathbb{R}^p$ belső pontjában veszi fel, ahol $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ minden $i = 1, \ldots, p$ esetén.*

5. Tétel. *Legyen az $f\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény az $a \in D(f)$ pont egy környezetében kétszer folytonosan differenciálható. Ha $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ minden $i = 1, \ldots, p$ esetén, továbbá az f függvény a pontban vett Hesse-mátrixa*

i. pozitív definit, akkor az f függvénynek az a pontban lokális minimuma van,

ii. negatív definit, akkor az f függvénynek az a pontban lokális maximuma van,

iii. indefinit, akkor az f függvénynek az a pontban nincs lokális szélsőértéke.

1. Megjegyzés. *Az A mátrix definitását meg lehet határozni a sajátértékei előjelével.*

i. Ha a mátrix minden sajátértéke pozitív, akkor a mátrix pozitív definit.

ii. Ha a mátrix minden sajátértéke negatív, akkor a mátrix negatív definit.

iii. Ha a mátrixnak van pozitív és van negatív sajátértéke is, akkor a mátrix indefinit.

Szemidefinit mátrixokkal nem foglalkozunk, mert ha a H mátrix szemidefinit, arra az esetre az 5. tétel nem vonatkozik.

6. Tétel. *Legyen az $f\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény kétszer folytonosan differenciálható az $a \in D(f)$ pont egy környezetében, valamint legyen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ minden $i = 1, \ldots, p$ indexre. Ha az f függvény a helyen vett Hesse-mátrixának bal felső sarokaldeterminánsai, azaz*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a), \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(a) \end{vmatrix}, \ \cdots$$

$$\cdots, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_p}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(a) \end{vmatrix}$$

i. mindegyike pozitív, akkor az f függvénynek az a pontban lokális minimuma van;

ii. váltakozó előjelűek, és az első negatív, akkor az f függvénynek az a pontban lokális maximuma van.

1.3. Feltételes szélsőérték

6. Definíció. *Tegyük fel, hogy az $f\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezve van az $a \in \mathbb{R}^p$ pont egy környezetében. Legyen $g\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ olyan függvény, melyre $a \in D(g)$ esetén $g(a) = 0$, valamint legyen $H = \{x \in D(f) : g(x) = 0\}$. Ha az $f|_H$ függvénynek lokális maximuma* *(vagy lokális minimuma) van az a pontban, akkor az f függvénynek feltételes lokális maximuma (vagy minimuma) van az a pontban a $g = 0$ feltétel mellett. E kettőt együtt feltételes lokális szélsőértéknek mondjuk.*

A lokális jelzőt abszolútra cserélve definiálható a feltételes abszolút maximum és a feltételes abszolút minimum fogalma.

A g függvényt feltételi függvénynek, a H halmazt feltételi halmaznak nevezzük.

7. Tétel (Lagrange-féle multiplikátor módszer, szükséges feltétel)**.** *Legyen $f:\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, mely értelmezve van az $a \in \mathbb{R}^p$ pont egy környezetében, továbbá legyen $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ olyan folytonosan differenciálható függvény, mely szintén értelmezve van az a pont egy környezetében, és teljesül rá, hogy $g(a) = 0$, valamint a $g'(a)$ Jacobi-mátrix sorvektorai lineárisan függetlenek. Ha az f függvénynek feltételes lokális szélsőértéke van az a pontban a $g = 0$ feltétel mellett, akkor vannak olyan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$ valós számok, melyekre az $f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\cdots+\lambda_q g_q$ függvény mindegyik parciális deriváltja nulla az a pontban.*

2. Megjegyzés. *Az $L = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_q g_q$ függvényt Lagrange-féle függvénynek, a $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$ valós számokat pedig Lagrange-féle multiplikátoroknak nevezzük.*

8. Tétel (Lagrange-féle multiplikátor módszer, elégséges feltétel)**.** *Legyen $f:\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, mely értelmezve van az $a \in \mathbb{R}^p$ pont egy környezetében, továbbá legyen $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, mely szintén értelmezve van az a pont egy környezetében, és teljesül rá, hogy $g(a) = 0$, valamint a $g'(a)$ Jacobi-mátrix sorvektorai lineárisan függetlenek. Ha vannak olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ valós számok, melyekre az $L = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_q g_q$ függvény minden parciális deriváltja nulla az a pontban, továbbá az L függvény Hesse-mátrixa az a pontban pozitív definit, akkor az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban a $g = 0$ feltétel mellett, ha pedig az L függvény Hesse-mátrixa az a pontban negatív definit, akkor az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban a $g = 0$ feltétel mellett.*

2. fejezet

Matematikai alkalmazások

2.1. A feltételes szélsőérték-számítás alkalmazása két példán

1. Feladat

Határozzuk meg az $f(x,y,z) = xy^2z^3,\ D(f) = (\mathbb{R}^+)^3$ függvény feltételes szélsőértékeit és szélsőértékhelyeit az $x + 2y + 3z = a$ feltétel mellett, ahol a adott pozitív szám!

Megoldás: Legyen $g(x,y,z) = x + 2y + 3z - a$, $D(g) = (\mathbb{R}^+)^3$. Tehát a Lagrange-féle függvény:

$$L(x,y,z) = xy^2z^3 + \lambda(x + 2y + 3z - a),\ \lambda \in \mathbb{R},\ D(L) = (\mathbb{R}^+)^3.$$

Mivel az értelmezési tartomány nyílt halmaz, feltételes lokális szélsőérték abban a pontban lehet, ahol L mindegyik parciális deriváltja nulla, azaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) = y^2z^3 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) = 2xyz^3 + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) = 3xy^2z^2 + 3\lambda = 0. \end{cases}$$

Mindegyik egyenletet λ-ra rendezve az alábbi egyenlőségláncot nyerjük:

$$y^2z^3 = xyz^3 = xy^2z^2,$$

melynek megoldása $x = y = z$. Ezt a feltételbe behelyettesítve az $x = y = z = \dfrac{a}{6}$ összefüggést kapjuk. Tehát feltételes lokális szélsőérték az $\left(\dfrac{a}{6}, \dfrac{a}{6}, \dfrac{a}{6}\right)$ pontban lehet.

A Lagrange-féle függvény Hesse-mátrixa ebben a pontban:

$$H_L\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2\frac{a^4}{6^4} & 3\frac{a^4}{6^4} \\ 2\frac{a^4}{6^4} & 2\frac{a^4}{6^4} & 6\frac{a^4}{6^4} \\ 3\frac{a^4}{6^4} & 6\frac{a^4}{6^4} & 6\frac{a^4}{6^4} \end{bmatrix}.$$

Mivel a $H_L\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right)$ mátrix indefinit (egy pozitív és két negatív sajátértéke van), ezért a Lagrange-féle multiplikátor módszerrel nem tudjuk eldönteni, hogy valóban van-e a $\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right)$ pontban feltételes lokális szélsőérték.

A feltételi halmaz az $\left(a, 0, 0\right)$, $\left(0, \frac{a}{2}, 0\right)$, $\left(0, 0, \frac{a}{3}\right)$ csúcsú nyílt háromszög. Terjesszük ki a feladatban megadott függvényt a zárt háromszög tartományra. A zárt háromszög korlátos és zárt halmaz, ahol a Weierstrass-tétel szerint a kiterjesztett folytonos függvénynek van maximuma és van minimuma. A kiterjesztett függvény értéke a háromszög határán mindenhol nulla, míg a belsejében mindenhol pozitív. Ezért a zárt háromszögön a kiterjesztett függvénynek minimuma van a háromszög határának minden pontjában, maximuma pedig az $\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right)$ pontban.

Tehát a feladatbeli f függvénynek az $\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right)$ pontban feltételes abszolút maximuma van az adott feltétel mellett, melynek értéke

$$f\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right) = \left(\frac{a}{6}\right)^6.$$

Az f függvénynek feltételes lokális minimuma nincs az adott feltétel mellett. Ez abból is látható, hogy f mindenütt pozitív és az értékkészletének infimuma nulla.

2. Feladat

Határozzuk meg az $f(x, y, z) = xyz,\ D(f) = (\mathbb{R}^+)^3$ függvény feltételes szélsőértékeit és szélsőértékhelyeit az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ és $x + y + z = 0$ feltételek mellett!

Megoldás: Legyenek $g_1(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1$, $D(g_1) = (\mathbb{R}^+)^3$ és $g_2(x, y, z) = x+y+z$, $D(g_2) = (\mathbb{R}^+)^3$ feltételi függvények. Tehát a Lagrange-féle függvény:

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z),\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R},\ D(L) = (\mathbb{R}^+)^3.$$

Az L függvény értelmezési tartománya nyílt halmaz, ezért feltételes lokális szélsőérték abban a pontban lehet, ahol L mindegyik parciális deriváltja nulla, azaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) = yz + 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) = xz + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) = xy + 2z\lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Ha összeadjuk az egyenletrendszer egyenleteit, valamint figyelembe vesszük a megadott $x^2+y^2+z^2-1=0$ és $x+y+z=0$ feltételeket, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} yz + xz + xy + 2\lambda_1(x+y+z) + 3\lambda_2 &= 0 \quad / \cdot 2 \\ \underbrace{2yz + 2xz + 2xy}_{=(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)} + 4\lambda_1(x+y+z) + 6\lambda_2 &= 0 \\ (0-1) + 0 + 6\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Ha az (x,y,z) pont feltételes abszolút szélsőértékhely, akkor annak egyik koordinátája sem nulla. Indirekt módon, ha például $x=0$, akkor $f=0$, de f pozitív és negatív értéket is felvesz, ezért itt nincs feltételes abszolút szélsőérték.

Így már λ_1-t is ki tudjuk fejezni:

$$yz + 2x\lambda_1 + \frac{1}{6} = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{\frac{1}{6} + yz}{2x}.$$

A másik két esetben is ugyanígy eljárva:

$$\lambda_1 = -\frac{\frac{1}{6} + yz}{2x} = -\frac{\frac{1}{6} + xz}{2y} = -\frac{\frac{1}{6} + xy}{2z}.$$

Az egyenlőségláncbeli három egyenlőség mindegyikét átalakítva, az alábbi egyenletrendszert nyerjük:

$$\begin{cases} (x-y)\Big(\dfrac{1}{6} + z(y+x)\Big) = 0 \\ (y-z)\Big(\dfrac{1}{6} + x(z+y)\Big) = 0 \\ (z-x)\Big(\dfrac{1}{6} + y(x+z)\Big) = 0. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer háromféleképpen teljesülhet:

i. Ha két egyenletben is az első tényező nulla, akkor ez indukálja, hogy a harmadik egyenletben is nulla az első tényező.

   Ekkor az $x+y+z=0$ feltétel miatt $x=y=z=0$. De ez nem lehetséges, mert így az $x^2+y^2+z^2=1$ feltétel nem teljesülne.

ii. Ha az egyik egyenletből az első, míg a másik két egyenletből a második tényező nulla, például:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ \frac{1}{6}+x(z+y)=0 \\ \frac{1}{6}+y(x+z)=0, \end{cases}$$

   ekkor a két feltételből következik, hogy $2x+z=0$ és $2x^2+z^2=1$, ezekből pedig $x^2=\frac{1}{6}$. Tehát a megoldások: $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

   Ehhez hasonlóan, a másik két esetben kapható egyenletrendszerből az alábbi megoldásokhoz jutunk:

   Ha $x=z:$ $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

   Ha $y=z:$ $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

iii. Ha mindhárom esetben a második tényező nulla, akkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

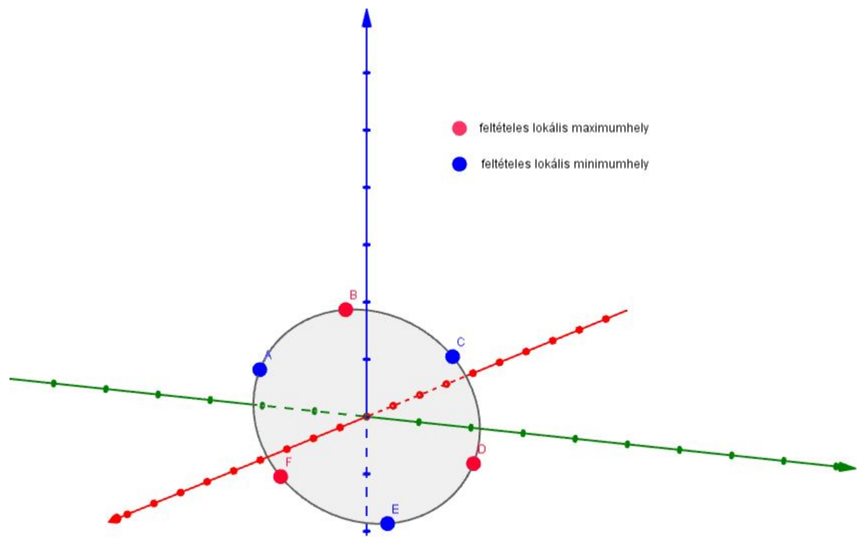
$$\begin{cases} -\frac{1}{6}=z(y+x) \\ -\frac{1}{6}=x(z+y) \\ -\frac{1}{6}=y(x+z). \end{cases}$$

   Az egyenletrendszer utolsó két egyenletének különbsége: $z(y-x)=0$.

   Ha $z=0$ lenne, az ellentmondana az egyenletnek.

   Ha $y-x=0$, akkor az ii. esetben bemutatott megoldásokhoz jutunk.

Tehát feltételes abszolút szélsőérték a ii.-ben meghatározott hat pontban lehet. A feltételek egy origó középpontú, egységsugarú körvonalat határoznak meg, ami egy korlátos és zárt halmaz, melyre az f függvényt leszűkítve folytonos függvényt kapunk. A Weierstrass-tétel miatt az f függvénynek van maximuma és van minimuma a feltételi halmazon, melyeket az ii-ben kapott pontok valamelyikében vesz fel. Mivel a hat pont közül háromban az f függvény értéke egyenlő és negatív, ezért ezek a pontok a feltételes minimumhelyek, a minimumérték $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$. A másik három pontban az f függvény értéke egyenlő és pozitív, ezért ezek a pontok a feltételes maximumhelyek, a maximumérték $\frac{1}{3\sqrt{6}}$.



$A=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $B=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $C=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $D=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $E=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $F=\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

A hat feltételes abszolút szélsőértékhely egy szabályos hatszög hat csúcsa, mert a körön szomszédos feltételes abszolút szélsőértékhelyek helyvektorának skaláris szorzata $\frac{1}{2}$.

Azt, hogy a kapott pontokban feltételes lokális szélsőérték van a Lagrange-féle multiplikátor módszer elegendő feltételéből nem kaphatjuk meg, mert a Hesse-mátrix mind a hat pontban indefinit.

Például az $y = z = \frac{1}{\sqrt{6}}$, és az $x = -\frac{2}{\sqrt{6}}$ esetében:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \;\; H_L = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

E mátrixnak van pozitív és negatív sajátértéke is, tehát a fenti mátrix indefinit.

2.2. Trigonometriai összefüggések és a feltételes szélsőérték-számítás

Koszinuszok szorzatának maximalizálása

Határozzuk meg a $\cos(x)\cos(y)\cos(z)$ szorzat maximumát, ha x, y, és z egy háromszög szögei!

Megoldás: A $\cos(x)\cos(y)\cos(z)$ szorzat pozitív, ha a háromszög hegyesszögű, a szorzat nulla, ha derékszögű, és a szorzat negatív, ha tompaszögű, ezért elég az első esetet vizsgálni. Ekkor $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Tehát legyen

$$f(x,y,z) = \cos(x)\cos(y)\cos(z),\ (x,y,z) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)^3,$$

és keressük az f függvény feltételes maximumát az $x + y + z = \pi$ feltétel mellett.

Legyen

$$g(x,y,z) = x + y + z - \pi,\ (x,y,z) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)^3,$$

valamint legyen

$$h(x,y,z) = \ln(f(x,y,z)) = \ln(\cos(x)) + \ln(\cos(y)) + \ln(\cos(z)),$$

$$(x,y,z) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)^3.$$

A természetes alapú logaritmus függvény szigorú monoton növekedése miatt az f függvénynek pontosan ott van feltételes maximuma, ahol a h függvénynek. A továbbiakban vizsgáljuk a h függvényt a $g = 0$ feltétel mellett.

A Lagrange-féle függvény:

$$L(x,y,z) = \ln(\cos(x)) + \ln(\cos(y)) + \ln(\cos(z)) - \lambda(x + y + z - \pi),$$

$$\lambda \in \mathbb{R},\ (x,y,z) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)^3.$$

Az L függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) = -\operatorname{tg}(x) - \lambda,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) = -\operatorname{tg}(y) - \lambda,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) = -\operatorname{tg}(z) - \lambda.$$

Lokális feltételes szélsőérték abban a pontban lehet, ahol L minden parciális deriváltja nulla, amiből adódik, hogy

$$-\lambda = \mathrm{tg}(x) = \mathrm{tg}(y) = \mathrm{tg}(z).$$

Mivel a tangens szigorú monoton növekvő függvény a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, ezért

$$x = y = z.$$

Az $x + y + z = \pi$ feltételből következik, hogy a h függvénynek a $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ pontban lehet feltételes lokális szélsőértéke.

Az L függvény Hesse-mátrixa:

$$H_L(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\cos^2(x)} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\cos^2(y)} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{\cos^2(z)} \end{bmatrix}.$$

A H_L mátrix minden (x, y, z) pontban negatív definit, ezért a $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ pontban feltételes lokális maximuma van a h, és ezáltal az f függvénynek is.

Terjesszük ki az f függvényt folytonosan az értelmezési tartományának határpontjaira, azaz legyen

$$\tilde{f}(x, y, z) = \cos(x)\cos(y)\cos(z), \;\; D(\tilde{f}) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^3.$$

A feltételi függvény kiterjesztése

$$\tilde{g}(x, y, z) = x + y + z - \pi, \;\; D(\tilde{g}) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^3.$$

A feltételi halmaz a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]^3$ kocka és az $x + y + z = \pi$ egyenletű sík (ami zárt halmaz) metszete, ezért korlátos és zárt halmaz. Így a feltételi halmazon a folytonos $\tilde{f}$ függvénynek a Weierstrass-tétel szerint van abszolút maximuma. A feltételi halmaz határán valamelyik koordináta nulla vagy $\frac{\pi}{2}$. Ha például $x = 0$, akkor $y + z = \pi$, és $y, z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ezért $\tilde{f}(x, y, z) = 0$. Ha pedig $x = \frac{\pi}{2}$, akkor $\cos(x) = 0$ és így ismét $\tilde{f}(x, y, z) = 0$.
A feltételes abszolút maximum nyilván pozitív, ezért $\tilde{f}$ a feltételes abszolút maximumát belső pontban veszi fel, amire az egyetlen lehetőség $x = y = z = \frac{\pi}{3}$. Ezért az eredeti f függvénynek is feltételes abszolút maximuma van a $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ pontban, ahol $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8}$.

Tehát ha egy háromszög szögei x, y, z, akkor $\cos(x)\cos(y)\cos(z) \leq \frac{1}{8}$, melyet a szabályos háromszögek esetén vesz fel.

Szinusz hatványok szorzatának maximalizálása

Legyenek m, n, p adott pozitív számok, valamint x, y, z egy háromszög szögei. Határozzuk meg a $\sin^m(x)\sin^n(y)\sin^p(z)$ szorzat maximumát!

Megoldás: Tehát legyen

$$f(x, y, z) = \sin^m(x)\sin^n(y)\sin^p(z),\ (x, y, z) \in (0, \pi)^3.$$

Keressük az f függvény feltételes maximumát az $x + y + z = \pi$ feltétel mellett.

Legyen

$$g(x, y, z) = x + y + z - \pi,\ (x, y, z) \in (0, \pi)^3,$$

valamint legyen

$$h(x, y, z) = \ln(f(x, y, z)) = m\ln(\sin(x)) + n\ln(\sin(y)) + p\ln(\sin(z)),$$

$$(x, y, z) \in (0, \pi)^3.$$

Az előző feladatban belátottak miatt tudjuk, hogy az f függvénynek pontosan ott van feltételes maximuma, ahol a h függvénynek. A továbbiakban vizsgáljuk a h függvényt a $g = 0$ feltétel mellett.

A Lagrange-féle függvény:

$$L(x, y, z) = m\ln(\sin(x)) + n\ln(\sin(y)) + p\ln(\sin(z)) - \lambda(x + y + z - \pi),$$

$$\lambda \in \mathbb{R},\ (x, y, z) \in (0, \pi)^3.$$

Az L függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z) = m\operatorname{ctg}(x) - \lambda,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z) = n\operatorname{ctg}(y) - \lambda,$$
$$\frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z) = p\operatorname{ctg}(z) - \lambda.$$

Feltételes lokális szélsőérték abban a pontban lehet, ahol L minden parciális deriváltja nulla. Ebből adódik, hogy

$$x = \operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{m}\right),\ y = \operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{n}\right),\ z = \operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{p}\right).$$

Ezt a feltételbe behelyettesítve az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{m}\right)+\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{n}\right)+\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{p}\right)=\pi.$$

Legyen

$$A(\lambda)=\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{m}\right)+\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{n}\right)+\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{p}\right),\ D(A)=\mathbb{R}.$$

Az A szigorú monoton csökkenő függvény, ezért a π értéket legfeljebb egy helyen veszi fel. Tudjuk, hogy $\lim\limits_{\lambda\to\infty} A(\lambda)=0$ és $A(0)=\dfrac{3\pi}{2}$. Mivel $\pi\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, ezért a Bolzano-tétel és A szigorú monotonitása miatt pontosan egy olyan λ pozitív szám létezik, melyre $A(\lambda)=\pi$. Ezzel a λ-val az $\left(\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{m}\right),\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{n}\right),\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right)$ pontban lehet feltételes lokális szélsőérték.

Az L függvény Hesse-mátrixa:

$$H_L(x,y,z)=\begin{bmatrix} -m\dfrac{1}{\sin^2(x)} & 0 & 0 \\ 0 & -n\dfrac{1}{\sin^2(y)} & 0 \\ 0 & 0 & -p\dfrac{1}{\sin^2(z)} \end{bmatrix},$$

ami minden pontban negatív definit, ezért az $\left(\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{m}\right),\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{n}\right),\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right)$ pontban a h, és ezáltal az f függvénynek is feltételes lokális maximuma van.

A feltételi halmaz egy nyílt háromszögtartományt határoz meg. A feladatot terjesszük ki a zárt háromszögtartományra, mely korlátos és zárt halmaz. Itt a folytonos kiterjesztett függvénynek a Weierstrass-tétel miatt van maximuma és van minimuma. Mivel a háromszög határán a kiterjesztett függvény értéke nulla, ezért itt veszi fel a minimumát, a háromszög belsejében pedig pozitív, ezért ott van a maximuma. A Lagrange-féle multiplikátor módszerrel egyetlen feltételes lokális maximumhelyet kaptunk, amely az előbbiek szerint a feltételes abszolút maximumhely is, ahol a függvény értéke:

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) &= 1,\ 0<\alpha<\pi \\ 1+\operatorname{ctg}^2(\alpha) &= \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2(\alpha)}} &= \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Legyen $\alpha = \operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{m}\right)$, ekkor

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\left(\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{m}\right)\right)}} &= \sin\left(\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{m}\right)\right)\\
\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2}} &= \sin\left(\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{m}\right)\right)\\
\left(1+\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2\right)^{-\frac{m}{2}} &= \sin^m\left(\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{m}\right)\right).
\end{aligned}$$

Hasonlóan eljárva a másik két szög esetében is azt kapjuk, hogy

$$f\left(\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{m}\right), \operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{n}\right), \operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right) =$$

$$= \sin^m\left(\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{m}\right)\right)\sin^n\left(\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right)\sin^p\left(\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right) =$$

$$= \left(1+\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2\right)^{-\frac{m}{2}}\left(1+\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2\right)^{-\frac{n}{2}}\left(1+\left(\frac{\lambda}{p}\right)^2\right)^{-\frac{p}{2}}.$$

2.3. A feltételes szélsőérték-számítás geometriai alkalmazásai

Maximális térfogatú téglatest élhosszai

Határozzuk meg a maximális térfogatú téglatest éleinek hosszát, ha tudjuk, hogy az egy csúcsban összefutó élek összege 24 !

Megoldás: Legyen

$$V(x,y,z) = xyz,\ D(V) = (\mathbb{R}^+)^3$$

valamint

$$g(x,y,z) = x+y+z-24,\ D(g) = (\mathbb{R}^+)^3.$$

Ekkor a V függvény feltételes maximumát és maximumhelyét keressük a $g = 0$ feltétel mellett.

A Lagrange-féle függvény:

$$L(x,y,z) = xyz - \lambda(x+y+z-24),\ \lambda \in \mathbb{R},\ D(L) = (\mathbb{R}^+)^3.$$

Az L függvény parciális deriváltjai a következők:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) = yz - \lambda,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) = xz - \lambda,$$
$$\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) = xy - \lambda.$$

Az értelmezési tartomány egy nyílt halmaz, ahol a függvények folytonosan differenciálhatók, ezért feltételes szélsőérték csak ott lehet, ahol L minden parciális deriváltja nulla. Ebből következik, hogy $\lambda = yz = xz = xy,$ azaz $x = y = z.$

Ezt a g feltételi függvénybe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $x = y = z = 8$. Tehát a függvénynek egyedül a $(8, 8, 8)$ pontban lehet feltételes lokális szélsőértéke.

Az L függvény Hesse-mátrixa:

$$H_L(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel a Hesse-mátrix egy pozitív és két negatív sajátértéke van, ezért indefinit. Így ennek segítségével nem tudjuk megállapítani, hogy a V függvénynek van-e feltételes lokális szélsőértéke.

A feladat ekvivalens azzal a feltétel nélküli szélsőérték-számítási problémával, ahol az V függvény maximumát a $(8, 0, 0)$, $(0, 8, 0)$, $(0, 0, 8)$ csúcspontok által meghatározott nyílt háromszöglapon keressük. Ha a V függvényt kiterjesztjük a zárt háromszöglapra, akkor a Weierstrass-tétel szerint a kiterjesztett függvénynek van maximuma, amit a háromszögtartomány belsejében vesz fel, hiszen a háromszöglap oldalain a függvény értéke nulla. Mivel egyetlen lehetséges feltételes lokális szélsőértékhelyet találtunk, ezért ez a feltételes abszolút maximumhely, ahol a függvény értéke 512. Tehát maximális térfogat esetén a téglatest minden élének hossza 8.

Téglatest minimális felszíne

Milyen oldalélek mellett lehet egy adott térfogatú téglatest formájú nyitott doboz felszíne a legkisebb?

Megoldás: Mivel nyitott dobozról van szó, ezért csak az alját és oldalait kell figyelembe venni a felszín kiszámolása során.

Legyen a doboz alaplapján két szomszédos oldal hossza x és y, a doboz magassága pedig legyen z.

Vagyis a minimalizálandó függvény $A(x,y,z) = 2(xz+yz)+xy,\ D(A) = (\mathbb{R}^+)^3$.

Legyen a doboz térfogata a V pozitív szám, ekkor $V = xyz$, tehát a feltételi függvény legyen $g(x,y,z) = xyz - V,\ D(g) = (\mathbb{R}^+)^3$.

A Lagrange-féle függvény:

$$L(x,y,z) = 2(xz+yz)+xy-\lambda(xyz-V),\ \lambda \in \mathbb{R},\ D(L) = (\mathbb{R}^+)^3.$$

Az L függvény parciális deriváltjai a következők:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) = 2z+y-\lambda yz,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) = 2z+x-\lambda xz,$$
$$\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) = 2x+2y-\lambda xy.$$

Az értelmezési tartomány egy nyílt halmaz, ahol a függvények folytonosan differenciálhatók, ezért feltételes szélsőérték csak ott lehet, ahol L minden parciális deriváltja nulla. Ebből következik, hogy

$$\lambda = \frac{2z+y}{yz} = \frac{2z+y}{xz} = \frac{2x+2y}{xy},$$

ezért

$$x = y = 2z.$$

Ezt a feltételbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}\right)$ pontban lehet feltételes lokális szélsőérték.

Az L függvény Hesse-mátrixa:

$$H_L(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda z & 2-\lambda y \\ 1-\lambda z & 0 & 2-\lambda x \\ 2-\lambda y & 2-\lambda x & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel a Hesse-mátrixnak az első főminorja nulla, ezért a főminorok segítségével nem tudjuk megállapítani, hogy az A függvénynek van-e feltételes lokális minimuma a vizsgált pontban.

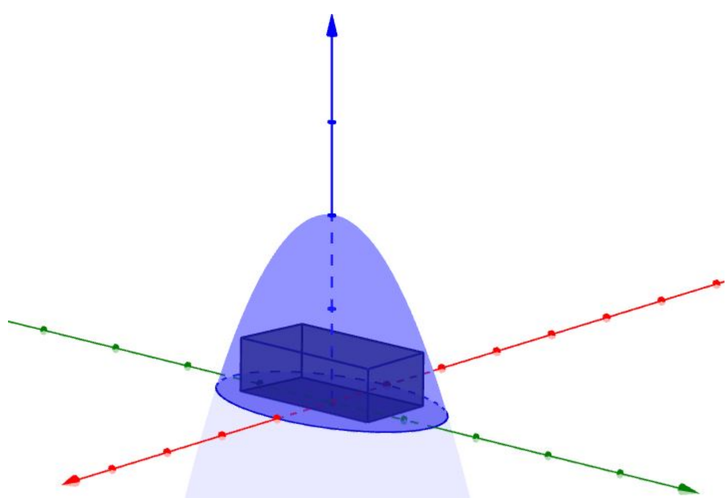
Megjegyzés: Természetesen az $x = y = 2z$ egyenlőségláncot a számtani-, mértani közép közötti összefüggésből is megkaphattuk volna.

$$\begin{aligned} \frac{2xz+2yz+xy}{3} &\geq \sqrt[3]{2xz \cdot 2yz \cdot xy} \\ \frac{2xz+2yz+xy}{3} &\geq \sqrt[3]{4(xyz)^2} = \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{V^2} \\ 2(xz+yz)+xy &\geq 3\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{V^2} \end{aligned}$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $2xz = 2yz = xy$. Ebből adódik, hogy $x = y = 2z$. Tehát a V térfogatú nyitott dobozok közül annak a felszíne a legkisebb, ahol az oldalakra az $x = y = 2z$ teljesül, és ekkor a minimális felszín $3\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{V^2}$.

Paraboloidba írható téglatest maximális térfogata

Határozzuk meg a $z = 2 - 2x^2 - y^2,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ felület és az xy sík által határolt korlátos térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest lapjai a koordinátasíkokkal párhuzamosak.



Megoldás: Jelölje $2x$ a téglatest x-tengellyel párhuzamos oldalának hosszát, $2y$ a téglatest y-tengellyel párhuzamos oldalának hosszát, valamint z a téglatest z-tengellyel párhuzamos oldalának hosszát. Ekkor a téglatest térfogata

$$V(x, y, z) = 4xyz,\ D(V) = (\mathbb{R}^+)^3.$$

Tehát a V függvény maximumát keressük azzal a feltétellel, hogy a téglatest első térnyolcadba eső $P(x, y, z)$ csúcsa illeszkedjen a paraboloidra. Így a feltételi függvény

$$g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z - 2,\ D(g) = (\mathbb{R}^+)^3.$$

A Lagrange-féle függvény:

$$L(x,y,z) = 4xyz - \lambda(2x^2 + y^2 + z - 2),\ \ \lambda \in \mathbb{R},\ \ D(L) = (\mathbb{R}^+)^3.$$

Az L függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) = 4yz - 4\lambda x,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) = 4xz - 2\lambda y,$$
$$\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) = 4xy - \lambda.$$

Az értelmezési tartomány egy nyílt halmaz, ahol a függvények folytonosan differenciálhatók, ezért szélsőérték csak ott lehet, ahol L minden parciális deriváltja nulla. Ebből következik, hogy

$$\lambda = \frac{yz}{x} = \frac{2xz}{y} = 4xy.$$

Ezért

$$z = 2y^2 = 4x^2.$$

A g feltételi függvénybe való behelyettesítéssel láthatjuk, hogy $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ pontban lehet feltételes lokális szélsőérték.

Az L függvény Hesse-mátrixa a $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ pontban:

$$H_L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = \begin{bmatrix} -\frac{8}{\sqrt{2}} & 4 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ 4 & -\frac{4}{\sqrt{2}} & 2 \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

E mátrix bal felső sarokaldeterminánsai váltakozó előjelűek, és $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) < 0$, ezért a V függvénynek az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ pontban feltételes lokális maximuma van, melynek értéke $\sqrt{2}$.

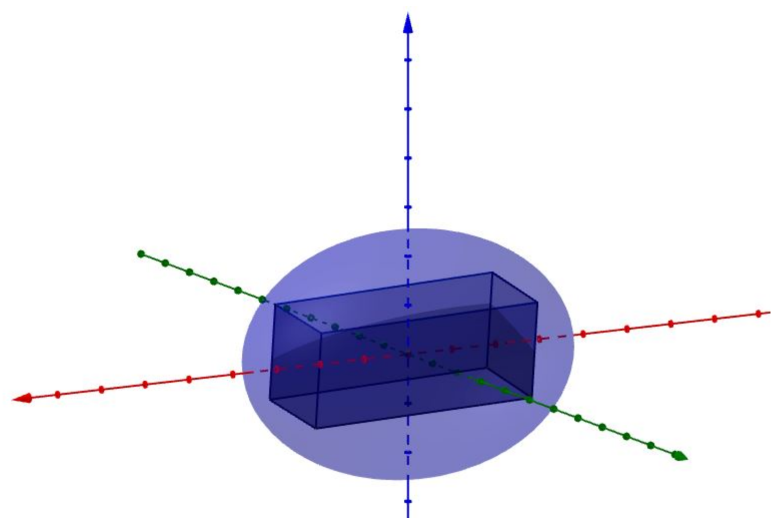
Terjesszük ki a V függvényt és a g feltételi függvényt a $[0,\infty)^3$ halmazra. A kiterjesztett feladat feltételi halmaza korlátos és zárt, azon a kiterjesztett térfogatfüggvény folytonos, ezért Weierstrass-tétele szerint létezik abszolút maximuma. A feltételi halmaz pereme a

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 &= 2 \\ z &= 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerű ellipszis a vízszintes síkban. A kiterjesztett feltételi halmaz peremén a kiterjesztett térfogatfüggvény értéke nulla. Ezért a kiterjesztett feltételi halmazon a legnagyobb értékét csak belső pontban veheti fel. Erre az egyetlen lehetőség a megtalált $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ pont. Tehát a maximális térfogatú téglatest élhosszai rendre 1, $\sqrt{2}$, és 1.

Ellipszoidba írható hasáb maximális térfogata

Határozzuk meg a $2x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1$ egyenletű ellipszoidba írt maximális térfogatú hasáb éleinek hosszát, ha a hasáb lapjai a koordinátasíkokkal párhuzamosak.



Megoldás: Jelölje $2x$ a hasáb x-tengellyel párhuzamos oldalának hosszát, $2y$ a hasáb y-tengellyel párhuzamos oldalának hosszát , valamint $2z$ a hasáb z-tengellyel párhuzamos oldalának hosszát. Ekkor a hasáb térfogata $8xyz$, ezért a maximalizálandó függvény

$$V(x, y, z) = 8xyz,\ D(V) = (\mathbb{R}^+)^3.$$

A hasáb pozitív térnyolcadbeli $P(x, y, z)$ csúcspontja az ellipszoidon van, ezért $2x^2+4y^2+4z^2 - 1 = 0$. Legyen

$$g(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 1,\ D(g) = (\mathbb{R}^+)^3$$

feltételi függvény.

A Lagrange-féle függvény:

$$L(x, y, z) = 8xyz - \lambda(2x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 1), \quad \lambda \in \mathbb{R},\ D(L) = (\mathbb{R}^+)^3.$$

Az L függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) = 8yz - 4\lambda x,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) = 8xz - 8\lambda y,$$
$$\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) = 8xy - 8\lambda z.$$

Feltételes lokális szélsőérték abban a pontban lehet, ahol L minden parciális deriváltja nulla. Ebből adódik, hogy

$$\lambda = \frac{2yz}{x} = \frac{xz}{y} = \frac{xy}{z}.$$

Ezért

$$x = \sqrt{2}y \quad \text{és } y = z.$$

A $2x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 1 = 0$ feltételbe behelyettesítve kapjuk, hogy a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ pontban lehet feltételes lokális szélsőérték.

Az L függvény Hesse-mátrixa a fenti pontban:

$$H_L\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} & 4 & 4 \\ 4 & -\frac{4}{9\sqrt{2}} & 4\sqrt{2} \\ 4 & 4\sqrt{2} & -\frac{4}{9\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

A $H_L(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$ mátrixnak egy pozitív és két negatív sajátértéke van, ezért a mátrix indefinit. Így ezzel a módszerrel nem tudjuk megállapítani, hogy valóban feltételes lokális szélsőértékhelyet találtunk-e.

Terjesszük ki a feladatot az $[0,\infty)^3$ halmazra. A feltételi halmaz egy ellipszoidnak a zárt első térnyolcadba eső része, ami korlátos és zárt halmaz, ezért a Weierstrass-tétel szerint a kiterjesztett folytonos térfogatfüggvénynek van abszolút maximuma az ellipszoidon. Mivel egyetlen lehetséges feltételes lokális maximumhelyet találtunk, ezért ez a feltételes abszolút maximumhely, hiszen ha P valamelyik koordinátasíkra esik, akkor az elfajult téglatest térfogata 0, ami feltételes abszolút minimumhelye a kiterjesztett térfogatfüggvénynek. A feltételes abszolút maximum értéke $\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$, a maximális térfogatú téglatest oldalainak hossza rendre $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, és $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.4. Nevezetes egyenlőtlenségek bizonyítása feltételes szélsőérték segítségével

Jensen-egyenlőtlenség hatványfüggvényre

Bizonyítsuk be az

$$\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha$$

egyenlőtlenséget, ha $\alpha > 1$ és $x, y \geq 0$!

Bizonyítás: Legyen

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^\alpha + y^\alpha),\ D(f) = [0,\infty)^2.$$

Adott s nemnegatív szám esetén keressük meg az f függvény minimumát az

$$x + y = s$$

feltétel mellett!

A feltételes szélsőérték-feladat Lagrange-féle függvénye:

$$L(x,y) = \frac{1}{2}(x^\alpha + y^\alpha) - \lambda(x+y-s),\ \lambda \in \mathbb{R},\ D(L) = [0,\infty)^2.$$

Az L függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = \frac{\alpha}{2}x^{\alpha-1} - \lambda,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = \frac{\alpha}{2}y^{\alpha-1} - \lambda.$$

Feltételes lokális szélsőérték olyan pontban lehet, ahol L minden parciális deriváltja nulla. Ebből következik, hogy

$$\lambda = \frac{\alpha}{2}x^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{2}y^{\alpha-1}$$

$$x = y.$$

Az $x + y = s$ feltételbe behelyettesítve láthatjuk, hogy az $\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)$ pontban lehet feltételes lokális szélsőérték.

Az L függvény Hesse-mátrixa $x, y > 0$ esetén:

$$H_L(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^{\alpha-2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}y^{\alpha-2} \end{bmatrix}.$$

Mivel a mátrix diagonálmátrix és a főátlójában szereplő minden eleme pozitív, ezért a mátrix pozitív definit, így az f függvénynek feltételes lokális minimuma van az $\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)$ pontban. A feltételi halmaznak két határpontja van, melyekben a függvény értéke

$$f(0, s) = f(s, 0) = s^\alpha,$$

míg a kapott feltételes lokális szélsőértékhelyen

$$f\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right) = \left(\frac{s}{2}\right)^\alpha.$$

E két függvényértékre teljesül, hogy

$$\left(\frac{s}{2}\right)^\alpha \leq s^\alpha,$$

ezért az f függvény a legkisebb értékét nem a határpontjaiban veszi fel, hanem a feltételi halmaz valamely belső pontjában. Mivel a Lagrange-féle multiplikátor módszerrel egyetlen lehetséges feltételes szélsőértékhelyet kaptunk, ezért az f függvénynek a $\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)$ pontban feltételes abszolút minimuma van.

Ezzel igazoltuk a Jensen-egyenlőtlenséget.

Hölder-egyenlőtlenség

Bizonyítsuk be a Hölder-egyenlőtlenséget:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

ahol $a_i \geq 0;\ x_i \geq 0;\ i = 1, \ldots, n;\ p, q > 1;\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$!

Bizonyítás: Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. Ha $n = 1$, akkor egyenlőség áll fenn minden $a_1, x_1 \geq 0$ esetén. Tegyük fel, hogy $(n-1)$-re igaz az állítás, vagyis minden $a_1, \ldots, a_{n-1},\ x_1, \ldots, x_{n-1}$ nemnegatív számra teljesül az egyenlőtlenség. Igazoljuk az állítást n esetén.

Ha $i = 1, \ldots, n$ esetén minden a_i vagy minden x_i nulla, akkor az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül.

Ha néhány $a_i = 0$, akkor az azonos indexű x_i-ket is elhagyva az indukciós feltevés szerint igaz az egyenlőtlenség. Ezért később elég a pozitív a_i-kel foglalkozni.

Tehát legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok esetén

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \ D(u) = [0, \infty)^n.$$

Ekkor adott A nemnegatív számra az u függvény minimumát kell keresnünk a $\sum\limits_{i=1}^n a_i x_i = A$ feltétel mellett.

Legyen $\|a\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ és $\|x\|_q = \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$. Az $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ összefüggésből adódik, hogy $p = \dfrac{q}{q-1} = 1 + \dfrac{1}{q-1}$, valamint $\dfrac{p}{q} - p = -1$.

A feltételes szélsőérték-feladat Lagrange-féle függvénye:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \|a\|_p \left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{\frac{1}{q}} - \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n),$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \ D(L) = [0, \infty)^n.$$

Az L függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \|a\|_p \frac{1}{q} \left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{\frac{1}{q}-1} q x_i^{q-1} - \lambda a_i = \|a\|_p \|x\|_q^{1-q} x_i^{q-1} - \lambda a_i,$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

Feltételes lokális szélsőérték abban a belső pontban lehet, ahol minden parciális derivált nulla. Ebből következik:

Minden olyan indexre, ahol $a_i \neq 0$ teljesül

$$\lambda = \frac{1}{a_i} \parallel a \parallel_p \| \ x \ \|_q^{1-q} \ x_i^{q-1}.$$

Tehát $i \neq j$ esetén:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_i} \|a\|_p \|x\|_q^{1-q} x_i^{q-1} &= \frac{1}{a_j} \|a\|_p \|x\|_q^{1-q} x_j^{q-1} \\ \frac{x_i^{q-1}}{a_i} &= \frac{x_j^{q-1}}{a_j} \end{aligned}$$

Ezt a közös pozitív értéket jelölje α, valamint legyen $\beta = \alpha^{\frac{1}{q-1}}$. Ekkor

$$x_i = \beta a_i^{\frac{1}{q-1}}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Az $A = \sum\limits_{i=1}^n a_i x_i$ feltételbe behelyettesítve:

$$A = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \beta \sum_{i=1}^n a_i^{1+\frac{1}{q-1}} = \beta \sum_{i=1}^n a_i^p = \beta \|a\|_p^p.$$

Ebből a β számot kifejezve a következő lehetséges feltételes lokális szélsőértékhelyet nyerjük:

$$x_i = \frac{A}{\|a\|_p^p}\ a_i^{\frac{1}{q-1}},\ i = 1, \ldots, n.$$

Mivel $\dfrac{q}{q-1} = p$, ezért

$$\|x\|_q^q = \sum_{i=1}^{n} x_i^q = \sum_{i=1}^{n} \frac{A^q}{\|a\|_p^{pq}}\ a_i^{\frac{q}{q-1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A^q}{\|a\|_p^{pq}}\ a_i^p = \frac{A^q}{\|a\|_p^{pq}}\ \|a\|_p^p = A^q\ \|a\|_p^{p-pq},$$

$$\|x\|_q = A\ \|a\|_p^{\frac{p}{q}-p} = A\ \|a\|_p^{-1}.$$

Így a lehetséges feltételes lokális szélsőértékhelyen $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \|a\|_p\|x\|_q = A$.

Most megmutatjuk, hogy a fent kapott helyen abszolút minimuma van az u függvénynek az adott feltétel mellett. A feltételi halmaz korlátos és zárt az $\mathbb{R}^n$ halmazban, így a Weierstrass-tétel szerint az u folytonos függvénynek létezik minimuma a feltételi halmazon. Ezt vagy a fent kapott helyen vagy a feltételi halmaz határán veszi fel. A határ minden $(x_1, \ldots, x_n)$ pontjának legalább az egyik koordinátája, például $x_n = 0$, így ott az indukciós feltevés szerint az $x_1, \ldots, x_{n-1}$ és az $a_1, \ldots, a_{n-1}$ nemnegatív számokra teljesül a Hölder-egyenlőtlenség, amiből következik, hogy az eredeti $x_1, \ldots, x_n$ és $a_1, \ldots, a_n$ számokra is fennáll a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Vagyis A feltételes abszolút minimuma az u függvénynek. Minden $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0, \infty)^n$ esetén

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \|\ a\ \|_p \|\ x\ \|_q = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq A = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Ezzel beláttuk a Hölder-egyenlőtlenséget.

Hadamard-egyenlőtlenség

Bizonyítsuk be az Hadamard-egyenlőtlenséget! Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

négyzetes mátrix, melynek determinánsára vonatkozó Hadamard-egyenlőtlenség a következő:

$$|\det A| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\Big)}.$$

Bizonyítás: Legyen

$$f(a_{11},\dots,a_{nn}) = \det A,\ D(f) = \mathbb{R}^{n^2}$$

n^2 változós függvény. Legyenek $h_1,\ h_2,\dots,\ h_n$ adott valós számok, továbbá legyenek

$$\begin{gathered} g_1(a_{11},\dots,a_{nn}) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2 - h_1^2,\ D(g_1) = \mathbb{R}^{n^2}, \\ g_2(a_{11},\dots,a_{nn}) = a_{21}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{2n}^2 - h_2^2,\ D(g_2) = \mathbb{R}^{n^2}, \\ \vdots \\ g_i(a_{11},\dots,a_{nn}) = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 - h_i^2,\ D(g_i) = \mathbb{R}^{n^2}, \\ \vdots \\ g_n(a_{11},\dots,a_{nn}) = a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \dots + a_{nn}^2 - h_n^2,\ D(g_n) = \mathbb{R}^{n^2} \end{gathered}$$

n^2 változós függvények.

Keressük az f függvény feltételes abszolút maximumát és feltételes abszolút minimumát a $g_1 = 0,\dots,g_n = 0$ feltételek mellett!

A determinánsok kifejtési tétele szerint

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in},$$

ahol A_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldetermináns. A kifejtési tétel szerint

$$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}} = A_{ij},\ i,j = 1,\dots,n,$$

továbbá

$$\frac{\partial g_i}{\partial a_{ij}} = 2a_{ij},\ \frac{\partial g_k}{\partial a_{ij}} = 0,\ i,j,k = 1,\dots,n,\ i \neq k.$$

A Lagrange-féle függvény:

$$L(a_{11},\dots,a_{nn}) = f(a_{11},\dots,a_{nn}) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(a_{11},\dots,a_{nn}),$$

$$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R},\ D(L) = \mathbb{R}^{n^2}.$$

Feltételes lokális szélsőérték abban a pontban lehet, ahol az L függvény minden parciális deriváltja nulla. A feltételes lokális szélsőértékhelyeken

$$\frac{\partial L}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial a_{ij}} + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial a_{ij}} = A_{ij} + 2\lambda_i a_{ij} = 0,\ i,j = 1,\dots,n.$$

Ha valamelyik i indexre $\lambda_i = 0$, akkor minden j index esetén $A_{ij} = 0$. Ekkor a kifejtési tételt az i-edik sorra alkalmazva azt kapjuk, hogy $\det A = 0$.
Ez nyilvánvalóan nem feltételes abszolút szélsőérték, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $\lambda_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, n$.
Tetszőleges i indexet választva minden j index esetén:

$$-\frac{1}{2\lambda_i} = \frac{a_{i1}}{A_{i1}} = \frac{a_{i2}}{A_{i2}} = \ldots = \frac{a_{in}}{A_{in}},\ i = 1, \ldots, n.$$

Legyen $B = AA^T$:

$$B = \begin{pmatrix} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & a_{j1} & \\ & \vdots & \\ & a_{jn} & \end{pmatrix},$$

ahol $i \neq j$ esetén a ferde kifejtési tétel szerint

$$b_{ij} = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \ldots + a_{in}a_{jn} = -\frac{1}{2\lambda_i}\Big(A_{i1}a_{j1} + A_{i2}a_{j2} + \ldots + A_{in}a_{jn}\Big) = 0.$$

Ha $i = j$, akkor pedig

$$b_{ii} = a_{i1}a_{i1} + \ldots + a_{in}a_{in} = h_i^2.$$

Tehát B diagonálmátrix és

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ ha } i \neq j, \\ \\ h_i^2, \text{ ha } i = j. \end{cases}$$

A determinánsok szorzástétele miatt:

$$\det B = \det(AA^T) = \det A \det(A^T) = (\det A)^2,$$

másrészt

$$\det B = h_1^2 \ldots h_n^2,$$

ezért

$$|\det A| = |h_1 \ldots h_n|.$$

Tehát ahol a determinánsnak, mint a mátrix elemei n^2 változós függvényének feltételes lokális szélsőértéke van a $g_1 = 0,\ g_2 = 0, \ldots,\ g_n = 0$ feltételek mellett, ott $|\det A| = |h_1 \ldots h_n|$.

A feltételi halmaz korlátos és zárt, azon az f függvény folytonos, ezért a Weierstrass-tétel szerint van abszolút maximuma és van abszolút minimuma a feltételi halmazon. Tehát az abszolút maximum-, és minimumhely esetén is teljesül, hogy $|\det A| = |h_1 \dots h_n|$, vagyis minden A mátrixra igaz, hogy

$$|\det A| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^{n}(a_{i1}^2 + \ldots + a_{in}^2)}.$$

3. fejezet

Egy közgazdaságtani alkalmazás

3.1. Fogyasztáselmélet

A fogyasztáselmélet a mikroökonómia egyik legfontosabb területe, amely a racionális fogyasztók fogyasztási döntéseit vizsgálja. A fogyasztói döntések egyik fő tényezője a jószágok hasznossága, melyet a hasznossági függvény reprezentál. A mikroökonómiában feltételezzük, hogy minden egyén (vagy háztartás) a hasznosságukból kiindulva rangsorolni tudja a rendelkezésére álló lehetőségeket, jószágkosarakat. Az így felállított rangsort a fogyasztó preferenciarendszerének nevezzük. Természetesen a fogyasztók nem csak a hasznosságot veszik figyelembe az optimális fogyasztói döntés meghozatalakor, hanem az úgynevezett korlátozó tényezőket is számításba veszik. Ilyen korlátozó tényező például a jószágok ára vagy az elkölthető jövedelem. Tehát a racionális fogyasztók célja az optimális fogyasztói döntés meghozatala, azaz az összes feltétel mérlegelésével a hasznosság maximalizálása.

7. Definíció. *Tegyük fel, hogy a hasznossági függvény az értelmezési tartományának minden belső pontjában mindegyik változó szerint parciálisan deriválható. Ekkor a határhaszon* (MU_i) *a hasznossági függvény i-edik termék szerinti parciális deriváltja, amely megmutatja, hogyan változik a hasznosság az i-edik termék mennyiségének egységnyi növelésével.*

8. Definíció. *A költségvetési egyenes azon jószágkombinációkat tartalmazza, amelyet a fogyasztó adott árak mellett a teljes jövedelme elköltésével meg tud venni. Tehát az a*

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = I$$

egyenletű hipersík, ahol x_i $(x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n)$ *az* i*-edik jószágból választott mennyiséget,* p_i $(p_i > 0,\ i = 1, \ldots, n)$ *az* i*-edik jószág árát,* I $(I \geq 0)$ *pedig a fogyasztó jövedelmét jelöli.*

3.2. Gossen II. törvénye

9. Tétel (Gossen II. törvénye)**.** *Folytonosan differenciálható hasznossági függvény esetén a fogyasztó akkor költi el optimálisan a jövedelmét, ha az utolsó pénzegység elköltésével nyerhető határhaszon bármely termékre vonatkozóan azonos.*

Bizonyítsuk be Gossen II. törvényét feltételes szélsőérték segítségével!

Bizonyítás: Legyen $n > 0$ darab jószág, x_i $(x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n)$ az i-edik jószágból választott mennyiség, p_i $(p_i > 0,\ i = 1, \ldots, n)$ az i-edik jószág ára, $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a fogyasztó hasznossági függvénye, és $I > 0$ a fogyasztó jövedelme. Ekkor a fogyasztói döntés átfogalmazható egy többváltozós feltételes szélsőérték-feladattá, ahol az $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény maximumát keressük, a $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = I$ feltétel mellett. A feltételi halmaz egy hipersík, melyet költségvetési egyenesnek szokás nevezni.

A feltételes szélsőérték-feladat Lagrange-féle függvénye:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = U(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n - I),$$

$$\lambda \in \mathbb{R},\ D(L) = [0, \infty)^n.$$

A definíciója szerint $MU_i = \dfrac{\partial U(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i},\ i = 1, \ldots, n$. Ekkor az L függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = MU_i - \lambda p_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Tehát $\lambda = \dfrac{MU_i}{p_i},\ i = 1, \ldots, n$. Ebből következik, hogy $\dfrac{MU_1}{p_1} = \dfrac{MU_2}{p_2} = \ldots = \dfrac{MU_n}{p_n}$.

Ezzel beláttuk, hogy ha egy jószágkombináció optimális a fogyasztó számára, és abban minden termék szerepel, akkor az utolsó pénzegységre jutó határhaszon minden jószág esetében ugyanannyi, azaz az utolsó pénzegység elköltése bármely árura azonos hasznot eredményez.

3.3. Példa a jövedelem optimális elköltésére n árucikk esetén

Legyen n darab árucikk, az i-edik ($i = 1, \dots, n$) árucikk mennyiségét jelölje $x_i > 0$, az árát pedig $p_i > 0$. Legyen

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n, \ D(U) = [0, \infty)^n$$

folytonosan differenciálható függvény a hasznossági függvény, továbbá legyen $I > 0$ adott jövedelem, melyre teljesül a $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = I$ egyenlet. Maximalizáljuk az U hasznossági függvényt, az adott költségvetési egyenes figyelembe vételével!

Megoldás: Legyen

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n - I, \ D(g) = [0, \infty)^n$$

a feltételi függvény. Ekkor a Lagrange-féle függvény a következő:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 \dots x_n - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n - I),$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \ D(L) = [0, \infty)^n.$$

Az L függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_n - \lambda p_i, \ i = 1, \dots, n.$$

Feltételes lokális szélsőérték olyan belső pontban lehet, ahol L minden parciális deriváltja nulla. Ebből adódik, hogy

$$\lambda = \frac{x_1x_2 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_n}{p_i}, \ i = 1, \dots, n.$$

Tehát $i \neq j$ esetén:

$$\frac{x_1x_2 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_n}{p_i} = \frac{x_1x_2 \dots x_{j-1}x_{j+1} \dots x_n}{p_j}$$

$$p_ix_i = p_jx_j.$$

A költségvetési egyenes egyenletébe behelyettesítve, minden i indexre $x_i = \dfrac{I}{np_i}$.

A feltételi halmaz egy olyan hipersíknak a $[0, \infty)^n$ halmazba eső része, ahol a hipersík $(p_1, \dots, p_n)$ normálvektorának minden koordinátája pozitív. Ezért a feltételi halmaz egy szimplex, ami korlátos és zárt. Ezen a folytonos U hasznossági függvénynek a Weierstrass-tétel szerint van maximuma, amit a függvény nem vehet fel a szimplex határán, mert ott U=0 (ez a hasznossági függvény minimuma a szimplexen), míg a szimplex belsejében U>0. Mivel egyetlen lehetséges feltételes lokális szélsőértékhelyet kaptunk, az $\left(\frac{I}{np_1}, \ldots, \frac{I}{np_n}\right)$ pont feltételes abszolút maximumhelye az U függvénynek az adott feltétel mellett. Az U függvény feltételes abszolút maximuma $\frac{I}{n}^n \frac{1}{p_1 \ldots p_n}$.

Tehát a fogyasztó maximalizálni tudja a jószágkosara hasznosságát, ha minden jószágból $\frac{I}{np_i}$ egységet választ, azaz ha minden jószágra ugyanannyit költ.

Irodalomjegyzék

[1] B. P. Gyemidovics (2010): Matematikai analízis, Typotex Kiadó, Budapest

[2] Fekete Zoltán - Zalay Miklós (2002): Többváltozós függvények analízise, Műszaki Könyvkiadó, Budapest

[3] Hal R. Varian (2010): Mikroökonómia középfokon, Akadémia kiadó, Budapest

[4] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera (2007): Analízis II., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

[5] Misha Rudnev: Lagrange multilpiers: summary, http://www.maths.bris.ac.uk/ maxmr/opt/lm.pdf

[6] R. Gabaszov - F. M. Kirillova (1975): Metodi optimizáciji, Izdatyelsztvo BGU im. V. I. Lenina

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Pfeil Tamásnak, aki szakértelmével és segítőkész hozzáállásával lehetővé tette szakdolgozatom elkészülését. Valamint szeretném hálámat kifejezni édesanyámnak és nagyszüleimnek végtelen türelmükért, és szüntelen biztatásukért, mellyel egyetemi tanulmányaimat kísérték.