Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Reskó Sándor

# SÍKGÖRBÉK TERÜLETÉNEK KISZÁMÍTÁSA A GREEN-TÉTEL SEGÍTSÉGÉVEL

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Pfeil Tamás, adjunktus

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2016

# Tartalomjegyzék

# Bevezetés

Szakdolgozatom témájának síkbeli halmazok területének kiszámítását választottam a Green-tétel alkalmazásával. Ezt a tételt gyakran arra használják, hogy egyszerű zárt görbén vett nehezebb vonalintegrálok kiszámítását visszavezessék kétdimenziós integrálok meghatározására. Szakdolgozatomban ennek fordítottját, a vonalintegrállal való területszámítást mutatom be különböző példákon keresztük. Az első fejezetben röviden összefoglalom a szakdolgozatban felhasznált legszükségesebb fogalmakat és tételeket. A második fejezetben pedig különböző síkgörbék területét számítom ki a Green-tétel segítségével, majd ellenőrzésül más területszámítási módszereket alkalmazva is.

# 1. fejezet

# Elméleti összefoglaló

**1.0.1. Definíció.** *Ha a $g \subset \mathbb{R}^p$ halmazhoz létezik olyan $r : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ folytonos függvény, melyre $R(r) = g$, akkor $g$ neve folytonos görbe, $r$ annak egy paraméterezése.*

Időnként nemkorlátos vagy nem zárt a paraméterintervallum, általánosabb értelemben az ilyen halmazon értelmezett folytonos függvényt is folytonos görbének nevezzük.

**1.0.2. Definíció.** *Legyen $r : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ folytonos függvény, $g = R(r)$ és $f : g \to \mathbb{R}$ függvény. Ha létezik olyan $I \in \mathbb{R}$ szám, amelyre minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ felosztásra, melyre $||P|| < \delta$ és minden $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, ..., n$ közbülső értékekre teljesül az $\left| \sum\limits_{i=1}^{n} f\big(r(c_i)\big) \cdot \big|r(t_i) - r(t_{i-1})\big| - I \right| < \varepsilon$ egyenlőtlenség, akkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_g f \,\mathrm{d}s$ ívhossz szerinti vonalintegrál létezik, és értéke $I$.*

**1.0.3. Tétel.** Legyen $r : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható függvény $[a, b]$ intervallumon és legyen $g = R(r)$. Ha $f : g \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor létezik $\int\limits_g f \,\mathrm{d}s$, és $\int\limits_g f \,\mathrm{d}s = \int\limits_a^b f\big(r(t)\big) \cdot |r'(t)| \,\mathrm{d}t$.

**1.0.4. Tétel.** Legyen $r : [a, \infty) \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható függvény, létezzen $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) \in \mathbb{R}^p$, legyen $g = R(r) \cup \{\lim\limits_{t\to\infty} r(t)\}$ és legyen $g$ ívhossza véges. Ha $f : g \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és az $\int\limits_a^\infty f\big(r(t)\big) \cdot |r'(t)| \,\mathrm{d}t$ impropius integrál konvergens, akkor létezik $\int\limits_g f \,\mathrm{d}s$ és $\int\limits_g f \,\mathrm{d}s = \int\limits_a^\infty f\big(r(t)\big) \cdot |r'(t)| \,\mathrm{d}t$.

**1.0.5. Tétel. (Green-tétel)** Legyen $r : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ folytonos függvény értékkészlete a $g$ pozitív irányítású egyszerű zárt síkgörbe, amely véges sok folytonosan differenciálható ívből áll. Jelölje a $g$ által határolt tartományt $A$, és legyen $G$ olyan nyílt halmaz, amelyre $\overline{A} \subset G$. Ha $F : G \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható függvény, akkor az alábbi integrálok léteznek és egyenlőek:

$$\int\limits_g F \cdot n \, \mathrm{d}s = \int\limits_A \mathrm{div} F \, \mathrm{d}A.$$

**1.0.6. Definíció.** *Az $A \subset \mathbb{R}^p$ halmazt csillagszerűnek nevezzük, ha létezik olyan $c \in A$ pont, hogy minden $x \in A$ esetén*

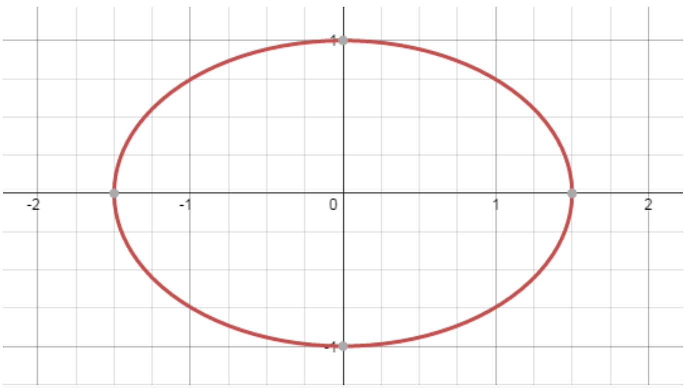
$$[c, x] = \{c + t(x - c) \in \mathbb{R}^p : t \in [0, 1]\} \subset A.$$

# 2. fejezet

# Területszámítás

## 2.1. Ellipszis

**2.1.1. Definíció.** *Derékszögű koordináta-rendszerben adott $a$ és $b$ pozitív valós paraméterek esetén az $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű görbét kanonikus alakú ellipszisnek nevezzük.*




2.1. ábra. Az ellipszis $a = 1,5$ és $b = 1$ esetén.

Először a Green-tétel felhasználásával számítjuk ki az $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszis által határolt korlátos tartomány területét, ahol $a$ és $b$ adott pozitív valós számok. Ehhez szükségünk van az ellipszis egy paraméterezésére. Az ellipszis szokásos paraméteres egyenlete:

$$r(t) = (a\cos(t), b\sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Számítsuk ki ennek deriváltját és a derivált abszolútértékét:

$$r'(t) = (-a\sin(t), b\cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi],$$
$$|r'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Szükségünk lesz a továbbiakban az ellipszis bármely pontjában arra a vektorra, amely merőleges a görbe ottani érintőjére, kifelé mutat és egység hosszú (külső normális egységvektor). Az ellipszis az $f(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ függvény 1-szintvonala. A függvény folytonosan differenciálható mindkét változó szerint, ezért $f$ gradiense merőleges az ellipszisre annak minden pontjában.

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Az ellipszis $t$ paraméterű pontjában:

$$\operatorname{grad} f(r(t)) = \left(\frac{2\cos(t)}{a}, \frac{2\sin(t)}{b}\right),$$
$$|\operatorname{grad} f(r(t))| = \sqrt{\frac{4\cos^2(t)}{a^2} + \frac{4\sin^2(t)}{b^2}} = \frac{2}{ab}\sqrt{b^2\cos^2(t) + a^2\sin^2(t)}.$$

Ezek alapján a görbe külső normális egységvektora az $r(t)$ pontban:

$$n(r(t)) = \frac{\operatorname{grad} f(r(t))}{|\operatorname{grad} f(r(t))|} = \frac{\left(\dfrac{2\cos(t)}{a}, \dfrac{2\sin(t)}{b}\right)}{\dfrac{2}{ab}\sqrt{b^2\cos^2(t) + a^2\sin^2(t)}} = \frac{(b\cos(t), a\sin(t))}{\sqrt{b^2\cos^2(t) + a^2\sin^2(t)}}.$$

A Green-tételbeli egyenlőség bal oldala az $F(x, y) = \left(\dfrac{x}{2}, \dfrac{y}{2}\right)$, $D(F) = \mathbb{R}^2$ függvényre és a vizsgált ellipszisre ($g$) alkalmazva:

$$\oint_g Fn\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} F(r(t))n(r(t))\,|r'(t)|\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a\cos(t)}{2}, \frac{b\sin(t)}{2}\right) \cdot \frac{(b\cos(t), a\sin(t))}{\sqrt{b^2\cos^2(t) + a^2\sin^2(t)}} \cdot \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{ab}{2}(\cos^2(t) + \sin^2(t))\,\mathrm{d}t = ab\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = ab\pi.$$

Tehát a Green-tétel szerint a vizsgált ellipszis területe $ab\pi$.

Ellenőrizzük a kapott eredményt kettősintegrál segítségével!

Legyen $H = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ téglalap. Ekkor a fenti paraméterezésű ellipszis által határolt korlátos síkidom egy paraméterezése: $x(t, s) = as\cos(t)$, $y(t, s) = bs\sin(t)$, $(t, s) \in H$. Így megkapjuk az ellipszis területét a következő integrálként:

$$\int\limits_H 1 \cdot |\det J(t, s)| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t,$$

ahol $\det J(t, s)$ a Jacobi-mátrix determinánsa a $(t, s)$ pontban.

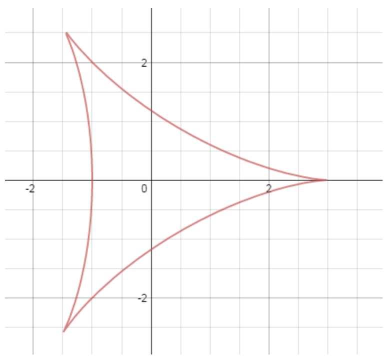
$$|\det J(t, s)| = \left| \det \begin{pmatrix} -as\sin(t) & a\cos(t) \\ bs\cos(t) & b\sin(t) \end{pmatrix} \right| = \left| -abs(\sin^2(t) + \cos^2(t)) \right| = abs.$$

Ez alapján:

$$\int\limits_H |\det J(t, s)| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 abs \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t = ab \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}t = ab\pi.$$

## 2.2. Steiner-ciklois

**2.2.1. Definíció.** *Derékszögű koordináta-rendszerben adott a pozitív valós paraméter esetén az* $(x^2 + y^2)^2 + 18a^2(x^2 + y^2) - 27a^4 = 8a(x^3 - 3xy^2)$ *egyenletű görbét Steiner-cikloisnak nevezzük.*




2.2. ábra. Az Steiner-ciklois $a = 1$ esetén.

Kiszámítjuk a Steiner-ciklois által határolt korlátos tartomány területét a Green-tétel segítségével. Ehhez használjuk fel a Steiner-ciklois $(g)$ egy paraméteres egyenletét:

$$r(t) = (2a\cos(t) + a\cos(2t), 2a\sin(t) - a\sin(2t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ennek deriváltja:

$$r'(t) = (-2a\sin(t) - 2a\sin(2t), 2a\cos(t) - 2a\cos(2t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ezzel megkaptuk a görbe $r(t)$ pontbeli derivált vektorát. Az $r'(t)$ vektor $t = 0, t = \frac{2\pi}{3}$ és $t = \frac{4\pi}{3}$ esetén a nullvektor, ennek kivételével pozitív hosszúságú. Az alábbi vektor merőleges erre és kifelé mutat:

$$m(t) = (2a\cos(t) - 2a\cos(2t), 2a\sin(t) + 2a\sin(2t)), \quad t \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right].$$

Az $r'(t)$ és az $m(t)$ vektorok hossza megyegyezik minden $t \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$ esetén, az $m(t)$ vektor normálásához osztanunk kell az $|r'(t)|$ számmal. A Green-tételt a Steiner-görbére és az $F(x,y) = (0,y)$, $D(F) = \mathbb{R}^2$ függvényre alkalmazva az ott szereplő vonalintegrál az $r$ paraméterezéssel felírva:

$$\oint_g Fn \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \frac{m(t)}{|r'(t)|} \, |r'(t)| \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} F(r(t)) m(t) \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} (0, 2a\sin(t) - a\sin(2t)) \cdot (2a\cos(t) - 2a\cos(2t), 2a\sin(t) + 2a\sin(2t)) \, \mathrm{d}t =$$

$$= 2a^2 \int_0^{2\pi} 2\sin^2(t) + \sin(t)\sin(2t) - \sin^2(2t) \, \mathrm{d}t.$$

Trigonometrikus azonosságok felhasználásával a fenti integrál átalakítva:

$$\oint_g Fn \, \mathrm{d}s = 2a^2 \int_0^{2\pi} 1 - \cos(2t) + 2\sin^2(t)\cos(t) - \frac{1 - \cos(4t)}{2} \, \mathrm{d}t =$$

$$= 2a^2 \left[ t - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{2\sin^3(t)}{3} - \frac{t}{2} + \frac{\sin(4t)}{8} \right]_0^{2\pi} = 2a^2\pi.$$

Tehát a Green-tétel szerint a vizsgált Steiner-ciklois területe: $2a^2\pi$.

Ellenőrizzük a kapott eredményt kettősintegrál segítségével!

Legyen $H = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ téglalap. Ekkor a fenti paraméterezésű Steiner-ciklois által határolt korlátos síkidom egy paraméterezése:

$$x(t, s) = 2as\cos(t) + as\cos(2t),\ y(t, s) = 2as\sin(t) - as\sin(2t),\ (t, s) \in H.$$

Így megkapjuk a Steiner-ciklois területét a következő integrálás eredményeként:

$$\int\limits_H 1 \cdot |\det J(t, s)|\ \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,$$

ahol $\det J(t, s)$ a Jacobi-mátrix determinánsa a $(t, s)$ pontban.

$$|\det J(t, s)| = \left|\det \begin{pmatrix} -2as\sin(t) - 2as\sin(2t) & 2\cos(t) + a\cos(2t) \\ 2as\cos(t) - 2as\cos(2t) & 2a\sin(t) - a\sin(2t) \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \left|-4a^2s(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + 2a^2s(\cos(t)\cos(2t) - \sin(t)\sin(2t)) + 2a^2s(\sin^2(2t) + \cos^2(t))\right| =$$

$$= \left|2a^2s(\cos(3t) - 1)\right|.$$

Ez alapján:

$$\int\limits_H |\det J(t, s)|\ \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 2a^2s(\cos(3t) - 1)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = a^2\int\limits_0^{2\pi} \cos(3t) - 1\ \mathrm{d}t =$$

$$= a^2\left[\frac{\sin(3t)}{3} - t\right]_0^{2\pi} = 2a^2\pi.$$

## 2.3. Asztroid

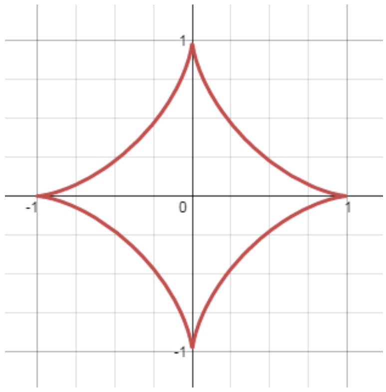
**2.3.1. Definíció.** *Derékszögű koordináta-rendszerben adott a pozitív paraméter esetén az* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$ *egyenletű görbét asztroidnak nevezzük.*

Az asztroid által határolt korlátos tartomány területének kiszámításához a Green-tételt használjuk fel. Ehhez szükségünk van az asztroid egy paraméterezésére. Az asztroid paraméteres egyenlete:

$$r(t) = (a\cos^3(t), a\sin^3(t)),\quad t \in [0, 2\pi].$$

Kiszámítjuk $r$ deriváltját és annak abszolútértékét:

$$r'(t) = (-3a\cos^2(t)\sin(t), 3a\sin^2(t)\cos(t)),\quad t \in [0, 2\pi].$$




2.3. ábra. Az asztroid $a = 1$ esetén.

$$|r'(t)| = \sqrt{9a^2\cos^4(t)\sin^2(t) + 9a^2\sin^4(t)\cos^2(t)} =$$
$$= 3a\sqrt{\cos^2(t)\sin^2(t)(\cos^2(t)+\sin^2(t))} = 3a\,|\sin(t)\cos(t)|\,.$$

Szükségünk lesz a továbbiakban az asztroid pontjaiban a külső normális egységvektorra. Az asztroid az $f(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ függvény $a^{\frac{2}{3}}$-szintvonala. A függvény a tengelyek kivételével folytonosan differenciálható mindkét változó szerint, ezért $f$ gradiense merőleges az asztroidra annak négy csúcspontja kivételével.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, -\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\right),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x,y \neq 0.$$

Most $x$ és $y$ helyére behelyettesítjük a paraméterezésüket:

$$\operatorname{grad} f(r(t)) = \left(\frac{2}{3}(a\cos^3(t))^{-\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}(a\sin^3(t))^{-\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt[3]{a}}\left(\frac{1}{\cos(t)}, \frac{1}{\sin(t)}\right),$$

$$|\operatorname{grad} f(r(t))| = \frac{2}{3\sqrt[3]{a}}\sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)} + \frac{1}{\sin^2(t)}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{a}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2(t)\cos^2(t)}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{a}}\frac{1}{|\sin(t)\cos(t)|}.$$

Így a görbe külső normális egységvektora az $r(t)$ pontban, ha $t \neq 0, t \neq \frac{\pi}{2}, t \neq \pi$, $t \neq \frac{3\pi}{2}$:

$$n(r(t)) = \frac{\operatorname{grad} f(r(t))}{|\operatorname{grad} f(r(t))|} = \frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{a}}\left(\frac{1}{\cos(t)}, \frac{1}{\sin(t)}\right)}{\frac{2}{3\sqrt[3]{a}}\frac{1}{|\sin(t)\cos(t)|}} = |\sin(t)\cos(t)|\left(\frac{1}{\cos(t)}, \frac{1}{\sin(t)}\right).$$

A Green-tételbeli vonalintegrál az $F(x,y) = (x,0),\ D(F) = \mathbb{R}^2$ függvényre és a vizsgált asztroidra ($g$) alkalmazva a fenti $r$ paraméterezéssel:

$$\oint_g F n \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} F(r(t)) n(r(t)) \, |r'(t)| \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a\cos^3(t), 0) \cdot |\sin(t)\cos(t)| \left( \frac{1}{\cos(t)}, \frac{1}{\sin(t)} \right) \cdot 3a \, |\cos(t)\sin(t)| \, \mathrm{d}t =$$

$$= 3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^4(t)\sin^2(t) \, \mathrm{d}t = 3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^4(t) - \cos^6(t) \, \mathrm{d}t.$$

Tagonként integrálunk:

$$\int_0^{2\pi} \cos^4(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 + \cos(2t)}{2} \right)^2 \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos(2t) + \cos^2(2t)\right) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left( 1 + 2\cos(2t) + \frac{1 + \cos(4t)}{2} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4} \left[ t + \sin(2t) + \frac{t}{2} + \frac{\sin(4t)}{8} \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^6(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 + \cos(2t)}{2} \right)^3 \mathrm{d}t = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left(1 + 3\cos(2t) + 3\cos^2(2t) + \cos^3(2t)\right) \, \mathrm{d}t.$$

Az utolsó tagot integráljuk:

$$\int \cos^3(2t) \, \mathrm{d}t = \int (\cos(2t) - \cos(2t)\sin^2(2t)) \, \mathrm{d}t =$$

$$\frac{\sin(2t)}{2} - \frac{\sin^3(2t)}{6} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Ezért:

$$\int_0^{2\pi} \cos^6(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left(1 + 3\cos(2t) + 3\cos^2(2t) + \cos^3(2t)\right) \, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{8} \left[ t + \frac{3}{2}\sin(2t) + \frac{3t}{2} + \frac{3}{8}\sin(4t) - \frac{\sin^3(2t)}{6} + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{5\pi}{8}.$$

Innen pedig látható, hogy

$$\oint\limits_g Fn \,\mathrm{d}s = 3a^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos^4(t) - \cos^6(t) \,\mathrm{d}t = 3a^2 \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{8}\right) = \frac{3\pi}{8} a^2.$$

Tehát a Green-tétel szerint a vizsgált asztroid területe $\frac{3\pi}{8} a^2$.

Ellenőrizzük a kapott eredményt kettősintegrál segítségével!

Legyen $H = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ téglalap. Ekkor a fenti paraméterezésű asztroid által határolt korlátos síkidom egy paraméterezése: $x(t, s) = as\cos^3(t)$, $y(t, s) = as\sin^3(t)$, $(t, s) \in H$. Így megkapjuk az asztroid területét a következő integrálás eredményeként:

$$\int\limits_H 1 \cdot |\det J(t, s)| \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,$$

ahol $\det J(t, s)$ a Jacobi-mátrix determinánsa a $(t, s)$ pontban.

$$|\det J(t, s)| = \left|\det \begin{pmatrix} -3as\cos^2(t)\sin(t) & a\cos^3(t) \\ 3as\sin^2(t)\cos(t) & a\sin^3(t) \end{pmatrix}\right| = \left|-3a^2 s\sin^2(t)\cos^2(t)\right|.$$

Ez alapján:

$$\int\limits_H |\det J(t, s)| \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 3a^2 s\cos^2(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin^2(2t)\,\mathrm{d}t =$$

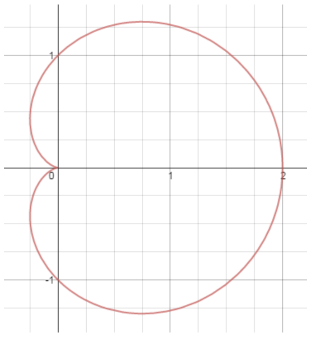
$$\frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{8}(1 - \cos(4t))\,\mathrm{d}t = \frac{3}{16}a^2\left[t - \frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{8}a^2.$$

## 2.4. Kardioid

**2.4.1. Definíció.** *Derékszögű koordináta-rendszerben adott a pozitív paraméter esetén az $(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2y^2$ egyenletű görbét kardioidnak nevezzük.*

A kardioid által határolt korlátos tartomány területét is a Green-tétel segítségével számítjuk ki. A kardioid $(g)$ egy paraméteres egyenlete:

$$r(t) = \big(a\cos(t)(1 + \cos(t)), a\sin(t)(1 + \cos(t))\big), \quad t \in [0, 2\pi].$$




2.4. ábra. A kardioid $a = 1$ esetén.

Ennek a deriváltja:

$$r'(t) = \big( - a\sin(t)(2\cos(t) + 1), a(\cos^2(t) - \sin^2(t) + \cos(t))\big), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ezzel megkaptuk a görbe $r(t)$ pontbeli érintővektorát, ha $r'(t) \neq (0,0)$. Az $r'(t)$ vektor $t = \pi$ esetén a nullvektor. Ennek kivételével pozitív hosszúságú, és az alábbi vektor nemcsak merőleges az érintővektorra, hanem kifelé is mutat:

$$m(t) = \big(a(\cos^2(t) - \sin^2(t) + \cos(t)), a\sin(t)(2\cos(t) + 1)\big), \quad t \in [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi].$$

Mivel az $r'(t)$ és az $m(t)$ vektorok hossza megegyezik minden $t \in [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]$ esetén, az $m(t)$ vektor normálásához osztanunk kell az $|r'(t)|$ számmal. Alkalmazzuk a Green-tételt az $F(x, y) = (x, 0)$, $D(F) = \mathbb{R}^2$ függvényre és a vizsgált kardioidra. A tételbeli vonalintegrál az $r$ paraméterezéssel felírva:

$$\oint_g Fn \ \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} F(r(t))\frac{m(t)}{|r'(t)|} \, |r'(t)| \ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} F(r(t))m(t) \ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \big(a\cos(t)(1 + \cos(t)), 0\big) \cdot \big(a(\cos^2(t) - \sin^2(t) + \cos(t)), a\sin(t)(2\cos(t) + 1)\big) \ \mathrm{d}t =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (2\cos^4(t) + 3\cos^3(t) - \cos(t)) \ \mathrm{d}t.$$

Az előző feladatban már kiszámítottuk a koszinuszfüggvény ezen hatványainak integrálját, így azokat az eredményeket felhasználva:

$$a^2 \left( 2 \int_0^{2\pi} \cos^4(t) \ \mathrm{d}t + 3 \int_0^{2\pi} \cos^3(t) \ \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \cos(t) \ \mathrm{d}t \right) =$$

$$= a^2\left(2\cdot\frac{1}{4}\left[t+\sin(2t)+\frac{t}{2}+\frac{\sin(4t)}{8}\right]_0^{2\pi}+3\left[-\frac{\sin^3(2t)}{6}+\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{2\pi}-[\sin(t)]_0^{2\pi}\right)=$$
$$= a^2\left[\frac{3\pi}{2}+0+0\right]=\frac{3\pi}{2}a^2.$$

Tehát a Green-tétel szerint a vizsgált kardioid területe $\frac{3\pi}{2}a^2$.

Ellenőrizzük a kapott eredményt kettősintegrál segítségével!

Legyen a téglalap $H=[0,2\pi]\times[0,1]$. A kardioid által határolt korlátos halmaz csillagszerűen összefüggő az origóval, mint csillagponttal, ezért a síkidom egy paraméterezése:

$$x(t,s)=as\cos(t)(1+\cos(t)),\ \ y(t,s)=as\sin(t)(1+\cos(t)),\ \ (t,s)\in H.$$

Így megkapjuk a kardioid területét a következő integrálás eredményeként:

$$\int_H 1\cdot|\det J(t,s)|\ \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,$$

ahol $\det J(t,s)$ a Jacobi-mátrix determinánsa a $(t,s)$ pontban.

$$|\det J(t,s)|=\left|\det\begin{pmatrix}-as\sin(t)(2\cos(t)+1) & a\cos(t)(1+\cos(t))\\ as(\cos^2(t)-\sin^2(t)+\cos(t)) & a\sin(t)(1+\cos(t))\end{pmatrix}\right|=$$

$$=\left|-a^2s(\cos^4(t)+2\cos^3(t)+\cos^2(t)\sin^2(t)+\cos^2(t)+2\cos(t)\sin^2(t)+\sin^2(t))\right|=$$

$$=\left|-a^2s(\cos^4(t)+\cos^2(t)\sin^2(t)+2\cos(t)+1)\right|=\left|-a^2s(\cos^2(t)+2\cos(t)+1)\right|.$$

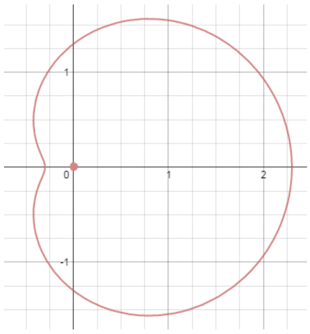
Ekkor:

$$\int_H|\det J(t,s)|\ \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\int_0^1 a^2s(\cos^2(t)+2\cos(t)+1)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2(t)+2\cos(t)+1\ \mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}+2\sin(t)+t\right]_0^{2\pi}=\frac{3\pi}{2}a^2.$$

## 2.5. Pascal-féle csigagörbe

**2.5.1. Definíció.** *Derékszögű koordináta-rendszerben adott a és l pozitív paraméterek esetén az* $(x^2+y^2-ax)^2-l^2(x^2+y^2)=0$ *egyenletű görbét Pascal-féle csigagörbének nevezzük.*




2.5. ábra. A Pascal-féle csigagörbe $a = 1$ és $l = 1,3$ esetén.

Az előző alfejezetben vizsgált kardioid speciális esete a Pascal-féle csigagörbének ($l = a$). Ha $a < l$, akkor a Pascal-féle csigagörbe egy egyszerű zárt görbe és az origó uniója, a görbe egy korlátos halmazt határol. Ez a halmaz csillagszerűen összefüggő az origó csillagponttal. Ha $a > l$, akkor a Pascal-féle csigagörbe önmagát egyszer metsző zárt görbe, amely két korlátos halmazt határol, közülük a belső konvex.

Kiszámítjuk a Pascal-féle csigagörbe ($g$) által határolt korlátos tartomány területét $a < l$ esetén. Ekkor a görbe egy paraméterezése:

$$r(t) = \big(a\cos^2(t) + l\cos(t), a\sin(t)\cos(t) + l\sin(t)\big), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ez esetben a görbe érintővektora, és egy arra merőleges, kifelé mutató vektor:

$$r'(t) = \big(-a\sin(2t) - l\sin(t), a\cos(2t) + l\cos(t)\big), \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$m(t) = \big(a\cos(2t) + l\cos(t), a\sin(2t) + l\sin(t)\big), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Megmutatjuk, hogy $r'(t)$ sehol sem a nullvektor. Ehhez átalakítjuk a vektort a következőképpen:

$$r'(t) = \big(-\sin(t)(2a\cos(t) + l), a(2\cos^2(t) - 1) + l\cos(t)\big), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ha $r'(t) = (0, 0)$, akkor az első koordinátában $\sin(t) = 0$ vagy $\cos(t) = -\dfrac{l}{2a}$. A $\sin(t) = 0$ esetben $|\cos(t)| = 1$, ekkor a második koordináta $\cos(t) = 1$ esetén mindig pozitív, míg $\cos(t) = -1$ esetén a második koordináta pontosan akkor 0, ha $a = l$. Ha $r'(t)$ első koordinátájának második tényezője 0, akkor a második koordináta $-a < 0$.

Tehát a vizsgált $a > l$ esetben $r'(t)$ és így az $m(t)$ vektorok hossza pozitív és megegyezik minden $t \in [0, 2\pi]$ esetén, ezért az $m(t)$ vektor normálásához osztanunk kell az

$|r'(t)|$ számmal. A Green-tételt az $F(x,y) = (x,0),\ D(F) = \mathbb{R}^2$ függvényre és a vizsgált csigagörbére alkalmazva az ott szereplő vonalintegrál az $r$ paraméterezéssel felírva:

$$\oint_g Fn\ \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} F(r(t))\frac{m(t)}{|r'(t)|}\,|r'(t)|\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} F(r(t))m(t)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \big(a\cos^2(t) + l\cos(t), 0\big)\cdot\big(a\cos(2t) + l\cos(t), a\sin(2t) + l\sin(t)\big)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2\cos^2(t)\cos(2t) + al\big(\cos^3(t) + \cos(t)\cos(2t)\big) + l^2\cos^2(t)\ \mathrm{d}t.$$

Trigonometrikus azonosságok segítsével a fenti integrál átalakítva:

$$\int_0^{2\pi} a^2\big(2\cos^4(t) - \cos^2(t)\big) + al\big(3\cos^3(t) - \cos(t)\big) + l^2\cos^2(t)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2a^2\cos^4(t) + 3al\cos^3(t) + (l^2 - a^2)\cos^2(t) - al\cos(t)\ \mathrm{d}t.$$

A koszinuszfüggvény különböző hatványainak integrálját már kiszámítottuk, ezeket behelyettesítve:

$$2a^2\int_0^{2\pi}\cos^4(t)\ \mathrm{d}t + 3al\int_0^{2\pi}\cos^3(t)\ \mathrm{d}t + (l^2 - a^2)\int_0^{2\pi}\cos^2(t)\ \mathrm{d}t - al\int_0^{2\pi}\cos(t)\ \mathrm{d}t =$$

$$2a^2\cdot\frac{3\pi}{4} + 3al\cdot 0 + (l^2 - a^2)\cdot\pi - al\cdot 0 = \frac{a^2}{2}\pi + l^2\pi.$$

Tehát a Green-tétel szerint a Pascal-féle csigagörbe által határolt korlátos tartomány területe $a < l$ esetén $\dfrac{a^2}{2}\pi + l^2\pi$.

Ellenőrizzük a kapott eredményt kettősintegrál segítségével!

Legyen $H = [0, 2\pi]\times[0,1]$ téglalap. Az $a < l$ esetben a Pascal-féle csigagörbe által határolt korlátos halmaz csillagszerűen összefüggő az origóval, mint csillagponttal, ezért a síkidom egy paraméterezése:

$$x(t,s) = as\cos^2(t) + ls\cos(t),\ \ y(t,s) = as\sin(t)\cos(t) + ls\sin(t),\ \ (t,s)\in H.$$

Így megkapjuk a görbe által határolt korlátos tartomány területét a következő integrálással:

$$\int_H 1 \cdot |\det J(t,s)| \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,$$

ahol $\det J(t,s)$ a Jacobi-mátrix determinánsa a $(t,s)$ pontban.

$$|\det J(t,s)| = \left|\det \begin{pmatrix} -as\sin(2t) - ls\sin(t) & a\cos^2(t) + l\cos(t) \\ as\cos(2t) + ls\cos(t) & a\sin(t)\cos(t) + l\sin(t) \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \left| -s\left(a^2\left(\frac{\sin^2(2t)}{2} + \cos^2(t)\cos(2t)\right) + al\big(\sin^2(t)\cos(t) + \cos^3(t) + \cos(t)\big) + l^2\right)\right| =$$

$$= \left|-s\left(a^2\cos^2(t) + 2al\cos(t) + l^2\right)\right| = s\big(a\cos(t) + l\big)^2.$$

Ekkor:

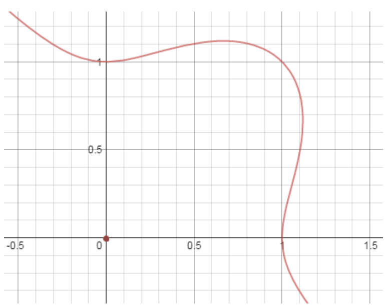
$$\int_H |\det J(t,s)| \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\int_0^1 s\left(a^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}\right) + 2al\cos(t) + l^2\right)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}\right) + 2al\cos(t) + l^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right) + 2al\sin(t) + l^2 t\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\pi + l^2\pi.$$

Ezek alapján tehát a Pascal-féle csigagörbe által határolt korlátos tartomány területe $a < l$ esetén $\frac{a^2}{2}\pi + l^2\pi$.

## 2.6. Az $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ egyenletű alakzat




2.6. ábra. Az $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ egyenletű alakzat.

Derékszögű koordináta-rendszerben kiszámítjuk az $x^3+y^3=x^2+y^2$ egyenletű halmaz első síknegyedbe eső része és a koordináta-tengelyek által határolt korlátos tartomány $(T)$ területét.

Ehhez szükségünk van a fenti halmaz egy paraméterezésére. Jelölje $t$ a halmaz $(x,y)$ pontjába mutató vektor meredekségét, amikor a pont a nyílt első síknegyedbe esik. Ekkor $y=tx$, amit behelyettesítünk az egyenletbe:

$$x^3+t^3x^3=x^2+t^2x^2.$$

$$x(1+t^3)=1+t^2.$$

$$x=\frac{1+t^2}{1+t^3},\ y=\frac{t+t^3}{1+t^3}.$$

A görbének a vízszintes tengelyre eső origótól különböző pontját kapjuk, ha $t=0$. A görbe függőleges tengelyre eső origótól különböző pontjához pedig $t\to\infty$ esetén jutunk: $\lim\limits_{t\to\infty} r(t)=(0,1)$. Tehát:

$$r(t)=\left(\frac{1+t^2}{1+t^3},\frac{t+t^3}{1+t^3}\right),\quad t\in[0,\infty)$$

a halmaz zárt első síknegyedben fekvő origótól különböző részének egy paraméterezése a $(0,1)$ végpont kivételével. Az $r$ függvény nemkorlátos intervallumon paraméterezett differenciálható görbe.

Ekkor a görbe érintővektora és egy kifelé mutató, a görbére az $r(t)$ pontban merőleges vektor:

$$r'(t)=\left(\frac{-t^4-3t^2+2t}{(1+t^3)^2},\frac{-2t^3+3t^2+1}{(1+t^3)^2}\right),\quad t\in[0,\infty),$$

$$m(t)=\left(\frac{-2t^3+3t^2+1}{(1+t^3)^2},\frac{t^4+3t^2-2t}{(1+t^3)^2}\right),\quad t\in[0,\infty).$$

Megmutatjuk, hogy $r'(t)$ és így az $m(t)$ vektor sem a nullvektor semelyik paraméterértékre sem.

Ha $r'(t)=(0,0)$, akkor az első koordináta számlálója $-t^4-3t^2+2t=0$, tehát $-t(t^3+3t-2)=0$. Ekkor két eset lehetséges: a $t=0$ esetben a második koordináta számlálója 1, a $t^3+3t-2=0$ esetben pedig a $t^3=-3t+2$ összefüggést behelyettesítve a második koordináta számlálójára a $3t^2+6t-3$ kifejezést kapjuk, amelynek gyökei $t_1=-1-\sqrt{2}$ és $t_2=-1+\sqrt{2}$, de $t_1<0$ és ${t_2}^3+3t_2-2=8\sqrt{2}-12$ nem egyenlő nullával. Így az $r$ függvény nemkorlátos intervallumon megadott sima görbe.

Jelölje $g$ a vizsgált tartomány határát a pozitív irányítással. Ez három egymáshoz csatlakoztatott sima irányított görbe uniója: $g_1 = R(r) \cup (0,1)$, ahol $(1,0)$ a kezdőpont és $(0,1)$ a végpont, $g_2$ a $(0,1)$ kezdőpontú és origó végpontú szakasz, $g_3$ az origó kezdőpontú és az $(1,0)$ végpontú szakasz.

A Green-tételt az $F(x,y) = (x,0)$, $D(F) = \mathbb{R}^2$ függvényre, a $T$ tartományra és a $g$ irányított görbére és alkalmazva:

$$\oint_g Fn \, \mathrm{d}s = \int_T \operatorname{div} F \, \mathrm{d}A.$$

A vonalintegrál görbe szerinti additivitása miatt:

$$\oint_g Fn \, \mathrm{d}s = \int_{g_1} Fn \, \mathrm{d}s + \int_{g_2} Fn \, \mathrm{d}s + \int_{g_3} Fn \, \mathrm{d}s.$$

Az első tag:

$$\int_{g_1} Fn \, \mathrm{d}s = \int_0^\infty \left( \frac{1+t^2}{1+t^3}, 0 \right) \cdot \left( \frac{-2t^3+3t^2+1}{(1+t^3)^2}, \frac{t^4+3t^2-2t}{(1+t^3)^2} \right) \mathrm{d}t =$$

$$\int_0^\infty -\frac{(t^2+1)(2t^3-3t^2-1)}{(1+t^3)^3} \, \mathrm{d}t.$$

A fenti integrál kiszámításához parciális törtekre kell bontanunk az integrandust:

$$\frac{(t^2+1)(2t^3-3t^2-1)}{(t^3+1)^3} = \frac{(t^2+1)(2t^3-3t^2-1)}{(t+1)^3(t^2-t+1)^3} = \frac{4t-2}{9(t^2-t+1)^2} - \frac{t+1}{3(t^2-t+1)^3} - \frac{4}{9(t+1)^3}.$$

Ezért:

$$\int -\frac{(t^2+1)(2t^3-3t^2-1)}{(t^3+1)^3} \, \mathrm{d}t = -\frac{2}{9} \int \frac{2t-1}{(t^2-t+1)^2} \, \mathrm{d}t + \frac{1}{3} \int \frac{t+1}{(t^2-t+1)^3} \, \mathrm{d}t + \frac{4}{9} \int \frac{1}{(t+1)^3} \, \mathrm{d}t.$$

Az első tagban az integrandus számlálója a nevező alapjának a deriváltja, ezért:

$$\int \frac{2t-1}{(t^2-t+1)^2} \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{t^2-t+1} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

A második tag integrálásához két törtre bontjuk az integrandust, ehhez felhasználjuk a maradékos osztással kapott $t+1 = \frac{1}{2}(2t-1) + \frac{3}{2}$ egyenlőséget:

$$\int \frac{t+1}{(t^2-t+1)^3} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int \frac{2t-1}{(t^2-t+1)^3} \, \mathrm{d}t + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(t^2-t+1)^3} \, \mathrm{d}t.$$

A fenti összeg első tagjában a számláló a nevező alapjának deriváltja, ezért:

$$\int \frac{2t-1}{(t^2-t+1)^3}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2(t^2-t+1)^2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Az összeg második tagjának kiszámításához kiegészítjük a nevező alapját teljes négyzetté, majd tovább alakítjuk az integrandust:

$$\int \frac{1}{(t^2-t+1)^3}\ \mathrm{d}t = \int \frac{1}{\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^3}\ \mathrm{d}t = 64\int \frac{1}{((2t-1)^2+3)^3}\ \mathrm{d}t.$$

Ekkor az $u = 2t-1,\ \mathrm{d}u = 2\ \mathrm{d}t$ helyettesítést felhasználva:

$$\int \frac{1}{((2t-1)^2+3)^3}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(u^2+3)^3}\ \mathrm{d}u.$$

Most parciális integrálás segítségével redukáljuk az integrált alacsonyabb fokszámú nevezőjű racionális törtfüggvények integráljára:

$$\int 1\cdot\frac{1}{(u^2+3)^2}\ \mathrm{d}u = u\frac{1}{(u^2+3)^2} - \int u(-2)\frac{1}{(u^2+3)^3}\cdot 2u\ \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{u}{(u^2+3)^2} + 4\int \frac{(u^2+3)-3}{(u^2+3)^3}\ \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{u}{(u^2+3)^2} + 4\left(\int \frac{1}{(u^2+3)^2}\ \mathrm{d}u - 3\int \frac{1}{(u^2+3)^3}\ \mathrm{d}u\right).$$

Az egyenletet átrendezve:

$$\int \frac{1}{(u^2+3)^3}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{12}\frac{u}{(u^2+3)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(u^2+3)^2}\ \mathrm{d}u.$$

Hasonlóan:

$$\int 1\cdot\frac{1}{u^2+3}\ \mathrm{d}u = u\frac{1}{u^2+3} - \int u(-1)\frac{1}{(u^2+3)^2}\cdot 2u\ \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{u}{u^2+3} + 2\int \frac{(u^2+3)-3}{(u^2+3)^2}\ \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{u}{u^2+3} + 2\left(\int \frac{1}{u^2+3}\ \mathrm{d}u - 3\int \frac{1}{(u^2+3)^2}\ \mathrm{d}u\right).$$

Átrendezés után a következőt kapjuk:

$$\int \frac{1}{(u^2+3)^2}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{6}\frac{u}{u^2+3} + \frac{1}{6}\int \frac{1}{u^2+3}\ \mathrm{d}u.$$

Így már csak a következő integrálást kell elvégeznünk:

$$\int \frac{1}{u^2+3}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Felhasználjuk az imént kapott két redukciós formulát, ekkor az $u=2t-1$ visszahelyettesítés után:

$$\int \frac{1}{((2t-1)^2+3)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{12(u^2+3)^2}+\frac{u}{24(u^2+3)}+\frac{1}{24\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right)+C=$$

$$=\frac{2t-1}{24((2t-1)^2+3)^2}+\frac{2t-1}{48((2t-1)^2+3)}+\frac{1}{48\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

ezért

$$\int \frac{1}{(t^2-t+1)^3}\,\mathrm{d}t =$$

$$=64\left(\frac{2t-1}{24((2t-1)^2+3)^2}+\frac{2t-1}{48((2t-1)^2+3)}+\frac{1}{48\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right)+C,$$

tehát:

$$\int \frac{t+1}{(t^2-t+1)^3}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4(t^2-t+1)^2}+$$

$$+\frac{3}{2}\left(\frac{8(2t-1)}{3((2t-1)^2+3)^2}+\frac{4(2t-1)}{3((2t-1)^2+3)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right)+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2t-1}{2(t^2-t+1)}+\frac{8t-5}{(4(t^2-t+1))^2}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Végül

$$\int \frac{1}{(t+1)^3} = -\frac{1}{2(t+1)^2}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Összesítve:

$$\int -\frac{(t^2+1)(2t^3-3t^2-1)}{(t^3+1)^3}\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{9}\int\frac{2t-1}{(t^2-t+1)^2}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\int\frac{t+1}{(t^2-t+1)^3}\,\mathrm{d}t+\frac{4}{9}\int\frac{1}{(t+1)^3}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{6t+1}{18(t^2-t+1)}+$$

$$+\frac{t-1}{6(t^2-t+1)^2}-\frac{2}{9(t+1)^2}+C=$$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2t^5+t^4+4t^3-t^2+4t-2}{6(t^3+1)^2}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Ezek alapján pedig:

$$\int\limits_{g_1} Fn \; \mathrm{d}s = \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T -\frac{(t^2+1)(2t^3-3t^2-1)}{(t^3+1)^3} \; \mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left[ \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2t^5+t^4+4t^3-t^2+4t-2}{6(t^3+1)^2} \right]_0^T =$$

$$= \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) - \left(-\frac{\pi}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3}.$$

A $(0,1)$ kezdőpontú és origó végpontú szakasz ($g_2$) egy paraméterezése: $r_2(t) = (0, 1-t)$, $D(r_2) = [0,1]$. Ekkor az érintő- és a kifelé mutató normálvektor:

$$r'(t) = (0,-1), \; n(t) = (-1,0), \; t \in [0,1].$$

Legyen továbbra is $F(x,y) = (x,0)$, $D(F) = \mathbb{R}^2$. A $g_2$ görbe mentén az $Fn$ függvény vonalintegrálja az $r_2$ paraméterezéssel kiszámolva:

$$\int\limits_{g_2} Fn \; \mathrm{d}s = \int\limits_0^1 (0,0)\cdot(-1,0) \; \mathrm{d}t = 0.$$

Az origó kezdőpontú és $(1,0)$ végpontú szakasz ($g_3$) egy paraméterezése: $r_3(t) = (t,0)$, $D(r_3) = [0,1]$. Ez alapján az érintővektor és a külső normális egységvektor:

$$r'(t) = (1,0), \; n(t) = (0,-1), \; t \in [0,1].$$

Most a $g_3$ görbe mentén számoljuk ki az $Fn$ függvény vonalintegrálját az $r_3$ paraméterezéssel:

$$\int\limits_{g_3} Fn \; \mathrm{d}s = \int\limits_0^1 (t,0)\cdot(0,-1) \; \mathrm{d}t = 0.$$

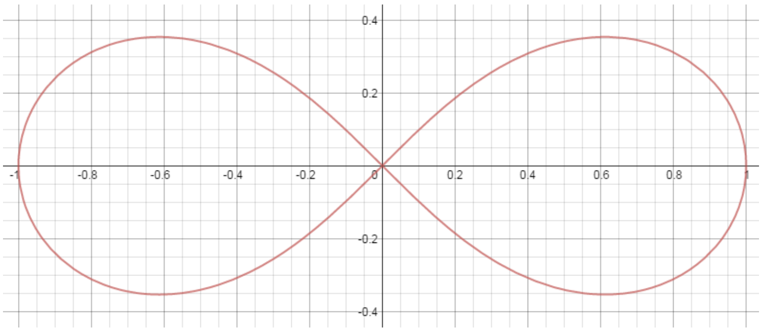
Mindhárom irányított görbén kiszámítottuk a vonalintegrált, így a vonalintegrál görbe szerinti additivitása szerint:

$$\int\limits_{g} Fn \; \mathrm{d}s = \int\limits_{g_1} Fn \; \mathrm{d}s + \int\limits_{g_2} Fn \; \mathrm{d}s + \int\limits_{g_3} Fn \; \mathrm{d}s = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3}.$$

Tehát az $x^3+y^3 = x^2+y^2$ egyenletű halmaz és a koordinátatengelyek által határolt korlátos tartomány területe a Green-tétel szerint $\dfrac{4\pi}{9\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3}$.

## 2.7. Lemniszkáta

**2.7.1. Definíció.** *Derékszögű koordináta-rendszerben adott a pozitív paraméter esetén az $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ egyenletű görbét lemniszkátának nevezzük.*




2.7. ábra. A lemniszkáta $a = 1$ esetén.

A lemniszkáta által határolt két korlátos tartomány uniója területének kiszámolásához a Green-tételt használjuk fel. Mivel a lemniszkáta szimmetrikus a függőleges tengelyre, ezért elegendő a jobb félsíkba eső része által $(g)$ határolt korlátos tartomány területét kiszámolnunk, majd az eredmény kétszeresét vennünk.

Ehhez szükségünk van a lemniszkáta egy paraméterezésére. Jelölje $t$ a görbe $(x, y)$ pontjába mutató vektor és a vízszintes tengely pozitív iránya által bezárt szöget, amikor a pont a nyílt jobb félsíkba esik. Ekkor $y = x\,\mathrm{tg}(t)$, amit behelyettesítünk az egyenletbe:

$$(x^2 + x^2\,\mathrm{tg}^2(t))^2 = a^2(x^2 - x^2\,\mathrm{tg}^2(t)).$$

$$x^4(1 + \mathrm{tg}^2(t))^2 = a^2x^2(1 - \mathrm{tg}^2(t)).$$

$$x^2 \cdot \frac{1}{\cos^4(t)} = a^2 \cdot \frac{\cos(2t)}{\cos^2(t)}.$$

$$x^2 = a^2\cos(2t)\cos^2(t).$$

$$|x| = a\sqrt{\cos(2t)}\cos(t).$$

Ebből $y = x\,\mathrm{tg}(t)$ segítségével $|y|$ is kifejezhető:

$$|y| = a\sqrt{\cos(2t)}|\sin(t)|.$$

A görbe origóban lévő pontját kapjuk $t = -\frac{\pi}{4}$ és $t = \frac{\pi}{4}$ esetén. Tehát:

$$r(t) = a\sqrt{\cos(2t)}\big(\cos(t), \sin(t)\big), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Ennek deriváltja:

$$r'(t) = \frac{a}{\sqrt{\cos(2t)}}\big( - \sin(3t), \cos(3t)\big), \quad t \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Ez a görbe $r(t)$ pontbeli érintővektora. Az $r'(t)$ vektor $t = -\dfrac{\pi}{4}$ és $t = \dfrac{\pi}{4}$ esetén nincs értelmezve. Ennek kivételével pozitív hosszúságú, az alábbi vektor pedig merőleges erre, és kifelé mutat:

$$m(t) = \frac{a}{\sqrt{\cos(2t)}}(\cos(3t), \sin(3t)), \quad t \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Az $r'(t)$ és az $m(t)$ vektorok hossza megegyezik minden $t \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ esetén, ezért az $m(t)$ vektor normálásához osztanunk kell az $|r'(t)|$ számmal. Alkalmazzuk a Green-tételt az $F(x, y) = (0, y),\ D(F) = \mathbb{R}^2$ függvényre és a vizsgált görbére. A tételbeli vonalintegrál az $r$ paraméterezéssel felírva:

$$\oint_g Fn \ \mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} F(r(t))\frac{m(t)}{|r'(t)|}\ |r'(t)| \ \mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} F(r(t))m(t) \ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (0, a\sqrt{\cos(2t)}\sin(t)) \cdot \left(\frac{a\cos(3t)}{\sqrt{\cos(2t)}}, \frac{a\sin(3t)}{\sqrt{\cos(2t)}}\right) \mathrm{d}t =$$

$$= a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\sin(3t) \ \mathrm{d}t = a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 3\sin^2(t) - 4\sin^4(t) \ \mathrm{d}t.$$

Alakítsuk át az integrált a következőképpen:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 3\sin^2(t) - 4\sin^4(t) \ \mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 3\left(\frac{1 - \cos(2t)}{2}\right) - 4\left(\frac{1 - \cos(2t)}{2}\right)^2 \ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{2} - \frac{3\cos 2t}{2} - 1 + 2\cos(2t) - \frac{1 + \cos(4t)}{2} \ \mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2t) - \cos(4t)}{2} \ \mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{\sin(2t)}{4} - \frac{\sin(4t)}{8}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Ezek alapján pedig:

$$\oint_g Fn \ \mathrm{d}s = a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 3\sin^2(t) - 4\sin^3(t) \ \mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}.$$

Tehát a Green-tétel szerint a vizsgált lemniszkáta által határolt két korlátos tartomány uniójának területe $a^2$.

Ellenőrizzük a kapott eredményt polárkoordináták segítségével! A lemniszkáta jobb félsíkba eső részének polárkoordinátás egyenlete:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

$$(r^2)^2 = a^2r^2(\sin^2(t) - \cos^2(t)).$$

$$r^2 = a^2\cos(2t), \ t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Így megkapjuk a lemniszkáta által határolt két korlátos tartomány uniója területének felét a következő integrálás eredményeként:

$$\int_T r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}t,$$

ahol $T$ a lemniszkáta jobb félsíkba eső része által határolt korlátos, zárt tartomány.

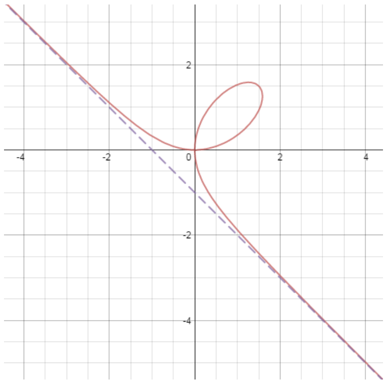
$$\int_T r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{\cos(2t)}} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2\cos(2t)}{2} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{a^2\sin(2t)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}.$$

Tehát a lemniszkáta által határolt két korlátos tartomány uniójának területe $a^2$.

## 2.8. Descartes-féle levél

**2.8.1. Definíció.** *Derékszögű koordináta-rendszerben adott a pozitív paraméter esetén az $x^3 + y^3 = 3axy$ egyenletű görbét Descartes-féle levélnek nevezzük.*

Kiszámítjuk a Descartes-féle levél által határolt korlátos tartomány ($T$) területét a Green-tétel segítségével. Ehhez szükségünk van a fenti görbe első síknegyedbe eső részének ($g$) egy paraméterezésére. Jelölje $t$ a görbe $(x, y)$ pontjába mutató vektor meredekségét, amikor a




2.8. ábra. A Descartes-féle levél és az $x + y + a = 0$ egyenletű aszimptota $a = 1$ esetén.

pont az első síknegyedbe esik és nem a nullvektor. Az $y = tx$ összefüggést behelyettesítjük az egyenletbe:

$$x^3 + t^3x^3 = 3atx^2.$$

$$x(t^3 + 1) = 3at.$$

$$x = \frac{3at}{t^3 + 1}, \ y = \frac{3at^2}{t^3 + 1}.$$

A görbe origóba eső pontját kapjuk $t = 0$ esetén, és $t \to \infty$ esetén: $\lim_{t\to\infty} r(t) = (0, 0)$. A g görbe egy paraméterezése nem korlátos paraméterintervallummal:

$$r(t) = \left(\frac{3at}{t^3 + 1}, \frac{3at^2}{t^3 + 1}\right), \quad t \in [0, \infty).$$

Így a görbe érintővektora és az arra merőleges, kifelé mutató vektor:

$$r'(t) = \left(\frac{3a(1 - 2t^3)}{(t^3 + 1)^2}, -\frac{3at(t^3 - 2)}{(t^3 + 1)^2}\right), \quad t \in [0, \infty),$$

$$m(t) = \left(-\frac{3at(t^3 - 2)}{(t^3 + 1)^2}, -\frac{3a(1 - 2t^3)}{(t^3 + 1)^2}\right), \quad t \in [0, \infty).$$

Az $r'(t)$ és az $m(t)$ vektorok hossza megegyezik és pozitív minden $t \in [0, \infty)$ esetén, ezért az $m(t)$ vektor normálásához osztanunk kell az $|r'(t)|$ számmal. A Green-tételt a $T$ tartományra, az $F(x, y) = (x, 0)$, $D(F) = \mathbb{R}^2$ függvényre és a vizsgált görbére alkalmazva az ott szereplő vonalintegrál az $r$ paraméterezéssel felírva:

$$\oint_g Fn \, \mathrm{d}s = \int_0^\infty F(r(t))\frac{m(t)}{|r'(t)|} \, |r'(t)| \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty F(r(t))m(t) \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{3at}{t^3+1}, 0\right) \cdot \left(-\frac{3at(t^3-2)}{(t^3+1)^2}, -\frac{3a(1-2t^3)}{(t^3+1)^2}\right) \mathrm{d}t = \int_0^\infty -9a^2 \frac{t^2(t^3-2)}{(t^3+1)^3} \mathrm{d}t.$$

Átalakítjuk az integrandust a következőképpen:

$$\int \frac{t^2(t^3-2)}{(t^3+1)^3} \mathrm{d}t = \int \frac{t^2\big((t^3+1)-3\big)}{(t^3+1)^3} \mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{(t^3+1)^2} \mathrm{d}t - 3\int \frac{t^2}{(t^3+1)^3} \mathrm{d}t.$$

Mindkét tagban a számláló a nevező alapjának deriváltja, így:

$$\int \frac{t^2(t^3-2)}{(t^3+1)^3} \mathrm{d}t = \frac{1}{2(t^3+1)^2} - \frac{1}{3(t^3+1)} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Ezek alapján:

$$\oint_g Fn \,\mathrm{d}s = \lim_{T\to\infty} -9a^2 \int_0^T \frac{t^2(t^3-2)}{(t^3+1)^3} \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} a^2 \left[\frac{3}{t^3+1} - \frac{9}{2(t^3+1)^2}\right]_0^T =$$

$$= \lim_{T\to\infty} a^2 \left[\frac{3(2t^3-1)}{2(t^3+1)^2}\right]_0^T = \frac{3}{2}a^2.$$

Tehát a Green-tétel szerint a vizsgált Descartes-féle levél által határolt korlátos tartomány területe $\frac{3}{2}a^2$.

Megmutatjuk, hogy a Descartes-levél és az $x + y + a = 0$ egyenletű aszimptota közti terület megegyezik a fent kiszámolt korlátos tartomány területével. A görbe szimmetrikus az $y = x$ egyenletű egyenesre. Ez alapján átírjuk a görbét egy másik derékszögű koordináta-rendszerbe, amely az eredeti koordináta-rendszer elforgatottja az origó körül pozitív irányban 45 fokkal. Ekkor a görbe az új koordináta-rendszerben szimmetrikus lesz a vízszintes tengelyre. Levezetjük a görbe egyenletét az új koordináta-rendszerben, ahol a vízszintes tengely $u$, a függőleges tengely pedig $v$.

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

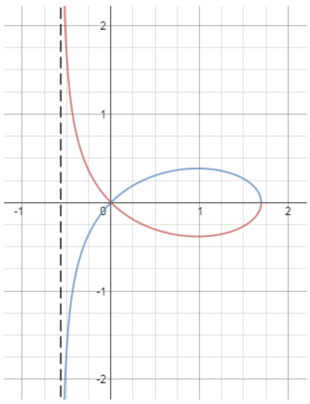
$$x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}, \ y = \frac{u-v}{\sqrt{2}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}}\big((u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3) + (u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3)\big) = \frac{3}{2}a(u^2 - v^2).$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u^3 + 3uv^2) = \frac{3}{2}a(u^2 - v^2).$$
$$v^2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}u + \frac{3}{2}a\right) = u^2\left(\frac{3}{2}a - \frac{1}{\sqrt{2}}u\right).$$
$$v^2\big(6u + 3\sqrt{2}a\big) = u^2\big(3\sqrt{2}a - 2u\big).$$

Megmutatható, hogy az új koordináta-rendszerben a Descartes-féle levél minden $(u, v)$ koordinátájú pontjára $-\frac{a}{\sqrt{2}} < u \leq \frac{3a}{\sqrt{2}}$. Ezért

$$v = u\sqrt{\frac{3\sqrt{2}a - 2u}{6u + 3\sqrt{2}a}} \text{ vagy } v = -u\sqrt{\frac{3\sqrt{2}a - 2u}{6u + 3\sqrt{2}a}}.$$




2.9. ábra. A Descartes-féle levél az új koordináta-rendszerben $a = 1$ esetén: kékkel jelöltük a fenti első egyenlettel adott görbét, pirossal a második egyenletű görbét, szaggatottal az $u = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ egyenletű egyenest.

Ekkor a következő impropius integrál adja meg a keresett terület felét:

$$\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} -u\sqrt{\frac{3\sqrt{2}a - 2u}{6u + 3\sqrt{2}a}}\,\mathrm{d}u.$$

Átalakítjuk a primitív függvényt a $w = \frac{3\sqrt{2}a - 2u}{6u + 3\sqrt{2}a}$ helyettesítéssel. Így $u = \frac{3\sqrt{2}a(1 - w)}{6w + 2}$, $\mathrm{d}u = -\frac{24\sqrt{2}a}{(6w + 2)^2}\,\mathrm{d}w$. Ezt behelyettesítve:

$$\int -u\sqrt{\frac{3\sqrt{2}a - 2u}{6u + 3\sqrt{2}a}}\,\mathrm{d}u = -\int \frac{3\sqrt{2}a(1 - w)}{6w + 2} \cdot \sqrt{w} \cdot \left(-\frac{24\sqrt{2}a}{(6w + 2)^2}\right)\,\mathrm{d}w.$$

Ezután alkalmazzuk a $z = \sqrt{w}$ helyettesítést. Így $w = z^2$ és $\mathrm{d}w = 2z\ \mathrm{d}z$. Ez alapján az integrál:

$$\int -u\sqrt{\frac{3\sqrt{2}a - 2u}{6u + 3\sqrt{2}a}}\ \mathrm{d}u = \int \frac{3\sqrt{2}a(1-z^2)}{6z^2+2} \cdot z\frac{24\sqrt{2}a}{(6z^2+2)^2} \cdot 2z\ \mathrm{d}z = 36a^2 \int \frac{z^2 - z^4}{(3z^2+1)^3}\ \mathrm{d}z.$$

Tagonként integrálunk, és átalakítjuk a számlálót teljes négyzetté:

$$\int \frac{z^2}{(3z^2+1)^3}\ \mathrm{d}z = \int \frac{\frac{1}{3}(3z^2+1) - \frac{1}{3}}{(3z^2+1)^3}\ \mathrm{d}z = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(3z^2+1)^2}\ \mathrm{d}z - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(3z^2+1)^3}\ \mathrm{d}z.$$

Most parciális integrálás segítségével redukáljuk az integrált alacsonyabb fokszámú nevezőjű racionális törtfüggvények integráljára:

$$\int 1 \cdot \frac{1}{(3z^2+1)^2}\ \mathrm{d}z = z \cdot \frac{1}{(3z^2+1)^2} - \int z \cdot (-2) \cdot \frac{1}{(3z^2+1)^3} \cdot 6z\ \mathrm{d}z =$$

$$\frac{z}{(3z^2+1)^2} + 4\int \frac{(3z^2+1)-1}{(3z^2+1)^3}\ \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{z}{(3z^2+1)^2} + 4\left(\int \frac{1}{(3z^2+1)^2}\ \mathrm{d}z - \int \frac{1}{(3z^2+1)^3}\ \mathrm{d}z\right).$$

Az egyenletet átrendezve:

$$\int \frac{1}{(3z^2+1)^3}\ \mathrm{d}z = \frac{1}{4} \cdot \frac{z}{(3z^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{(3z^2+1)^2}\ \mathrm{d}z.$$

Hasonlóan:

$$\int 1 \cdot \frac{1}{3z^2+1}\ \mathrm{d}z = z \cdot \frac{1}{3z^2+1} - \int z \cdot (-1)\frac{1}{(3z^2+1)^2} \cdot 6z\ \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{z}{3z^2+1} + 2\left(\int \frac{1}{3z^2+1}\ \mathrm{d}z - \int \frac{1}{(3z^2+1)^2}\ \mathrm{d}z\right).$$

Átrendezés után:

$$\int \frac{1}{(3z^2+1)^2}\ \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{3z^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{3z^2+1}\ \mathrm{d}z.$$

$$\int \frac{1}{3z^2+1}\ \mathrm{d}z = \int \frac{1}{(\sqrt{3}z)^2+1}\ \mathrm{d}z = \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{3}z)}{\sqrt{3}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Az integrál második felének kiszámításához parciális törtekre bontjuk az integrandust:

$$\int \frac{z^4}{(3z^2+1)^3}\ \mathrm{d}z = \frac{1}{9}\int \frac{1}{3z^2+1}\ \mathrm{d}z - \frac{2}{9}\int \frac{1}{(3z^2+1)^2}\ \mathrm{d}z + \frac{1}{9}\int \frac{1}{(3z^2+1)^3}\ \mathrm{d}z.$$

Ezeknek a tagoknak már kiszámítottuk a primitív függvényeit, így csak fel kell használnunk a kapott eredményeket. Előtte megvizsgáljuk, hogy a helyettesítések során hogyan változtak a határok. Amikor $u \to \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^+$, akkor $w \to \infty$ és $z \to \infty$, $u = 0$ esetén pedig $w = 1$ és $z = 1$. Megjegyezzük, hogy az $u \to w$ és $w \to z$ helyettesítésnél is a helyettesítő $g$ görbe folytonosan differenciálható és injektív az adott intervallumon.

$$\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} -u\sqrt{\frac{3\sqrt{2}a - 2u}{6u + 3\sqrt{2}a}}\,\mathrm{d}u = \lim_{T\to\infty} 36a^2 \int\limits_{T}^{1} \frac{z^2 - z^4}{(3z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z =$$

$$\lim_{T\to\infty} a^2 \left(-4\int\limits_{T}^{1} \frac{1}{3z^2+1}\,\mathrm{d}z + 20\int\limits_{T}^{1} \frac{1}{(3z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z - 16\int\limits_{T}^{1} \frac{1}{(3z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z\right) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} a^2 \left(-4\int\limits_{T}^{1} \frac{1}{3z^2+1}\,\mathrm{d}z + 8\int\limits_{T}^{1} \frac{1}{(3z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z - \frac{4z}{(3z^2+1)^2}\right) =$$

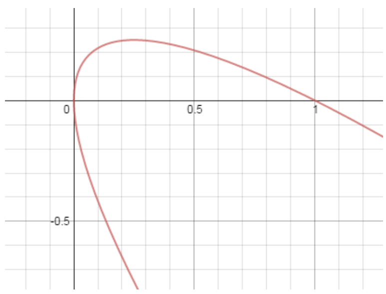
$$\lim_{T\to\infty} a^2 \left[\frac{4z}{3z^2+1} - \frac{4z}{(3z^2+1)^2}\right]_T^1 = \lim_{T\to\infty} a^2 \left[\frac{12z^3}{(3z^2+1)^2}\right]_T^1 = \frac{3}{4}a^2.$$

Tehát a Descartes-levél és az $x + y + a = 0$ egyenletű aszimptota közötti terület: $\frac{3}{2}a^2$.

## 2.9. Parabola

**2.9.1. Definíció.** *Derékszögű koordináta-rendszerben adott a pozitív paraméter esetén az $y^2 = 2ax$ egyenletű görbét kanonikus alakú parabolának nevezzük.*

Kiszámítjuk az $(x + y)^2 = ax$ egyenletű parabola és a vízszintes tengely által határolt korlátos tartomány $(T)$ területét a Green-tétel segítségével.




2.10. ábra. Az $(x + y)^2 = ax$ egyenletű parabola $a = 1$ esetén.

Ehhez szükségünk van a parabola egy paraméterezésére. Jelölje $t$ a görbe $(x, y)$ pontjába mutató vektor meredekségét, amikor a pont a nyílt első síknegyedbe esik. Ekkor $y = tx$, amit behelyettesítünk az egyenletbe:

$$(x + tx)^2 = ax.$$

$$x(t + 1)^2 = a.$$

$$x = \frac{a}{(t+1)^2}, y = \frac{at}{(t+1)^2}.$$

Így $r(0) = (a, 0)$ és $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = (0, 0)$. Ezek alapján a parabola első síknegyedbeli részének egy sima paraméterezése nemkorlátos paraméterintervallumon:

$$r(t) = \left(\frac{a}{(t+1)^2}, \frac{at}{(t+1)^2}\right), \ t \in [0, \infty).$$

Kiszámítjuk a görbe érintővektorát, és az arra merőleges, kifelé mutató vektort:

$$r'(t) = \left(-\frac{2a}{(t+1)^3}, \frac{a(1-t)}{(t+1)^3}\right), \ m(t) = \left(\frac{a(1-t)}{(t+1)^3}, \frac{2a}{(t+1)^3}\right), \ t \in [0, \infty).$$

Jelölje $g$ a vizsgált tartomány határát a pozitív irányítással. Ez két egymáshoz csatlakoztatott sima görbe uniója: $g_1 = R(r) \cup \{(0, 0)\}$, ahol $(a, 0)$ a kezdőpont és $(0, 0)$ a végpont, $g_2$ pedig az origó kezdőpontú és $(0, a)$ végpontú szakasz. A Green-tételt alkalmazva a $T$ tartományra, a $g$ irányított görbére és az $F(x, y) = (0, y), D(F) = \mathbb{R}^2$ függvényre:

$$\oint_g Fn \ \mathrm{d}s = \int_T \operatorname{div} F \ \mathrm{d}A.$$

A vonalintegrál görbe szerinti additivitása miatt:

$$\oint_g Fn \ \mathrm{d}s = \int_{g_1} Fn \ \mathrm{d}s + \int_{g_2} Fn \ \mathrm{d}s.$$

Az első tag:

$$\int_{g_1} Fn \ \mathrm{d}s = \int_0^\infty \left(0, \frac{at}{(t+1)^2}\right) \cdot \left(\frac{a(1-t)}{(t+1)^3}, \frac{2a}{(t+1)^3}\right) \ \mathrm{d}t = 2a^2 \int_0^\infty \frac{t}{(t+1)^5} \ \mathrm{d}t.$$

A primitív függvények:

$$\int \frac{t}{(t+1)^5}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(t+1)^4}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{(t+1)^5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4(t+1)^4} - \frac{1}{3(t+1)^3} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Tehát:

$$\oint_{g_1} Fn\,\mathrm{d}s = \lim_{T\to\infty} 2a^2 \int_0^T \frac{t}{(t+1)^5}\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} 2a^2 \left[\frac{1}{4(t+1)^4} - \frac{1}{3(t+1)^3}\right]_0^T = \frac{a^2}{6}.$$

Az origó kezdőpontú és $(a,0)$ végpontú szakasz $(g_2)$ egy paraméterezése: $r_2(t) = (t,0)$, $D(r_2) = [0,a]$. Ez alapján az érintővektor és a külső normális egységvektor:

$$r'(t) = (1,0),\ n(t) = (0,-1),\ t \in [0,a].$$

Most a $g_2$ görbe mentén számoljuk ki az $Fn$ függvény vonalintegrálját az $r_2$ paraméterezéssel:

$$\int_{g_2} Fn\,\mathrm{d}s = \int_0^a (0,0)\cdot(0,-1)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Ezek alapján összesítve:

$$\oint_g Fn\,\mathrm{d}s = \int_{g_1} Fn\,\mathrm{d}s + \int_{g_2} Fn\,\mathrm{d}s = \frac{a^2}{6} + 0 = \frac{a^2}{6}.$$

Tehát a Green-tétel szerint a vizsgált korlátos tartomány területe $\frac{a^2}{6}$.

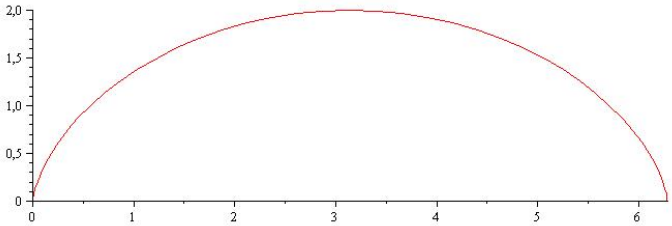
Ellenőrizzük a kapott eredményt egyváltozós Riemann-integrál segítségével:

$$\int_0^a -x + \sqrt{ax}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2} + a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^a = -\frac{a^2}{2} + \frac{2a^2}{3} = \frac{a^2}{6}.$$

Tehát a fenti egyenletű parabola és a koordinátatengelyek által határolt korlátos tartomány területe $\frac{a^2}{6}$.

## 2.10. Ciklois

**2.10.1. Definíció.** *Derékszögű koordináta-rendszerben adott a pozitív paraméter esetén az* $r(t) = a\big(t - \sin(t), 1 - \cos(t)\big),\ t \in [0, 2\pi]$ *paraméterezéssel megadott görbét cikloisnak nevezzük.*




2.11. ábra. A ciklois $a = 1$ esetén.

Megjegyezzük, hogy a fenti definícióból levezethető a görbe Descartes-koordinátákkal kifejezett egyenlete: $x = a \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{y(2a-y)},\ x \in [0, a\pi]$.

Kiszámítjuk a ciklois és a vízszintes tengely által határolt korlátos tartomány területét a Green-tétel segítségével $x \in [0, 2a\pi]$ esetén. Az $r$ vektorértékű függvény deriváltja:

$$r'(t) = \big(a(1-\cos(t)), a\sin(t)\big), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ezzel megkaptuk a görbe $r(t)$ pontbeli érintővektorát, ha $r'(t) \neq (0,0)$. Ez a $t = 0$ és $t = 2\pi$ helyen a nullvektor, ennek kivételével pozitív hosszúságú. Az alábbi vektor pedig merőleges az érintővektorra és kifelé mutat:

$$m(t) = \big(-a\sin(t), a(1-\cos(t))\big), \quad t \in (0, 2\pi).$$

A vizsgált tartomány határa ($g$) két egymáshoz csatlakoztatott differenciálható görbe uniója: $g_1 = R(r)$, ahol $(2a\pi, 0)$ a kezdőpont és $(0,0)$ a végpont, $g_2$ pedig az origó kezdőpontú és $(2a\pi, 0)$ végpontú szakasz. A Green-tételt alkalmazva erre a $T$ tartományra, a $g$ görbére és az $F(x,y) = (0, y),\ D(F) = \mathbb{R}^2$ függvényre:

$$\oint_g Fn \ \mathrm{d}s = \int_T \operatorname{div} F \ \mathrm{d}A.$$

A vonalintegrál görbe szerinti additivitása miatt:

$$\int_g Fn \ \mathrm{d}s = \int_{g_1} Fn \ \mathrm{d}s + \int_{g_2} Fn \ \mathrm{d}s.$$

Az első tag:

$$\int_{g_1} Fn \ \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \frac{m(t)}{|r'(t)|} \, |r'(t)| \ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} (0, a(1-\cos(t))) \cdot (-a\sin(t), a(1-\cos(t)))\ \mathrm{d}t = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos(t))^2\ \mathrm{d}t =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos(t) + \frac{1+\cos(2t)}{2}\ \mathrm{d}t = a^2 \left[ t - 2\sin(t) + \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{2\pi} = 3a^2\pi.$$

Az origó kezdőpontú, $(2a\pi, 0)$ végpontú szakasz ($g_2$) egy paraméterezése: $r_2(t) = (t, 0)$, $D(r_2) = [0, 2a\pi]$. Ekkor az érintővektor és a külső normális egységvektor:

$$r'(t) = (1, 0),\ n(t) = (0, -1),\ t \in [0, 2a\pi].$$

Kiszámoljuk a $g_2$ görbe mentén az $Fn$ függvény vonalintegrálját az $r_2$ paraméterezéssel:

$$\int_{g_2} Fn\ \mathrm{d}s = \int_0^{2a\pi} (0,0) \cdot (0,-1)\ \mathrm{d}t = 0.$$

Így összesítve:

$$\int_g Fn\ \mathrm{d}s = \int_{g_1} Fn\ \mathrm{d}s + \int_{g_2} Fn\ \mathrm{d}s = 3a^2\pi + 0 = 3a^2\pi.$$

Tehát a Green-tétel szerint a vizsgált korlátos tartomány területe $3a^2\pi$.

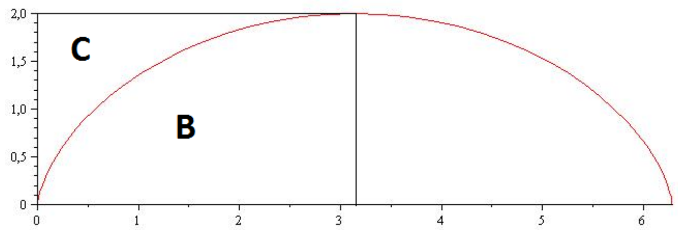
Ellenőrizzük a kapott eredményt egy másik módszerrel! Tekintsük az első síknegyed $A = [0, a\pi] \times [0, 2a]$ téglalapját, ennek területe $2a^2\pi$. A ciklois két részre bontja ezt a halmazt. Jelölje a ciklois, a függőleges tengely és az $y = 2a$ egyenletű egyenes által határolt síkidomot $C$. Legyen $B = A \setminus C$, ekkor $B$ területe pontosan a keresett terület fele, így $C$ területének kiszámítása után megkaphatjuk a ciklois és a vízszintes tengely által határolt korlátos tartomány területét is.

Ezek alapján $C$ területe a következő integrállal számolható ki:

$$\int_0^{2a} a \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{y(2a-y)}\ \mathrm{d}y.$$

Az első tagot parciálisan integrálva:

$$a \int \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right)\ \mathrm{d}y =$$




2.12. ábra. $C$ területének ismeretében megkaphatjuk a ciklois területét.

$$= a\left(y\cdot\arccos\left(1-\frac{y}{a}\right)-\int y\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-\frac{y}{a}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)\right)\right)\,\mathrm{d}y=$$

$$= ay\cdot\arccos\left(1-\frac{y}{a}\right)-\int\frac{y}{\sqrt{1-\left(1-\frac{y}{a}\right)^2}}\,\mathrm{d}y.$$

$$\int\frac{y}{\sqrt{1-\left(1-\frac{y}{a}\right)^2}}\,\mathrm{d}y=\int\frac{y}{\sqrt{\frac{2ay-y^2}{a^2}}}\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}a\int\frac{-2y}{\sqrt{2ay-y^2}}\,\mathrm{d}y=$$

$$=-\frac{1}{2}a\int\frac{(2a-2y)-2a}{\sqrt{2ay-y^2}}\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}a\left(\int\frac{2a-2y}{\sqrt{2ay-y^2}}\,\mathrm{d}y-2\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-\frac{y}{a}\right)^2}}\right)\,\mathrm{d}y=$$

$$=-\frac{1}{2}a\left(\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{\frac{1}{2}}-2\cdot\frac{\arcsin\left(1-\frac{y}{a}\right)}{-\frac{1}{a}}\right)+C=$$

$$-\left(a\sqrt{2ay-y^2}+a^2\cdot\arcsin\left(1-\frac{y}{a}\right)\right)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Tehát:

$$a\int_0^{2a}\arccos\left(\frac{a-y}{a}\right)\,\mathrm{d}y=\left[ay\arccos\left(1-\frac{y}{a}\right)+a\sqrt{2ay-y^2}+a^2\cdot\arcsin\left(1-\frac{y}{a}\right)\right]_0^{2a}=$$

$$=\left(2a^2\pi+0-\frac{a^2\pi}{2}\right)-\left(0+0+\frac{a^2\pi}{2}\right)=a^2\pi.$$

Most integráljuk az összeg második tagját:

$$\int_0^{2a} \sqrt{y(2a-y)}\ \mathrm{d}y = a\int_0^{2a} \sqrt{1-\Big(1-\frac{y}{a}\Big)^2}\ \mathrm{d}y.$$

Használjuk fel a következő helyettesítést: $z = \arcsin\Big(1-\dfrac{y}{a}\Big)$. Így $y = a(1-\sin(z))$, $\mathrm{d}y = -a\cos(z)\ \mathrm{d}z$. Ha ezt behelyettesítjük a fenti integrálba, az integrálási határok a következőképpen változnak meg: $y = 2a$ esetén $z = -\dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$ esetén $z = \dfrac{\pi}{2}$. Ezek alapján:

$$a\int_0^{2a} \sqrt{1-\Big(1-\frac{y}{a}\Big)^2}\ \mathrm{d}y = a\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos(z)\big(-a\cos(z)\big)\ \mathrm{d}z = -a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos^2(z)\ \mathrm{d}z =$$

$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2z)}{2}\ \mathrm{d}z = a^2\left[\frac{z}{2}+\frac{\sin(2z)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2\pi}{2}.$$

Így $C$ területe: $\dfrac{a^2\pi}{2}$. Ekkor az $A\setminus C = B$ tartomány területe $\dfrac{3a^2\pi}{2}$, tehát a Green-tétellel is kiszámolt korlátos tartomány területe $3a^2\pi$.

# Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Pfeil Tamás tanár úrnak a tanácsaiért és folyamatos támogatásáért. A kérdéseimre mindig a legnagyobb türelemmel és pontossággal válaszolt.

Köszönöm volt tanáromnak, Kallós Bélának, hogy megszerettette velem a matematikát és éveken át kitartóan készített fel versenyekre.

Köszönet illeti a családomat és a barátaimat, akik támogattak az elmúlt évek során.

# Irodalomjegyzék


[1] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera *Analízis II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007

[2] Sikolya Eszter, *Analízis jegyzet matematikatanári szakosok részére*, 2013, http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/161.pdf

[3] B. P. Gyemidovics, *Matematikai Analízis (Feladatgyűjtemény)*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974

[4] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano, *Thomas-féle Kalkulus III. kötet*, Typotex kiadó, Budapest, 2007

[5] Pap Margit, Tóth László, *Többváltozós függvények jegyzet*, 2011 http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/Tobbvalt_jegyzet_kesz_06_29.pdf

[6] Várkonyi Dávid, *A többszörös integrál és alkalmazásai*, szakdolgozat, ELTE TTK, Budapest, 2014

[7] Vitkóczi Fanni, *Kalandozások a cikloisok világában*, szakdolgozat, ELTE TTK, Budapest, 2013

[8] I.N. Bronstejn, K.A. Szemengyajev, *Matematikai zsebkönyv*, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1982