

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

HAMILTON-RENDSZEREK

BSc szakdolgozat

Készítette:

Bagi-Szűcs Andrea

matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Dr. Csomós Petra

adjunktus



Budapest

2016

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás	1
Bevezetés	2
1. Közönséges differenciálegyenletek	3
2. Hamilton-rendszerek	7
2.1. Bevezetés	7
2.2. Szimplektikusság	9
2.3. A változók kanonikus transzformációja	15
2.4. Integrálható rendszerek	16
3. Példák Hamilton-rendszerekre	22
3.1. Szabadesés	22
3.2. Ingamozgás	24
3.3. Harmonikus oszcillátor	26
3.4. Lotka–Volterra modell	27
4. Numerikus módszerek	31
4.1. Az explicit Euler-módszer	31
4.1.1. Lotka–Volterra modell	32

4.1.2. Harmonikus oszcillátor	33
4.2. A szimplektikus Euler-módszer	34
4.2.1. A Lotka–Volterra modell	35
4.2.2. Harmonikus oszcillátor	36
Összegzés	38
Függelék	39

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Csomós Petrának, hogy szakértelmével, hasznos tanácsaival segítséget nyújtott a szakdolgozatom elkészüléséhez. Külön köszönöm a konzultációk során tanúsított türelmét és megértését.

Hálásan köszönöm szüleimnek a tanulmányaim alatt nyújtott támogatásukat és bizalmukat. Szeretném megköszönni Bogdán Melindának a felvételi során nyújtott segítségét és azt, hogy egyetemi éveim alatt érdeklődésével és lelkesedésével ösztönzött.

Bevezetés

A szakdolgozatom témája a Hamilton-rendszerek és ezek alkalmazása más tudományterületeken. Szakdolgozatom témájának kiválasztása során fontosnak tartottam, hogy a matematikának egy olyan területét ismerjem meg mélyebbre hatóan, amelyet különböző tudományterületek is alkalmaznak, mint például a fizika.

A közönséges differenciálegyenletek rövid összefoglaló része után, a dolgozat második fejezetének témája a Hamilton-rendszerek legfőbb tulajdonságai, mégpedig a Hamilton-függvény időszerinti teljes deriváltjának alakja és a Hamilton-rendszerek szimplektikussága. Ezen tulajdonságok felhasználásával pedig bevezetek egy olyan változótranszformációt, amely nagy segítséget nyújthat bizonyos modellek analitikus megoldásainak kiszámításában. A harmadik fejezetben ismertetek néhány fontosabb fizikai modellt, amelyekről belátható az, hogy Hamilton-rendszerek, illetve egy biológiai példát. Ezek közül a Lotka–Volterra modellt és a harmonikus oszcillátor modelljét megvizsgálom numerikus szempontból is a negyedik fejezetben. Elsőként az explicit Euler-módszert futtatom le, majd az úgynevezett szimplektikus Euler-módszert. Az utóbbi módszert direkt a Hamilton-rendszerek vizsgálatára és numerikus módon való megoldására fejlesztették ki. A numerikus algoritmus lényege az explicit Euler-módszer és az implicit Euler-módszer vegyítése, amelyet a későbbiekben részletesen kifejtek.

1. fejezet

Közönséges differenciálegyenletek

Ebben a fejezetben Simon L. Péter és Tóth János Differenciálegyenletek című [5] könyvét használtam fel. A differenciálegyenletek fontos szerepet játszanak a különféle tudományokban, mint például a fizikában, a biológiában. A dolgozat későbbi szakaszaiban ezekre is mutatunk példákat. Ebben a fejezetben összegyűjtött anyag segítségünkre lesz a matematikai modellek felállításában, mivel a későbbiekben a közönséges differenciálegyenletek alkotják majd ezeket a modelleket.

1.0.1. Definíció. Legyen $F: \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol $n \in \mathbb{N}$ adott. Tekintsük az $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ismeretlen függvényt. Ekkor n -ed rendű közönséges differenciálegyenletnek nevezzük az

$$F\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, x^{(n)}(t)\right) = 0 \quad (1.1)$$

egyenletet minden $t \in \mathbb{R}$ esetén.

1.0.2. Definíció. Legyen $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény és $n \in \mathbb{N}$ egy adott szám, és tekintsük az $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, azaz $x = (x_1, \dots, x_n)$ ismeretlen függvényt. Ekkor elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenlet-rendszernek nevezzük az alábbi egyenletet:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad (1.2)$$

minden $t \in \mathbb{R}$ esetén.

1.0.3. Tétel (Átviteli elv). Tekintsük az $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, x^{(n-1)})$ differenciálegyenletet és vegyük ennek az egyenletnek egy tetszőleges $x(t)$ megoldását. Ebben az esetben az $y(t) := (x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, x^{(n-1)})^T$ megoldása lesz a

$$\frac{dy(t)}{dt} = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n-1}(t), f(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, x^{(n-1)})) \text{ differenciálegyenletnek.}$$

Bizonyítás. Írjuk ki részletesen a (1.2)-es egyenletet koordinátánként! Ekkor az alábbi egyenletrendszer kapjuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Most nézzük az (1.1)-es egyenletet és rendezzük úgy, hogy a bal oldalon az n -ed rendű tagok szerepeljenek, jobb oldalon pedig a többi, akkor azt kapjuk, hogy

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, x^{(n-1)}). \tag{1.4}$$

Következő lépésként legyen

$$\begin{aligned} y_0(t) &= x(t), \\ y_1(t) &= \frac{dx(t)}{dt}, \\ &\vdots \\ y_{n-1}(t) &= x^{(n-1)}(t). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Tehát $y(t) = (x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, x^{(n-1)}(t))$, ahol $y(t) = (y_0(t), y_1(t), \dots, y_{n-1}(t))$. Most nézzük

meg $y(t)$ derivátját koordinátánként.

$$\begin{aligned}
 \frac{y_0(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} = y_1(t), \\
 \frac{y_1(t)}{dt} &= \frac{d^2x(t)}{dt^2} = y_2(t), \\
 &\vdots \\
 \frac{y_{n-2}(t)}{dt} &= x^{(n-1)}(t) = y_{n-1}(t), \\
 \frac{y_{n-1}(t)}{dt} &= x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, x^{(n-1)}(t)).
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

Ennek a felírásnak a segítségével kaptunk egy n darab egyenletből álló elsőrendű rendszert:

$$\begin{aligned}
 \frac{y_0(t)}{dt} &= y_1(t), \\
 \frac{y_1(t)}{dt} &= y_2(t), \\
 &\vdots \\
 \frac{y_{n-2}(t)}{dt} &= y_{n-1}(t), \\
 \frac{y_{n-1}(t)}{dt} &= f(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, x^{(n-1)}(t)).
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

Tehát az (1.4) egyenletről megmutattuk, hogy egyenértékű a (1.7) rendszerrel, így ami az (1.4) egyenletnek megoldása, az megoldása a (1.7) rendszernek is. Ezzel a tételt beláttuk.

□

Nézzünk erre egy egyszerűbb példát! Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ adott paraméter. Tekintsük ekkor az alábbi másodfokú egyenletet:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \alpha \cdot x(t), \text{ ahol } t \geq 0.
 \tag{1.8}$$

Most vezessük be az új függvényt. Legyen $y_0(t) = x(t)$ és $y_1(t) = \frac{dx(t)}{dt}$. Ha ezeket deriváljuk, akkor meg is kapjuk a fenti rendszert $n = 2$ -re. Tehát a feladat úgy módosul, hogy

$$\begin{aligned}\frac{dy_0(t)}{dt} &= y_1, \\ \frac{dy_1(t)}{dt} &= \alpha \cdot x(t).\end{aligned}\tag{1.9}$$

Ennek az egyenletnek egy konkrétabb formájával a későbbi fejezetekben még foglalkozni fogunk.

2. fejezet

Hamilton-rendszerek

A Hamilton-rendszerek egy osztályát alkotják a dinamikai rendszereknek és sok területen alkalmazzák őket. Az úgynevezett Hamilton-egyenletek és ezek speciális tulajdonságai jellemzik. Példaként említhetjük, hogy a fizikában a Hamilton-rendszereknek nem csak a közismert súrlódásmentes mechanikai rendszerekben van szerepük, hanem abban is, hogy a folyadékok hogyan keverednek, vagy a mágneses mező vonalait hogyan követik a pályák. Ezen tulajdonságok összefoglalásához Edward Ott [2] könyvét és Ernst Hairer, Christian Lubich és Gerhard Wanner [3] írását használtam fel. A fejezet későbbi részeiben ezen alaptulajdonságokról olvashatunk.

2.1. Bevezetés

A Hamilton-rendszereket teljes mértékben meghatározhatjuk egyetlen függvénnyel, amely három paramétertől függ, az időtől, a p -től, ami általában a lendületre utal, illetve a q -tól, ami pedig a helyzetet szokta jelenteni. Itt a p és q vektorok dimenziója egyenlő. A fizikában ez a dimenzószám jelenti a rendszerek szabadsági fokát. Ezek tudatában írjuk fel a pontos definíciót.

2.1.1. Definíció. A következő $p, q : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvények. Tegyük fel, hogy létezik a $H : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre igazak az alábbiak

$$\begin{aligned}\frac{dp(t)}{dt} &= -\frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial q}, \\ \frac{dq(t)}{dt} &= \frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial p}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Ekkor a fenti egyenletrendszeret *Hamilton-rendszernek*, míg a H függvényt *Hamilton-függvénynek* nevezzük.

2.1.2. Állítás. a) A Hamilton-függvényre igaz, hogy

$$\frac{dH(p(t), q(t), t)}{dt} = \frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial t}.$$

b) Speciálisan, ha a Hamilton-függvény nem függ explicit a t változótól, azaz $H = H(p(t), q(t))$, akkor a Hamilton-függvény állandó.

Bizonyítás. a) Vizsgáljuk meg a Hamilton-függvény időszerinti teljes deriváltját. Mivel a H függvényünk közvetett, így az időszerinti deriváltja megegyezik a H Jacobi mátrixának és a belső függvények időszerinti deriváltjaiból álló vektor szorzatával. Ebben az esetben H Jacobi-mátrixa megegyezik a divergenciával.

$$\begin{aligned}\frac{dH(p(t), q(t), t)}{dt} &= \\ &= \left(\frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial p} \quad \frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial q} \quad \frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial t} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{dp(t)}{dt} \\ \frac{dq(t)}{dt} \\ \frac{dt}{dt} = 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{dH(p(t), q(t), t)}{dt} &= \\ &= \frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial p} \cdot \frac{dp(t)}{dt} + \frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial q} \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial t}.\end{aligned}$$

Most helyettesítsük be a p és q deriváltjai helyére a (2.1) egyenletek jobb oldalait:

$$\frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial p} \cdot -\frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial q} + \frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial q} \cdot \frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial p} + \frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial t}.$$

Rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{dH(p(t), q(t), t)}{dt} = \frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Tehát a H függvény teljes deriváltja megegyezik a t szerinti parciális deriválttal.

b) Tegyük fel, hogy a Hamilton-függvény nem függ explicit az időtől. A feladat az, hogy ebben az esetben belássuk a Hamilton-függvény állandóságát. Nézzük meg ennek a függvénynek az időszerinti deriváltját. Abban az esetben, ha ennek a $H = H(p(t), q(t))$ függvénynek az időszerinti deriváltja nulla, akkor kész is vagyunk a bizonyítással, hiszen csak a konstans függvényeknek nulla az első deriváltjuk. A (2.2) egyenletből tudjuk, hogy ez az időszerinti teljes derivált megegyezik az időszerinti parciális deriválttal, ami a mi esetünkben nulla, hiszen a függvény nem függ explicit az időtől.

$$\frac{dH(p(t), q(t), t)}{dt} = \frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

Így az állításunkat bebizonyítottuk. □

2.2. Szimplektikusság

Az előző fejezetben megmutattuk a Hamilton-rendszerek egyik legfontosabb sajátosságát, miszerint az időfüggetlen Hamilton-függvény állandó. Ebben a fejezetben megvizsgáljuk egy másik tulajdonságát a rendszereknek, ami a szimplektikusság. Ezen fogalom bevezetéséhez először tekintsünk egy paralelogrammát, amely az α és a β vektorok által van kifeszítve a (p, q) térben. Azaz a vektorok az következő formát veszik fel:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^p \\ \alpha^q \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta^p \\ \beta^q \end{pmatrix}, \quad \text{ahol } \alpha^p, \alpha^q, \beta^p, \beta^q \in \mathbb{R}^n.$$

Az $n = 1$ esetben ennek a paralelogrammának a területét az $\alpha \times \beta$ vektoriális szorzat adja:

$$\det \begin{vmatrix} \alpha^p & \beta^p \\ \alpha^q & \beta^q \end{vmatrix} = \alpha^p \cdot \beta^q - \alpha^q \cdot \beta^p.$$

Magasabb dimenzióban pedig az alábbiak szerint számítható:

$$\sum_{i=1}^n \det \begin{vmatrix} \alpha^p & \beta^p \\ \alpha^q & \beta^q \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha^p \cdot \beta^q - \alpha^q \cdot \beta^p.$$

A (2.4) egyenletben szereplő mennyiséget jelöljük $\omega(\alpha, \beta)$ -val, azaz

$$\omega(\alpha, \beta) := \sum_{i=1}^n \alpha^p \cdot \beta^q - \alpha^q \cdot \beta^p. \quad (2.4)$$

Ez egy \mathbb{R}^{2n} -ben lévő vektorokon ható bilineáris függvény, amely központi szerepet fog játszani a Hamilton-rendszerek vizsgálatakor.

A (2.4) egyenletet átírhatjuk egyfajta mátrixos jelöléssel:

$$\omega(\alpha, \beta) = \alpha^T J \beta, \quad (2.5)$$

ahol $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ és I az n -dimenziós egységmátrix, a 0 pedig egy $n \times n$ -es nullmátrix.

Nézzük tehát a szimplektikusság definícióját a lineáris transzformációk esetére.

2.2.1. Definíció. Az $A : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ lineáris leképezést szimplektikusnak nevezzünk, ha

$$A^T J A = J \quad (2.6)$$

teljesül.

Illetve felírhatunk egy másik definíciót is.

2.2.2. Definíció. Legyen $A : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ lineáris leképezés. Egy ilyen A leképezést szimplektikusnak nevezzünk, ha

$$\omega(A\alpha, A\beta) = \omega(\alpha, \beta), \quad \text{ahol } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (2.7)$$

2.2.3. Állítás. A 2.2.1. és a 2.2.2. Definíciók ekvivalensek.

Bizonyítás. (i) Először lássuk be, hogy a 2.2.1. Definícióból következik a 2.2.2. Definíció. Ehhez tegyük fel azt, hogy az A egy lineáris leképezés és igaz rá az, hogy $A^T J A = J$. Ezen feltételek mellett lássuk be az $\omega(A\alpha, A\beta) = \omega(\alpha, \beta)$ egyenletet. Tudjuk, hogy $\omega(\alpha, \beta) = \alpha^T J \beta$. Ezt az átalakítást alkalmazva:

$$\omega(A\alpha, A\beta) = (A\alpha)^T J A \beta = \alpha^T A^T J A \beta.$$

Vegyük észre, hogy $A^T J A = J$. Így felírhatjuk a következőt:

$$\omega(A\alpha, A\beta) = \alpha^T A^T J A \beta = \alpha^T J \beta = \omega(\alpha, \beta).$$

(ii) Most nézzük meg a másik irányt. Először is tegyük fel, hogy $\omega(A\alpha, A\beta) = \omega(\alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} \omega(A\alpha, A\beta) &= (A\alpha)^T J A \beta = \alpha^T A^T J A \beta \\ \omega(\alpha, \beta) &= \alpha^T J \beta \end{aligned} \tag{2.8}$$

Abban az esetben, ha a (2.8) egyenletek baloldalai egyenlők, akkor a jobb oldalaknak is egyenlőnek kell lenniük.

$$(A\alpha)^T J A \beta = \alpha^T A^T J A \beta = \alpha^T J \beta.$$

Ez azonban csak akkor lehetséges, ha a

$$A^T J A = J.$$

Ezzel beláttuk az állításunkat. □

A fenti két definíció csak a lineáris esetekre alkalmazható. Most írjuk föl a nem lineáris esetre is a definíciót.

2.2.4. Definíció. Legyen $U \subset \mathbb{R}^{2n}$. A $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ differenciálható leképezést *szimplektikusnak* nevezzük, ha a Jacobi-mátrixa mindehol szimplektikus, azaz

$$\frac{dg}{dt}(p, q)^T J \frac{dg}{dt}(p, q) = J$$

vagy

(2.9)

$$\omega\left(\frac{dg}{dt}(p, q)\alpha, \frac{dg}{dt}(p, q)\beta\right) = \omega(\alpha, \beta).$$

Vezessünk be egy új jelölést: $\hat{x} = (p, q)$. Ezzel a jelöléssel átírhatjuk a Hamilton-rendszer 2.1.1. Definícióját az alábbi alakba:

$$f(\hat{x}) = \frac{d\hat{x}}{dt} = \left(\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}\right) = J^{-1}\nabla H(\hat{x}), \text{ ahol } f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \text{ függvény.} \quad (2.10)$$

2.2.5. Definíció. A $\varphi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ függvényt *fázisáramnak* nevezzük, ha a Hamilton-rendszernek egy olyan leképezése, amely a megoldásokat tovább viszi az időben, azaz

$$\varphi_t(p_0, q_0) = (p(p_0, q_0, t), q(p_0, q_0, t)),$$

ahol $p(p_0, q_0, t)$ és $q(p_0, q_0, t)$ megoldásai a rendszernek a megfelelő kezdeti értékekre, $p(0) = p_0, q(0) = q_0$.

Az új változók és a 2.2.5. Definíció alapján felírhatjuk a következő tételt.

2.2.6. Tétel. Legyen a $H(p, q)$ Hamilton-függvény egy kétszeresen folytonosan differenciálható függvény az $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ halmazon. Ekkor minden rögzített $t \geq 0$ időpillanatban, a fázisáram egy szimplektikus transzformáció.

Bizonyítás. Tekintsük a fázisáram parciális deriváltját az új függvény szerint, azaz $\frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0}$, ahol $\hat{x}_0 = (p_0, q_0)$. Ez megoldása lesz a (2.10) egyenlet szerinti Hamilton-rendszer azon formájának, ahol $\frac{d\Psi}{dt} = J^{-1}\nabla^2 H(\varphi_t(\hat{x}_0))\Psi$. Itt a $\nabla^2 H(p, q)$ a Hesse-mátrixa a $H(p, q)$ függvénynek ($\nabla^2 H(p, q)$ szimmetrikus). Ebből adódóan igaz az alábbi egyenlőség a szorzat

függvény deriválási szabálya miatt:

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right)^T J \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right) \right) = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right)^T J \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right)^T J \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right). \quad (2.11)$$

Ezt tovább alakítva kapjuk:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right)^T J \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right)^T J \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right) = \\ & = \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right)^T \nabla^2 H(\varphi_t(\hat{x}_0)) J^{-T} J \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right)^T J J^{-1} \nabla^2 H(\varphi_t(\hat{x}_0)) \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Vizsgáljuk most meg a $J^{-T}J$ részét a (2.12) egyenletnek:

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = J^T$$

és

$$J^{-T} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = J$$

Tehát

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = -I$$

Ezért igaz az, hogy

$$\left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right)^T \nabla^2 H(\varphi_t(\hat{x}_0)) \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right) - \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right)^T \nabla^2 H(\varphi_t(\hat{x}_0)) \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \hat{x}_0} \right) = 0$$

Tehát azt kaptuk, hogy a fázisáram az időben állandó.

Azt tudjuk, hogy a $t = 0$ pontban a fázisáram maga az identitás, hiszen itt helyben marad a megoldásunk. Ezért felírhatjuk azt a megállapítást, hogy:

$$\left(\frac{\partial \varphi_{t_0}}{\partial \hat{x}_0} \right)^T J \left(\frac{\partial \varphi_{t_0}}{\partial \hat{x}_0} \right) = J.$$

Mivel a fázisáram az időben állandó így a fenti (2.13) egyenlet igaz minden $t > 0$ időpillanatban is. Így beláttuk, hogy a fázisáram szimplektikus. \square

A 2.2.6. Tétel segítségével megfogalmazhatjuk a fejezetünk legfontosabb tételét.

2.2.7. Tétel. *Legyen $\psi : U \rightarrow V$ a koordináták egy olyan cseréje, hogy a ψ és ψ^{-1} is folytonosan differenciálható függvények legyenek. Ekkor igaz az, hogy ha ψ szimplektikus leképezés, akkor a (2.10) egyenletet felírva az új $z = \psi(\hat{x})$ változóval a következő:*

$$\frac{dz}{dt} = J^{-1}\nabla K(z), \text{ ahol } K(z) = H(\hat{x}). \quad (2.13)$$

Megfordítva, ha ψ függvény minden Hamilton-rendszert egy másik (2.13) egyenletnek megfelelő Hamilton-rendszerbe képez, akkor a ψ szimplektikus.

Bizonyítás. (i) A $z = \psi(\hat{x})$ változó miatt felírhatjuk, hogy

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\psi}{d\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dt}$$

és tudjuk azt is

$$\nabla H(\hat{x}) = \left(\frac{d\psi}{d\hat{x}} \right)^T \nabla K(z)$$

. A (2.10) egyenlet szerinti Hamilton-rendszer a következőképpen változik:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\psi}{d\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{d\psi}{d\hat{x}} J^{-1} \nabla H(\hat{x}) = \frac{d\psi}{d\hat{x}} J^{-1} \left(\frac{d\psi}{d\hat{x}} \right)^T \nabla K(z). \quad (2.14)$$

Tudjuk, hogy a ψ függvény szimplektikus, azaz

$$\frac{d\psi}{d\hat{x}} J^{-1} \left(\frac{d\psi}{d\hat{x}} \right)^T = J^{-1}.$$

Tehát igaz a következő:

$$\frac{dz}{dt} = J^{-1} \nabla K(z), \text{ ami pedig a (2.13) egyenlet.} \quad (2.15)$$

ami pedig a (2.13) egyenletet jelenti. (ii) Most nézzük a másik irányt. Tudjuk tehát, hogy a

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = J^{-1} \nabla H(\hat{x})$$

egyenletet a ψ függvény az alábbi alakra transzformálja:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\psi}{d\hat{x}} J^{-1} \left(\frac{d\psi}{d\hat{x}} \right)^T \nabla K(z) = J^{-1} \nabla K(z). \quad (2.16)$$

A kérdés az, hogy ekkor ψ szimplektikus-e. Vizsgáljuk meg a

$$\frac{d\psi}{d\hat{x}} J^{-1} \left(\frac{d\psi}{d\hat{x}} \right)^T$$

kifejezést. A (2.16) egyenletből könnyen adódik a következő:

$$\frac{d\psi}{d\hat{x}} J^{-1} \left(\frac{d\psi}{d\hat{x}} \right)^T = J^{-1}. \quad (2.17)$$

Most szorozzuk meg az egyenletet jobbról $\left(\frac{d\psi}{d\hat{x}} \right)^{-T}$ -vel majd balról $\left(\frac{d\psi}{d\hat{x}} \right)^{-1}$ -zel. Akkor azt kapjuk, hogy

$$J^{-1} = \left(\frac{d\psi}{d\hat{x}} \right)^{-1} J^{-1} \left(\frac{d\psi}{d\hat{x}} \right)^{-T} \quad (2.18)$$

Most vegyük a (2.18) egyenlet inverzét. Ekkor az alábbi teljesül:

$$J = \left(\frac{d\psi}{d\hat{x}} \right)^T J \left(\frac{d\psi}{d\hat{x}} \right). \quad (2.19)$$

Tehát a ψ függvény szimplektikus. Ezzel a tételt beláttuk. \square

2.3. A változók kanonikus transzformációja

Ha bevezetjük a változók egy tetszőleges $\frac{d\hat{x}}{dt} = f(\hat{x})$, a (2.10) egyenlet szerinti transzformációját, akkor az egyenletek Hamilton-féle alakja nem feltétlenül őrződik meg. Ezért törekednünk kell a változók transzformációjának helyes megválasztására, ami megőrzi a (2.1) egyenletekkel leírt tulajdonságokat. Ezeket a transzformációkat *kanonikusnak* nevezük, míg az így kapott $\bar{p}(t)$ és $\bar{q}(t)$ függvényeket *kanonikus konjugáltaknak* hívjuk.

$$\bar{p}(t) = f_1(p(t), q(t), t)$$

$$\bar{q}(t) = f_2(p(t), q(t), t)$$

Tehát keressük azt a \bar{H} Hamilton-függvényt, amely esetében a $\bar{p}(t)$ és a $\bar{q}(t)$ időbeli változását leíró egyenletek a következőképpen alakulnak

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{p}(t)}{dt} &= -\frac{\partial \bar{H}(p(t), q(t), t)}{\partial \bar{q}} \\ \frac{d\bar{q}(t)}{dt} &= \frac{\partial \bar{H}(p(t), q(t), t)}{\partial \bar{p}}\end{aligned}\tag{2.20}$$

Ebben a formában a $\bar{H}(p(t), q(t), t)$ a rendszernek az új, transzformált Hamilton-függvénye.

Az egyik lehetséges módszer arra, hogy a változók transzformációja kanonikus legyen, az, amikor bevezetünk egy $G : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ generáló függvényt, amely az új \bar{p} -nak és a régi q -nak a függvénye. Tehát a $G(\bar{p}(t), q(t), t)$ generáló függvénnyel kifejezve a változók transzformációja a következő formában áll elő

$$\bar{q}(t) = \frac{\partial G(\bar{p}(t), q(t), t)}{\partial \bar{p}},\tag{2.21}$$

$$p(t) = \frac{\partial G(\bar{p}(t), q(t), t)}{\partial q}.\tag{2.22}$$

Így a változók transzformáltjai implicit formában adóttak. Tehát első lépésként kifejezzük $\bar{p}(t)$ -t $p(t)$ és $q(t)$ segítségével a (2.22) egyenletből, majd ennek az eredményét behelyettesítve a (2.21) egyenletbe megkapjuk a \bar{q} -t is.

2.4. Integrálható rendszerek

Ebben a fejezetben kifejezetten olyan Hamilton-rendszerekkel fogunk foglalkozni, amelyek explicit nem függenek az időtől. Ahogy az a 2.1.2. Állításban is szerepel, ilyenkor a Hamilton-függvény értéke az időben állandó. Tehát a következőkben eltekintünk a Hamilton-függvények időfüggésétől.

2.4.1. Definíció. *Legyen $F(p, q) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Egy ilyen $F(p, q)$ függvényt a H Hamilton-függvénnyel rendelkező rendszer mozgásállandójának nevezzük, ha az $F(p(t), q(t))$ állandó minden $t \geq 0$ esetén.*

Vizsgáljuk meg ezen $F(p(t), q(t))$ függvénynek az időszerinti teljes deriváltját. Ugyanúgy, mint a Hamilton-függvénynél, itt is a közvetett függvény deriválási szabályait alkalmazzuk:

$$\frac{dF(p, q)}{dt} = \frac{\partial F(p, q)}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{\partial F(p, q)}{\partial q} \cdot \frac{dq}{dt}. \quad (2.23)$$

Most írjuk át a $p(t)$ és a $q(t)$ időszerinti deriváltjukat a (2.1) egyenletrendszer szerint.

$$\frac{dF(p, q)}{dt} = \frac{\partial F(p, q)}{\partial q} \cdot \frac{\partial H(p, q)}{\partial p} - \frac{\partial F(p, q)}{\partial p} \cdot \frac{\partial H(p, q)}{\partial q} \quad (2.24)$$

A (2.24) egyenlet jobb oldalán lévő kifejezést az $[F, H]$ alakkal rövidíthetjük, ami az F és a H úgynevezett Poisson-zárójele.

2.4.2. Definíció. *Legyenek $g_1(p, q), g_2(p, q) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények. Ekkor a két függvény Poisson-zárójele a következő*

$$[g_1, g_2] = \frac{\partial g_1(p, q)}{\partial q} \cdot \frac{\partial g_2(p, q)}{\partial p} - \frac{\partial g_1(p, q)}{\partial p} \cdot \frac{\partial g_2(p, q)}{\partial q} \quad (2.25)$$

Ezen definíció alapján könnyen belátható a következő állítás.

2.4.3. Állítás. *Legyen $g_1(p, q), g_2(p, q) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények. Ekkor igaz az, hogy*

$$[g_1, g_2] = -[g_2, g_1] \quad (2.26)$$

Bizonyítás.

$$-[g_2, g_1] = \frac{\partial g_2(p, q)}{\partial p} \cdot \frac{\partial g_1(p, q)}{\partial q} - \frac{\partial g_2(p, q)}{\partial q} \cdot \frac{\partial g_1(p, q)}{\partial p} \quad (2.27)$$

$$[g_1, g_2] = \frac{\partial g_1(p, q)}{\partial q} \cdot \frac{\partial g_2(p, q)}{\partial p} - \frac{\partial g_1(p, q)}{\partial p} \cdot \frac{\partial g_2(p, q)}{\partial q} \quad (2.28)$$

Vegyük észre, hogy a (2.27) és a (2.28) egyenletek jobb oldalai egyenlők. Tehát igaz a következő egyenlőség

$$[g_1, g_2] = -[g_2, g_1] \quad (2.29)$$

Ezzel bebizonyítottuk a 2.4.3. Állítást. □

A fentiek következményeképpen annak a feltétele, hogy egy F függvény mozgásállandó legyen, megegyezik azzal, hogy a H Hamilton-függvénnyel alkotott Poisson-zárójel nulla:

$$[F, H] = 0.$$

Így könnyedén beláthatjuk a következő állítást is.

2.4.4. Állítás. *A H Hamilton-függvény mozgásállandója a Hamilton-rendszernek.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz használjuk fel a Poisson-zárójel 2.4.2. Definícióját.

$$[H, H] = \frac{\partial H(p(t), q(t))}{\partial q} \cdot \frac{\partial H(p(t), q(t))}{\partial p} - \frac{\partial H(p(t), q(t))}{\partial p} \cdot \frac{\partial H(p(t), q(t))}{\partial q} = 0 \quad (2.30)$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk. □

Definiáljuk továbbá azt is, hogy $n \in \mathbb{N}$ számú mozgásállandó mikor független.

2.4.5. Definíció. *Legyen $F_i(p, q) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény mozgásállandó, ahol $i = 1, 2, \dots, n$. Ekkor azt mondjuk, hogy az F_i mozgásállandók függetlenek, ha minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ -re teljesül az, hogy F_i nem fejezhető ki a másik $(n-1)$ számú mozgásállandóval.*

Ezen definíciók alapján már felírhatjuk azt, hogy egy időfüggetlen Hamilton-rendszert mikor tekintünk integrálhatónak.

2.4.6. Definíció. *Egy időtől explicit nem függő Hamilton-függvénnyel rendelkező*

Hamilton-rendszert integrálhatónak nevezünk abban az esetben, ha $n \in \mathbb{N}$ számú, egymástól független $F_i(p, q) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mozgásállandóval rendelkezik, ahol $i = 1, 2, \dots, n$, és az $i = 1$ -re igaz az, hogy $F_1(p, q) = H(p, q)$. Továbbá teljesülnie kell még a következő feltételnek is

$$[F_i, F_j] = 0 \quad \text{minden } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\text{-re}$$

2.4.7. Definíció. *Ha $[F_i, F_j] = 0$ teljesül minden $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ -re, akkor azt mondjuk, hogy az n darab mozgásállandó involúcióban van.*

Most tekintsünk egy integrálható rendszert, amelynek n számú független mozgásállandója van. Ebben az esetben teljesül az, hogy a rendszer trajektóriája a fázistérben az n -dimenziós

$$F_i(p, q) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.31)$$

felületen helyezkedik el, ahol $c_i \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ -re. Az a feltétel pedig, hogy az n darab F_i mozgásállandó involúcióban van, a rendszer által elérhető állapotokat egy n dimenziós felületre korlátozza, amely egy tórusz.

Ha adott egy integrálható rendszer, akkor bevezethetjük a változók kanonikus transzformációját, azaz a régi (p, q) vektor helyett egy új (\bar{p}, \bar{q}) vektort vezetünk be, olyan formában, hogy az új változókkal megadott \bar{H} Hamilton-függvény csak a \bar{p} változótól függ, a \bar{q} változótól nem.

Az egyik ilyen lehetséges transzformáció az, hogy az n darab mozgásállandót választjuk meg a \bar{p} változó n darab komponensének: $\bar{p}_i = F_i(p, q)$. Mivel az F_i függvények állandók minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén, így

$$0 = \frac{d\bar{p}}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}}. \quad (2.32)$$

Ebből következik, hogy

$$\bar{H} = \bar{H}(\bar{p}). \quad (2.33)$$

Valójában a mozgásállandók segítségével sok ekvivalens megoldást alkothatunk, ha az F_i függvények valamely kombinációit használjuk fel \bar{p} komponenseinek. Ezek közül a legelőnyösebb az úgynevezett *hatás- és szögváltozók* bevezetése, ami a következőképpen néz ki:

$$(p, q) = (I, \Theta),$$

ahol I az impulzus koordinátát definiálja úgy, hogy

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} pdq, \quad \text{ahol } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.34)$$

A pozíció koordináta pedig a következő:

$$\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n). \quad (2.35)$$

A (2.34) egyenletben a γ_i azt az n dimenziós tóruszon elhelyezkedő n számú útvonalat jelenti, amely az n számú szög irányában tovább már nem redukálhatóan fonja körbe a tóruszt, és amely felhasználható a tóruszon levő pontok parametizálására.

Most vizsgáljuk meg az új változókat. Ehhez először a $(p, q) \rightarrow (I, \Theta)$ változók transzformációját írjuk fel a $G(I, q)$ generálófüggvény segítségével:

$$\Theta = \frac{\partial G(I, q)}{\partial I}, \quad (2.36)$$

$$p = \frac{\partial G(I, q)}{\partial q}. \quad (2.37)$$

Jelölje a $\Delta_i G$ a G generálófüggvény megváltozását egy legrövidebb (tovább már nem redukálható) γ_i útvonal mentén történő kör megtétele során. Ekkor a (2.37) egyenlet alapján

$$\Delta_i G = \oint_{\gamma_i} p dq = 2\pi I_i. \quad (2.38)$$

Továbbá legyen a $\Delta_i \Theta$ a Θ koordinátának az a megváltozása, amelyet a legrövidebb γ_i útvonal mentén történő egy kör megtételekor elszenved. A (2.36) és a (2.38) egyenletek miatt igaz a következő:

$$\Delta_i \Theta = \frac{\partial}{\partial I} \Delta_i G = 2\pi \frac{\partial}{\partial I} I_i. \quad (2.39)$$

Az új Hamilton-függvény nem függ a Θ változótól, hiszen ilyen alakban kerestük az új változókat. Ezért igazak a következő egyenletek:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{\partial H(\bar{I})}{\partial \Theta} = 0, \\ \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{\partial H(\bar{I})}{\partial I} \equiv \sigma(I) \end{aligned} \quad (2.40)$$

A fenti egyenletrendszerből következik, hogy

$$I(t) = I(0) \text{ minden } t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Hiszen az I változó állandó. Továbbá igaz az is, hogy

$$\Theta(t) = \Theta(0) + t\sigma(I).$$

3. fejezet

Példák Hamilton-rendszerekre

Ebben a fejeztben olyan feladatok modeljeit mutatjuk be, amelyek tükrözik a Hamilton-rendszerek széleskörű felhasználását a különböző tudományterületeken.

3.1. Szabadesés

Tekintsünk egy $m > 0$ tömegű testet, amely szabadon esik, így csak a $g > 0$ nehézségi gyorsulással jellemzett gravitációs erő hat rá. A modell felállításához szükségünk van még Newton második törvényére, miszerint egy test gyorsulása egyenesen arányos a testre ható erő nagyságával. Definíció szerint ekkor a hányadosuk állandó.

$$\frac{F}{g} = m,$$

ahol F az erőt, g a nehézségi gyorsulást és m a test tömegét jelöli. Továbbá tudjuk azt is, hogy a test helyzetének (s) idő szerinti második deriváltja megegyezik a gyorsulással, azaz felírhatjuk a következő differenciálegyenletet

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g.$$

Az 1.0.3. Átviteli elv segítségével a fenti másodrendű közönséges differenciálegyenletet átírhatjuk két elsőrendű közönséges differenciálegyenletté. Tehát vezessünk be egy új ismeretlen függvényt. Tudjuk, hogy a helyzet időszerinti első deriváltja a sebesség, így az új függvényt jelöljük v -vel. Ekkor az elsőrendű közönséges differenciálegyenlet a következőképpen fog kinézni.

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= v(t), \\ \frac{dv}{dt} &= g.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Ezzel a modellt felállítottuk, most pedig megvizsgáljuk, hogy Hamilton-rendszer-e.

Erre a kérdésre úgy adhatunk választ, hogy keresünk egy $H : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre igazak a (2.1) Hamilton-egyenletek. Tehát a kérdés az, hogy létezik-e olyan H függvény, amely eleget tesz a (2.1) egyenletrendszernek. Írjuk át a (2.1) rendszert, ha a p változót v -nek illetve a q változót s -nek tekintjük:

$$\begin{aligned}\frac{ds(t)}{dt} &= \frac{\partial H(t, s(t), v(t))}{\partial v}, \\ \frac{dv(t)}{dt} &= -\frac{\partial H(t, s(t), v(t))}{\partial s}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

A (3.2) egyenletet átírva kapjuk az alábbi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(t, s(t), v(t))}{\partial v} &= v(t), \\ \frac{\partial H(t, s(t), v(t))}{\partial s} &= -g.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Most integráljuk az első egyenletet v szerint, majd a második egyenletet s szerint.

$$\begin{aligned}\int v(t)dv &= \frac{v^2(t)}{2} \\ \int -gds &= -g \cdot s(t)\end{aligned}\tag{3.4}$$

Összeadva a két jobboldalon lévő kifejezést kapunk egy függvényt, amire igaz a 2.1.1. Definíció. Tehát a Hamilton-függvény úgy néz ki, hogy

$$H(s(t), v(t)) = \frac{v^2(t)}{2} - g \cdot s(t).$$

Vegyük észre, hogy a meghatározott H függvény nem függ explicit az időtől. Így a 2.1.2. Állítás alapján a Hamilton-függvény állandó. Ekkor ez azt jelenti, hogy a Hamilton-függvény megegyezik a fizikai rendszer energiájával.

3.2. Ingamozgás

Tekintsünk egy $m > 0$ tömegű testet, amely egy $\ell > 0$ hosszúságú súlytalan fonálon lóg és a testre csak a $g > 0$ nehézségi gyorsulással jellemzett gravitációs erő hat. Ezt felbonthatjuk két komponensre. Az egyik a gravitációból adódóan, függőlegesen lefelé hat, ami egyenlő az $m \cdot g$ -vel. A másik mindig a fonál vonalára merőlegesen hat. Az érintő irányú komponenst jelöljük F -el. Jelöljük továbbá φ -vel a fonál és a függőleges által bezárt szöveget. Ebből következik, hogy ha a lefelé ható $m \cdot g$ vektorból merőlegest állítunk az F vektorra, akkor igaz az alábbi állítás

$$F = -m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$$

Newton második törvényét felírva kapjuk, hogy

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-m \cdot g \cdot \sin(\varphi)}{m} = g \cdot \sin(\varphi), \text{ ahol } \varphi \text{ függ az időtől.}$$

Az előző példából már tudjuk, hogy a helyzet időszerinti második deriváltja a gyorsulás. Tehát igaz az, hogy

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = g \cdot \sin(\varphi(t)). \quad (3.5)$$

Ezzel az egyenlettel viszont az a baj, hogy két ismeretlenes. Ennek a kiküszöbölésére írjuk fel az ívhosszat, azaz x -et:

$$\frac{x(t)}{2 \cdot \ell \cdot \pi} = \frac{\varphi(t)}{2 \cdot \pi}$$

Rendezés után megkapjuk, hogy

$$\begin{aligned}x(t) &= \ell \cdot \varphi(t), \\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \ell \cdot \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}.\end{aligned}$$

Ezt visszahelyettesítve a (3.5) egyenletbe, egy másodrendű nemlineáris közönséges differenciálegyenletet kapunk $\varphi(t)$ -re:

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \cdot \sin(\varphi(t)). \quad (3.6)$$

Most írjuk át a (3.6) másodrendű egyenletet két elsőrendűre. Az előző példához hasonlóan itt is az 1.0.3. Átviteli elvet használjuk. Vezessük be az $\omega(t)$ jelölést a $\varphi(t)$ időszerinti első deriváltjára. Így azt az egyenletrendszert kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi(t)}{dt} &= \omega(t), \\ \frac{d\omega(t)}{dt} &= -\frac{g}{\ell} \cdot \sin(\varphi(t)).\end{aligned}$$

Ezzel a modell kész van. Most nézzük meg, hogy Hamilton-rendszer-e.

Itt ismételten úgy csináljuk, mint a szabadeséses feladatban. Ebben az esetben is keresünk egy $H : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre igazak a Hamilton-egyenletek, de most a p változót ω -nak illetve a q változót φ -nek tekintjük. Tehát már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy létezik-e olyan H függvény amire igazak a (2.1) egyenletek.

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi(t)}{dt} &= \frac{\partial H(t, \varphi(t), \omega(t))}{\partial \omega} \\ \frac{d\omega(t)}{dt} &= -\frac{\partial H(t, \varphi(t), \omega(t))}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

Behelyettesítéssel a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(t, \varphi(t), \omega(t))}{\partial \omega} &= \omega(t), \\ \frac{\partial H(t, \varphi(t), \omega(t))}{\partial \varphi} &= \frac{g}{\ell} \cdot \sin(\varphi(t)).\end{aligned} \quad (3.7)$$

Nézzük meg ismételten a megfelelő változó szerinti integrálokat:

$$\int \omega(t) d\omega = \frac{\omega^2(t)}{2},$$

$$\int \frac{g}{\ell} \cdot \sin(\varphi(t)) d\varphi = -\frac{g}{\ell} \cdot \cos(\varphi(t)).$$

Ismételten adjuk össze a két jobb oldali kifejezést. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$H(\varphi(t), \omega(t)) = \frac{\omega^2(t)}{2} - \frac{g}{\ell} \cdot \cos(\varphi(t)).$$

Ezt parciálisan deriválva a megfelelő változók szerint visszkapjuk a (3.7) egyenletrendszert. Így meghatároztunk egy függvényt, ami megfelel a Hamilton-függvény definíciójának. Ezért ez a modell is Hamilton-rendszert alkot és ebben az esetben is a H függvényünk a fizikai rendszer összenergiáját adja.

3.3. Harmonikus oszcillátor

Eddig olyan példákat láthattunk, ahol a modellről láttuk be, hogy rendelkeznek Hamilton-függvénnyel. Most azonban nézzük meg azt az esetet, amikor adott számunkra a Hamilton-függvény és ezt megvizsgálva fejtünk vissza egy fizikai modellt. Tekintsük tehát a következő Hamilton-függvényt, amely explicit nem függ az időtől, és amelyben az $\eta \in \mathbb{R}$ egy adott szám.

$$H(p(t), q(t)) = \frac{1}{2} \cdot p^2 + \frac{\eta^2}{2} \cdot q^2. \quad (3.8)$$

Nézzük meg az (3.8) egyenlethez tartozó Hamilton-rendszert. A (2.1) rendszer alapján felírhatjuk a következőket:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(p(t), q(t))}{\partial q},$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(p(t), q(t))}{\partial p}.$$

Azaz a mi esetünkben ez úgy néz ki, hogy

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -\eta^2 \cdot q(t), \\ \frac{dq}{dt} &= p(t).\end{aligned}\tag{3.9}$$

A (3.9) rendszer második tagja miatt igaz a következő,

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{dp(t)}{dt} = -\eta^2 \cdot q(t).$$

Ez pedig a fizikában jól ismert harmonikus oszcillátornak a matematikai modellje, ahol $q(t)$ változó jelenti az egyensúlyi helyzettől vett kitérést az idő függvényében és η egy adott paraméter.

3.4. Lotka–Volterra modell

A következő feladatban egy olyan biológiai modellt állítunk fel, amely egy zárt élőhelyen belüli ragadozók és a zsákmányállatok létszámának egymástól való függését vizsgálja. A modell először 1910-ben került említésre, amikor Alfred J. Lotka megírta, mint önkatalizáló kémiai reakciók elmélete. A későbbiekben ezt használta fel és 1920-ban kiterjesztette a modellt növényekre és növényevő fajokra [1]. 1925-ben felhasználta korábbi megfigyeléseit a biomatematikáról szóló könyvében, amelyben már a ragadozó-zsákmány viszonyát írta le. Vito Volterrának is felkeltette az érdeklődését a modell, amelyet 1926-ban publikált a tengerben élő növényevő halak és a ragadozó halak viszonyát megfigyelve.

Tehát a feladatunk a következőképpen szól, jelölje $r(t) \geq 0$ a ragadozók létszámát, illetve $z(t) \geq 0$ a zsákmányállatok egyedszámát a $t \geq 0$ időpillanatban, azaz $r, z : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Az egyedszámváltozást matematikailag a változók idő szerinti első deriváltja írja le. Vezessünk be még négy állandót $a, b, c, d > 0$, amelyek a születési és a halálozási arányokat mutatják az egyes populációkban. Ezek alapján a következő egyenleteket írhatjuk fel

$$\frac{dz(t)}{dt} = az(t) - bz(t)r(t),\tag{3.10}$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = cr(t)z(t) - dr(t). \quad (3.11)$$

Az egyenletrendszerben feltételezzük, hogy a zsákmányállatok minél többen vannak, annál többen születnek. Ezt (3.10) egyenletben az $a \cdot z(t)$ írja le. Illetve feltesszük azt is, hogy soha nem halnak természetes halált, így a (3.10) egyenletben a halálozás függ a ragadozók $r(t)$ számától és a saját létszámuktól is. Hiszen minél többen vannak, annál többet esznek meg.

Hasonló logika mentén írtuk fel a (3.11) egyenletet is. Tehát a ragadozók születése függ a saját egyedszámuktól, csak úgy, mint a zsákmányállatoknál. Azonban itt függ a születés attól is, hogy mennyi élelem van a ragadozók számára. Ezt pedig a $z(t)$ adja meg. Ellentétben a zsákmányállatokkal, a ragadozók halálozása csak a saját egyedszámuktól függ, azaz $r(t)$ -től, mert ők csak természetesesen halnak.

3.4.1. Állítás. *A fenti (3.10) modell rendelkezik az alábbi első integrállal:*

$$V(z(t), r(t)) = a \ln(r(t)) + d \ln(z(t)) - br(t) - cz(t) = C, \quad (3.12)$$

ahol $C \geq 0$ állandó.

Bizonyítás. Első lépésként osszuk el a (3.11) egyenletet a (3.10) egyenlettel.

$$\frac{\frac{dr(z)}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{cr(t)z(t) - dr(t)}{az(t) - bz(t)r(t)} = \frac{cz(t) - d}{z(t)} \cdot \frac{r(t)}{a - br(t)}.$$

Ebből az implicitfüggvény-tétel miatt azt kapjuk, hogy:

$$\frac{dr(z(t))}{dz} = \frac{cz(t) - d}{z(t)} \cdot \frac{r(t)}{a - br(t)}. \quad (3.13)$$

A (3.13) egyenlet egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet, így ennek megfelelően a következőképpen oldjuk meg:

$$\begin{aligned} \int \frac{a - br(t)}{r(t)} dr &= \int \frac{cz(t) - d}{z(t)} dz, \\ a \int \frac{1}{r(t)} dr - b \int 1 dr &= c \int 1 dz - d \int \frac{1}{z(t)} dz, \\ a \ln |r| - br &= cz - d \ln |z| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A feladatban kikötöttük, hogy $r(t)$ és $z(t)$ pozitív számok, így

$$V(z(t), r(t)) = a \ln(r(t)) + d \ln(z(t)) - br(t) - cz(t) = C, \quad C \geq 0.$$

Az állítást tehát beláttuk. □

Mivel (3.14) egyenlet explicit nem függ az időtől, így lehetséges, hogy ezzel a függvénnyel a (3.10) és (3.11) egyenletek Hamilton-rendszert alkotnak. Most vizsgáljuk meg ezt a feltételezést, azaz igaz-e az, hogy

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= \frac{\partial V(z(t), r(t))}{\partial r}, \\ \frac{dr(t)}{dt} &= -\frac{\partial V(z(t), r(t))}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Azt tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= az(t) - bz(t)r(t), \\ \frac{dr(t)}{dt} &= cr(t)z(t) - dr(t). \end{aligned}$$

Most vizsgáljuk meg a (3.14) rendszer bal oldalát.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(z(t), r(t))}{\partial r} &= \frac{a}{r(t)} - b, \\ \frac{\partial V(z(t), r(t))}{\partial z} &= c - \frac{d}{z(t)}. \end{aligned}$$

Tehát azt az egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} az(t) - bz(t)r(t) &= \frac{a}{r(t)} - b, \\ cr(t)z(t) - dr(t) &= c - \frac{d}{z(t)}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

A kérdés tehát az, hogy milyen a, b, c, d értékekre lesz igaz a (3.15) egyenletrendszer.

Rendezzük az egyenleteket a következő módon:

$$\begin{aligned}az(t) - bz(t)r(t) &= \frac{a}{r(t)} - b, \\z(t)(a - br(t)) &= \frac{a - br(t)}{r(t)}, \\z(t) &= \frac{1}{r(t)}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Ugyan így a másik egyenletre:

$$\begin{aligned}cr(t)z(t) - dr(t) &= c - \frac{d}{z(t)}, \\r(t)(cz(z) - d) &= \frac{cz(t) - d}{z(t)}, \\r(t) &= \frac{1}{z(t)}\end{aligned}\tag{3.17}$$

Mind a (3.16) egyenletrendezésnél és a (3.17) egyenletrendezés közben kiesnek a keresett változóink. Ebből azt a következtetés vonhatjuk le, hogy a 3.4.1. Állításban említett elsőintegrál nem Hamilton-függvénye a rendszernek.

Természetesen ettől függetlenül a fenti (3.10) és (3.11) egyenletek által meghatározott rendszer lehet Hamilton-rendszer csak más függvényel. Ennek a vizsgálatához be kellene vezetünk a változók valamely kanonikus transzformációját.

4. fejezet

Numerikus módszerek

Ennek a fejezetnek a során megvizsgáljuk először a Lotka–Volterra modellt numerikus módszerrel, majd a harmonikus oszcillátort. Elsőként az explicit Euler-módszert alkalmazzuk, majd a szimplektikus Euler-módszert. Ehhez Ernst Hairer, Christian Lubich és Gerhard Wanner [3] könyvét, valamint Faragó István és Horváth Róbert [4] könyvét használjuk fel. Azt várjuk, hogy az explicit Euler-módszer nem fog megfelelően működni a példákon, ellentétben szimplektikus változatával.

4.1. Az explicit Euler-módszer

Első lépésként fogalmazzuk meg a feladatot, amellyel foglalkozni fogunk. Az explicit Euler-módszer a következő képzési szabály alapján közelíti a 1.0.1. Definícióban szereplő ismeretlen függvényt:

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.1)$$

ahol $h > 0$ a lépésköz és x_i az $x(t)$ függvény közelítése a $t = t_i = i \cdot h$ pontban, ezért $x_0 = x(0)$. Tehát az iteráció során az $i = 0$ -ra minden érték adott. A feladatok során ekvidisztáns felosztást használunk, azaz minden $i \geq 0$ egészekre a h ugyan azt az értéket

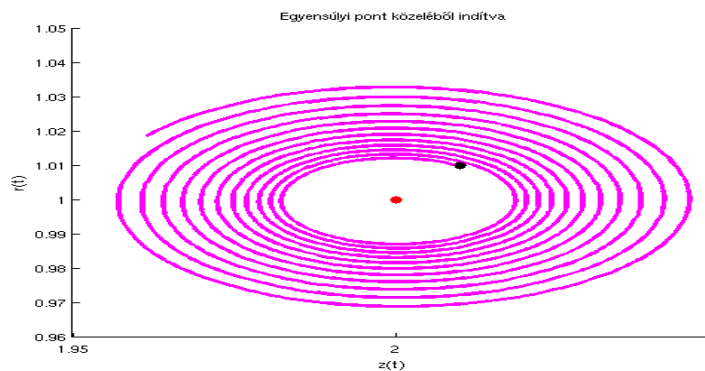
kapja.

4.1.1. Lotka–Volterra modell

Ebben a szakaszban a Lotka–Volterra-féle modellt fogjuk megvizsgálni. Elvárásunk a numerikus módszerrel szemben az, hogy a fázistérbeli pályák zártak legyenek. A fenti (4.1) egyenlettel leírt numerikus módszert a következőképpen írhatjuk fel a Lotka–Volterra modellre:

$$\begin{aligned}z_{i+1} &= z_i + h(az_i - br_iz_i), \\r_{i+1} &= r_i + h(cr_iz_i - dr_i).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Vizsgáljuk meg a (4.2) egyenletrendszert az explicit Euler-módszerrel. Abban az esetben, ha az iterációt a modell valamely egyensúlyi pontja körül indítjuk, akkor az elvárásainkkal ellentétben, a fázistérbeli pályák kifelé spiráloznak. Ahogy a 4.1. ábrán is láthatjuk, amely az explicit Euler-módszer általi közelítést mutatja $t = 50$ időpillanatban és $h = 0.02$ lépésközzel. Az iterációt a $(0.02, 0.01)$ kezdeti értékekből indítottuk, tehát az egyensúlyi pont közeléből. Az ábra a ragadozók számát mutatja a zsákmányállatok létszámának függvényében.



4.1. ábra. Az explicit Euler-módszer $t=50$ időpillanatra, a $(0.02, 0.01)$ kezdeti értékekre, $h=0.02$

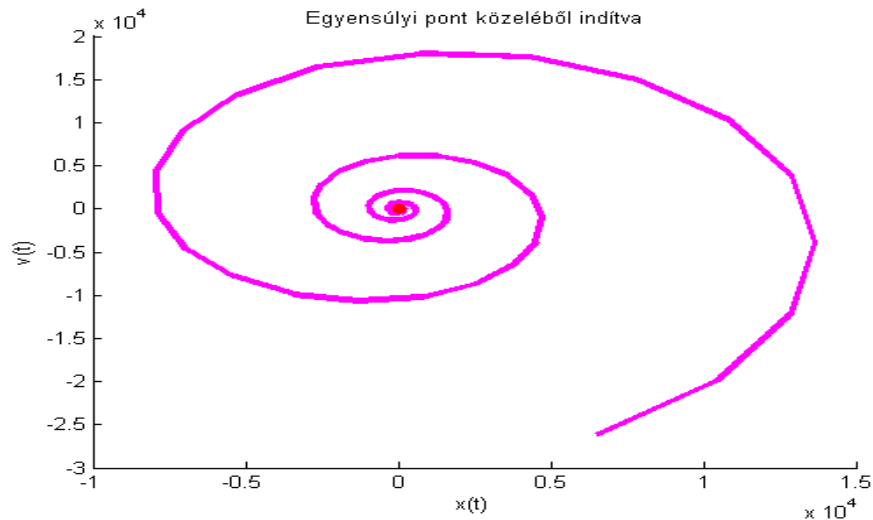
Tehát ez a módszer nem bizonyult jónak a Lotka–Volterra modell esetében.

4.1.2. Harmonikus oszcillátor

Tekintsük a harmonikus oszcillátor modelljét:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= v, \\ \frac{dv(t)}{dt} &= -\eta^2 x(t),\end{aligned}\tag{4.3}$$

ahol $\eta > 0$ paraméter. A feladat során a $\eta = 3$ értéket választjuk. Most vizsgáljuk meg a rendszert az explicit Euler-módszerrel. Az elvárásunk az, hogy a trajektóriák szabályos köröket írjanak le a fázistérben. Abban az esetben, ha az iterációt az egyensúlyi pont egy kis környezetéből indítjuk, akkor a következőt tapasztaljuk.



4.2. ábra. Az explicit Euler-módszer $t=50$ időpillanatra, a $(0.02,0.01)$ kezdeti értékekre, $h=0.02$

A 4.2. ábra a test sebességét mutatja az egyensúlyi helyzettől való eltérés függvényében. Az iterációt a $(0.01,0.01)$ pontból indítottuk, mivel a rendszer egyensúlyi pontja a

$(0, 0)$ pont. Ugyanúgy, mint a Lotka–Volterra modell esetében itt is $t = 50$ időpillanatot vizsgáltunk. Viszont a lépésköznek most $h = 0.2$ értéket adtuk meg. Az ábrán jól látható, hogy a fázistérbeli pályák szintén kifelé spiráloznak. Tehát ez se adja vissza a megfelelő elvárást.

4.2. A szimplektikus Euler-módszer

Az előzőekben láthattuk, hogy az explicit Euler-módszer nem működött megfelelően a fenti példákon. Ezen hibák kiküszöbölésére alkották meg az úgynevezett szimplektikus Euler-módszert, amely az explicit Euler-módszerhez hasonló, azonban a különbség az, hogy ez a módszer két másikat vegyít. Az egyik a már fent leírt explicit Euler-módszer, a másik pedig az implicit Euler-módszer, ami a következő algoritmus alapján működik:

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_{i+1}, x_{i+1}), \quad (4.4)$$

ahol az x_{i+1} implicit számolható. A szimplektikus módszer, az explicit Euler-módszer és az implicit Euler-módszer segítségével, az egyik változót explicit, míg a másikat implicit számolja. Tehát ezt a módszert kétféleképpen is megvalósíthatjuk:

$$\begin{aligned} x_{i+1} = x_i + h_i f(t_{i+1}, x_{i+1}, y_i) & \quad \text{vagy} & \quad x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, y_{i+1}) \\ y_{i+1} = r_i + h_i f(t_i, x_{i+1}, y_i) & & \quad y_{i+1} = y_i + h_i f(t_{i+1}, x_i, y_{i+1}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

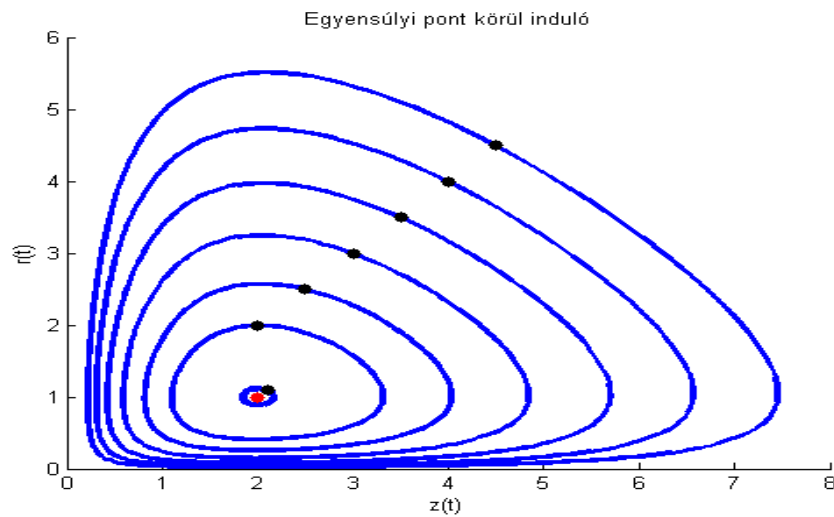
A példák során azt a variációt használjuk, ahol az első változót fejezzük ki implicit módon, azaz a fenti egyenletrendszer közül a jobb oldalit.

4.2.1. A Lotka–Volterra modell

Most nézzük meg a szimplektikus módszert a fenti (3.10) és (3.11) egyenletekből álló Lotka–Volterra modellre:

$$\begin{aligned}z_{i+1} &= z_i + h_i(az_{i+1} - br_iz_{i+1}), \\r_{i+1} &= r_i + h_i(cr_iz_{i+1} - dr_{i+1}).\end{aligned}\tag{4.6}$$

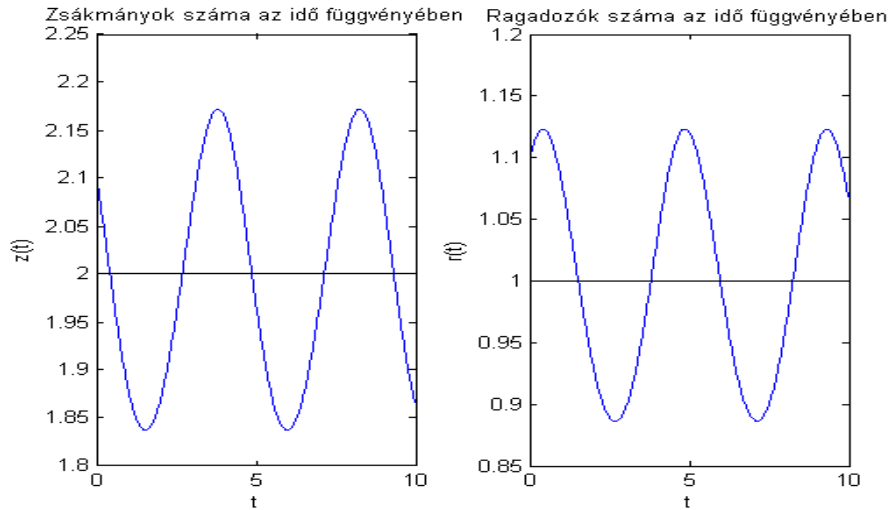
Ebben az esetben a szimplektikus Euler-módszer jónak bizonyult, mert ahogy a 4.3. ábra mutatja az egyensúlyi pont körül indított iteráció esetén, a fázistérbeli pályák zártak.



4.3. ábra. A szimplektikus Euler-módszer 6 különböző kezdetiérték esetén, $t=50, h=0.02$

A fenti 4.3. ábra a ragadozók számát mutatja a zsákmányállatok számának függvényében, amelyet $t = 50$ időpillanatban és $h = 0.02$ lépésközzel vizsgáltunk. A trajektóriákon kívül még láthatóak a kezdeti értékek az ábrán, illetve az egyensúlyi pont is, ami a $(2, 1)$ pont.

A következő ábra azt mutatja, hogy a ragadozók, illetve a zsákmányállatok száma hogyan változik az időben.

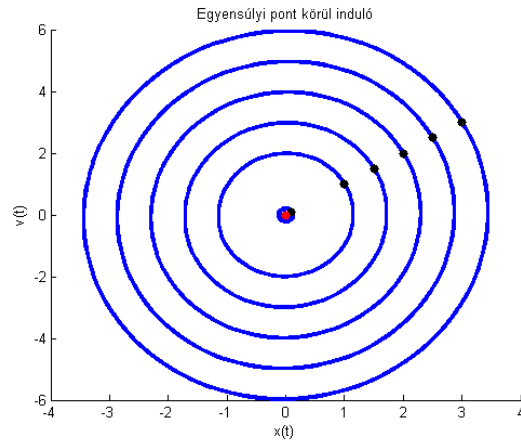


4.4. ábra. A populációszám változása az időben, $t=50, h=0.02$

A 4.4. ábrán jól látható, hogy abban az esetben, ha az iterációt nem az egyensúlyi pontból indítjuk, hanem annak egy kis környezetéből, akkor a megoldásunk az egyensúlyi pont körül fog ingadozni. Ebben az esetben a $(2.1, 1.1)$ pontból indítottuk a numerikus módszert.

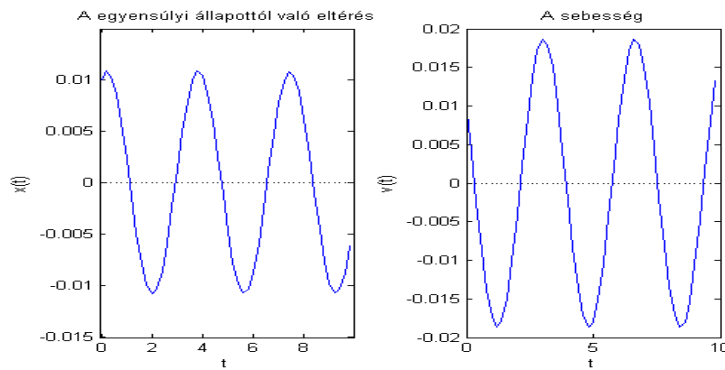
4.2.2. Harmonikus oszcillátor

Tekintsük most is a (4.3) rendszerrel leírt modellt, azonban most a szimplektikus Euler-módszerrel vizsgáljuk meg. A 4.5. ábrán láthatjuk az eredményt. Jól látszik, hogy a fázis-térbeli pályák szabályos köröket alkotnak. Az ábrán láthatjuk még a kezdeti értékeket és az egyensúlyi pontot is, amely a $(0, 0)$ pont.



4.5. ábra. A szimplektikus Euler-módszer a harmonikus oszcillátor modelljére, $t=50, h=0.2$

A következő 4.6. ábrán a kitérés $x(t)$ és a sebesség $v(t)$ függvények időszerinti változását láthatjuk. Az ábra azt mutatja, hogy az egyensúlyi pont körül szabályosan ingadoznak az értékek.



4.6. ábra. A kitérés és a sebesség változása az idő függvényében, $t=10, h=0.2$

Tehát a fenti ábrák segítségével megállapíthatjuk, hogy a szimplektikus Euler-módszer a harmonikus oszcillátor modelljének esetében is jól működött, ellentétben az explicit Euler-módszerrel.

Összefoglalás

A szakdolgozatomban egy rövid elméleti összefoglaló után a Hamilton-rendszerek legfontosabb tulajdonságait foglaltam össze. Majd ezek segítségével felírtam egy változó transzformációt a Hamilton-rendszer p és q vektoraira. A későbbiekben bemutattam néhány fizikai modellt, mégpedig a szabadesést és az ingamozgást, amelyekről megmutattam, hogy Hamilton-rendszerek. A következő feladatban egy adott Hamilton-egyenlethez találtam egy fizikai modellt, ami a harmonikus oszcillátornak felelt meg. A Lotka–Volterra modellt megvizsgáltam a Hamilton-rendszerek szempontjából. Azonban az az egyenlet, amelyről beláttam, hogy az időben állandó, nem bizonyosult a rendszer Hamilton-függvényének. Az utolsó fejezetben a már említett két modellt (Lotka–Volterra, harmonikus oszcillátor) vizsgáltam tovább numerikus szempontból. Az első módszer az explicit Euler volt, ami láthatóan nem működött jól a példákra. A szimplektikus Euler-módszer, amely az explicit és implicit módszerek vegyítése, azonban megfelelt az elvárásainknak és visszakaptuk a modellek megfelelő fázisképeit.

Függelék

Az explicit Euler-módszer MATLAB kódja

```
function [t y]=lotka_exp(diffegy,y0,T,h)

t0=0;
N=(T-t0)/h;
t=zeros(N+1,1);
y=zeros(length(y0));
t(1)=t0;
y(:,1)=y0;
for i=1:N
    t(i+1)=t(i)+h;
    y(:,i+1)=y(:,i)+h*diffegy(t(i),y(:,i));
end

hold on
plot(y(1,:),y(2:,:), 'm', 'linewidth', 3)
plot(y0(1),y0(2), 'black.-', 'markersize', 22)
plot(2,1, 'red.-', 'markersize', 22);
```

```
title('Egyensúlyi pont közeléből indítva');  
xlabel('z(t)');  
ylabel('r(t)');  
hold off  
  
end
```

Az explicit Euler-módszerhez tartozó Lotka-Volterra modell MATLAB kódja

```
function dydt=LVde(t,y)  
  
dydt=zeros(2,1);  
  
dydt(1)=y(1)-y(1)*y(2);  
  
dydt(2)=y(1)*y(2)-2*y(2);
```

Az explicit Euler-módszerhez tartozó harmonikus oszcillátor MATLAB kódja

```
function dydt=HOde(t,y)  
  
omega=3;  
dydt=zeros(2,1);  
  
dydt(1)=y(2);
```

```
dydt(2)=-omega*y(1);
```

A szimplektikus Euler-módszer MATLAB kódja a Lotka–Volterra modellre

```
function [z,r]=szimp_lv_uj(z0,r0,T,h)
```

```
t0=0;
```

```
N=(T-t0)/h-1;
```

```
t=zeros(N+1,1);
```

```
r=zeros(N+1,1);
```

```
z=zeros(N+1,1);
```

```
t(1)=t0;
```

```
r(1)=r0;
```

```
z(1)=z0;
```

```
a=1; b=1; c=1; d=2;
```

```
% ciklus az időre
```

```
for i=1:N
```

```
    t(i+1) = t(i)+h;
```

```
    x = z(i);
```

```

    for k=1:10
        x = z(i)+h*(a*x-b*r(i)*x);
    end
    z(i+1) = x;

    r(i+1) = r(i) + h*(c*z(i+1)*r(i)-d*r(i));

end
subplot(1,2,1);
plot(t,z,'b',t,2,'k');
title('Zsákmányok száma az idő függvényében');
xlabel('t');
ylabel('z(t)');
subplot(1,2,2);
plot(t,r,'g',t,1,'k');
title('Ragadozók száma az idő függvényében');
xlabel('t');
ylabel('r(t)');

end

```

A szimplektikus Euler-módszer MATLAB kódja több kezdeti érték esetén a Lotka–Volterra modellre

```

function lotka1(T,h)

[z1,r1]=szimp_lv_uj(2,2,T,h);

```

```

[z2,r2]=szimp_lv_uj(2.5,2.5,T,h);
[z3,r3]=szimp_lv_uj(3,3,T,h);
[z4,r4]=szimp_lv_uj(3.5,3.5,T,h);
[z5,r5]=szimp_lv_uj(4,4,T,h);
[z6,r6]=szimp_lv_uj(4.5,4.5,T,h);
[z7,r7]=szimp_lv_uj(2.1,1.1,T,h); % egyensúlyi pont körülről indul

hold on
plot(z1,r1,'b',z2,r2,'r',z3,r3,'y',z4,r4,'m',z5,r5,'g',z6,r6,'c','LineWidth',2.5);

plot(z7,r7,'LineWidth',3);
title('Egyensúlyi pont körül induló')
xlabel('z(t)');
ylabel('r(t)');

plot(2,2,'black.-','markersize',22)
plot(2.5,2.5,'black.-','markersize',22)
plot(3,3,'black.-','markersize',22)
plot(3.5,3.5,'black.-','markersize',22)
plot(4,4,'black.-','markersize',22)
plot(4.5,4.5,'black.-','markersize',22)
plot(2.1,1.1,'black.-','markersize',22)

plot(2,1,'red.-','markersize',22) % ez az egyensúlyi pont
hold off

```

A szimplektikus Euler-módszer MATLAB kódja a harmonikus oszcillátor modelljére

```
function [x,v]=szimp_ho_uj(x0,v0,T,h)

t0=0;
N=(T-t0)/h-1;
omega=3;
t=zeros(N+1,1);
x=zeros(N+1,1);
v=zeros(N+1,1);
t(1)=t0;
v(1)=v0;
x(1)=x0;

for i=1:N

    t(i+1) = t(i)+h;

    v(i+1)=v(i)-(h*omega*x(i));
    x(i+1)=x(i)+h*v(i+1);

end
subplot(1,2,1);
plot(t,x,'b',t,0,'k');
title('A egyensúlyi állapottól való eltérés');
xlabel('t');
```

```

ylabel('x(t)');
subplot(1,2,2);
plot(t,v,'b',t,0,'k');
title('A sebesség');
xlabel('t');
ylabel('v(t)');

end

```

A szimplektikus Euler-módszer MATLAB kódja több kezdeti érték esetén a harmonikus oszcillátor modelljére

```

function harmonikus1(T,h)

[x1,v1]=szimp_ho_uj(1,1,T,h);
[x2,v2]=szimp_ho_uj(1.5,1.5,T,h);
[x3,v3]=szimp_ho_uj(2,2,T,h);
[x4,v4]=szimp_ho_uj(2.5,2.5,T,h);
[x5,v5]=szimp_ho_uj(3,3,T,h);
[x7,v7]=szimp_ho_uj(0.1,0.1,T,h); % egyensúlyi pont körülről indul

hold on
plot(x1,v1,'b',x2,v2,'b',x3,v3,'b',x4,v4,'b',x5,v5,'b','LineWidth',2.5);

plot(x7,v7,'LineWidth',3);
title('Egyensúlyi pont körül induló')
xlabel('x(t)');

```



```
ylabel('v(t)');
```

```
plot(1,1,'black.-', 'markersize', 22)
```

```
plot(1.5,1.5,'black.-', 'markersize', 22)
```

```
plot(2,2,'black.-', 'markersize', 22)
```

```
plot(2.5,2.5,'black.-', 'markersize', 22)
```

```
plot(3,3,'black.-', 'markersize', 22)
```

```
plot(0.1,0.1,'black.-', 'markersize', 22)
```

```
plot(0,0,'red.-', 'markersize', 22) % ez az egyensúlyi pont
```

```
hold off
```

Irodalomjegyzék

- [1] Alfred J. Lotka: Analytical Note on Certain Rhythmic Relations in Organic Systems, Brooklyn,(1920)
- [2] Edward Ott: Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press, Canada,(1993)
- [3] Ernst Hairer–Christian Lubich–Gerhard Wanner: Geometric Numerical Integration, Springer–Verlag, Berlin,(2006)
- [4] Faragó István–Horváth Róbert: Numerikus módszerek, Typotex Kiadó, Budapest,(2013)
- [5] Simon L. Péter–Tóth János: Differenciálegyenletek, Typotex Kiadó, Budapest,(2005)