EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

ALKALMAZOTT ANALÍZIS ÉS SZÁMÍTÁSMATEMATIKAI TANSZÉK

DIFFERENCIÁLEGYENLETEK ALKALMAZÁSA KÖZGAZDASÁGTANI CIKLUSELMÉLETEKBEN

SZAKDOLGOZAT

Készítette:

Hertelendy Éva

Matematika (BSC)

Témavezető:

Magyar Róbert

Alkalmazott matematikus

Budapest

2017

Tartalomjegyzék

1. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném meg köszönni témavezetőmnek, Magyar Róbertnek a témaötletet és a sok segítséget, mellyel hozzájárult szakdolgozatom megírásához. Illetve, Simon L. Péter tanár úrnak, hogy ez az együttműködés létrejöhetett.

Nagyon sok köszönettel tartozom a barátomnak, és a barátaimnak, hogy végig kitartottak mellettem az egyetemi éveim alatt, és motiváltak, amikor arra volt szükség.

És nem utolsósorban hálás vagyok szüleimnek, a családomnak, hogy mindvégig támogatták tanulmányaimat, és részesei voltak mindannak, amit elértem.

2. Bevezetés

Szakdolgozatomban a differenciálegyenletek egy modellalkotási alkalmazását szeretném bemutatni, melyet a közgazdaságtan több területén is használnak.

Az első fejezetben a differenciálegyenletekkel kapcsolatos szükséges ismereteket foglalom össze. Kitérek magának a differenciálegyenletnek a definíciójára, a megoldások létezésének és egyértelműségének feltételeire, majd bemutatom a közönséges differenciálegyenletek ismertebb típusait.

A következő fejezetben részletesebben vizsgálom a lineáris differenciálegyenleteket, ugyanis a dolgozat fő témájában, egy speciális közgazdasági modellhez köthető differenciálegyenlet-rendszert fogok bemutatni. Ehhez szükségesek azonban a mátrixok invertálhatóságához, valamint a sajátértékek és sajátvektorok témaköréhez köthető lineáris algebrai ismeretek is, melyeket külön alfejezetben igyekszem összefoglalni. A matematikai összegzés után Leontief [1951] input- output modelljének négy főbb típusát szeretném ismertetni, melyből két modellre térnék ki részletesebb. Egy példán keresztül mutatom be a nyílt statikus modellt, majd Dobos cikke [11] alapján a zárt dinamikus modellt, melynek megoldásai olyan ciklusok, amik az egyensúlyi pálya mentén egyre nagyobb amplitúdóval mozognak.

Ezen modellt általánosan leíró egyenletrendszernek nem létezik analitikus megoldása, így a részletesebben vizsgált példa annak egy speciális esetét mutatja be, amikor is a termelés vektor független a gazdaság árvektorától, ám ezen egyszerűsített eset megoldása sem egyszerű. A klasszikus megoldási eljáráshoz ugyanis a készlet igényesség mátrix invertálhatósága lenne feltétel, azonban az a legtöbb esetben szinguláris. Azonban egy sajátérték feladatra visszavezetve, a Leontief inverz segítségével, szinguláris mátrix esetében is megoldást tudunk adni!

Dobos cikke [11] egy 3x3-as konkrét példa esetén vizsgálja a megoldásokat. Dolgozatomban ugyanezen példát a Maple matematikai programcsomag segítségével feldolgozom, nagyobb pontosság mellett, és értékelem az így kapott eredményeket.

Végül megkísérlem összefoglalni, milyen kérdéseket tudunk megválaszolni a modell segítségével, és milyen további elemekkel bővíthetjük ezt az elméletet.

3. Bevezetés a differenciálegyenletek témakörébe

3.1 Alapfogalmak

Szakdolgozatom fő témájában lineáris differenciálegyenleteket fogok vizsgálni, így a szakdolgozat első fejezetében szeretném át tekinteni, mik is azok a differenciálegyenletek, milyen főbb típusai vannak, és egy- két példa megoldásával megmutatom, hogyan lehet megoldani az egyes típusú differenciálegyenleteket. A fejezet megírásánál Simon L. Péter előadás jegyzete [1] alapján dolgoztam.

3.1.1 Definíció: Az olyan egyenleteket, melyek az ismeretlen függvény, és annak deriváltjai között állítanak fel kapcsolatot, differenciálegyenletek nevezzük. Legyen $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ összefüggő nyílt, $f: D \to \mathbb{R}$ képező folytonos függvény, és $(t_0, p_0) \in D$. $I \subset \mathbb{R}$ és $x: I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény. Ekkor $x(t)$ az I intervallumon az f elsőrendű explicit közönséges differenciálegyenlet megoldása, ha teljesíti az alábbi feltételeket:

- $\big(t, x(t)\big) \in D \ \forall t \in I$
- $\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big) \ \forall t \in I$
- $x(t_0) = x_0$

Egyváltozós differenciálegyenletek esetében közönséges differenciálegyenletekről, több ismeretlen esetében parciális differenciálegyenletekről beszélhetünk. A differenciálegyenletben előforduló legmagasabb rendű derivált a differenciálegyenlet rendjét határozza meg.

3.1.2 Definíció: Egy f függvényt lokálisan Lipschitz tulajdonságúnak nevezünk, ha $\forall\ (t_0, p_0) \in D$ esetén, létezik olyan L pozitív valós szám, $\forall\ p_1, p_2$ amelyre

$$|f(t, p_1) - f(t, p_2)| \ \leq L\ |p_1 - \ p_2|$$

Az egyenletek megoldásánál az első kérdés, ami felmerülhet bennünk, hogy létezik- e a megoldás, és ha igen, akkor a megoldás egyértelmű-e. A következő tétel épp ezen kérdések megválaszolásában segít.

3.1.1 Tétel: Legyen az f, mint az 3.1.1 –es definícióban. Ha az f függvény a második változójában lokálisan Lipschitz- tulajdonságú, akkor $\forall\ (t_0, p_0) \in D$ esetén létezik lokális megoldása a differenciálegyenletnek, melyre igaz, hogy $x(t_0) = p_0$ és létezik I maximális nyílt intervallum, melyen a megoldás egyértelmű.
A tétel bizonyításától most eltekintünk.

3.1.1 Megjegyzés: Az $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ homogén lineáris differenciálegyenlet- rendszer megoldásai n dimenziós alteret alkotnak $\mathbb{R}^n$ felett.

3.2 Közönséges differenciálegyenletek osztályozása

3.2.1 Szeparábilis differenciálegyenletek

A legegyszerűbb lineáris differenciálegyenleteket szeparálható differenciálegyenleteknek nevezzük felépítéséből adódóan. Az ilyen típusú egyenletek a következőképpen néznek ki:

$$x'(t) = f(t)g\big(x(t)\big)$$

Itt f, g folytonos függvények, és a g függvény sehol sem nulla. [2] alapján a megoldás a következőképpen alakul.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t)g\big(x(t)\big)$$

$$\frac{dx(t)}{g\big(x(t)\big)} = f(t)dt$$

$$\int \frac{1}{g\big(x(t)\big)}dx(t) = \int f(t)dt$$

$$H(x(t)) = F(t) + C \qquad (1)$$

$$x(t) = H^{-1}(F(t) + C) \qquad (2)$$

$$C \in \mathbb{R}$$

Sokszor a $H(x(t))$ függvény inverzét nem tudjuk leírni elemi függvények segítségével, ilyenkor implicit módon a (2) megoldás helyett az (1)- es egyenletet tekintjük a differenciálegyenlet megoldásának.

3.2.1 Példa: Vegyünk egy egyszerűbb közgazdasági példát, Dr. Rontó Miklós előadásjegyzete [3] alapján, mely Evsey Domar[1], orosz- amerikai közgazdásztól származik. A növekedési modell a következőképp épül fel:

$$\dot{Y}(t) = a\,I(t)$$

ahol $Y(t)$ a termelést, $I(t)$ pedig a beruházást jelöli egy adott t időpillanatban. $Y(t)$, és $I(t)$ különbsége egyébként épp a fogyasztás mértékével lesz egyenlő. Ha az $a > 0$, akkor beszélhetünk növekedésről.

Domar modelljében feltételezéseket tesz fel, mely alapján az alábbi összefüggés írható fel a beruházás és a termelés között:

$$I(t) = sY(t)$$
$$0 \leq s \leq 1$$

Ezt az egyenletet felhasználva kapjuk a következő differenciálegyenletet, melyet a szeparálható differenciálegyenletek közé sorolhatunk.

$$\dot{Y}(t) = asY(t)$$

$$a > 0$$

$$0 \leq s \leq 1$$

a 3.2.1 –es alfejezet alapján, ennek a szeparálható differenciálegyenletnek a megoldása a következőek szerint alakul:

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = as$$
$$\ln\big(Y(t)\big) = ast + C$$
$$Y(t) = e^{ast+C}$$
$$Y(t) = Ce^{ast}, C \in \mathbb{R}$$

$Y(0) = Y_0$ kezdeti érték mellett $C = Y_0$.

[1] Domar 1914- ben született Lengyelországban, tanulmányait azonban már Amerikában végezte többek között a Harvard egyetemen. Munkássága azért is olyan jelentős, hiszen sok más gazdasági modell építkezik Domar modelljére, többek között a Solow- Swan modell is.

3.2.2 Lineáris helyettesítéssel szeparálható differenciálegyenletté alakítható

$$\dot{x}(t) = g(at + bx(t) + c)$$

ahol

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

adott folytonos függvény,

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

Ekkor $at + bx(t) + c = y(t)$ helyettesítéssel szeparábilis differenciálegyenletet kapunk $y(t)$ –re.

3.2.3. Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet

Az

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

alakú differenciálegyenleteket, ahol $a(t) \neq 0$, elsőrendű, lineáris differenciálegyenleteknek nevezzük. Ahol az

$$a, b : I \to \mathbb{R}$$

adott folytonos függvények, és

$$x: I \to \mathbb{R}$$

a differenciálegyenletet kielégítő megoldás. Ha a $b \equiv 0$, akkor az egyenletet homogén lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.

Az 3.2.1 –es gazdasági példa nem csak a szeparálható differenciálegyenletek csoportjába sorolható, hanem az elsőrendű lineáris differenciálegyenlete közé is, azon belül is a homogén egyenletek csoportjába. Mielőtt ezt a csoportot részletesebben bemutatnám, szeretnék egy megjegyzést tenni a megoldásokat illetően.

3.2.3. Megjegyzés: Az elsőrendű, homogén lineáris differenciálegyenletek

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t)$$

megoldása minden esetben az alábbi formában áll elő:

$$x(t) = Ce^{A(t)} \tag{1}$$

ahol

$$A(t) := \int a(t)dt \tag{2}$$

Mivel az összes megoldás ilyen alakban (1) áll elő, a differenciálegyenlet megoldásai a 3.1.1 –es megjegyzés alapján vektorteret alkotnak.

Nézzük meg most, hogy általánosságban, hogyan tudunk megoldani elsőrendű, lineáris egyenleteket.

Az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása

Használjuk a fenti (2)- es egyenlet jelölését, ekkor az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása a következő lesz:

$$x(t) = e^{A(t)}\left(\int e^{-A(t)}b(t) + C\right)$$

ahol $C \in \mathbb{R}$.

Ugyanis

$$\dot{x}(t) - a(t)x(t) = b(t)$$

$$\dot{x}(t)e^{-A(t)} - e^{-A(t)}a(t)x(t) = e^{-A(t)}b(t) \qquad (3)$$

Ekkor a (3)- as egyenlet bal oldalán éppen a $x(t)e^{-A(t)}$ t szerinti deriváltja áll. Integrálva mindkét oldalt, majd $e^{A(t)}$- vel beszorozva a fenti megoldást kapjuk.

$$x(t) = e^{A(t)}\left(\int e^{-A(t)}b(t) + C\right) \qquad (4)$$

3.2.3 Példa:

$$t\dot{x}(t) - 2x(t) = 2t^4$$

$$\dot{x}(t) - \frac{2}{t}x(t) = 2t^3\,; t \neq 0$$

Tegyük fel, hogy $t > 0$.

Itt a fenti jelöléseket használva

$$a(t) = -\frac{2}{t}$$

$$b(t) = 2t^3$$

$$A(t) = \int -\frac{2}{t}dt = lnt^2$$

Így a (4)-es megoldó képletbe helyettesítve

$$x(t) = t^4 + Ct^2$$

megoldást kapjuk, ahol $t > 0; C \in \mathbb{R}$.

Miután a lineáris differenciálegyenleteket áttekintettük, nézzük meg, mi a helyzet a differenciálegyenlet- rendszerekkel.

3.2.4 Lineáris differenciálegyenlet- rendszerek

Tekintsük az alábbi differenciálegyenlet- rendszert:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

ahol

$x: I \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény

$A: I \to \mathbb{R}^{n \times n}$

$b: I \to \mathbb{R}^n$

Ha $b(t) \equiv 0$, akkor homogén differenciálegyenletről beszélünk. Ha $A(t) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, akkor a rendszert állandó együtthatósnak nevezzük.

Szakdolgozatomat tekintve különösképpen az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek játszanak különösen fontos szerepet, így ennek a témának külön fejezetet szánok.

4. Az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet- rendszerek

Ebben a fejezetben Simon L. Péter [1] jegyzetét, illetve a Pannon Egyetem Matematika analízis mérnököknek című előadásához tartozó jegyzetét [4] használtam.

4.1 Az n dimenziós állandó együtthatós lineáris egyenletrendszerek megoldása

$\mathrm{n} = 1$

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t)$$

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = a(t)$$

$$\int \frac{1}{x(t)} dx(t) = \int a(t)dt$$

$$\ln\big(x(t)\big) = A(t) + C$$

$$x(t) = e^{A(t)+C}$$

$$x(t) = Ce^{A(t)}, C \in \mathbb{R}$$

$\mathrm{n} > 1$ eset

$$\dot{x}(t) = Ax(t)\ , A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$x(t) = Ce^{At}, C \in \mathbb{R}^{n}, e^{At} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

e^{At} értelmezése

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén

$$e^{A} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(A)^{n}}{n!}$$

A megoldás kiszámítására két módszert is szeretnék bemutatni.

Jordan normálalak

Az

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

alakú differenciálegyenlet egy invertálható P mátrix segítségével, $y(t) = P\,x(t)$ helyettesítéssel hozzuk egyszerűbb alakra. Ekkor:

$$\dot{y}(t) = P\dot{x}(t) = PAx(t) = PAP^{-1}y(t) = By(t)$$

Azaz a B mátrix az A Jordan- féle normálalakja.

Így olyan B mátrixot szeretnénk előállítani, mely könnyen hatványozható, hiszen ebben a formában a megoldásunk az alábbi alakban keresendő már:

$$\dot{y}(t) = By(t)$$

Melynek megoldása a fentiek alapján:

$$y(t) = e^{Bt}y(0)$$

És innen a keresett $x(t)$ függvényünk:

$$x(t) = P^{-1}y(t) = P^{-1}e^{Bt}Px(0)$$

Hermite- féle interpolációs eljárás

Jelölések:

m: Az A mátrix minimálpolinomjának a foka

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$: különböző sajátértékek

$m_1, m_2, \dots, m_k$: a sajátértékek multiplicitása a minimál polinomban.

Ekkor létezik olyan $(m-1)$-ed fokú P_t polinom, melyre $P_t(A) = e^{At}$

P_t meghatározása:

$$P_t^{(i)}(\lambda_j) = t^i e^{\lambda_j t}$$

$$j = 1 \dots k$$

$$i = 0, \dots (m_j - 1)$$

Mielőtt egy konkrét példán keresztül bemutatnám az állandó együtthatós differenciálegyenletek megoldását, tekintsünk át néhány fontosabb lineáris algebrai fogalmat, és olyan alaptételeket, melyeket a bemutatott példában is alkalmazni fogok, illetve, a későbbiekben a zárt dinamikus Leontief modellnél is.

4.2 Lineáris algebra összefoglaló

4.2.1 Definíció: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ekkor az A mátrix sajátértékének nevezzük azt a λ számot, amelyhez létezik olyan $x \in \mathbb{R}^n$ nem nulla vektor, hogy $\lambda x = Ax$. Ezt az x vektort az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorának nevezzük.

4.2.1 Tétel: Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra a következő állítások teljesülnek:

- Az A mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok lineáris alteret alkotnak $\mathbb{C}^n$ felett.
- Ha a λ sajátérték valós, akkor hozzá tartozó sajátvektor is választható valósnak.
- Ha $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ páronként különböző sajátértékei az A mátrixnak, akkor a sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.
- Egy szimmetrikus A mátrix sajátértékei valósak, és a sajátvektorokból megadható bázis $\mathbb{C}^n$-ben.
- Ha az A mátrixnak van komplex sajátértéke $\lambda = \alpha + \beta i$, melyhez tartozó sajátvektor $\xi = u + iv$, akkor az $u, v \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek.
- A $\lambda = \alpha + \beta i$ komplex sajátértékkel és $\xi = u + iv$ sajátvektorral rendelkező A mátrixnak $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ is sajátértéke, melyhez az $\bar{\xi} = u - iv$ sajátvektor tartozik.

4.2.2 Definíció: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorai és a nullvektor által alkotott alteret a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérnek nevezzük.

4.2.3 Definíció: A λ sajátérték geometriai multiplicitása, a hozzá tartozó altér dimenziója. Egy sajátérték algebrai multiplicitása szimmetrikus mátrixok esetében megegyezik a geometriai multiplicitással. Általánosságba véve pedig, az algebrai multiplicitás nagyobb, vagy egyenlő, mint a geometriai.

4.2.2 Tétel: Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra az alábbi négy állítás ekvivalens:
1. $\det(A) = 0$
2. A sorai lineárisan összefüggők
3. A szinguláris
4. $Ax = 0$ egyenletnek létezik nem triviális megoldása

Így a sajátérték definíciójából és az előbbi tételből adódik, hogy pontosan akkor van a $\lambda x = Ax$ egyenletnek nem nulla megoldása, ha $\det(A - \lambda I) = 0$, ezt nevezzük az A mátrix karakterisztikus egyenletének.

4.2.3 Tétel: Egy lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van egyértelmű megoldása, ha a bővített mátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával.

4.2.4 Tétel: Perron- Frobenius tétel Móczár József cikke [5] és Bakonyi Eszter szakdolgozata [6] alapján.

Legyen Mnemnegatív, irreducibilis mátrix. Ekkor a mátrixnak létezik $\lambda_m$legnagyobb abszolút értékű sajátértéke, melyre igaz, hogy

- λ_m pozitív, és létezik hozzá olyan sajátvektor, mely szintén pozitív
- egyszeres sajátérték
- a többi sajátértékhez nem tartozik nemnegatív sajátvektor
- λ_m megegyezik az M mátrix spektrál sugarával $\rho(M)$-mel
- $\rho(M)$ monoton növekvő függvénye az Mmátrixnak

4.2.1 Példa:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Az M mátrix karakterisztikus polinomja:

$$k_M = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

Ennek az egyenletnek a gyökei adják a mátrix sajátértékeit, így

$$\lambda_1 = 2$$
$$\lambda_2 = 3$$

A sajátérték és sajátvektor definíciójából az $\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektort az $Ax = \lambda x$ egyenletből kaphatjuk meg:

$$x_1 + 2x_2 = 2x_1$$
$$-x_1 + 4x_2 = 2x_2$$

Így az $x = \binom{2}{1}$ az M mátrix $\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektora. Hasonlóan a $\lambda_2 = 3$ sajátértkéhez egy megfelelő sajátvektor lesz az $x = \binom{1}{1}$

Nézzünk most egy példát, melyben egy állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszert a Hermite- féle interpolációs eljárással oldunk meg.

4.2.2 Példa:

$$\dot{x_1} = x_1 - x_2$$
$$\dot{x_2} = -4x_1 + x_2$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Az A mátrix minimálpolinomjának meghatározásához először kiszámítjuk a sajátértékeit.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$

Mivel két különböző gyöke van, így a karakterisztikus polinom megegyezik a minimálpolinommal, melynek foka ezalapján 2. És mindkét gyök multiplicitása 1. A keresett P_t tehát elsőfokú,

$$P_t(\lambda) = a(t)\lambda + b(t)$$

alakban keressük.

$$P_t^{(0)}(\lambda_1) = t^0 e^{\lambda_1 t} \ \rightarrow \ P_t(3) = e^{3t}$$
$$P_t^{(0)}(\lambda_2) = t^0 e^{\lambda_2 t} \ \rightarrow \ P_t(-1) = e^{-t}$$

$$\begin{cases} 3a_t + b_t = e^{3t} \\ -a_t + b_t = e^{-t} \end{cases}$$

Ennek a két ismeretlenes egyenletrendszernek a megoldása:

$$a_t = \frac{e^{3t} - e^{-t}}{4}$$
$$b_t = \frac{e^{3t} + 3e^{-t}}{4}$$

$$e^{At} = P_t(A) = a_t A + b_t I = \frac{e^{3t} - e^{-t}}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{3t} + 3e^{-t}}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = Ce^{At}, C \in \mathbb{R}$$

A lineáris egyenletrendszereken belül a legnagyobb hangsúlyt az állandó együtthatós, homogén egyenletrendszerekre fektetném, hiszen későbbi gazdasági alkalmazásban is ezt használjuk majd föl.

4.3 Az $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ típusú differenciálegyenletek megoldása

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

konstans együtthatós differenciálegyenlet- rendszer megoldását most

$$x(t) = e^{\lambda t}v$$

alakban keressük, ahol $\lambda \in \mathbb{C}$, és $v \in \mathbb{C}^n$nem nulla vektort jelölnek. Ekkor λ a v sajátvektorhoz tartozó sajátértéke, hiszen

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$
$$\lambda e^{\lambda t}v = Ae^{\lambda t}v$$
$$\lambda v = Av \qquad (2)$$

Az ilyen típusú differenciálegyenletek megoldására kimondhatjuk az alábbi tételt.

4.3.1 Tétel: $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ jelölje az A mátrix sajátértékeit. Tegyük fel, hogy $\lambda_i \in \mathbb{C}$, és minden λ_i-hez tartozó sajátaltér dimenziója megegyezik a sajátérték multiplicitásával. Ekkor az egyenletrendszer $x(t)$megoldása előállítható lineáris kombinációk által

$$x(t) = c_1 e^{t\lambda_1}v_1 + \cdots + c_n e^{t\lambda_n}v_n$$

alakban, ahol $c_i \in \mathbb{C}$ és v_i sajátvektorok.

Ugyanis, a (2) –es egyenletet átrendezve

$$(A - \lambda I) = 0$$

Tehát a λ az A mátrixnak a v sajátvektorhoz tartozó sajátértéke. Így, ha találunk n darab lineárisan független vektort, az összes megoldás előállítható ezen sajátvektorok lineáris kombinációjaként.

Ezzel minden algebrai fogalmat, és tételt tisztáztam, melyet használni fogok a Leontief-féle input- output modell vizsgálata során.

5. Leontief- féle Input- Output modell

Ebben a fejezetben szeretném bemutatni a Leontief féle Input- Output modell négy különböző típusát, azok felépítését. A nyílt statikus modellen keresztül bemutatom a Leontief inverz fontosságát, illetve azt, hogy milyen feltételeket kell teljesítenie a gazdaság ráfordítási mátrixának, ahhoz, hogy egy jól működő gazdaságot kapjunk. A fejezetben Dr. Nagy Tamás [7] műve illetve két egyetemi oktatási anyag [8], [9], és a Wikipédián [10] fellelhető kapcsolódó anyag volt segítségemre.

5.1 Gazdasági bevezető

A Leontief modell, mellyel ebben a fejezetben foglalkozni fogok, egy lineáris input-output modell. Az ilyen gazdasági modelleket rendszerezhetjük bizonyos szempontok alapján, melyből az én témaköröm szempontjából két lényeges dologra fókuszál. Ez alapján beszélhetünk nyílt vagy zárt modellről, illetve, ha az időszak folytonosságát tekintjük, statikus vagy dinamikus modellről.

- Zárt modell: A termelés során előállított termékek mindegyikéből bizonyos mennyiség újrafelhasználásra kerül.
- Nyílt modell: A termékek közt van olyan, amit csak a végső felhasználásra állít elő a piac, vagy az inputok közt olyan termék is van, melyet nem tudunk előállítani, így azt külső forrásból kell beszerezni.
- Statikus modell: Egy időszakaszt vesz figyelembe. A ráfordítást ehhez mérten, az időszak kibocsájtásához igazítva határozza meg.
- Dinamikus: Az idő figyelembe vételével a készletek időbeli változását vizsgálja.

Ez alapján a következő négy modellről beszélhetünk:

1. Zárt statikus modell

$$x = Ax$$

2. Nyílt- statikus modell

$$x = Ax + d$$

3. Zárt- dinamikus

$$x = Ax + B\dot{x}$$

4. Nyílt dinamikus

$$x = Ax + B\dot{x} + c$$

ahol,

- A folyó ráfordítási mátrix
- Bberuházási mátrix
- x termelési szint
- c, d nettó kibocsájtási vektorok

Ezeket a jelöléseket később is használni fogom, és az 5.4 – as fejezetben részletesebben kifejtem jelentésüket.

5.2 Leontief inverz és tulajdonságai

A Leontief- féle Input- Output modell a matematikai közgazdaságtan egyik leggyakrabban használt lineáris modellje. Azért is ilyen közkedvelt, mert egy adatból nagyon sok mindenre következtethetünk a vizsgált gazdaságban. Hogy pontosan lássuk, hogy hogyan is épül fel a modellünk, és az pontosan működjön, tennünk kell néhány kikötést a gazdaságunkra.

- Fontos, hogy a szektorok száma állandó legyen, tehát időközben egy ágazat nem szűnhet meg, és nem is jöhetnek létre újjak.
- Modellünk rövidtávú elemzést ad, melyben a termékek és a folyamatok között kölcsönös egyértelműséget határozunk meg olyan módon, hogy minden terméket csak egy ágazat állíthat elő, és minden ágazat csak egy terméket, azaz monopolhelyzet áll fenn.

Ezen feltételek mellett már el is kezdhetjük felépíteni a nyílt statikus modellünket, melyben a keresett termelési szint meghatározásához szükségem lesz a Leontief inverzre.

Tekintsük egy olyan gazdaságot, melynek pontosan n szektora van. És mindegyik vállalatról ismerjük, hogy a termelés során mennyi terméket használ föl a többi vállalat által kibocsájtott termékből. Ezekből az adatokból tudjuk előállítani a folyó ráfordítási mátrixot, ezt az 5.2 –es példában fogom bemutatni. Ezen felül ismerjük a nettó kibocsájtási vektort, azaz az 5.1 –es bevezető jelölései alapján a d vetort. Ezen ismert tényezők alapján szeretnénk feltenni a kérdést, hogy az egyes vállaltoknak mennyit szükséges termelniük ahhoz, hogy a következő termelési időszakban ugyanazt a kibocsájtást elérjük, és ezen felül a piacra tudjunk dobni pontosan annyit, amennyi a $d$vektorban előre meg lett adva.

Ez a feladat a nyílt statikus modellnek felel meg. Felírható az összefüggés:

$$x = Ax + d$$

A-t, és d-t ismerjük, ezekből szeretnénk kiszámolni az x termelési szinteket.

$$x - Ax = d$$

$$(E - A)x = d$$

$$x = (E - A)^{-1}d$$

Így egyszerű képletet tudtunk adni a megoldásra, azonban feltételeztük, hogy az $(E - A)$ mátrix invertálható. Hogy mikor létezik a mátrixnak inverze, arra az 5.2-es tétel adja meg nekünk választ.

5.2 Tétel: (Gale- féle produktivitási tétel). Egy $A \in \mathbb{R}^{nxn}$- es mátrixnak akkor, és csak akkor létezik nem negatív Leontief- inverze, ha $\exists\, \bar{x} \geq 0$, hogy $\bar{x} > A\bar{x}$.

Bizonyítás: Dr. Nagy Tamás [7] műve alapján

A mátrix produktív, akkor létezik a nemnegatív Leontief- inverze

1. Ha az A mátrix produktív, akkor $\bar{x} > 0$.

   Mivel az $A \geq 0, \bar{x} > 0$ így a definícióból egyből adódik, hogy $\bar{x} > A\bar{x} \geq 0$, azaz $\bar{x} > 0$.

2. Ha az A mátrix produktív, akkor $x \geq Ax$ – nek csak $x \geq 0$ megoldása van. Az 1- es állítás alapján tudjuk, hogy $\exists\, \bar{x} > 0$. Tegyük fel indirekt, hogy az $x \geq Ax$ egyenlőtlenségnek van olyan megoldása, amely negatív elemet is tartalmaz. Legyen $x_1 < 0$ és $x_i \geq 0\ \forall\, i \neq 1$ esetén. Ekkor:

$\exists\, \lambda > 0 :\ x^{(\lambda)} = x + \lambda\bar{x}$ úgy, hogy $x_1^{(\lambda)} = 0$.

Ez alapján λ értéke is könnyen meghatározható:

$$x_1^{(1)} = x_1 + \lambda\overline{x_1} = 0$$

$\lambda = -\frac{x_1}{\bar{x_1}}$ továbbá azt is megállapíthatjuk, hogy pozitív, hiszen $x_1 < 0, \bar{x} > 0$

Ezek alapján felírhatjuk a következő becslést:

$$x^{(\lambda)} = x + \lambda\bar{x} > x + \lambda A\bar{x} \geq Ax + \lambda A\bar{x} = A(x + \lambda\bar{x}) = Ax^{(\lambda)}$$

$$x^{(\lambda)} > Ax^{(\lambda)} \geq 0$$

$$x^{(\lambda)} > 0$$

Ez ellentmond a feltevésünknek, mely szerint a $x_1^{(\lambda)} = 0$. így az eredeti állításunk igaz.

3. Ha az A mátrix produktív, akkor az $x = Ax$ egyenletnek csak az $x = 0$ triviális megoldása létezik.

   Az egyenletet két oldalról vizsgálva azt kapjuk, hogy

   - $x \geq Ax$,melyből a 2-es állítás alapján $x \geq 0$ következik.
   - $x \leq Ax$, ezt -1- gyel szorozva $-x \geq A(-x)$ adódik, ahol szintén a 2-es állításból tudunk követeztetni. $-x \geq 0$

   A kettőből együttesen $x = 0$ adódik.

4. Ha az A mátrix produktív, akkor $\exists\ (E - A)^{-1}$

   A (3.) állításból kiindulva már tudjuk, hogy az $x = Ax$ –nek csak az $x = 0$ megoldása van. Ez átalakítva

$$Ex = Ax$$

$$(E - A)x = 0$$

   Ennek az $x = 0$ csak akkor lehet a megoldása, ha az $(E - A)$ oszlopai lineárisan függetlenek egymástól, tehát invertálható.

5. Ha az A mátrix produktív, akkor $(E - A)^{-1} \geq 0$. Legyen $T \coloneqq (E - A)^{-1}$ ennek a j. oszlopvektora $t_j = (E - A)^{-1}e_j$, ahol e_j a j. egységvektor.

$$(E - A)t_j = e_j \geq 0$$

$$Et_j - At_j = e_j \ \geq 0$$

$$t_j \geq At_j$$

$$t_j \geq 0$$

A T mátrix elemeiről az is belátható, hogy az elemei nem negatívak.

$$(E - A)t_j = e_j$$

$$t_j = \ e_j + At_j \geq e_j$$

$$T \geq E$$

Ha létezik a nemnegatív Leontief- inverz, akkor az A mátrix produktív

Azaz $(E - A)^{-1} \geq 0$. Ekkor tetszőleges nem negatív d vektorral beszorozva, olyan y vektort kapunk eredményül, mely eleget tesz a produktivitási kritériumnak.

$$y = (E - A)^{-1}d \ \geq 0$$

$$(E - A)y = d \ \geq 0$$

$$y - Ay \geq 0$$

$$y \geq Ay$$

Így a definíció szerint az A mátrix produktív.

5.2 Definíció: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, ekkor az $(E - A)^{-1}$ mátrix az A mátrixhoz tartozó Leontief- inverz, ahol Eaz $n \times n$ –es egység mátrix.

Az alábbi alfejezetben egy példán keresztül mutatom be a nyílt statikus modellt, és egyben a Leontief- inverz alkalmazására is sort kerítek.

5.3 Nyílt statikus modell

5.3 Példa:

Az 1.-es táblázat alapján tekintsük egy olyan 3 szektoros gazdaságot, melyben a 3 vállalat az autógyártás, fémipar és a villamos energia lesz. A példa inkább elméleti, de a Leontief inverz kiszámításához megfelelő. Az mértékegységek az autógyártásnál darab, fémiparnál kg, a villamos energiánál kWh. A példa adatait tartalmazó táblázatban az egyes egységek többszörösei szerepelnek.

	Autógyártás	Fémipar	Villamos energia
Autógyártás	2	1	0
Fémipar	3	4	3
Villamos energia	1	3	6
	10	10	10

5.3-es példa adatai 1. sz. táblázat

A táblázat értékeiből előállítható a ráfordítási mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Melyet úgy kapunk, hogy az egyes vállalatok értékeit leosztjuk a teljes ráfordítással. Így normált értékekhez jutunk, és az A mátrixról oszloponként leolvasva megkapjuk, hogy egy egység előállításához az egyes termékekből mennyire van szükségünk. Például 1 egység fémhez 0,1 egységnyi autó, 0,4 egységnyi fém, 0,3 egységnyi villamos energia szükségeltetik.

A Leontief- inverz kiszámításához szükségünk van az $(E - A)$ mátrixra.

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}3 & 0{,}6 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & -0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Mivel a mátrix determinánsa nem 0, létezik az inverze.

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} & \frac{8}{21} & \frac{2}{7} \\ \frac{10}{7} & \frac{64}{21} & \frac{16}{7} \\ \frac{10}{7} & \frac{50}{21} & \frac{30}{7} \end{pmatrix}$$

Ez alapján már feltehetünk egy olyan kérdést, hogy az egyes termékekből mennyit termeljünk ahhoz, hogy a következő időszakban újra termelhessünk, és emellett a piacra dobhassunk 1 egység autót, 2 egység fémet, és 1 egység áramot.

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hogy megkapjuk a keresett x vektort, már csak be kell helyettesítenünk a fent megadott

$$x = (E - A)^{-1} d$$

képletbe.

$$x = \begin{pmatrix} \frac{52}{21} \\ \frac{206}{21} \\ \frac{220}{21} \end{pmatrix}$$

Ilyen termelés mellett a következő időszakban is ugyanennyit elő tudunk állítani, és a piac számára is teljesíteni tudjuk a kért mennyiséget.

5.4 Zárt dinamikus Leontief modell

A nyílt statikus modell után szeretném bemutatni a zárt dinamikus modellt, melynek leírása során az alábbi jelöléseket használtam, Dobos Imre 2010-es cikke alapján [11].

- a_i az i-ik vállalat folyó ráfordítási vektora, oszlop vektor
- b_i az i-ik vállalat készletigény vektora, oszlop vektor
- a_j^T a j-edik vállalat folyó ráfordítási vektorának transzponáltja, sorvektor
- b_j^T a j-edik vállalat készletigény vektorának transzponáltja, sorvektor
- $x_j(t)$ a j-edik vállalat termelési szintje, adott t időpontban, oszlopvektor
- $x(t)$ gazdaság nemnegatív termelési szintjeit tartalmazó sorvektor
- $p_i(t)$ a i-edik termék ára adott t időpontban, sorvektor
- $p(t)$ a gazdaság nemnegatív árvektora adott t időpillanatban
- T a vizsgált időszak
- A folyó ráfordítási mátrix mely a ráfordítási együtthatókat tartalmazza, a fent említett a_i oszlopvektorok alkotják
- B készletigényesség mátrixa, mely oszlopai a b_i vektorok

Mivel ebben a modellben figyelembe vesszük az időt is, dinamikus modellről beszélünk. A gazdaságunkban feltételezzük, hogy monopolhelyzet áll fenn.

Ez alapján az i-edik vállalat bruttó kibocsájtása $x_i(t)$, ehhez pedig $a_i x_i(t)$ terméket kell beszereznie a piacról. A kapacitás bővítéséhez $b_i \dot{x}(t)$ termékmennyiségre van szüksége. A vállalat mérlegét úgy „készíthetjük” el, hogy a rendelkezésre álló termékeinket beszorozzuk a pillanatnyi árértékével. Azaz $p(t) b_i x_i(t)$.

Ennek az értékének változását három dolog befolyásolja:

- megtermelt termékek a készletet növelik: $p_i(t)x_i(t)$
- termelés során felhasznált termékek megsemmisülése csökkenti a vállalat vagyonát: $-\,p(t)a_i x_i(t)$
- ár növekedése növeli az összvagyont, csökkenése pedig csökkenti: $\dot{p}(t)b_i x_i(t)$.

Ezek alapján felírható az alábbi differenciálegyenlet:

$$\frac{d}{dt}[p(t)b_i x_i(t)] = p_i(t)x_i(t) - \; p(t)a_i x_i(t) + \dot{p}(t)b_i x_i(t)$$

$$i = 1,2 \dots n$$

A baloldal t szerinti deriválása utána átrendezve az egyenletet, kapjuk a következőt:

$$p(t)b_i\dot{x}_i(t) = p_i(t)x_i(t) - \; p(t)a_i x_i(t)$$

$$\dot{x}_i(t) = \frac{p_i(t)x_i(t) - p(t)a_i x_i(t)}{p(t)b_i} \qquad (1)$$

Vizsgáljuk most a j-edik piacon lévő termékeket.

A termelés előtt rendelkezésünkre álló termékek értéke: $p_j(t)b_j^T x(t)$

- a többi vállalat beszerzési mennyisége növeli a rendelkezésünkre állót: $p_j(t)a_j^T x(t)$
- a készletünk felhalmozása szintén növeli ezt az értéket: $p_j(t)b_j^T \dot{x}(t)$
- azonban a piacon értékesített termékek csökkentik: $-\,p_j(t)x_j(t)$

Ezek alapján felírható:

$$\frac{d}{dt}\left[p_j(t)b_j^T x(t)\right] = p_j(t)a_j^T x(t) + p_j(t)b_j^T \dot{x}(t) - \; p_j(t)x_j(t)$$

t szerint deriválva a baloldalt, és rendezve az egyenletet:

$$\dot{p}(t) = \frac{p_j(t)a_j^T x(t) - p_j(t)x_j(t)}{b_j^T x(t)} \qquad (2)$$

$$j = 1,2,\dots,n$$

Ebből a két differenciálegyenlet- rendszerből (1), (2), összesen $2n$ darab egyenletünk van, így a 4.2.3 tétel alapján egyértelműen létezik a megoldása. Azonban az ilyen típusú differenciálegyenlet- rendszereknek nem létezik az analitikus megoldása, így sajátérték feladatként definiáljuk a problémát, melyre a korábban leírtak alapján és Leontief inverz tulajdonságait figyelembe véve, megoldást adhatunk az egyenletekre.

Tekintsük tehát az alábbi sajátérték feladatot:

$$x = Ax + \lambda Bx \tag{3}$$

és

$$p = pA + \lambda pB \tag{4}$$

Feltételezve, hogy ennek az egyenletrendszernek létezik nemnegatív megoldása, és az A mátrixnak létezik nemnegatív Leontief- inverze, azaz $(I - A)^{-1}$. Így az első egyenletet átrendezve:

$$\frac{1}{\lambda}x = (I - A)^{-1}Bx$$

sajátérték feladatot kapjuk, melynek szinguláris B mátrix esetén is van megoldása. Az árváltozás egyenletét vizsgálva hasonló eredményt kapunk:

$$\frac{1}{\lambda}p = pB(I - A)^{-1}$$

ahol ugyanazon feltételeket kell teljesítenie az A és B mátrixoknak. Így a feladatot visszavezettük a nyílt statikus modellre, és a Leontief inverz segítségével megoldást tudunk adni a feladatra.

Az eredeti differenciálegyenleteink megoldása megegyezik az:

$$x(t) = Ax(t) + B\dot{x}(t)$$
$$p(t) = p(t)A - \dot{p}(t)B$$

lineáris differenciálegyenlet- rendszer nemnegatív megoldásaival, mely épp a zárt dinamikus Leontief modellt adja vissza. A továbbiakban Dobos példáját, mint sajátérték feladatot fejteném ki, melynek megoldását a Maple numerikus matematikai program segítségével újraprogramoztam, és ez alapján következtetéseket tehetünk a gazdaságra nézve.

5.5 Példa:

Az alábbi példában ugyanazon jelöléseket használom, melyet a fejezet elején definiáltam. Így a termelői felhasználást az A mátrixban, míg a készletigényességet a B mátrix jelenti. Az A mátrixról feltételezzük, hogy négyzetes, és nemnegatív, illetve, a gazdaságunk produktivitása végett eleget kell, hogy tegyen a 5.2-es tétel beli Gale- féle produktivitási kritériumnak, azaz, hogy $\exists x \geq 0 : x \geq Ax$.

A B értelmezése miatt csak annyi kikötést kell tennünk, hogy elemei nem negatívak, hiszen b_{ij} azt fejezi ki számunkra, hogy az i-edik vállalatnak hány egységnyi j –edik termékre van szüksége ahhoz, hogy a következő termelés során, 1 egységnyivel többet termelhessünk.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}02 \\ 0{,}05 & 0{,}02 & 0{,}04 \\ 0{,}07 & 0{,}06 & 0{,}01 \end{pmatrix}$$

Dobos cikke alapján én is ugyanazon kezdeti értékekkel dolgoztam, így

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}1 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}1 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

értékek mellett a sajátérték feladat megoldásaként $\frac{1}{\lambda}$ –nak az alábbi 3 értéket kaptam 4 tizedes jegyre kerekítve:

$$2{,}4753$$

$$-0{,}0351$$

$$-0{,}0202$$

Dobos Imre egy 2010- es cikkében [12] definiálta a Neumann- sugár fogalmát, mely a vizsgált gazdaság egyensúlyúi pályáját jelenti. Célunk az, hogy a megoldás ezen a pályán helyezkedjen el, de mivel ez sokszor nem valósul meg, az ehhez legközelebbi megoldást keressük. Ezt pedig a 4.2.4-es tétel (Perron- Frobenius) alapján a legnagyobb sajátértékhez tartozó megoldás adja, hiszen a Neumann sugár éppen a mátrix spektrál sugarával egyezik meg.

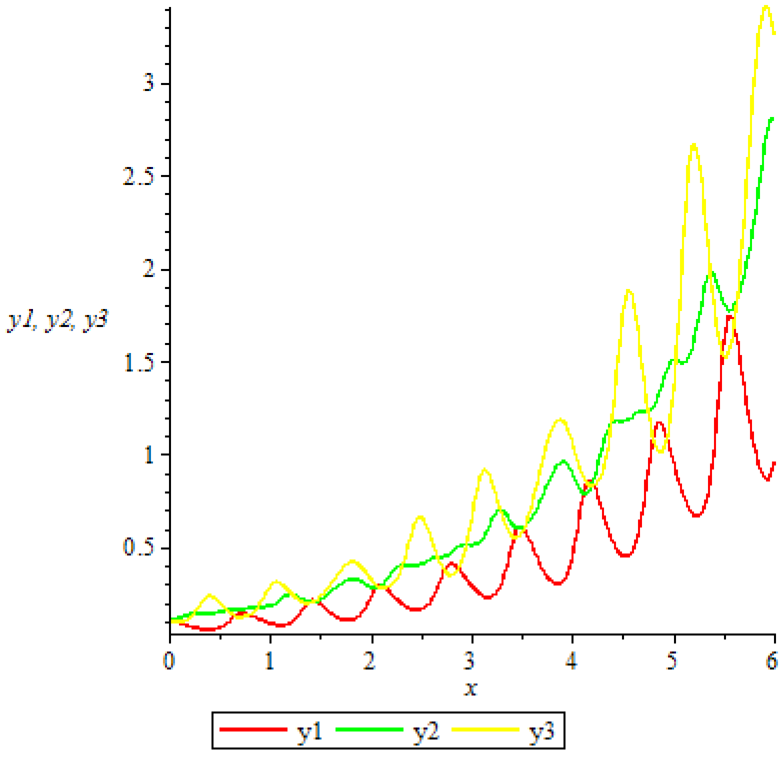
Így a tétel alapján $\frac{1}{\lambda} = 2{,}4753$, melyből

$$\lambda = 0{,}403988$$

következik.

A Maple numerikus programmal megoldva a differenciálegyenletet a korábbi kezdeti értékből kiindulva más eredményt kaptam, mint Dobod Imre [11]- es cikkében. A megoldásokat az alábbi ábrákon szemléltetem.

1. ábra: Termelési szintek változása

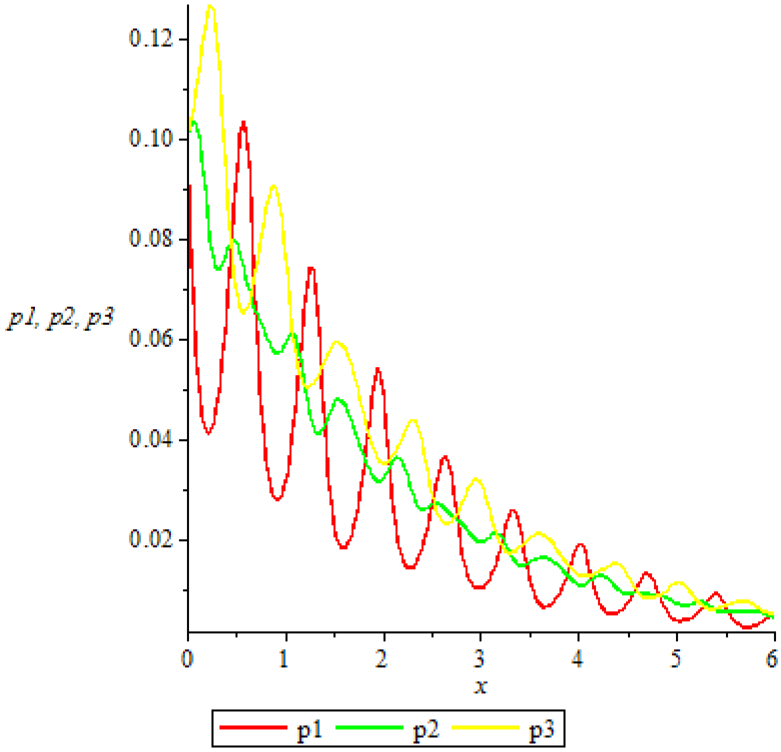


Ezen az ábrán az y_1, y_2, y_3 megoldásait láthatjuk x függvényében, melyek az általam használt x_1, x_2, x_3 – nak felelnek meg, ahol az időbeni változást t –vel jelöltem. Jól látszik, hogy mind a három termelési szint az exponenciális függvény (a Neumann sugár) mentén ciklikusan változik, egyre nagyobb amplitúdóval. A vállalatok termelési ciklusai ellentétesen mozognak, csúcspontjaik azonban egybeesnek.

Mindhárom vállalat igyekszik a Neumann sugár mentén egyensúlyba kerülni, azonban egymást befolyásolva egyszerre nem alakulhat ki mindegyik vállalatnál az egyensúly, így ciklust hoz létre a termelésben.

Az árszínvonal változására is hasonló képet kapunk.

2. ábra: Árváltozás



A termelési mennyiségek változása befolyásolja az árak alakulását is, így ennek ráhatása szintén ciklusokat generál.

A tanulságot levonva mind a termelési mennyiség, mind az árak változásában megfigyelhető a ciklikus változás, mely az egyensúlyi pálya mentén mozog. A ciklikusság egy ilyen zárt rendszerben szinte természetesnek mondható, hiszen a vállalatok vagy ellentétesen reagálnak a gazdaságban bekövetkezett változásokra, vagy alkalmazkodnak egymáshoz.

4.4 További kutatások a témában

Vizsgált példánkban olyan zárt dinamikus modellt tekintettünk, ahol az árváltozást, és a termelési szint változását vettük figyelembe. Azonban a Leontief modell ennél többet is tartogat magában. Technológiai változás, innováció során a folyóráfordítás, és a készletigényességben is változást idéznek elő. Ez persze kihatással lesz a termelési szintre is, illetve az árváltozásra is. A ciklusok ezáltal eltolódhatnak, változhat az amplitúdó mértéke is, azonban továbbra a gazdasági egyensúlyra törekszik.

6. Összefoglalás

Szakdolgozatom célja egy gazdasági modell megértése és elemzése volt. Azért, hogy minden matematikai összefüggést átlátható legyen, áttekintettem a differenciálegyenletek elméletét, és a lineáris algebra azon definícióit, és tételeit, melyek elengedhetetlenek a vizsgált Leontief- féle modellekben.

A Leontief input-output modellek négy típusából kettőt mutattam be részletesebben, a nyílt statikus és a zárt dinamikus modellt. Előbbi azért lényeges számunkra, mert már ennél az egyszerűbb modellnél is szükségünk volt a Leontief inverz létezésére, ahhoz, hogy a magunk elé állított kérdéseket megválaszolhassuk.

A zárt dinamikus modell pedig azért érdekes számunkra, mert egy olyan problémát tudtunk megoldani a sajátérték feladatok témakörével, melyet a Leontief inverz létezése nélkül nem tudtam volna, hiszen ehhez egy szinguláris mátrix invertálására lett volna szükség.

Tovább vizsgálva a modellt, a Maple numerikus programcsomag segítségével újraprogramoztam Dobos Imre [11] –es cikke alapján egy feladatot, melynek megoldásai ciklikus pályák lettek. Goodwin modelljét sokszor említik egy lapon a Leontief modellekkel, hiszen a Leontief- féle input-output modellhez hasonlóan mutatja be a ciklusok kialakulását és változását, egy összetettebb gazdaságban.

Belemélyedve a témába, azt a következtetést tudom levonni, hogy bár a gazdaság törekszik az egyensúly beállítására, a folyamatos, akár apróbb változások olyan hatással vannak minden gazdasági szektorra, hogy ez az egyensúly valószínűleg sosem jön létre. A vállalatok hatással vannak mind a saját termelésükre, mind a többi vállalat termelésére, így ezek állandó befolyása egymásra, egyre „nagyobb” ciklust generál a gazdaságban.

7. Ábra- és forrásjegyzék

Ábrajegyzék

Forrásjegyzék

[1] Simon L. Péter előadásjegyzete Differenciálegyenletek című tárgyhoz, Eötvös Loránd Tudomány Egyetem, Alkalmazott Analízis Tanszék, 2015

[2] Wikipédia https://hu.wikipedia.org/wiki/Szepar%C3%A1bilis_differenci%C3%A1legyenlet

[3] Dr. Rontó Miklós előadásjegyzete Dinamikus gazdasági modellek című tárgyhoz, Miskolci Egyetem Matematikai Intézet Analízis Tanszék, 2006

[4] Pannon Egyetem előadásjegyzete MAM143A kurzuskódú tárgyhoz, 2008/2009 http://math.uni-pannon.hu/~hartung/okt/mlmam143a/jegyzet5.pdf

[5] Móczár József: Sajátérték- tételek a lineáris és nemlineáris Neumann-rendszerekben, BKÁE, Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék, 2003

[6] Bakony Eszter: Nemnegatív mátrix c. szakdolgozata, Algebra és Számítástudományi Tanszék, 2014 https://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_matelem/2014/bakonyi_eszter.pdf

[7] Dr. Nagy Tamás: Közgazdasági modellek 1. 9-es fejezet http://www.uni-miskolc.hu/~matente/oktatasi%20tananyagok/kozgazdasagi_modellek_1/nagytamas.html

[8] Bogya Norbert oktatási segédanyaga, Szegedi Tudományegyetem, 2011 http://www.math.u-szeged.hu/~nbogya/linalgk1011II/leontief.pdf

[9] Bogya Norbert oktatási segédanyaga, Szegedi Tudományegyetem, 2011 http://www.math.u-szeged.hu/~nbogya/linalgk1011II/leonpelda.pdf

[10] Wikipédia https://hu.wikipedia.org/wiki/Leontief-inverz

[11] Dobos Imre: Igazolható-e az üzleti ciklus az iparágak viselkedésével?, 2010 február http://edok.lib.uni-corvinus.hu/322/1/Dobos120.pdf

[12] Dobos Imre: Vállalatok egy Neumann típusú gazdaságban, 2010 http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/939/1/vt_2010n3p50.pdf

8. Melléklet

A differenciálegyenlet rendszer megoldásához használt Maple programkód

```
> with(LinearAlgebra[Generic]):
> with(LinearAlgebra) :
> (Q[`0`],Q[`1`],Q[`+`],Q[`-`],Q[`*`],Q[`/`],Q[`=`]) := (0,1,`+`,`-`,`*`,`/`,`=`);
```

$$Q_0, Q_1, Q_{`+`}, Q_{`-`}, Q_{`*`}, Q_{`/`}, Q_{`=`} := 0, 1, `+`, `-`, `*`, `/`, `=` \tag{1}$$

```
> #Folyó ráfordítási mátrix megadása
> A := Matrix([[0.1,0.3,0.2],[0.5,0.2,0.4],[0.2,0.4,0.5]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{2}$$

```
> #3x3 -as egységmátrix definiálása
>
> E := Matrix([[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]]);
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

```
> #Leontief inverzi kiszámítása
> L := E - A
```

$$L := \begin{bmatrix} 0.900000000000000 & -0.300000000000000 & -0.200000000000000 \\ -0.500000000000000 & 0.800000000000000 & -0.400000000000000 \\ -0.200000000000000 & -0.400000000000000 & 0.500000000000000 \end{bmatrix} \tag{4}$$

```
> LI:=MatrixInverse[Q](L);
```

$$LI := \begin{bmatrix} 5.33333333333333 & 5.11111111111111 & 6.22222222222222 \\ 7.33333333333334 & 9.11111111111111 & 10.2222222222222 \\ 8.00000000000000 & 9.33333333333334 & 12.6666666666667 \end{bmatrix} \tag{5}$$

```
> #Kapacitásbővítéshez szükséges készlet igény mátrixa
> B := Matrix([[0.01, 0.03, 0.02], [0.05, 0.02, 0.04], [0.07, 0.06, 0.01]])
```

$$B := \begin{bmatrix} 0.01 & 0.03 & 0.02 \\ 0.05 & 0.02 & 0.04 \\ 0.07 & 0.06 & 0.01 \end{bmatrix} \tag{6}$$

```
> M := LI.B
```

$$M := \begin{bmatrix} 0.744444444444445 & 0.635555555555556 & 0.373333333333333 \\ 1.24444444444444 & 1.01555555555556 & 0.613333333333334 \\ 1.43333333333333 & 1.18666666666667 & 0.660000000000000 \end{bmatrix} \tag{7}$$

```
> #Sajátértékek és sajátvektorok kiszámítása
> with(linalg):
> e := eigenvalues(M);
```

$$e := 2.47531871331664, -0.0201883484453221, -0.0351303648713121 \quad (8)$$

```
> v := [eigenvectors(M)];
```

$$v := [[-0.0201883484453192, 1, \{[-0.541790197221557 \;\; 0.758615424221966 \;\; -0.181799184998007]\}], [-0.0351303648713121, 1, \{[0.0837879367751065 \;\; 0.463534843456641 \;\; -0.964074401214794]\}], [2.47531871331663, 1, \{[0.474136147940466 \;\; 0.774107350071247 \;\; 0.880397762887924]\}]] \quad (9)$$

```
>  # 1. Sajátérték
> v[1][1];
```

$$-0.0201883484453192 \quad (10)$$

```
> # Multiplicitása
> v[1][2];
```

$$1 \quad (11)$$

```
> # Sajátvektora
> v[1][3];
```

$$\{[-0.541790197221557 \;\; 0.758615424221966 \;\; -0.181799184998007]\} \quad (12)$$

```
> # 2. Sajátérték
> v[2][1];
```

$$-0.0351303648713121 \quad (13)$$

```
> # Multiplicitás
> v[2][2];
```

$$1 \quad (14)$$

```
> # Sajátvektor
> v[2][3];
```

$$\{[0.0837879367751065 \;\; 0.463534843456641 \;\; -0.964074401214794]\} \quad (15)$$

```
> # 3. Sajátérték
> v[3][1];
```

$$2.47531871331663 \quad (16)$$

```
> # Multiplicitása
> v[3][2];
```

$$1 \quad (17)$$

```
> # Sajátvektor
> v[3][3];
```

$$\left\{\left[\begin{array}{ccc} 0.474136147940466 & 0.774107350071247 & 0.880397762887924 \end{array}\right]\right\} \tag{18}$$

```
> # Differenciál egyenletek definiálása
```

> $Y := Vector(3, [y1(x), y2(x), y3(x)])$

$$Y := \begin{bmatrix} y1(x) \\ y2(x) \\ y3(x) \end{bmatrix} \tag{19}$$

> $P := Vector(3, [p1(x), p2(x), p3(x)])$

$$P := \begin{bmatrix} p1(x) \\ p2(x) \\ p3(x) \end{bmatrix} \tag{20}$$

> $Yd1 := diff(Y[1], x)$

$$Yd1 := \frac{d}{dx}\, y1(x) \tag{21}$$

> $Yd2 := diff(Y[2], x)$

$$Yd2 := \frac{d}{dx}\, y2(x) \tag{22}$$

> $Yd3 := diff(Y[3], x)$

$$Yd3 := \frac{d}{dx}\, y3(x) \tag{23}$$

> $Pd1 := diff(P[1], x)$

$$Pd1 := \frac{d}{dx}\, p1(x) \tag{24}$$

> $Pd2 := diff(P[2], x)$

$$Pd2 := \frac{d}{dx}\, p2(x) \tag{25}$$

> $Pd3 := diff(P[3], x)$

$$Pd3 := \frac{d}{dx}\, p3(x) \tag{26}$$

> $PY := Pt.Y$

$$PY := Pt. \begin{bmatrix} y1(x) \\ y2(x) \\ y3(x) \end{bmatrix} \tag{27}$$

> $At := Transpose(A)$

$$At := \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{28}$$

> $Bt := Transpose(B)$

$$Bt := \begin{bmatrix} 0.01 & 0.05 & 0.07 \\ 0.03 & 0.02 & 0.06 \\ 0.02 & 0.04 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (29)$$

> $AtP := At.P$

$$AtP := \begin{bmatrix} 0.1\, p1(x) + 0.5\, p2(x) + 0.2\, p3(x) \\ 0.3\, p1(x) + 0.2\, p2(x) + 0.4\, p3(x) \\ 0.2\, p1(x) + 0.4\, p2(x) + 0.5\, p3(x) \end{bmatrix} \quad (30)$$

> $BtP := Bt.P$

$$BtP := \begin{bmatrix} 0.01\, p1(x) + 0.05\, p2(x) + 0.07\, p3(x) \\ 0.03\, p1(x) + 0.02\, p2(x) + 0.06\, p3(x) \\ 0.02\, p1(x) + 0.04\, p2(x) + 0.01\, p3(x) \end{bmatrix} \quad (31)$$

> $AtP := At.P$

$$AtP := \begin{bmatrix} 0.1\, p1(x) + 0.5\, p2(x) + 0.2\, p3(x) \\ 0.3\, p1(x) + 0.2\, p2(x) + 0.4\, p3(x) \\ 0.2\, p1(x) + 0.4\, p2(x) + 0.5\, p3(x) \end{bmatrix} \quad (32)$$

> $AY := A.Y$

$$AY := \begin{bmatrix} 0.1\, y1(x) + 0.3\, y2(x) + 0.2\, y3(x) \\ 0.5\, y1(x) + 0.2\, y2(x) + 0.4\, y3(x) \\ 0.2\, y1(x) + 0.4\, y2(x) + 0.5\, y3(x) \end{bmatrix} \quad (33)$$

> $BY := B.Y$

$$BY := \begin{bmatrix} 0.01\, y1(x) + 0.03\, y2(x) + 0.02\, y3(x) \\ 0.05\, y1(x) + 0.02\, y2(x) + 0.04\, y3(x) \\ 0.07\, y1(x) + 0.06\, y2(x) + 0.01\, y3(x) \end{bmatrix} \quad (34)$$

> **# Differenciálegyenletek:**

> $f1 := Yd1 = \frac{(P[1] - AtP[1])}{BtP[1]} \cdot Y[1]$

$$f1 := \frac{d}{dx}\, y1(x) = \frac{(0.9\, p1(x) - 0.5\, p2(x) - 0.2\, p3(x))\, y1(x)}{0.01\, p1(x) + 0.05\, p2(x) + 0.07\, p3(x)} \quad (35)$$

> $f2 := Yd2 = \frac{(P[2] - AtP[2])}{BtP[2]} \cdot Y[2]$

$$f2 := \frac{d}{dx}\, y2(x) = \frac{(0.8\, p2(x) - 0.3\, p1(x) - 0.4\, p3(x))\, y2(x)}{0.03\, p1(x) + 0.02\, p2(x) + 0.06\, p3(x)} \quad (36)$$

> $f3 := Yd3 = \frac{(P[3] - AtP[3])}{BtP[3]} \cdot Y[3]$

$$f3 := \frac{d}{dx}\, y3(x) = \frac{(0.5\, p3(x) - 0.2\, p1(x) - 0.4\, p2(x))\, y3(x)}{0.02\, p1(x) + 0.04\, p2(x) + 0.01\, p3(x)} \quad (37)$$

> $f4 := Pd1 = -\frac{(Y[1] - AY[1])}{BY[1]} \cdot P[1]$

$$f4 := \frac{d}{dx}\, p1(x) = -\frac{(0.9\, y1(x) - 0.3\, y2(x) - 0.2\, y3(x))\, p1(x)}{0.01\, y1(x) + 0.03\, y2(x) + 0.02\, y3(x)} \tag{38}$$

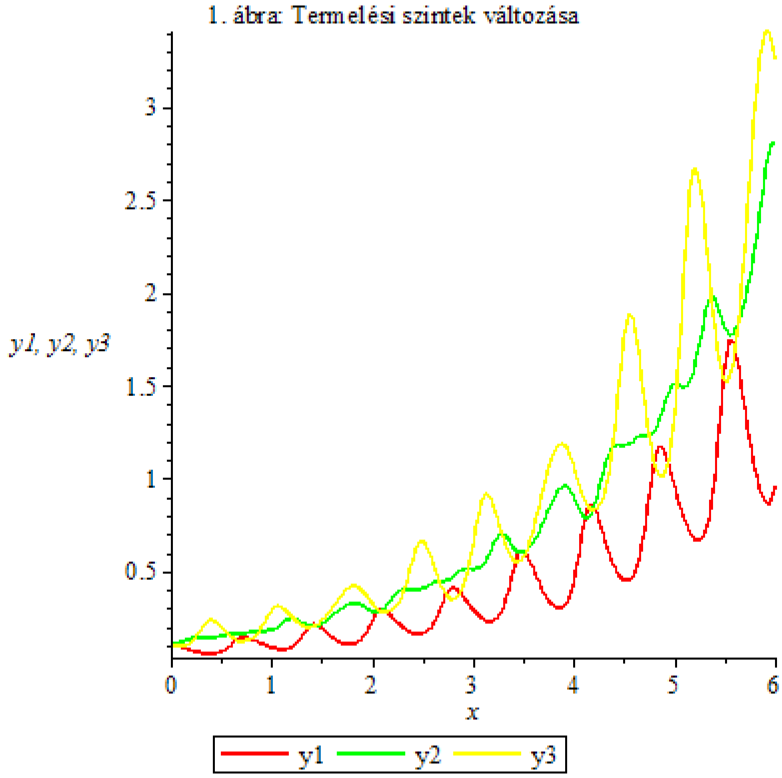
> $f5 := Pd2 = -\frac{(Y[2] - AY[2])}{BY[2]} \cdot P[2]$

$$f5 := \frac{d}{dx}\, p2(x) = -\frac{(0.8\, y2(x) - 0.5\, y1(x) - 0.4\, y3(x))\, p2(x)}{0.05\, y1(x) + 0.02\, y2(x) + 0.04\, y3(x)} \tag{39}$$

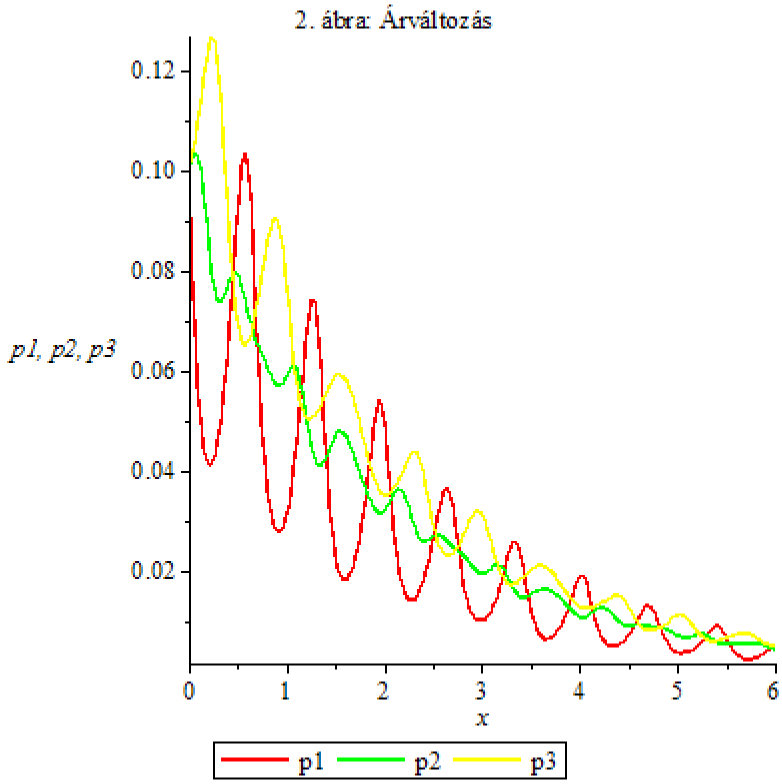
> $f6 := Pd3 = -\frac{(Y[3] - AY[3])}{BY[3]} \cdot P[3]$

$$f6 := \frac{d}{dx}\, p3(x) = -\frac{(0.5\, y3(x) - 0.2\, y1(x) - 0.4\, y2(x))\, p3(x)}{0.07\, y1(x) + 0.06\, y2(x) + 0.01\, y3(x)} \tag{40}$$

> *dsolve*[*interactive*]( );



> *dsolve*[*interactive*]( );


2. ábra: Árváltozás
p1, p2, p3
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0
1
2
3
4
5
6
x
p1
p2
p3