Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

FÜGGVÉNYSOROZATOKKAL KAPCSOLATOS TÉTELEK, PÉLDÁK, ELLENPÉLDÁK

Szakdolgozat

Készítette:
Hubay Dalma
Matematika Bsc
Elemző szakirány

Témavezető:
Gémes Margit
Műszaki gazdasági tanár
Analízis Tanszék

Budapest
2017

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatom témájának a függvénysorozatokat választottam, ezen belül a függvénysorozatok konvergenciájával, integrálhatóságával és differenciálhatóságával foglalkoztam.
A dolgozat felépítésénél törekedtem az átláthatóságra és érthetőségre. Először a pontonkénti, majd az egyenletes konvergenciát taglalom, a szakdolgozat végén pedig néhány függvénysorozattal kapcsolatos feladatot mutatok be. Egy adott témakörben, egy tétel kimondása után annak bizonyítását, majd ehhez kacsolódó tételeket és példákat mutatok be.
A szakdolgozatom célja, hogy az olvasó átfogó képet kapjon a függvénysorozatokról, és azok tulajdonságairól.

1. Pontonkénti konvergencia

1.1 Definíciók és példák

1.1.1. Definíció. Legyenek $f_1, f_2, \ldots$ a H halmazon értelmezett, valós értékű függvények. Ekkor azt mondjuk, hogy ezek a függvények egy H halmazon értelmezett *függvénysorozat*ot alkotnak, amelyet (f_n)-nel jelölünk.

1.1.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f_n függvénysorozat *pontonként konvergál* az $f: H \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ minden $x \in H$-ra. Ezt úgy jelöljük, hogy $f_n \to f$. Az $f(x)$ függvényt a függvénysorozat *határfüggvény*ének vagy *limeszfüggvény*ének nevezzük.

1.1.3. Példa. Pontonként konvergens függvénysorozat:
Legyen

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$$

egy függvénysorozat.

Az $f_n(x)$ függvénysorozat határfüggvénye,

- ha $x = 0$, akkor $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$,
- ha $x \neq 0$, akkor

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + x^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Tehát az $f_n(x)$ függvénysorozat pontonként konvergál az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \end{cases}$$

függvényhez az $x \in \mathbb{R}$ halmazon.

1.1.4. Példa. Pontonként nem konvergens függvénysorozat:
Legyen

$$f_n(x) = (|x|+2)^n$$

egy függvénysorozat.

Vizsgáljuk meg a határértékét.
Mivel $|x| + 2 \geq 2$ minden pontban, ezért

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (|x|+2)^n = \infty,$$

tehát $f_n(x)$ függvénysorozat minden pontban divergens.

1.2. Pontonkénti konvergencia és folytonosság

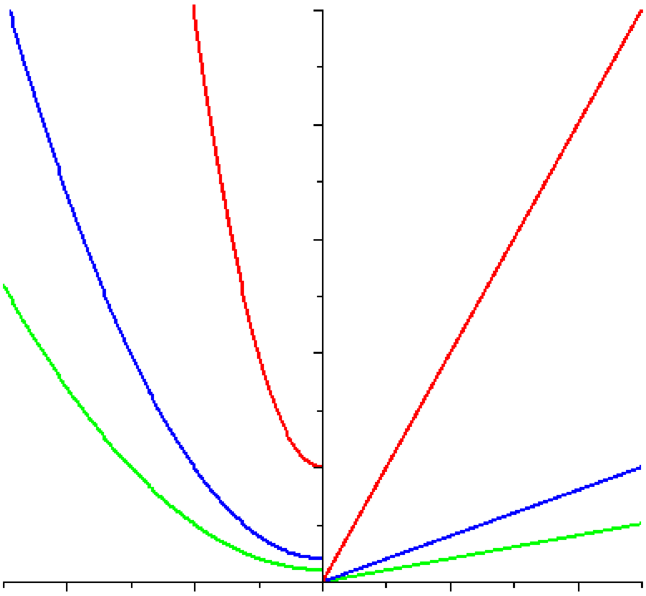
1.2.1. Példa. Példa olyan függvénysorozatra, amelynek tagjai nem folytonosak 0-ban, de a limeszfüggvény folytonos:

Legyen

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{n}, & \text{ha } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{n}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

egy nem folytonos függvénysorozat.

Nézzük meg a függvénysorozat első, ötödik és tízedik tagját ábrázolva.



A fenti ábrán látható, hogy egyik sem folytonos, $x = 0$-nál szakadási pontjuk van.

Ezt általánosan is el lehet mondani. Minden n-re

$$f_n(0) = \frac{1}{n} > 0,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = 0,$$

azaz a jobb oldali határérték nem egyezik meg a helyettesítési értékkel, tehát $f_n(x)$-nek 0-ban szakadási pontja van.

Az $f_n(x)$ függvénysorozat határfüggvénye,

- ha $x \leq 0$, akkor
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^2+1}{n} = 0,$$
- ha $x > 0$, akkor
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{n} = 0.$$

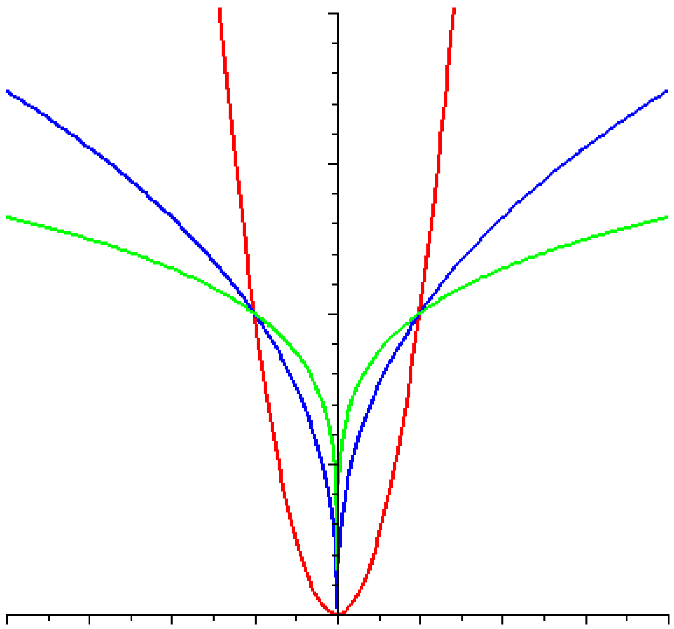
Tehát az $f_n(x)$ nem folytonos függvénysorozat $x \in \mathbb{R}$ halmazon pontonként konvergál az $f(x) = 0$ folytonos függvényhez.

1.2.2. Példa. Folytonos függvénysorozat pontonként konvergál nem folytonos függvényhez: Legyen

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^2}$$

folytonos függvénysorozat.

Nézzük meg a függvénysorozat első, ötödik és tízedik tagját ábrázolva.



Az $f_n(x)$ függvénysorozat határfüggvénye,

- ha $x = 0$, akkor $f(x) = 0$,
- ha $|x| > 0$, akkor $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^2} = 1$.

Tehát az $f_n(x)$ folytonos függvénysorozat pontonként konvergál az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } |x| > 0 \end{cases}$$

nem folytonos függvényhez az $x \in \mathbb{R}$ halmazon.

1.2.3. Példa. Folytonos függvénysorozat pontonként konvergál folytonos függvényhez: Legyen

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}$$

folytonos függvénysorozat.

Az $f_n(x)$ függvénysorozat határfüggvénye

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^2 + \frac{1}{n} = x^2.$$

Tehát az $f_n(x)$ folytonos függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x) = x^2$ folytonos függvényhez az $x \in \mathbb{R}$ halmazon.

2. Egyenletes konvergencia

2.1. Definíció és példák

2.1.1. Definíció. Legyenek $f_1, f_2, \ldots$ a H halmazon értelmezett valós értékű függvények. Azt mondjuk, hogy az f_n függvénysorozat *egyenletesen konvergál* az $f: H \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

minden $x \in H$-ra és minden $n \geq N$-re.

2.1.2. Példa. Egyenletesen konvergens függvénysorozat:
Legyen

$$f_n(x) = \frac{\cos x}{n^2}$$

egy függvénysorozat. Mivel $|\cos x| \leq 1$, ezért

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos x}{n^2} = 0,$$

tehát az $f_n(x)$ függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x) = 0$ függvényhez az $x \in \mathbb{R}$ halmazon.

Vizsgáljuk meg, hogy egyenletes-e a konvergencia.

Mivel $\left|\frac{\cos x}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, ezért bármilyen ε-t megadva tudunk olyan N-t választani, hogy $N > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$.

Így minden $n \geq N$-re

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\cos x}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$$

igaz lesz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Tehát $f_n(x)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az $x \in \mathbb{R}$ halmazon.

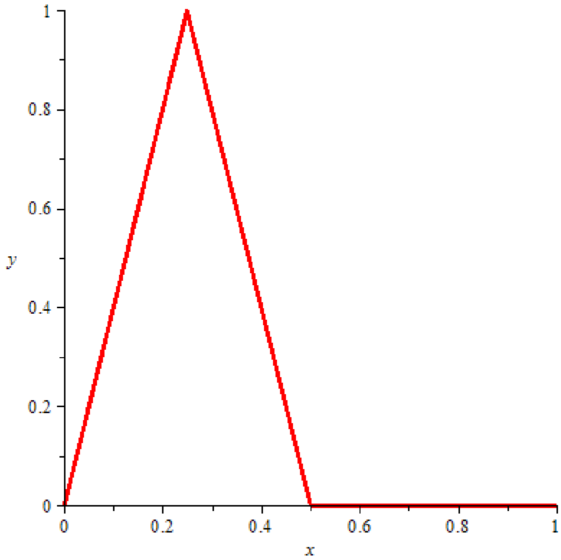
2.1.3. Példa. Nem egyenletesen konvergens függvénysorozat:
Legyen

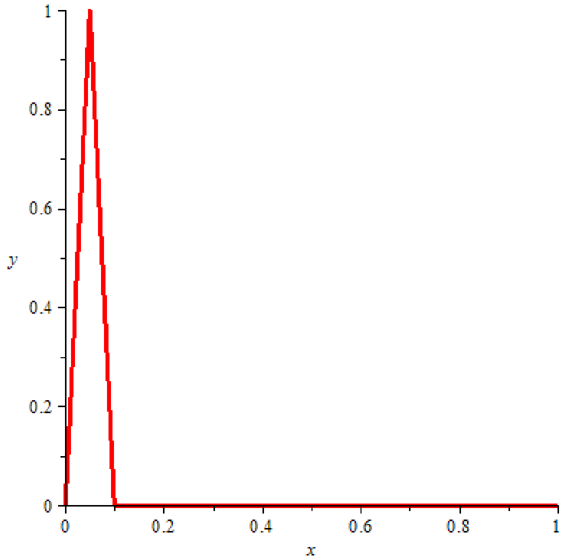
$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \frac{1}{n} < x \leq 1 \\ 1 - |2nx - 1|, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

egy függvénysorozat.

Pontonként konvergál az $f(x) = 0$ függvényhez az $x \in [0,1]$ intervallumon.

Nézzük meg a függvénysorozat második és tízedik tagját ábrázolva.





Látható, hogy

$$f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = 1 - \left|2n\frac{1}{2n} - 1\right| = 1$$

minden n értékre. Ezért ha $\varepsilon < 1$, akkor bármilyen N értéket választva biztosan lesz olyan x érték ($x \in [0,1]$), amire $|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon$ minden $n \geq N$-re. Ezért $f_n(x)$ nem egyenletesen konvergens függvénysorozat.

2.2. Egyenletes konvergenciával kapcsolatos tételek

2.2.1. Tétel. Tegyük fel, hogy az f_n függvénysorozat pontonként tart az f függvényhez a H halmazon és legyen

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|.$$

Ekkor az f_n függvénysorozat pontosan akkor konvergál egyenletesen az f függvényhez a H halmazon, ha

$$\sup_{x \in H} g_n(x) \to 0.$$

Ezt a tételt nem bizonyítom.

2.2.2. Példa. Egyenletesen konvergens függvénysorozat:
Legyen

$$f_n(x) = \frac{nx}{n+x}$$

egy függvénysorozat. Tekintsük az $x \in [0,1]$ intervallumon.
Mivel $x \in [0,1]$, ezért

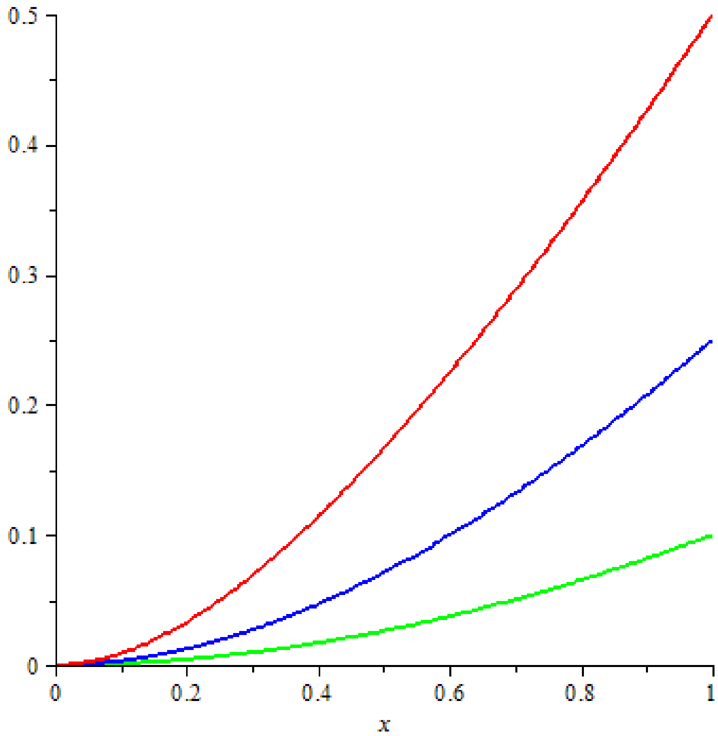
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+x} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+\frac{x}{n}} = x,$$

így $f_n(x)$ függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x) = x$ függvényhez az $x \in [0,1]$ intervallumon.

Vizsgáljuk meg, hogy egyenletes-e a konvergencia.

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{n+x} - x\right| = x - \frac{nx}{n+x}$$

Nézzük meg $g_n(x)$ első, harmadik és kilencedik tagját ábrázolva.



Vizsgáljuk meg $g_n(x)$ szuprémumát.

$$\sup_{x\in[0,1]}\left(x-\frac{nx}{n+x}\right)=\sup_{x\in[0,1]}\left(\frac{x(n+x)}{n+x}-\frac{nx}{n+x}\right)=\sup_{x\in[0,1]}\frac{nx+x^2-nx}{n+x}=$$

$$=\sup_{x\in[0,1]}\frac{x^2}{n+x}\leq\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$$

Nézzük meg $g_n(x)$ szuprémumának határértékét.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Mivel $\sup\limits_{x\in[0,1]} g_n(x)\to 0$, ezért az $f_n(x)$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f(x)=x$ függvényhez az $x\in[0,1]$ intervallumon.

2.2.3. Példa. Nem egyenletesen konvergens függvénysorozat:
Legyen

$$f_n(x)=x^n$$

egy függvénysorozat. Tekintsük az $x\in(0,1)$ intervallumon.

Mivel $x\in(0,1)$, ezért

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}x^n=0,$$

tehát $f_n(x)$ függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x)=0$ függvényhez az $x\in(0,1)$ intervallumon.

Vizsgáljuk meg, hogy egyenletes-e a konvergencia.

$$g_n(x)=|f_n(x)-f(x)|=|x^n-0|=x^n$$

Vizsgáljuk meg $g_n(x)$ szuprémumának határértékét.

$$\sup_{x\in(0,1)} x^n<1$$

$$\lim_{n\to\infty}1=1$$

Mivel $\sup\limits_{x\in(0,1)} g_n(x)\nrightarrow 0$, ezért az $f_n(x)$ függvénysorozat nem egyenletesen konvergens az $x\in(0,1)$ intervallumon.

2.2.4. Tétel. (Cauchy-kritérium) Az f_n függvénysorozat akkor és csak akkor konvergál egyenletesen a H halmazon, ha minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan N, hogy

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

teljesül minden $x\in H$-ra és $n,m\geq N$ esetén.

Bizonyítás.[1]
Tegyük fel, hogy f_n egyenletesen konvergál f-hez a H halmazon. Tehát adott $\varepsilon>0$-ra válasszunk egy olyan N indexet, amelyre teljesül, hogy

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

[1] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera - Valós Analízis II. kötetének 27.9. bizonyítása alapján

minden $x \in H$ és $n \geq N$ esetén.

Ekkor az

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesül minden $x \in H$ pontban.

Most tegyük fel, hogy f_n kielégíti a tételben megfogalmazott feltételt. Ekkor minden rögzített $x \in H$-ra az $f_n(x)$ számsorozat Cauchy-sorozat, tehát konvergens.

Ezért létezik

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

ami lehetővé teszi a következő függvény definíciót:

Legyen

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

minden $x \in H$-ra.

Belátjuk, hogy f_n egyenletesen konvergál f-hez a H halmazon. Legyen $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ adott, és válasszunk egy olyan N indexet, hogy

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesüljön minden $x \in H$-ra és $n, m \geq N$-re.

Ha $n \geq N$ rögzített, akkor $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$-ból adódik, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

minden $x \in H$-ra, amivel az állítást beláttuk. ∎

2.2.5. Példa. Egyenletesen konvergens függvénysorozat:

Legyen

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$$

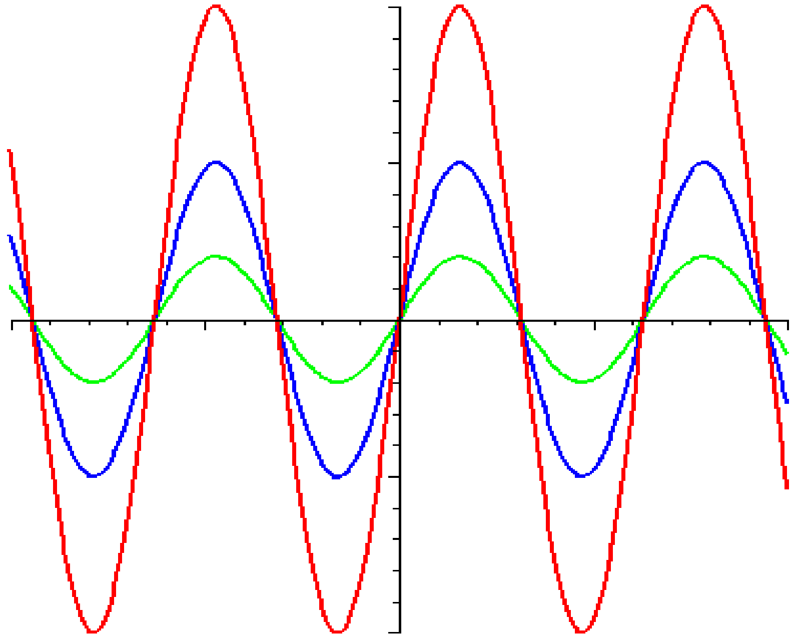
egy függvénysorozat.

Mivel $|\sin x| \leq 1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{n} = 0,$$

tehát az $f_n(x)$ függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x) = 0$ függvényhez az $x \in \mathbb{R}$ halmazon.

Tekintsük meg a függvénysorozat első, második és ötödik tagját ábrázolva.



Vizsgáljuk meg, hogy egyenletes-e a konvergencia.

Mivel $\left|\frac{\sin x}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$, így bármilyen ε-t megadva tudunk olyan N-t választani, hogy $N > \frac{1}{\varepsilon}$.
Így minden $n, m \geq N$-re

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \left|\frac{\sin x}{n} - \frac{\sin x}{m}\right| < \varepsilon$$

igaz lesz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Tehát $f_n(x)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az $x \in \mathbb{R}$ halmazon.

2.3. Egyenletes konvergencia és folytonosság

2.3.1. Tétel. Ha az f_n függvénysorozat folytonos a H halmazon, és egyenletesen konvergál az f függvényhez a H halmazon, akkor f függvény is folytonos a H halmazon.

Tétel átfogalmazva:
Ha f_n függvénysorozat folytonos a H halmazon, és pontonként konvergál egy nem folytonos f függvényhez a H halmazon, akkor az f_n függvénysorozat nem egyenletesen konvergens a H halmazon.

Bizonyítás.[2]
Az egyenletes konvergencia miatt bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan (ε-tól függő) N, hogy ha $n \geq N$, akkor H halmaz minden x pontjában

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mivel $f_N(x)$ folytonos H-n, így bármely $x_0 \in H$ pont esetén megadható olyan (ε-tól, x_0-tól és N-től függő) δ, hogy ha $x \in H$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

A fenti két egyenlőtlenségből következik, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

ez pedig azt jelenti, hogy $f(x)$ a H halmazon folytonos. ■

2.3.2. Példa. Folytonos függvénysorozat egyenletesen konvergál folytonos függvényhez:
Legyen

$$f_n(x) = \left(x + \frac{x}{n}\right)^2$$

egy folytonos függvénysorozat. Tekintsünk az $x \in [-1,1]$ intervallumon.

Mivel $\frac{x}{n} \to 0$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{x}{n}\right)^2 = x^2,$$

tehát $f_n(x)$ függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x) = x^2$ függvényhez az $x \in [-1,1]$ intervallumon.

Vizsgáljuk meg, hogy egyenletes-e a konvergencia.

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\left(x + \frac{x}{n}\right)^2 - x^2\right| =$$

$$= \left|x^2 + \frac{2x^2}{n} + \frac{x^2}{n^2} - x^2\right| = \frac{2x^2}{n} + \frac{x^2}{n^2}$$

[2] Leindler László – Analízis című könyvének 29.0.10. bizonyítása alapján

Nézzük meg $g_n(x)$ szuprémumának határértékét.

$$\sup_{x\in[-1,1]}\left(\frac{2x^2}{n}+\frac{x^2}{n^2}\right)\leq\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=0$$

Mivel $\sup_{x\in[-1,1]} g_n(x)\to 0$, ezért az $f_n(x)$ folytonos függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f(x)=x^2$ folytonos függvényhez az $x\in[-1,1]$ intervallumon.

2.3.3. Példa. Nem folytonos függvénysorozat egyenletesen konvergál folytonos függvényhez: Legyen

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{n}, & \text{ha } x\in[-1,0)\\ \dfrac{x}{x^2+n^2}, & \text{ha } x\in[0,1]\end{cases}$$

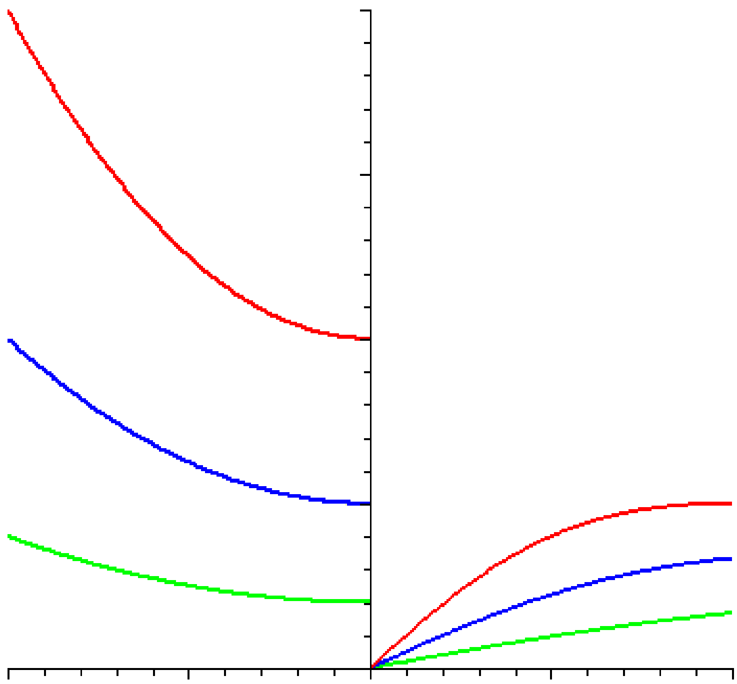
egy nem folytonos függvénysorozat. Tekintsük az $x\in[-1,1]$ intervallumon.

Mivel

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+1}{n}=0, & \text{ha } x\in[-1,0)\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{x^2+n^2}=0, & \text{ha } x\in[0,1]\end{cases}$$

ezért az $f_n(x)$ függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x)=0$ folytonos függvényhez az $x\in[-1,1]$ intervallumon.

Nézzük meg a függvénysorozat első, második és ötödik tagját ábrázolva.



Vizsgáljuk meg, hogy egyenletes-e a konvergencia.

- Ha $x \in [-1{,}0)$, akkor
$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^2+1}{n} - 0\right| = \frac{x^2+1}{n}.$$
Vizsgáljuk meg $g_n(x)$ szuprémumának határértékét.
$$\sup_{x\in[-1,0)} \frac{x^2+1}{n} \le \frac{1+1}{n} = \frac{2}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$
Mivel $\sup\limits_{x\in[-1,0)} g_n(x) \to 0$, ezért az $f_n(x)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az $x \in [-1{,}0)$ intervallumon.

- Ha $x \in [0{,}1]$, akkor
$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{x^2+n^2} - 0\right| = \frac{x}{x^2+n^2}.$$
Vizsgáljuk meg $g_n(x)$ szuprémumának határértékét.
$$\sup_{x\in[0,1])} \frac{x}{x^2+n^2} \le \frac{x}{n^2} \le \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$
Mivel $\sup\limits_{x\in[0.1]} g_n(x) \to 0$, ezért az $f_n(x)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az $x \in [0{,}1]$ intervallumon.

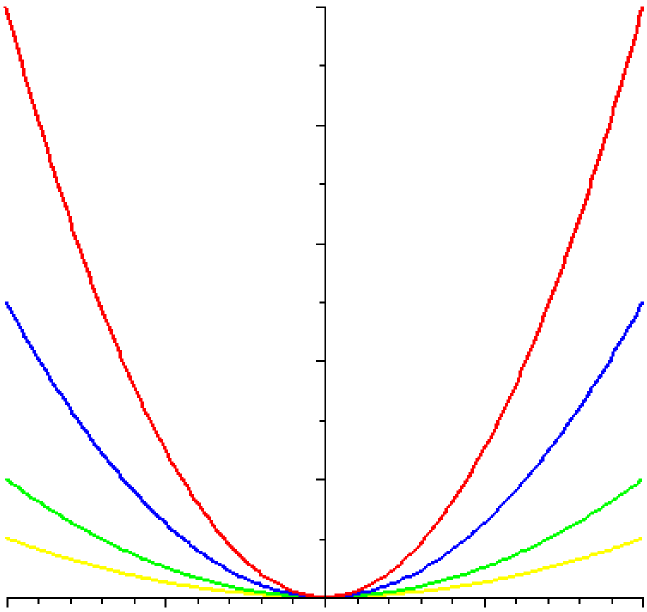
Tehát $f_n(x)$ nem folytonos függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f(x) = 0$ folytonos függvényhez az $x \in [-1{,}1]$ intervallumon.

2.3.4. Példa. Folytonos függvénysorozat pontonként konvergál folytonos függvényhez, de nem egyenletesen konvergens:

Legyen
$$f_n(x) = \frac{x^2}{n}$$
egy folytonos függvénysorozat.

Mivel $\frac{1}{n} \to 0$, ezért
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n} = \lim_{n\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{n} = 0.$$
Tehát az $f_n(x) = \frac{x^2}{n}$ folytonos függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x) = 0$ folytonos függvényhez az $x \in \mathbb{R}$ halmazon.

Tekintsük meg a függvénysorozat első, második, ötödik és tízedik tagját ábrázolva.



Vizsgáljuk meg, hogy egyenletes-e a konvergencia.

Vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon < 1$-et. Bármilyen N értéket választva minden $n \geq N$ esetén lesz olyan x érték, amelyre $x = \sqrt{n}$.
Ekkor

$$\frac{x^2}{n} = \frac{\sqrt{n}^2}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^2}{n} - 0\right| = 1 > \varepsilon.$$

Tehát az $f_n(x)$ folytonos függvénysorozat pontonként konvergál a folytonos $f(x) = 0$ folytonos függvényhez, de nem egyenletesen konvergens.

2.4. Egyenletes konvergencia és integrálhatóság

2.4.1. Tétel. Tegyük fel, hogy az f_n függvénysorozat egyenletesen tart az f függvényhez az $[a,b]$ intervallumon. Ha f_n folytonos (vagy csak integrálható) $[a,b]$-ben minden n-re, akkor f is integráltó $[a,b]$-ben, és

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx. \qquad (1)$$

Bizonyítás.[3]
A 2.3.1. Tétel szerint, ha az f_n függvénysorozat folytonos, akkor f függvény is folytonos az $[a,b]$ intervallumban, tehát integrálható is, az f_n függvénysorozathoz hasonlóan.

Így már csak az egyenlőséget kell bebizonyítani.

Az egyenletes konvergencia miatt bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan (ε-tól függő) N, hogy ha $n \geq N$, akkor az $[a,b]$ intervallumon mindenhol

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Ezt a becslést felhasználva $n \geq N$-re

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

adódik, ami bizonyítja az egyenlőséget.

Ha $f_n(x)$ csak integrálható, akkor $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$-ból következik, hogy

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{b-a},$$

tehát $f(x)$ is korlátos. Mivel f_n integrálható, ezért

$$\int_{\overline{a}}^{b} f_n(x)\,dx = \int_a^{\underline{b}} f_n(x)\,dx = \int_a^b f_n(x)\,dx := I_n.$$

Ezt és az előző egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\int_{\overline{a}}^{b}\left(f_n(x) - \frac{\varepsilon}{b-a}\right)dx \leq \int_{\overline{a}}^{b} f(x)dx \leq \int_a^{\underline{b}} f(x)dx \leq \int_a^{\underline{b}}\left(f_n(x) + \frac{\varepsilon}{b-a}\right)dx,$$

azaz

$$I_n - \varepsilon \leq \int_{\overline{a}}^{b} f(x)dx \leq \int_a^{\underline{b}} f(x)dx \leq I_n + \varepsilon,$$

és innen következik, hogy

$$\int_{\overline{a}}^{b} f(x)dx = \int_a^{\underline{b}} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \quad \blacksquare$$

---

[3] Leindler László – Analízis című könyvének 29.0.11. bizonyítása alapján

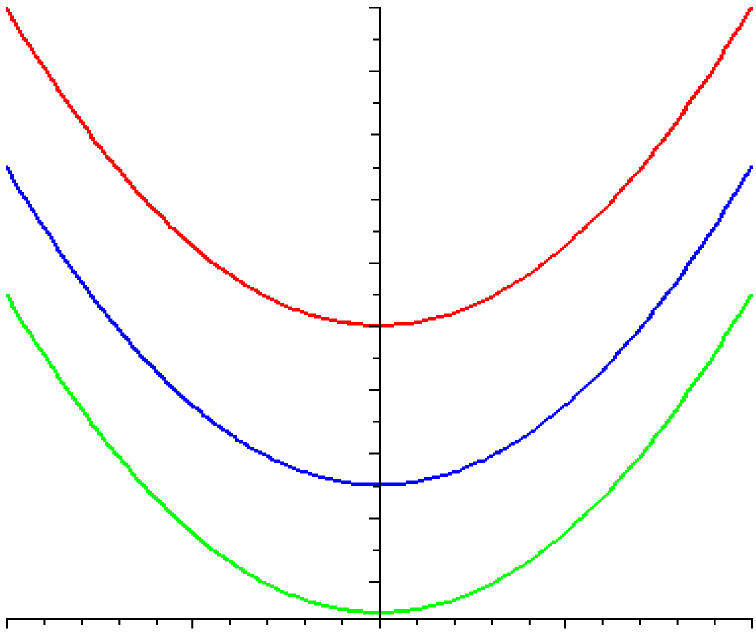
2.4.2. Példa. Integrálható függvénysorozat egyenletesen konvergál integrálható függvényhez, és igaz rá az (1) egyenlőség.

Legyen

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}$$

egy integrálható függvénysorozat. Tekintsük az $x \in [-1,1]$ intervallumon.

Nézzük meg a függvénysorozat első, második és tízedik tagját ábrázolva.



A határfüggvénye

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(x^2 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right) = x^2.$$

Tehát $f_n(x)$ függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x) = x^2$ függvényhez az $x \in [-1,1]$ intervallumon.

Vizsgáljuk meg, hogy egyenletes-e a konvergencia.

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|x^2 + \frac{1}{n} - x^2\right| = \frac{1}{n}$$

Ha $g_n(x)$ szuprémuma a 0-ba tart, akkor a konvergencia egyenletes.

Mivel $g_n(x)$ értéke minden x esetén $\frac{1}{n}$, ezért

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) = \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

ezért $f_n(x)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az $x \in [-1,1]$ intervallumon.

Az $f(x)$ függvény folytonos, tehát integrálható. Vizsgáljuk meg, hogy igaz-e az (1) egyenlőség.

$$\int_{-1}^{1} f_n(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 + \frac{1}{n}dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{n}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{-1}{n}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{n}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$$

Tehát az egyenlőség teljesül.

2.5. Egyenletes konvergencia és differenciálhatóság

2.5.1. Tétel. Legyenek az f_n függvények folytonosan differenciálhatóak a korlátos I intervallumban, és tegyük fel, hogy

- az $(f_n{}')$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a g függvényhez I-ben, és
- létezik legalább egy $x_0 \in I$ pont, amelyre az $\big(f_n(x_0)\big)$ sorozat konvergens.

Ekkor az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál egy f függvényhez I-ben, az f függvény differenciálható, és $f'(x) = g(x)$ minden $x \in I$-re.

Bizonyítás.[4]
Mivel $(f_n{}')$ folytonos és $(f_n{}')$ egyenleteses konvergál g függvényhez, ezért a 2.3.1. Tétel miatt g folytonos I-ben.

Az $(f_n{}')$ függvénysorozat egyenletes konvergenciája miatt minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N index, hogy

$$|f_n'(x) - g(x)| < \varepsilon$$

minden $x \in I$ és $n \geq N$ esetén.
Legyen

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt.$$

Minden $x \in I$-re és jelöljük az I intervallum hosszúságát $|I|$-vel. Minden $x \in I$-re és $n \geq N$-re

$$|f_n(x) - f_n(x_0) - f(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} (f_n'(t) - g(t))dt \right| \leq \varepsilon \cdot |x - x_0| \leq \varepsilon \cdot |I|,$$

amiből nyilvánvaló, hogy f_n egyenletesen konvergál $(f + b)$-hez I-n, ahol

$$b = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0).$$

Mivel $f' = g$, ezzel a tételt beláttuk. ■

2.5.2 Példa.
Legyen

$$f_n(x) = \frac{(n+1)^2 x^3}{3n^2}$$

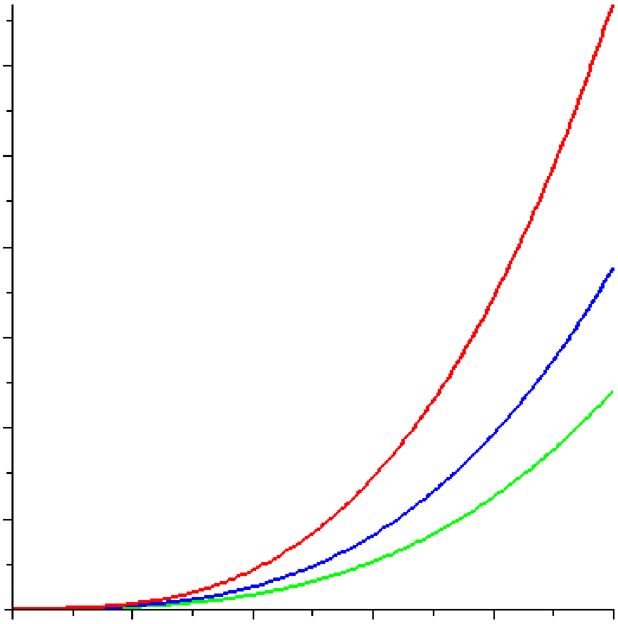
egy folytonosan differenciálható függvénysorozat az $x \in [0,1]$ intervallumon, melynek deriváltja

$$f_n{}'(x) = \left(\frac{(n+1)^2 x^3}{3n^2}\right)' = \left(\frac{x^3 n^2 + 2x^3 n + x^3}{3n^2}\right)' = \frac{(3x^2 n^2 + 6x^2 n + 3x^2)3n^2}{(3n^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 n^2 + 2x^2 n + x^2}{n^2} = x^2 + \frac{2x^2}{n} + \frac{x^2}{n^2} = \left(x + \frac{x}{n}\right)^2.$$

[4] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera - Valós Analízis II. kötetének 27.18. bizonyítása alapján

Tekintsük meg $f_n(x)$ első, második és ötödik tagját ábrázolva.



A 2.3.2. Példában már beláttuk, hogy az $\left(x + \frac{x}{n}\right)^2$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az x^2 függvényhez az $x \in [0,1]$ intervallumon.

Tehát $f_n{}'(x) = \left(x + \frac{x}{n}\right)^2$ és $g(x) = x^2$.

Vizsgáljuk meg, hogy $f_n(x)$ konvergens-e. Határfüggvénye

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 x^3}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^3n^2 + 2x^3n + x^3}{3n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^3}{3} + \underbrace{\frac{2x^3}{3n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{x^3}{3n^2}}_{\to 0} = \frac{x^3}{3}.$$

Állítás: $f_n(x)$ egyenletesen konvergál $f(x)$-hez az $x \in [0,1]$ intervallumon, $f(x)$ differenciálható, és $f'(x) = g(x)$.

Először az egyenletes konvergenciát vizsgáljuk meg.

$$g_n(x) = \left|\frac{x^3n^2 + 2x^3n + x^3}{3n^2} - \frac{x^3}{3}\right| = \left|\frac{x^3}{3} + \frac{2x^3n + x^3}{3n^2} - \frac{x^3}{3}\right| = \left|\frac{2x^3n + x^3}{3n^2}\right| =$$

$$= \left|\frac{x^3(2n+1)}{3n^2}\right| = \frac{x^3(2n+1)}{3n^2}$$

Nézzük meg $g_n(x)$ szuprémumának határértékét.

$$\sup_{x\in[0,1]} \frac{x^3(2n+1)}{3n^2} = \leq \frac{2n+1}{3n^2} \leq \frac{3n}{3n^2} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Mivel $\sup_{x\in[0,1]} g_n(x) \to 0$, ezért az $f_n(x)$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f(x) = \frac{x^3}{3}$ függvényhez az $x \in [0,1]$ intervallumon, tehát az állítás első része igaz.

Most vizsgáljuk meg az $f(x)$ függvény deriváltját.

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2 = g(x),$$

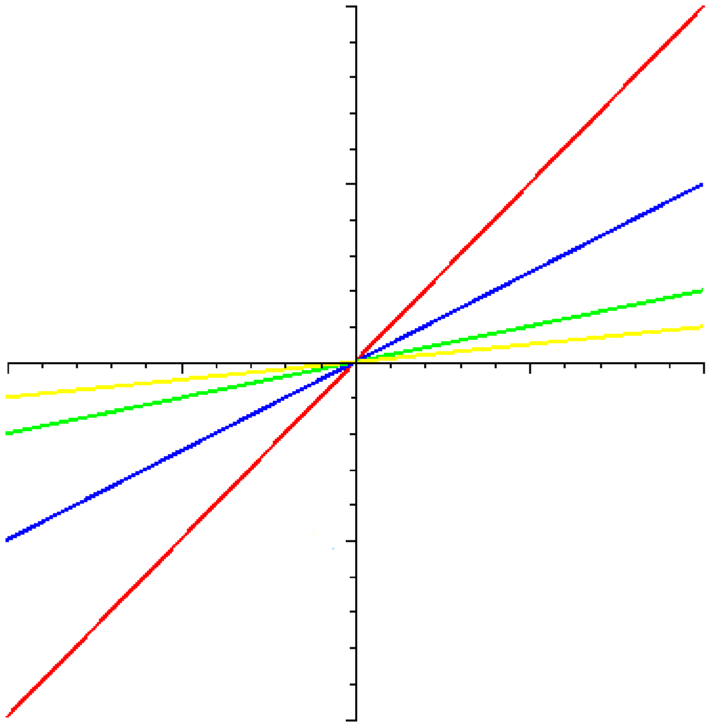
tehát az állítás második része is igaz.

3. Feladatok

Hol konvergensek pontonként, illetve mely intervallumokban egyenletesen konvergensek az alábbi függvénysorozatok?

3.1. Feladat.[5] $f_n(x) = \frac{x}{n}$

Tekintsük meg a függvénysorozat első, második, ötödik és tizedik tagját ábrázolva.



Pontonkénti konvergencia:

A függvénysorozat határfüggvénye

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0.$$

Tehát az $f_n(x) = \frac{x}{n}$ függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x) = 0$ függvényhez az $x \in \mathbb{R}$ halmazon.

Egyenletes konvergencia:

Állítás: Minden $x \in [a, b]$ zárt intervallumon egyenletesen konvergens.

Bármilyen ε-t megadva tudunk olyan N-t választani, hogy

- ha $|a| > |b|$, akkor

$$\left|\frac{a}{N}\right| < \varepsilon,$$

- ha $|a| < |b|$, akkor

$$\left|\frac{b}{N}\right| < \varepsilon.$$

[5] Gémes Margit, Szentmiklóssy Zoltán - Analízis feladatgyűjtemény I. kötetének 7.3.-as feladata

Így minden $n \geq N$-re

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \left|\frac{x}{n}\right| < \varepsilon$$

igaz lesz minden $x \in [a, b]$ esetén.

Tehát $f_n(x)$ függvénysorozat valóban egyenletesen konvergál az $f(x) = 0$ függvényhez minden zárt intervallumon.

3.2. Feladat.[6] $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$

Pontonkénti konvergencia:

A függvénysorozat határfüggvénye

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Tehát az $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x) = 0$ függvényhez az $x \in \mathbb{R}$ halmazon.

Egyenletes konvergencia:

Állítás: Minden $x \in [a, b]$ zárt intervallumon egyenletesen konvergens.

Bármilyen ε-t megadva tudunk olyan N-t választani, hogy

- ha $|a| > |b|$, akkor

$$\left|\frac{a^N}{N!}\right| < \varepsilon,$$

- ha $|a| < |b|$, akkor

$$\left|\frac{b^N}{N!}\right| < \varepsilon,$$

így minden $n \geq N$-re

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^n}{n!} - 0\right| = \left|\frac{x^n}{n!}\right| < \varepsilon$$

igaz lesz minden $x \in [a, b]$ esetén.

Tehát $f_n(x)$ függvénysorozat valóban egyenletesen konvergál az $f(x) = 0$ függvényhez minden zárt intervallumon.

3.3. Feladat.[7] $f_n(x) = \sqrt[n]{|x|}$

Pontonkénti konvergencia:

- Ha $x = 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{0} = 0.$$

- Ha $|x| > 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|} = 1.$$

---

[6] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera - Valós Analízis II. kötetének 27.2.-es feladatának (b) része

[7] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera - Valós Analízis II. kötetének 27.2.-es feladatának (a) része

Tehát az $f_n(x) = \sqrt[n]{|x|}$ függvénysorozat pontonként konvergál az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } |x| > 0 \end{cases}$$

függvényhez az $x \in \mathbb{R}$ halmazon.

Egyenletes konvergencia:

Állítás: Minden $x \in [a, b] \setminus\{0\}$ zárt intervallumon egyenletesen konvergens.

Bármilyen ε-t megadva tudunk olyan N-t választani, hogy

- ha $|a| > |b|$, akkor
$$\left|\sqrt[N]{|a|} - 1\right| < \varepsilon,$$
- ha $|a| < |b|$, akkor
$$\left|\sqrt[N]{|b|} - 1\right| < \varepsilon.$$

Így minden $n \geq N$-re

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt[n]{|x|} - 1\right| < \varepsilon$$

igaz lesz minden $x \in [a, b] \setminus\{0\}$ esetén.

Tehát $f_n(x)$ függvénysorozat valóban egyenletesen konvergál az $f(x) = 1$ függvényhez minden 0-t nem tartalmazó zárt intervallumon.

3.4. Feladat.[8] $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$

Pontonkénti konvergencia:

- Ha $x = 1$, akkor
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}} = \frac{1}{2}.$$
- Ha $|x| < 1$, akkor $x^n \to 0$, ezért
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}} = 0.$$
- Ha $|x| > 1$, akkor $\frac{1}{x^n} \to 0$, ezért
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^n} + x^n} = 0.$$
- Ha $x = -1$, akkor divergens.

Tehát az $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ függvénysorozat pontonként konvergál az

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } x = 1 \\ 0 & \text{ha } |x| > 1 \end{cases}$$

függvényhez az $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ halmazon.

[8] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera - Valós Analízis II. kötetének 27.2.-es feladatának (d) része

Egyenletes konvergencia:

Állítás: Minden $x \in [a,b] \backslash \{-1,1\}$ zárt intervallumon egyenletesen konvergens.

Bármilyen ε-t megadva tudunk olyan N-t választani, hogy

- ha $|a| > |b|$, akkor
$$\left|\frac{a^n}{1+a^{2n}}\right| < \varepsilon,$$
- ha $|a| < |b|$, akkor
$$\left|\frac{b^n}{1+b^{2n}}\right| < \varepsilon.$$

Így minden $n \geq N$-re
$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^n}{1+x^{2n}} - 0\right| = \left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right| < \varepsilon$$
igaz lesz minden $x \in [a,b] \backslash \{-1,1\}$ esetén.

Tehát $f_n(x)$ függvénysorozat valóban egyenletesen konvergál az $f(x) = 0$ függvényhez minden -1-et és 1-et nem tartalmazó zárt intervallumon.

3.5. Feladat.[9] $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$

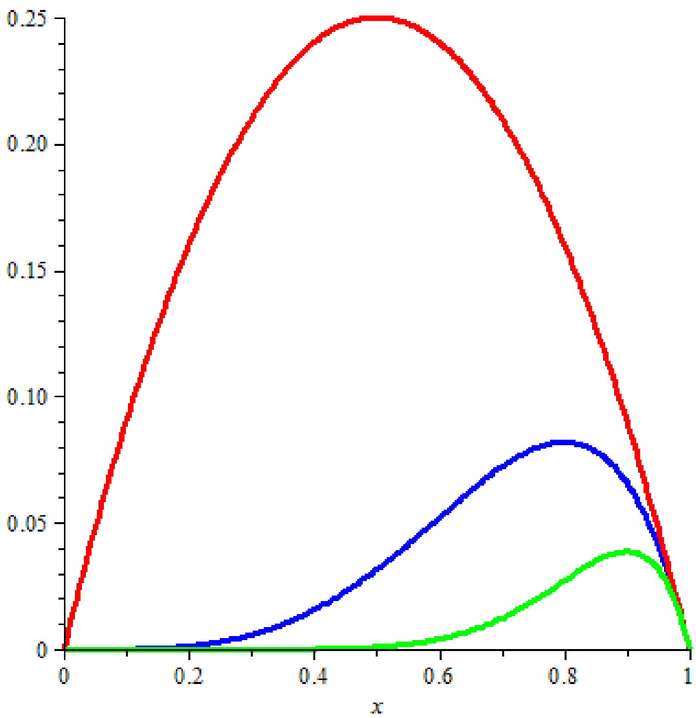
Pontonkénti konvergencia:

- Ha $0 < x < 1$, akkor
$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$$
tehát
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n - x^{n+1} = 0.$$
- Ha $x = 1$, akkor
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n - x^{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1^n - 1^{n-1} = 0.$$
- Ha $x > 1$, akkor divergens.
- Ha $x < 0$, akkor divergens.

Tehát az $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x) = 0$ függvényhez az $x \in [0,1]$ intervallumon.

Egyenletes konvergencia:
$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = |x^n - x^{n+1} - 0| = x^n - x^{n+1}$$
Nézzük meg $g_n(x)$ első, negyedik és kilencedik tagját ábrázolva.

[9] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera - Valós Analízis II. kötetének 27.2.-es feladatának (c) része



Az ábrán látható, hogy az első tag $x = \frac{1}{2}$ -nél, a negyedik tag $x = \frac{4}{5}$-nél, a kilencedik tag pedig $x = \frac{9}{10}$-nél veszi fel a legnagyobb értéket.

Ebből már sejthető, hogy $x = \frac{n}{n+1}$-ben abszolút maximuma van $g_n(x)$-nek.

Vizsgáljuk meg $g_n(x)$ deriváltját. Azokban a pontokban, ahol $g_n'(x) = 0$ és $g_n''(x) < 0$, $f_n(x)$-nek maximuma van.

$$g_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0$$

$$nx^{n-1} = (n+1)x^n \Longrightarrow x = \frac{n}{n+1}$$

$$g_n''(x) = n(n-1)x^{n-2} - n(n+1)x^n = n(n-1) - n(n+1)x$$

$$g_n''\left(\frac{n}{n+1}\right) = n(n-1) - n(n+1)\frac{n}{n+1} = n^2 - n - n^2 = -n < 0$$

Mivel $g_n''\left(\frac{n}{n+1}\right) < 0$, ezért $g_n(x)$-nek $x = \frac{n}{n+1}$-ben maximuma van.

Ez akkor abszolút maximum, ha $g_n(x) \leq g_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$ minden x-re az $x \in [0,1]$ halmazon.

$$g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$x^n - x^{n+1} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

Ez igaz minden x-re az $x \in [0,1]$ halmazon.

$$\lim_{n\to\infty} g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1-\frac{n}{n+1}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\cdot\frac{n+1-n}{n+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{e}\cdot 0 = 0$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0$, ezért a függvénysorozat egyenletesen konvergens az $x \in [0,1]$ intervallumon.

3.6. Feladat[10]. $f_n(x) = \sqrt{x+\frac{1}{n}} \qquad (x \geq 0)$

Pontonkénti konvergencia:

Mivel $\frac{1}{n} \to 0$ és $x+\frac{1}{n} \to x$, ezért

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{x+\frac{1}{n}} = \sqrt{x},$$

tehát az $f_n(x) = \sqrt{x+\frac{1}{n}}$ függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x) = \sqrt{x}$ függvényhez az $x \in [0,\infty)$ intervallumon.

Egyenletes konvergencia:

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right| = \sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}$$

Vizsgáljuk meg $g_n(x)$ a szuprémumát.

$$\sup_{x\in[0,\infty)}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) = \sup_{x\in[0,\infty)}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}\right)$$

$$= \sup_{x\in[0,\infty)}\frac{x+\frac{1}{n}-x}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} = \sup_{x\in[0,\infty)}\frac{1}{\sqrt{n^2\left(x+\frac{1}{n}\right)}+\sqrt{n^2x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n(nx+1)}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Nézzük meg $g_n(x)$ szuprémumának határértékét.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

[10] Gémes Margit, Szentmiklóssy Zoltán - Analízis feladatgyűjtemény I. kötetének 7.7.-es feladata

Mivel $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} g_n(x) \to 0$, ezért $f_n(x)$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f(x) = \sqrt{x}$ függvényhez az $x \in [0,\infty)$ intervallumon.

3.7. Feladat.[11] $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$

Pontonkénti konvergencia:

Mivel $\frac{1}{n^2} \to 0$, így $x^2 + \frac{1}{n^2} \to x^2$, ezért

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Tehát az $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x) = |x|$ függvényhez az $x \in \mathbb{R}$ halmazon.

Egyenletes konvergencia:

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|$$

Vizsgáljuk meg $g_n(x)$ szuprémumát.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|}\right) =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2x^2 + 1} + n|x|\right)} \le \frac{1}{n}$$

Nézzük meg $g_n(x)$ szuprémumának határértékét.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Mivel $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) \to 0$, ezért $f_n(x)$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f(x) = |x|$ függvényhez az $x \in \mathbb{R}$ halmazon.

3.8. Feladat.[12] $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$

Pontonkénti konvergencia:

Mivel $\frac{x}{n} \to 0$, ezért

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{x}{n} = 0,$$

[11] Gémes Margit, Szentmiklóssy Zoltán – Analízis feladatgyűjtemény I. kötetének 7.8.-as feladata

[12] Gémes Margit, Szentmiklóssy Zoltán – Analízis feladatgyűjtemény I. kötetének 7.10.-es feladata

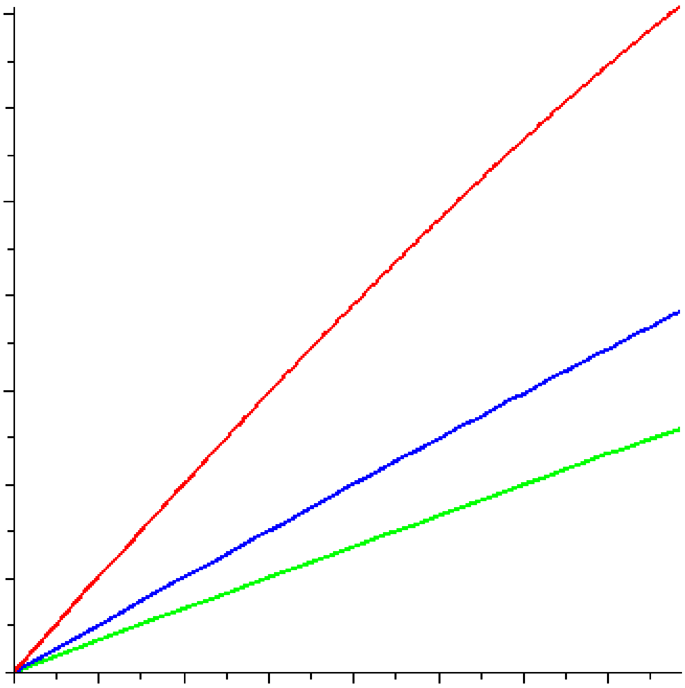
tehát az $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$ függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x) = 0$ függvényhez az $x \in \mathbb{R}$ halmazon.

Egyenletes konvergencia:

Állítás: Az $x \in \left[0, {}^{\pi}/_{4}\right]$ intervallumon egyenletesen konvergens.

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\sin\frac{x}{n} - 0\right| = \sin\frac{x}{n}$$

Nézzük meg $g_n(x)$ első, második és harmadik tagját ábrázolva az $x \in \left[0, {}^{\pi}/_{4}\right]$ intervallumon.



Az ábrán látható, hogy $g_n(x)$ az $x = {}^{\pi}/_{4}$ pontban veszi fel a legnagyobb értéket.

Vizsgáljuk meg $g_n(x)$ szuprémumának határértékét.

$$\sup_{x\in[0,\pi/4]} \sin\frac{x}{n} \leq \sin\frac{{}^{\pi}/_{4}}{n}$$

Mivel $\frac{{}^{\pi}/_{4}}{n} \to 0$, ezért

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{{}^{\pi}/_{4}}{n}\right) = 0.$$

Mivel $\sup\limits_{x\in[0,\pi/4]} g_n(x) \to 0$, ezért $f_n(x)$ függvénysrozat valóban egyenletesen konvergál az $f(x) = 0$ függvényhez az $x \in \left[0, {}^{\pi}/_{4}\right]$ intervallumon.

Irodalomjegyzék

[1] Laczkovics Miklós, T. Sós Vera – Valós Analízis II.

[2] Leindler László – Analízis

[3] Gémes Margit, Szentmiklóssy Zoltán – Analízis feladatgyűjtemény I.