



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

# Differenciálegyenletek analitikus és numerikus megoldása

BSC SZAKDOLGOZAT

Kósa Lilla

Témavezető: Chripkó Ágnes, egyetemi adjunktus, PhD  
Eötvös Loránd Tudományegyetem Informatikai Kar  
Numerikus Analízis Tanszék

*Budapest, 2017*

## Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani legfőképpen témavezetőmnek, Ch-  
ripkó Ágnesnek a rengeteg segítségért, és türelméért amellyel támogatott a  
szakdolgozatom írása során. Emellett szeretném megköszönni tanárainknak,  
akik tanulmányaim során végigkísértek és megismertettek a matematika sok-  
színűségével.

# Tartalomjegyzék

Bevezetés	4
<b>1. Alapvető fogalmak és tételek</b>	<b>6</b>
<b>2. Differenciálegyenletek analitikus megoldása</b>	<b>9</b>
2.1. Közvetlenül integrálható egyenletek . . . . .	9
2.2. Szeparábilis egyenletek . . . . .	10
2.3. Homogén egyenletek . . . . .	11
2.4. Lineáris egyenletek . . . . .	12
2.5. Bernoulli-féle egyenletek . . . . .	13
2.6. Egzakt egyenletek . . . . .	14
<b>3. Differenciálegyenletek numerikus megoldása</b>	<b>16</b>
3.1. Euler-módszer . . . . .	17
3.2. Trapéz módszer . . . . .	22
3.3. Runge–Kutta-módszer . . . . .	23
3.4. Adams-módszer . . . . .	26
<b>4. Példák</b>	<b>31</b>
4.1. Populációs modellek . . . . .	31
4.2. Nyomozás . . . . .	34
4.3. Radioaktív bomlás . . . . .	36
<b>5. Differenciálegyenletek MATLAB megoldása</b>	<b>38</b>
<b>6. Kitekintés</b>	<b>42</b>
6.1. Szerelmi modell . . . . .	42
6.2. Légszennyezés . . . . .	43

6.3. Szánkózás . . . . .	43
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>44</b>
<b>Függelék</b>	<b>46</b>

# Bevezetés

Dolgozatom témájául a differenciálegyenletek analitikus és numerikus megoldását választottam, ugyanis lenyűgöző, ahogyan segítségükkel leírhatók a körülöttünk lévő folyamatok és ebbe szeretnék egy kis betekintést nyújtani ezen dolgozaton keresztül.

Alig van olyan terület, ami ne alkalmazná. A biológiával foglalkozók használják baktrétiumok szaporodásának elemzésére. A fizikusok a radioaktív bomlást analizálják a segítségével. A kriminalisztika a halál időpontját tudja meghatározni általa. A gyógyszeriparban a járványterjedést vizsgálják vele. A szociológusok populációs modelleket gyártanak differenciálegyenletek révén. Az orvostudomány a vesekő szétzúzását köszönheti neki. A meteorológia időjárás előrejelzés tud adni differenciálegyenleteken keresztül. A műszaki terület arcfelismerő rendszereket tud tervezni vele. A hadászatban csatamodellek írhatók fel differenciálegyenletek folytán. Az élelmiszeriparban a tartósítás során kap szerepet. A biztonságtechnika mozgás detektálást tud vele végezni.

Mint látható a fenti néhány példán keresztül, megszámlálhatatlan a differenciálegyenletek gyakorlati alkalmazásának sora. Péter Rózsa<sup>1</sup> szavait idézve,

„A matematika nem sztatikus, zárt, hanem élő, fejlődő valami; bár-hogyan próbáljuk zárt formába merevíteni, talál magának rést: elevenen robban ki belőle.”

Ezen gondolatot lebegjen a szemünk előtt a dolgozat olvasása során is. Noha számos dologra nem fogunk kitérni a dolgozat terjedelmi megszorításai miatt.

Mind az analitikus mind a numerikus módszereknek a legismertebb technikáit fogjuk érinteni, majd a 4. illetve 5. fejezetben példákon keresztül kerül bemutatásra néhány. Ezek közül valamit analitikusan, valamit numerikusan

---

<sup>1</sup>Magyar matematikus, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja (1973), az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika professzora (1955-1975). A Játék a végtelennel című tudományos ismeretterjesztő könyv szerzője.

MATLAB segítségével oldunk meg. Továbbá a 6. fejezetben a szakdolgozat témáján túlmutató példákkal igyekszem még jobban alátámasztani ezen téma sokszínűségét.

# 1. fejezet

## Alapvető fogalmak és tételek

A differenciálegyenlet olyan egyenlet, amely kapcsolatot teremt a függvény és annak deriváltjai között. Ezen dolgozat csak az *elsőrendű közönséges differenciálegyenletekkel* foglalkozik, azaz olyan differenciálegyenletekkel, amelyekben az ismeretlen függvény egyváltozós<sup>1</sup> és csak az első deriváltja<sup>2</sup> szerepel.

**1.1. Definíció.**  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  tartomány. Legyen  $f: T \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvény. Ekkor *explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek* nevezzük az alábbi:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (1.1)$$

amely fennáll minden  $t \in I$ -re. Ezen összefüggésben pedig  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ -t deriválható függvénynek keressük, ahol  $I \subset \mathbb{R}$  nyílt intervallum.

Egy differenciálegyenletnek általában nem egyetlen megoldása van, ezért már az elején megadunk egy úgynevezett *kezdeti feltételt*, ami a megoldás egy konkrét kezdeti pontban. Kezdetiérték-problémának (*Cauchy-feladatnak*) nevezzük az alábbi problémát:

Adott  $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  tartomány,  $f: T \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvény,  $(t_0, x_0) \in T$ .<sup>3</sup> Keresünk egy  $I \subset \mathbb{R}$  nyílt intervallumot, hogy  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenciálható

---

<sup>1</sup>Amennyiben az ismeretlen függvény többváltozós, úgy *parciális differenciálegyenletről* beszélünk.

<sup>2</sup>Amennyiben  $n$  a legmagasabb deriváltja az ismeretlen függvénynek, úgy  *$n$ -edrendű differenciálegyenletről* beszélünk.

<sup>3</sup> $t_0 \in \mathbb{R}$  gyakran idő, míg  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  térkoordinátáknak tekinthető.

függvényre fennálljon:

$$\begin{aligned} \{(t, x(t)) : t \in I\} &\subset T \text{ és } t_0 \in I \\ x'(t) &= f(t, x(t)) \quad \forall t \in I \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

Amennyiben ezek teljesülnek,  $x$ -et a kezdetiérték-probléma megoldásának nevezzük.

A megoldás létezésére először *Augustin Cauchy* (1789-1857) francia matematikus adott egy tételt, majd ezt *Giuseppe Peano* (1858-1932) olasz matematikus gondolta tovább és született meg a következő egzisztenciátétel.

**1.2. Tétel. (Cauchy–Peano–féle egzisztenciátétel)** *Tegyük fel, hogy  $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  tartományon értelmezett  $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény folytonos. Ekkor minden  $(t_0, x_0) \in T$  esetén az*

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

*kezdetiérték-problémának létezik megoldása.*

A megoldás egyértelműségére pedig *Rudolf Lipschitz* (1832-1903) német matematikus, *Charles Émile Picard* (1856-1941) francia matematikus és *Ernst Leonard Lindelöf* (1870-1946) finn matematikus eredményei alapján megszületett a következő tétel.

**1.3. Tétel. (Picard–Lindelöf–féle egzisztenciátétel)** *Tegyük fel, hogy  $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  tartományon értelmezett  $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvény a második változójában Lipschitz-tulajdonságú, azaz létezik  $L > 0$  szám, hogy minden  $(t, x_1), (t, x_2) \in T$  pontokra igaz az alábbi egyenlőtlenség:*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

*Legyen továbbá  $a, b > 0$ ,  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  olyanok, hogy:*

$$H := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \subset T,$$



illetve legyen  $M = \max_{(t,x) \in H} |f(t,x)|$ , és  $\Delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ . Ekkor a kezdetiérték-problémának egyértelműen létezik megoldása a  $(t_0 - \Delta, t_0 + \Delta)$  intervallumon.

Ezen tétel csak a lokális egyértelműségről szól, azaz hogy mikor létezik az  $x(t_0) = x_0$  kezdeti feltétellel adott  $x'(t) = f(t, x(t))$  differenciálegyenletnek a  $t_0$  egy környezetében egyértelmű megoldása. Kérdés azonban, hogy mely lehető legbővebb nyílt intervallumon értelmezhetjük a megoldást. Ezt a maximális megoldást fogjuk *globális megoldásnak* nevezni. Az alábbi lemma azt mondja ki, hogy a megoldás nem csak lokálisan egyértelmű.

**1.4. Lemma.** *Tegyük fel, hogy  $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  tartományon értelmezett  $f: T \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvény a második változójában Lipschitz-tulajdonságú. Legyen  $I$  nyílt intervallum, amelyre  $t_0 \in I$ . Ha  $x, y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  megoldásai  $x'(t) = f(t, x(t))$  egyenletnek és  $x(t_0) = y(t_0)$ , akkor  $x(t) = y(t)$  mindent  $t \in I$  esetén.*

A következő tétel pedig a globális megoldás létezéséről és egyértelműségéről szól.

**1.5. Tétel.** *Tegyük fel, hogy  $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  tartományon értelmezett  $f: T \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvény a második változójában Lipschitz-tulajdonságú. Ekkor*

1. *Minden  $(t_0, x_0) \in T$  létezik egy olyan  $I(t_0, x_0)$  nyílt intervallum, amelyen létezik a kezdetiérték-problémának megoldása, de ennél bővebb nyílt intervallumon már nem létezik.*
2. *Ez az  $x: I(t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  megoldás egyértelmű.*
3. *Ezen megoldás minden  $K \subset T$  kompakt halmazt elhagy, azaz bármely  $K \subset T$  kompakt halmazhoz és  $(t_0, x_0) \in T$  ponthoz vannak olyan  $t_1, t_2 \in I(t_0, x_0)$  számok, amelyekre  $t_1 < t_0 < t_2$  és a  $t_1, t_2$  számokhoz tartozó megoldás már nincs a kompakt halmazban.*

## 2. fejezet

# Differenciálegyenletek analitikus megoldása

Ebben a fejezetben olyan megoldási módszereket veszünk, amelyekben a pontos megoldást ki tudjuk fejezni képlettel.

### 2.1. Közvetlenül integrálható egyenletek

A közvetlenül integrálható egyenletek a legegyszerűbb differenciálegyenletek egyike. Ahogy a neve is utal rá, egyszerű integrálással megkapható a megoldás. Ezen differenciálegyenlet a következő alakú:

$$x'(t) = g(t), \tag{2.1}$$

ahol  $t \in I$  és  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvény.

**2.1. Tétel.** (2.1) differenciálegyenlet tetszőleges kezdetiérték-problémára globálisan egyértelműen megoldható és megoldása

$$x(t) = \int_{t_0}^t g(s) ds + x_0$$

alakú, ahol  $x_0 \in \mathbb{R}$  és  $t_0 \in I$  a kezdeti feltételben szereplő értékek.

*Bizonyítás.* Mivel  $g$  folytonos függvény, így integrálható. (2.1) egyenletet a  $t_0$  kezdőidőponttól  $t$ -ig integrálva és hozzáadva a kezdeti  $x_0$  értéket, pont a fenti képlet adódik. ■

## 2.2. Szeparábilis egyenletek

*Szeparábilis, vagy szétválasztható változójú differenciálegyenletnek* nevezzük azt a differenciálegyenletet, amely előáll

$$x'(t) = g(t)h(x(t)) \quad (2.2)$$

alakban, ahol  $t \in I$  és  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ , illetve  $h: J \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvények, ahol  $I, J \subset \mathbb{R}$  nyílt intervallumok.<sup>1</sup> Az ilyen típusú differenciálegyenletek megoldását az  $x$ -től és  $t$ -től függő változók szeparálásával kapjuk.

**2.2. Megjegyzés.** Amennyiben  $g(t) = 1$  minden  $t \in I$ , úgy autonóm differenciálegyenletről beszélünk.

**2.3. Tétel.** Tegyük fel, hogy  $h$  értékkészlete nem tartalmazza a  $0$ -t. Ekkor (2.2) differenciálegyenlet tetszőleges kezdetiérték-problémára globálisan egyértelműen megoldható és megoldása

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{h(s)} ds = \int_{t_0}^t g(s) ds$$

*implicit egyenletnek tesz eleget, ahol  $x_0 \in \mathbb{R}$  és  $t_0 \in I$  a kezdeti feltételben szereplő értékek.*

*Bizonyítás.* (2.2) egyenletet átrendezve adódik az

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t)$$

összefüggés.<sup>2</sup> Mivel  $g$  folytonos függvény, így integrálható. Továbbá  $h$  folytonosságából következik, hogy felveszi minimumát, ami sehol sem nulla, és alulról korlátos, így  $\frac{1}{h}$  is folytonos és korlátos, ezért integrálható. Ennek következtében a fenti képletből kapjuk a

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{h(x(s))} ds = \int_{t_0}^t g(s) ds$$

---

<sup>1</sup>Ebből kifolyólag  $x$  olyan függvény, amely  $I$ -ből képez  $J$ -be.

<sup>2</sup> $h(x(t))$ -vel természetesen csak azért oszthatunk, mert feltettük, hogy az nem egyenlő  $0$ -val.

egyenletet. Ekkor helyettesítéses integrálást alkalmazva az egyenlet bal oldalára,

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{h(s)} ds = \int_{t_0}^t g(s) ds$$

adódik. Az  $x(t_0) = x_0$  kezdeti feltételt beírva megkapjuk a bizonyítani kívánt képletet. ■

## 2.3. Homogén egyenletek

A közönséges differenciálegyenletek egy nagy szeletét, a *homogén differenciálegyenleteket* vissza tudjuk vezetni szeparábilis egyenletre. Nevét onnan kapta, hogy nincs benne kizárólag  $t$ -től függő tag és nem szerepel benne konstans sem. Általános alakja a következő:

$$x'(t) = g\left(\frac{x(t)}{t}\right), \quad (2.3)$$

ahol  $t \in I$  és  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvény.

**2.4. Tétel.** *Tegyük fel, hogy a  $g$  függvénynek nincs fixpontja. Legyenek  $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$  olyanok, hogy  $\frac{x_0}{t_0} \in I$ . Ekkor (2.3) differenciálegyenlet tetszőleges kezdetiérték-problémára globálisan egyértelműen megoldható és megoldása*

$$x(t) = tG^{-1}\left(\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)\right)$$

alakú, ahol

$$G(u(t)) = \int_{\frac{x_0}{t_0}}^{u(t)} \frac{1}{g(s) - s} ds.$$

*Bizonyítás.* Vezessük be az  $u(t) := \frac{x(t)}{t}$  függvényt. Ezt deriválva kapjuk az

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{x'(t)t - x(t)}{t^2} = \frac{1}{t}x'(t) - \frac{1}{t^2}x(t) = \frac{1}{t}g(u(t)) - \frac{1}{t}u(t) = \\ &= \frac{1}{t}(g(u(t)) - u(t)) \end{aligned}$$

összefüggést. Ez már egy szétválasztható változójú egyenlet, a változókat szeparálva

$$\frac{u'(t)}{g(u(t)) - u(t)} = \frac{1}{t}$$

adódik. Helyettesítéssel integrálást alkalmazva megkapjuk az

$$\int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{1}{g(s) - s} ds = \int_{t_0}^t \frac{1}{t} ds = \ln(t) - \ln(t_0) = \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

egyenletet, amelyet ha  $u(t)$  definíciója folytán felszorozunk  $t$ -vel és beszorozzuk a bal oldal inverzével, megkapjuk a tételben szereplő képletet. ■

## 2.4. Lineáris egyenletek

További fontos osztálya a differenciálegyenleteknek, a *lineáris differenciálegyenletek*. Ezek az alábbi alakúak:

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \quad (2.4)$$

ahol  $t \in I$  és  $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvények.

**2.5. Megjegyzés.** *Homogén lineáris differenciálegyenletről beszélünk, ha  $b(t) = 0$ . Ekkor az egyenlet (2.2) alakú, és szeparábilis módon megoldható.*

**2.6. Megjegyzés.** *Inhomogén lineáris differenciálegyenletnek nevezzük a  $b(t) \neq 0$  esetet.*

**2.7. Megjegyzés.** *Amennyiben  $a(t) = 0$ , úgy a differenciálegyenletünk pont a (2.1) képletet adja, és közvetlenül integrálható módon felírható a megoldás.*

**2.8. Tétel.** *(2.4) differenciálegyenlet tetszőleges kezdetiérték-problémára globálisan egyértelműen megoldható és megoldása*

$$x(t) = e^{A(t)} \left( x_0 + \int_{t_0}^t b(s) e^{-A(s)} ds \right)$$

*alakú, ahol  $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 \in I$  a kezdeti feltételben szereplő értékek.*

*Bizonyítás.* Rendezzük át (2.4) egyenletet a következőképpen:

$$x'(t) - a(t)x(t) = b(t).$$

A kulcs az, hogy találjunk egy  $A'(t) = a(t)$  függvényt. Ha ez megvan,  $e^{-A(t)}$ -t emeljük ennek negáltjára, majd szorozzuk be ezzel a fenti egyenletet.

$$x'(t)e^{-A(t)} - a(t)e^{-A(t)}x(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

Vegyük észre, hogy a bal oldalon pont az  $x(t)e^{-A(t)}$  összetett függvény deriváltja található, és így adódik a következő:

$$\left[ x(t)e^{-A(t)} \right]' = b(t)e^{-A(t)}$$

Ezt a kifejezést integráljuk  $t_0$ -tól  $t$ -ig:

$$x(t)e^{-A(t)} - x(t_0)e^{-A(t_0)} = \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds.$$

Ezt  $x(t)$ -re rendezve, és alkalmazva az  $x(t_0) = x_0$  kezdeti feltételt, megkapjuk a tételben szereplő megoldóképletet:

$$x(t) = e^{A(t)} \left( x_0 + \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds \right).$$

■

## 2.5. Bernoulli-féle egyenletek

Az alábbi közönséges, egyismeretlenes, elsőrendű, nemlineáris differenciálegyenletet *Bernoulli-féle differenciálegyenlenek* nevezzük:

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^\alpha(t), \tag{2.5}$$

ahol  $\alpha$  tetszőleges valós szám, de  $\alpha \neq 0$  és  $\alpha \neq 1$ . Előbbi esetet ugyanis inhomogén lineáris differenciálegyenletnek, míg utóbbit szeparábilis differenciálegyenletnek nevezzük. Az

$$y(t) = [x(t)]^{1-\alpha}$$

helyettesítéssel lineáris differenciálegyenletre vezethetjük vissza ezt a típust. Nézzük meg ennek a menetét. Első lépésként (2.5) egyenletet szorozzuk be

$(1 - \alpha)[x(t)]^{-\alpha}$ -val:

$$(1 - \alpha)[x(t)]^{-\alpha}x'(t) = (1 - \alpha)a(t)[x(t)]^{1-\alpha} + (1 - \alpha)b(t). \quad (2.6)$$

Második lépésként használjuk az  $y(t) = [x(t)]^{1-\alpha}$  összefüggést, illetve ennek deriváltját,

$$y'(t) = (1 - \alpha)[x(t)]^{-\alpha}x'(t).$$

Helyettesítsük be ezeket (2.6) egyenletbe:

$$y'(t) = (1 - \alpha)a(t)y(t) + (1 - \alpha)b(t).$$

Legyen  $(1 - \alpha)a(t) := \hat{a}(t)$ , illetve  $(1 - \alpha)b(t) := \hat{b}(t)$ .

$$y'(t) = \hat{a}(t)y(t) + \hat{b}(t)$$

Ez már (2.4) lineáris differenciálegyenlet alakú, és megoldható annak megoldóképletével.

## 2.6. Egzakt egyenletek

Legyenek  $I$  és  $J$  nyílt intervallumok,  $g, h: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvények és  $h$  sehol se vegye fel a nullát. *Egzakt differenciálegyenletnek* nevezünk egy egyenletet, ha

$$x'(t) = -\frac{g(t, x(t))}{h(t, x(t))} \quad (2.7)$$

alakú, és  $\partial_2 g(t, x(t)) = \partial_1 h(t, x(t))$ .

**2.9. Tétel.** (2.7) *differenciálegyenlet tetszőleges kezdetiérték-problémára globálisan egyértelműen megoldható és megoldása kielégíti a*

$$G(t, x(t)) = c$$

*implicit egyenletet valamilyen  $c$  konstanssal, ha feltesszük, hogy  $(g(t, x(t)), h(t, x(t)))$  primitív függvénye  $G$ .*

*Bizonyítás.* Ha  $h$  sehol sem veszi fel a nullát, (2.7) felírható

$$g(t, x(t)) + h(t, x(t))x'(t) = 0$$

alakban. Legyen  $F(t) := G(t, x(t))$ . Deriváljuk ezt le  $\partial_1 G = g$  és  $\partial_2 G = h$  figyelembevételével:

$$F'(t) = g(t, x(t)) + h(t, x(t))x'(t) = 0.$$

Ha  $F$  deriváltja nulla, akkor neki a konstans függvénynek kell lenni, tehát

$$G(t, x(t)) = c$$

is fennáll tetszőleges  $c \in \mathbb{R}$  számra. Ez az összefüggés teljesül az  $x(t_0) = x_0$  kezdetiérték-feltételre is,

$$G(t_0, x_0) = c.$$

Ezzel megkaptuk azt, amit bizonyítani kívántunk. ■



## 3. fejezet

# Differenciálegyenletek numerikus megoldása

A gyakorlatban sokszor lehetetlen a differenciálegyenletek megoldásainak pontos meghatározása. A numerikus analízis közelítő megoldásokra törekszik, de úgy, hogy bizonyos elfogadható hibahatáron belül maradjon a kapott érték.

A továbbiakban nézzük a differenciálegyenletek numerikus megoldásának néhány közkezdvelt módszerét illetve azok konvergenciáját. Ehhez tekintsük az alábbi kezdeti feltétellel adott differenciálegyenletet

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad (3.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (3.2)$$

ahol  $m \in \mathbb{N}^+$ ,  $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  tartomány,  $u_0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $f: T \rightarrow \mathbb{R}^m$  folytonos függvény és a keresett függvény pedig  $u \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , és ez az  $u$  differenciálható.

Valamint vezessünk be a téma kifejtéséhez elengedhetetlen fogalmakat.

Először is gyártsunk egy ekvidisztáns intervallumot,  $\omega_\tau := \{n\tau: n = 0, 1, 2, \dots\}$  rácshálót,  $t_n = n\tau$  rácspontokkal, ahol  $\tau > 0$  adott paraméter. Jellemzően ezt a  $\tau$ -t a  $(0, 1)$  intervallumból vesszük. A továbbiakban egy olyan  $y_\tau: \omega_\tau \rightarrow \mathbb{R}$  rácsfüggvényt szeretnénk meghatározni, amely a  $t_n \in \omega_\tau$  pontban „jól közelíti” az  $u(t)$  megoldásfüggvényt.

**3.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy numerikus módszer konvergens a  $t = t^*$  pontban, ha  $\lim_{\tau \rightarrow 0} |y_\tau(t_n) - u(t^*)| = 0$  és  $n\tau = t^*$ .

**3.2. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy numerikus módszer  $p$ -ed rendben kon-

vergens, ha  $|y_\tau(t_n) - u(t^*)| = o(\tau^p)$ ,  $p > 0$  állandó és  $n\tau = t^*$ .

Míg a fenti definíciók a pontonkénti konvergenciát adják meg, a következő az intervallumon vett konvergenciát.

**3.3. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy numerikus módszer konvergens a  $[0, T)$  intervallumon, ha minden  $t^* \in [0, T)$  pontban konvergens.

A konvergencia nehezen megállapítható, ugyanis a pontos megoldást, azaz  $u(t^*)$ -ot nem ismerjük, viszont a vizsgálata indokolt, hiszen az a numerikus módszer hibás, ami nem konvergál valamiképp a közelíteni kívánt függvényhez. Szerencsére adott két egyszerűbben ellenőrizhető tulajdonság (stabilitás és konzisztencia), amiknek meglétéből következik a konvergencia. Határozzuk meg ezen két elv taglalásához szükséges fogalmakat.

**3.4. Definíció.** Lokális hibának nevezzük  $d_i := y_\tau(t_i) - u(t_i)$ -t, azaz az egy lépés alatt keletkezett hibát, feltéve, hogy  $y_\tau(t_{i-1}) = u(t_{i-1})$ .

**3.5. Definíció.** Jelölje  $e_i := y_\tau(t_i) - u(t_i)$  a globális hibát, amely az  $i$  lépés alatt felhalmozódott hiba.

**3.6. Definíció.** Egy numerikus módszer stabil, ha létezik  $K \geq 0$ , hogy

$$|e_i| \leq K \left( |e_0| + \sum_{j=1}^i |d_j| \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ahol  $n$  a lépésszám.

A konzisztenciáról és magáról a fentebb felvetett összefüggésről később esik szó.

## 3.1. Euler-módszer

Az Euler-módszer a legegyszerűbb módszer az elsőrendű közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldására. Ezt két típusra lehet bontani attól függően, hogy  $y_\tau(t_{n+1})$ -et meg lehet-e határozni egyszerű behelyettesítéssel vagy sem. Előbbit *explicit Euler-módszernek*, utóbbit *implicit Euler-módszernek* nevezzük.

## Explicit Euler-módszer

Nézzük (3.1) képletet speciálisan  $t_n$ -re. Írjuk fel a differenciálhányadost ezen pontban:

$$u'(t_n) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u(t_n + \tau) - u(t_n)}{\tau}.$$

Mivel  $y_\tau(t_n)$  „jól közelíti”  $u(t_n)$ -t, a fenti határérték átírható

$$\frac{y_\tau(t_{n+1}) - y_\tau(t_n)}{\tau}$$

alakban, ami viszont (3.1) miatt megegyezik  $f(t_n, u(t_n)) \approx f(t_n, y_\tau(t_n))$ -nel.

Ezek alapján konstruálunk egy módszert, ezt az alábbi képlet fejezi ki:

$$\frac{y_\tau(t_{n+1}) - y_\tau(t_n)}{\tau} = f(t_n, y_\tau(t_n)), \quad (3.3)$$

$$y_\tau(t_0) = u_0, \quad (3.4)$$

amely fennáll minden  $n = 0, 1, 2, \dots$  értékre. Ezen eljárást explicit Euler módszernek nevezzük. A fentiből adódik az

$$y_\tau(t_{n+1}) = y_\tau(t_n) + \tau f(t_n, y_\tau(t_n))$$

egyenlet, amin világosan látszik, hogy  $y_\tau(t_{n+1})$  közvetlenül számolható  $y_\tau(t_n)$ -ből.

**3.7. Definíció.** *A numerikus megoldás és a pontos megoldás különbsége (azaz  $e_n = y_\tau(t_n) - u(t_n)$ ) szerint vett rácsfüggvényt globális hibafüggvénynek nevezük.*

Ezt a különbséget átalakítva adódik az  $y_\tau(t_n) = e_n + u(t_n)$  egyenlet, amit ha behelyettesítünk (3.3)-ba, kapjuk az

$$\frac{(e_{n+1} + u(t_{n+1})) - (e_n + u(t_n))}{\tau} = f(t_n, e_n + u(t_n))$$

egyenletet. Ezt az  $e_n, e_{n+1}$ -re rendezve és hozzáadva illetve kivonva belőle  $f(t_n, u(t_n))$ -et:

$$\frac{e_{n+1} - e_n}{\tau} = \left[ f(t_n, u(t_n)) - \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau} \right] - [f(t_n, e_n + u(t_n)) - f(t_n, u(t_n))]. \quad (3.5)$$

Az alábbi tag az Euler-módszer képlethibája, ami azt fejezi ki, hogy mennyire tér el a módszer adta megoldás a pontos megoldástól:

$$f(t_n, u(t_n)) - \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau}.$$

Ezt a tagot *lokális approximációs hibának* nevezzük. Jelöljük ezt  $\psi_n^{(1)}$ -el, míg a  $[f(t_n, e_n + u(t_n)) - f(t_n, u(t_n))]$  tagot jelölje  $\psi_n^{(2)}$ . Vegyük észre, hogy  $\psi_n^{(1)}$  pont a (3.3) numerikus sémánk a pontos értékkel behelyettesítve.

**3.8. Definíció.** *Azt mondjuk, hogy a numerikus módszerünk konzisztens, ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n^{(1)} = 0$ . Ha  $\psi_n^{(1)} = o(\tau^p)$ , akkor a módszer  $p$ -edrendben konzisztens.*

Nézzük ezek alapján az explicit Euler-módszer konzisztenciáját.

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)} &= -\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau} + f(t_n, u(t_n)) = \\ &= -\frac{u(t_n + \tau) - u(t_n)}{\tau} + f(t_n, u(t_n)) = \\ &= -\frac{u(t_n) + u'(t_n)\tau + u''(t_n)\frac{\tau^2}{2} + o(\tau^3) - u(t_n)}{\tau} + f(t_n, u(t_n)) = \\ &= -\left(u'(t_n) + u''(t_n)\frac{\tau}{2}\right) + f(t_n, u(t_n)) + o(\tau^2) = \\ &= -\frac{\tau}{2}u''(t_n) + o(\tau^2) \equiv o(\tau), \end{aligned}$$

azaz az explicit Euler-módszer elsőrendben konzisztens. A fenti átalakításoknál sorban a következők lettek kihasználva:

- $t_{n+1} = t_n + \tau$  a rácsháló definíciójából adódóan,
- Taylor-sorfejtés alkalmazása az  $u(t_n)$  pont körül,
- egyszerűsíték  $\tau$ -val,
- felhasználjuk, hogy  $u'(t_n) = f(t_n, u(t_n))$  (3.1) alapján.

Alapvetően nem a konzisztencia, hanem a konvergencia meghatározása a célunk, de mint már említésre került, ez nem olyan egyszerű feladat.

**3.9. Tétel.** *Ha egy numerikus módszer konzisztens és stabil, akkor konvergens is, és a konvergencia rendje megegyezik a konzisztencia rendjével.*

Nézzük ennek alapján a módszer stabilitását. Induljunk ki az

$$e_{n+1} = e_n + \tau\psi_n^{(1)} + \tau\psi_n^{(2)} \quad (3.6)$$

egyenletből, amely (3.5) átrendezettje. Következő lépésként kihasználjuk, hogy  $f$  Lipschitz-tulajdonságú a második változójában.

$$|\psi_n^{(2)}| = |f(t_n, e_n + u(t_n)) - f(t_n, u(t_n))| \leq L|u(t_n) + e_n - u(t_n)| = L|e_n|$$

Így (3.6) egyenletből adódik az alábbi:

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + |\tau\psi_n^{(1)}| + \tau L|e_n| = (1 + \tau L)|e_n| + |\tau\psi_n^{(1)}|.$$

Ez viszont minden  $n$ -re igaz, így továbbfejthető:

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq (1 + \tau L)|e_{n-1}| + |\tau\psi_{n-1}^{(1)}| \leq \\ &\leq (1 + \tau L) \left[ (1 + \tau L)|e_{n-2}| + \tau|\psi_{n-2}^{(1)}| \right] + |\tau\psi_{n-1}^{(1)}| = \\ &= (1 + \tau L)^2|e_{n-2}| + \tau(1 + \tau L)|\tau\psi_{n-2}^{(1)}| + |\tau\psi_{n-1}^{(1)}| \leq \\ &\leq (1 + \tau L)^n|e_0| + \tau \sum_{i=0}^{n-1} (1 + \tau L)^i |\psi_{n-1-i}^{(1)}| < \\ &< (1 + \tau L)^n \left[ |e_0| + \tau \sum_{i=0}^{n-1} |\psi_{n-1-i}^{(1)}| \right] \end{aligned}$$

Ez majdnem a stabilitás definíciójában szereplő képlet, már csak  $(1 + \tau L)^n$  tagot kell konstanssal felülbecsülnünk. Illetve ami még eltérés a 3.6 képlethez képest, hogy 3.6 képletben a 3.4 definícióban található  $d_i$  érték szerepel, míg ezen formulában a  $\psi_i^{(1)}$  lokális approximációs hiba áll. Ám ez a kettő csak  $\tau$ -szorosban tér el,  $\tau\psi_i^{(1)} = d_i$ .  $(1 + \tau L)^n$  becsléséhez tegyük fel, hogy  $N$  a maximális lépésszám, így az utolsó pont, ahol közelítést végeztünk az az  $\tau N = t_N$ . Így adódik a következő összefüggés:

$$(1 + \tau L)^n < e^{\tau Ln} < e^{Lt_N} = K.$$

Összegezve az eddigieket, adódik a stabilitás az  $n = 1, \dots, N$  értékekre:

$$|e_n| < K \left( |e_0| + \sum_{i=0}^{n-1} |d_{n-1-i}| \right).$$

Tehát az explicit Euler-módszer elsőrendben konvergens, ugyanis elsőrendben konzisztens és stabilis.

A további módszereknél is érvényes a stabilitás, ezért csak a konzisztenciát fogjuk meghatározni.

## Implicit Euler-módszer

A most következő módszert implicit Euler-módszernek nevezzük

$$\frac{y_\tau(t_{n+1}) - y_\tau(t_n)}{\tau} = f(t_{n+1}, y_\tau(t_{n+1})), \quad (3.7)$$

$$y_\tau(t_0) = u_0, \quad (3.8)$$

amely fennáll minden  $n = 0, 1, 2, \dots$  értékre. (3.7)-et átalakítva adódik az

$$y_\tau(t_{n+1}) = y_\tau(t_n) + \tau f(t_{n+1}, y_\tau(t_{n+1}))$$

egyenlet. Hátránya az explicit Euler-módszerrel szemben, hogy itt minden lépésben egy nemlineáris egyenletet kell megoldanunk.

Nézzük ezen módszer konzisztenciáját is. Az explicit Euler-módszer mintájára a lokális approximációs hiba az alábbi:

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)} &= -\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau} + f(t_{n+1}, u(t_{n+1})) = \\ &= -\frac{u(t_{n+1}) - u(t_{n+1} - \tau)}{\tau} + f(t_{n+1}, u(t_{n+1})) = \\ &= -\frac{u(t_{n+1}) - u(t_{n+1}) - u'(t_{n+1})\tau - u''(t_{n+1})\frac{\tau^2}{2} + o(\tau^3)}{\tau} + f(t_{n+1}, u(t_{n+1})) = \\ &= -(u'(t_{n+1}) - u''(t_{n+1})\frac{\tau}{2}) + f(t_{n+1}, u(t_{n+1})) + o(\tau^2) = \\ &= -u''(t_{n+1})\frac{\tau}{2} + o(\tau^2) \equiv o(\tau) \end{aligned}$$

Tehát az implicit Euler-módszer is elsőrendben konzisztens. Az átalakításoknál hasonló tulajdonságok lettek kihasználva, mint az explicit Euler-módszer esetén, annyi különbséggel, hogy

- $t_{n+1}$ -ből fejezem ki  $t_n$ -et,  $t_n = t_{n+1} - \tau$ ,
- nem  $u(t_n)$ , hanem az  $u(t_{n+1})$  pont körül fejtünk sorba illetve,

- $u'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))$  átírást alkalmazzuk.

## 3.2. Trapéz módszer

Minnél magasabb rendben konvergens egy módszer, annál hamarabb eljutunk a megoldáshoz. Felmerül így a kérdés, hogy az előző elsőrendű Euler-módszerekből el tudnánk-e érni magasabb rendű konvergenciát. A választ a *Trapéz módszer* adja, ami az explicit illetve implicit Euler-módszerek számtani közepe.

$$\frac{y_\tau(t_{n+1}) - y_\tau(t_n)}{\tau} = \frac{1}{2} [f(t_n, y_\tau(t_n)) + f(t_{n+1}, y_\tau(t_{n+1}))], \quad (3.9)$$

$$y_\tau(t_0) = u_0, \quad (3.10)$$

fennáll minden  $n = 0, 1, 2, \dots$  értékre.

A konzisztencia kiszámításához helyettesítsük be az  $y_\tau(t_n) = e_n + u(t_n)$  hibaegyenlet átírettjét az (3.9) képletbe.

$$\frac{(e_{n+1} + u(t_{n+1})) - (e_n + u(t_n))}{\tau} = \frac{1}{2} [f(t_n, e_n + u(t_n)) + f(t_{n+1}, e_{n+1} + u(t_{n+1}))]$$

Átrendezéssel és az  $\frac{1}{2} [f(t_n, u(t_n)) + f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))]$  kifejezés hozzáadásával és kivonásával adódik az

$$\begin{aligned} \frac{e_{n+1} - e_n}{\tau} &= \left[ \frac{1}{2} [f(t_n, u(t_n)) + f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))] - \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} [f(t_n, e_n + u(t_n)) + f(t_{n+1}, e_{n+1} + u(t_{n+1}))] - \\ &- \frac{1}{2} [f(t_n, u(t_n)) + f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))] \end{aligned}$$

egyenlet. Így a lokális approximációs hibával tovább számolva megkapjuk, hogy a Trapéz-módszer másodrendben konzisztens.

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)} &= -\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau} + \frac{1}{2} [f(t_n, u(t_n)) + f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))] = \\ &= -\frac{u(t_n + \tau) - u(t_n)}{\tau} + \frac{1}{2} [u'(t_n) + u'(t_n + \tau)] = \\ &= -\frac{u(t_n) + u'(t)\tau + u''(t_n)\frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3) - u(t_n)}{\tau} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left[ u'(t_n) + u'(t_n) + u''(t_n)\tau + O(\tau^2) \right] = \\
& = -(u'(t_n) + u''(t_n)\frac{\tau}{2} + O(\tau^2)) + u'(t_n) + u''(t_n)\frac{\tau}{2} + O(\tau^2) \\
& \equiv O(\tau^2)
\end{aligned}$$

Az első átalakításnál a (3.1) egyenletet használjuk ki  $t$  helyett  $t_n$ -et illetve  $t_{n+1}$ -et a képletbe írva. Emelett azt, hogy  $t_n$  és  $t_{n+1}$  egymás mellett helyezkednek el  $\tau$  távolságra a rácshálón, ezért  $t_{n+1}$  felírható  $t_n + \tau$  alakban. A második transzformációnál Taylor-sorba fejtünk az  $u(t_n + \tau)$  valamint az  $u'(t_n + \tau)$  pontok körül. Végül egyszerű összevonásokat végzünk.

A módszer konzisztenciája ugyan magasabb, mint az eddigieké volt, viszont implicit, ami megnehezíti a vele való számolást.

**3.10. Megjegyzés.** Az *explicit Euler*-, *implicit Euler*- és a *Trapéz módszer* általánosítása a *Theta-módszer*.

$$\frac{y_\tau(t_{n+1}) - y_\tau(t_n)}{\tau} = (1 - \theta)f(t_n, y_\tau(t_n)) + \theta f(t_{n+1}, y_\tau(t_{n+1}))$$

Nézzük ezt táblázatba szedve  $\theta$  különböző értékeire:

$\theta$	módszer	képlet
0	<i>explicit Euler</i>	$\frac{y_\tau(t_{n+1}) - y_\tau(t_n)}{\tau} = f(t_n, y_\tau(t_n))$
1	<i>implicit Euler</i>	$\frac{y_\tau(t_{n+1}) - y_\tau(t_n)}{\tau} = f(t_{n+1}, y_\tau(t_{n+1}))$
$\frac{1}{2}$	<i>Trapéz</i>	$\frac{y_\tau(t_{n+1}) - y_\tau(t_n)}{\tau} = \frac{1}{2}f(t_n, y_\tau(t_n)) + \frac{1}{2}f(t_{n+1}, y_\tau(t_{n+1}))$

### 3.3. Runge–Kutta-módszer

Célunk ezen szakaszban, egy az eddigieknél magasabb rendű és explicit módszer előállítását. Erre Carl Runge és Martin Kutta német matematikusok dolgoztak ki 1900 körül egy eljárást.

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_\tau(t_n)) \\
k_2 &= f(t_n + a_2\tau, y_\tau(t_n) + \tau b_{21}k_1) \\
k_3 &= f(t_n + a_3\tau, y_\tau(t_n) + \tau(b_{31}k_1 + b_{32}k_2)) \\
&\vdots \\
k_s &= f(t_n + a_s\tau, y_\tau(t_n) + \tau(b_{s1}k_1 + b_{s2}k_2 + \dots + b_{ss-1}k_{s-1}))
\end{aligned}$$



$s$  darab szám, a hozzá tartozó formula pedig az  $s$ -lépcsős explicit Runge–Kutta-módszer<sup>1</sup>:

$$y_\tau(t_{n+1}) = y_\tau(t_n) + \tau(\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2 + \dots + \sigma_s k_s).$$

$a_1, a_2, \dots, a_s, b_{21}, b_{31}, b_{32}, \dots, b_{ss-1}, \sigma_1, \dots, \sigma_s$  adott paraméterek.

Ezen dolgozatban csak az  $s = 2$  esetet, azaz a kétlépcsős explicit Runge–Kutta-módszert fogjuk vizsgálni, mely az alábbi:

$$y_\tau(t_{n+1}) = y_\tau(t_n) + \tau(\sigma_1 f(t_n, y_\tau(t_n)) + \sigma_2 f(t_n + a_2 \tau, y_\tau(t_n) + \tau b_{21} f(t_n, y_\tau(t_n)))). \quad (3.11)$$

Számoljuk ki a konzisztenciáját. Ehhez, ahogy eddig is a lokális approximációs hibát fogjuk nézni, ami tulajdonképpen a (3.11) képlet, a közelítő  $y_\tau(t_n)$  megoldás helyett a pontos  $u(t_n)$  értékkel.

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)} &= \\ &= -\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau} + \sigma_1 f(t_n, u(t_n)) + \sigma_2 f(t_n + a_2 \tau, u(t_n) + b_{21} \tau f(t_n, u(t_n))) = \\ &= -\left[ u'(t_n) + \frac{\tau}{2} u''(t_n) + O(\tau^2) \right] + \sigma_1 f(t_n, u(t_n)) + \\ &+ \sigma_2 [f(t_n, u(t_n)) + a_2 \tau \partial_1 f(t_n, u(t_n)) + b_{21} \tau f(t_n, u(t_n)) \partial_2 f(t_n, u(t_n)) + O(\tau^2)] = \\ &= -u'(t_n) - \frac{\tau}{2} [\partial_1 f(t_n, u(t_n)) + \partial_2 f(t_n, u(t_n)) f(t_n, u(t_n)) + O(\tau^2)] + \sigma_1 u'(t_n) + \\ &+ \sigma_2 [u'(t_n) + \tau [a_2 \partial_1 f(t_n, u(t_n)) + b_{21} f(t_n, u(t_n)) \partial_2 f(t_n, u(t_n))] + O(\tau^2)] \end{aligned}$$

Az első átalakításnál az  $\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau}$  tagot a  $t_n$ , míg a  $\sigma_2 f(t_n + a_2 \tau, u(t_n) + b_{21} \tau f(t_n, u(t_n)))$  tagot a  $(t_n, u(t_n))$  pont körül fejtsük Taylor-sorba. A második transzformációnál kihasználjuk a (3.1) összefüggést, és az  $f(t_n, u(t_n))$  helyére  $u'(t_n)$ -et írunk. Valamint ugyanezt segítségül hívva

$$u''(t_n) = f'(t_n, u(t_n)) = \partial_1 f(t_n, u(t_n)) + \partial_2 f(t_n, u(t_n)) \cdot f(t_n, u(t_n))$$

adódik.

$\psi_n^{(1)}$  képlete első ránézésre bonyolultnak tűnhet, de könnyedén kiolvasható belőle, hogy mikor lesz másodrendben konzisztens a módszer. Nyilván akkor,

---

<sup>1</sup>Jegyezzük itt meg, hogy a legegyszerűbb ilyen eljárás az explicit Euler-módszer:

$$y_\tau(t_{n+1}) = y_\tau(t_n) + \tau f(t_n, y_\tau(t_n)).$$

ha nincs benne elsőrendű tag, amit úgy tudunk elérni, hogy minden ilyen komponenst eliminálunk. Ezt a

$$\begin{aligned}\sigma_1 + \sigma_2 &= 1, \\ \sigma_2 a_2 &= \frac{1}{2}, \\ \sigma_2 b_{21} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

választással kapjuk. (3.11)-t tovább lehet általánosítani, mégpedig a fenti együtthatók segítségével. Legyen  $\sigma_2 = \sigma$ . Ebből következik, hogy  $\sigma_1 = 1 - \sigma$  és  $a_2 = b_{21} = a$ . Így a  $\sigma a = \frac{1}{2}$  feltétel és

$$y_\tau(t_{n+1}) = y_\tau(t_n) + \tau [(1 - \sigma)f(t_n, y_\tau(t_n)) + \sigma f(t_n + a\tau, y_\tau(t_n) + \tau a f(t_n, y_\tau(t_n)))]$$

módszer adódik. Nézzünk meg két nevezetes eljárást ebből a képletből kiindulva.  $\sigma = 1$  és  $a = \frac{1}{2}$  értékre a séma a *középponti módszert* adja:

$$y_\tau(t_{n+1}) = y_\tau(t_n) + \tau \left[ f\left(t_n + \frac{1}{2}\tau, y_\tau(t_n) + \frac{1}{2}\tau f(t_n, y_\tau(t_n))\right) \right].$$

$\sigma = \frac{1}{2}$  és  $a = 1$ -re pedig a *Heun-módszert*:

$$y_\tau(t_{n+1}) = y_\tau(t_n) + \tau \left[ \frac{1}{2}f(t_n, y_\tau(t_n)) + \frac{1}{2}f\left(t_n + \tau, y_\tau(t_n) + \tau f(t_n, y_\tau(t_n))\right) \right].$$

Már két lépcső esetén is igen nehéz átlátni ezeket a metódusokat, és általában ennél magasabb lépcsőseket használnak, ugyanis az elérhető maximális rend a lépcsőszám növelésével nő (a 10. lépcsőig egészen biztosan<sup>2</sup>). A Runge–Kutta módszerek paramétereinek áttekintésére John Charles Butcher új-zélandi matematikus adott egy kiváló módot. Amennyiben a  $b_{ij}$  paramétereiből képzett mátrix szigorúan alsó háromszög mátrix, akkor explicit Runge–Kutta-módszerről beszélünk. Implicit Runge–Kutta-módszernél a felső háromszögben és főátlóban lévő elemek nem mind nullák.

---

2

lépcsőszám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
elérhető rend	1	2	3	4	4	5	6	6	7	7

$$\begin{array}{c|ccc}
a_1 & b_{11} & \dots & b_{1s} \\
a_2 & b_{21} & \dots & b_{2s} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_s & b_{s1} & \dots & b_{ss} \\
\hline
& \sigma_1 & \dots & \sigma_s
\end{array}$$

Ezt a fajta táblázatot *Butcher-táblázatnak* nevezik.

Ez alapján a középponti módszer Butcher-táblája a következő:

$$\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
1/2 & 1/2 & 0 \\
\hline
& 0 & 1
\end{array}$$

A Heun-módszeré pedig az alábbi:

$$\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 \\
\hline
& 1/2 & 1/2
\end{array}$$

### 3.4. Adams-módszer

Eddig olyan numerikus módszereket vizsgáltunk, amelyekben  $y_\tau(t_{n-1})$  közelítésből számoltuk ki a rákövetkező, azaz az  $y_\tau(t_n)$  értéket, ezek összefoglaló neve *egylépéses módszerek*. Ez a típus azért nem ideális, mert minél több lépést teszünk, annál inkább nő a numerikus hiba is, így nagy pontosságot nem lehet velük elérni. Kivételt képez ezalól a Runge–Kutta-módszer, hiszen ott annak ellenére, hogy egy rácspontbeli közelítést az azt megelőző rácspontbeli közelítésből számolunk, mesterségesen generált  $s$  darab feltételt is felhasználunk az approximációhoz.

Hasonló elven működnek a *többlépéses módszerek*, amiket most fogunk vizsgálni<sup>3</sup>. Az ilyen típusú metódusoknál az új közelítést több megelőző rácspontbeli értékből határozzuk meg, azaz  $y_\tau(t_{n-m}), y_\tau(t_{n-m+1}), \dots, y_\tau(t_{n-1})$   $m$  darab értékekből számoljuk  $y_\tau(t_n)$ -t.

<sup>3</sup>Az eddigi numerikus módszerek is felfoghatók többlépésesként ( $m = 1$  esetén).

Például az  $a_0 = 1, a_1 = -1, b_0 = 0, b_1 = 1$  paraméterek mellett pont az explicit Euler-módszert kapjuk,

$$\frac{y_\tau(t_n) - y_\tau(t_{n-1})}{\tau} = f(t_{n-1}, y_\tau(t_{n-1})).$$

Ezen módszer általános alakja a következő:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0 y_\tau(t_n) + a_1 y_\tau(t_{n-1}) + \dots + a_m y_\tau(t_{n-m})}{\tau} = \\ & = b_0 f(t_n, y_\tau(t_n)) + b_1 f(t_{n-1}, y_\tau(t_{n-1})) + \dots + b_m f(t_{n-m}, y_\tau(t_{n-m})), \end{aligned}$$

$n = m, m + 1, m + 2, \dots$

$a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_m$  adott paraméterek,  $y_\tau(t_0), y_\tau(t_1), \dots, y_\tau(t_{m-1})$  értékek adottak. A többlépéses módszerek esetén az első  $m$  rácspontban a közelítést egylépéses módszerrel határozzuk meg, gyakran Runge–Kutta módszert alkalmazunk.

**3.11. Megjegyzés.** A többlépéses módszerünket *explicitnek* nevezzük, ha  $b_0 = 0$ , *implicitnek*, ha  $b_0 \neq 0$ .

**3.12. Megjegyzés.** Ahhoz, hogy ez a módszer egyértelmű legyen, normalizáljuk,

$$\sum_{k=0}^m b_k = 1. \quad (3.12)$$

(3.12) formulát inentől feltételként tekintem.

Vizsgáljuk meg a konzisztenciáját. Ahogy eddig is, most is a lokális approximációs hibáját fogjuk analizálni a módszernek. Ezt pedig az eredeti képlet átrendezésével és a közelítő érték pontos megoldással való helyettesítésével kapjuk.

Első lépésként írjuk át a módszer képletét összeg alakban.

$$-\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{\tau} y_\tau(t_{n-k}) + \sum_{k=0}^m b_k f(t_{n-k}, y_\tau(t_{n-k})) = 0$$

Ebből a szokásos módon a lokális approximációs hibát kiszámolva az alábbi egyenlőség adódik:

$$\psi_n^{(1)} = -\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{\tau} u(t_{n-k}) + \sum_{k=0}^m b_k f(t_{n-k}, u(t_{n-k})). \quad (3.13)$$

Az egyik kulcsfontosságú gondolat a  $t_{n-k}$  rácspont  $(t_n - k\tau)$ -ként való felírása, majd annak a  $t_n$  pont körüli Taylor-sorba fejtése,

$$u(t_{n-k}) = u(t_n - k\tau) = \sum_{l=0}^p (-1)^l \frac{u^{(l)}(t_n)}{l!} (k\tau)^l + O(\tau^{p+1}).$$

A másik fontos átalakítás pedig (3.1) képlet alkalmazása,

$$f(t_{n-k}, u(t_{n-k})) = u'(t_{n-k}) = u'(t_n - k\tau) = \sum_{l=0}^{p-1} (-1)^l \frac{u^{(l+1)}(t_n)}{l!} (k\tau)^l + O(\tau^p).$$

(3.13) ezen módosításokat figyelembe véve a következő:

$$\psi_n^{(1)} = - \sum_{k=0}^m \frac{a_k}{\tau} \sum_{l=0}^p (-1)^l \frac{u^{(l)}(t_n)}{l!} (k\tau)^l + \sum_{k=0}^m b_k \sum_{l=0}^{p-1} (-1)^l \frac{u^{(l+1)}(t_n)}{l!} (k\tau)^l + O(\tau^p).$$

Ahogy eddig is, minden  $p$ -nél kisebb rendű  $\tau$  tagot eliminálni kell a  $p$ -edrendűség eléréséhez. Először az  $\frac{1}{\tau}$  tagot nézzük  $l = 0$  esetén. Ekkor az  $\frac{1}{\tau}$  tag együtthatóinak nyilvánvalóan 0-t kell adniuk,

$$u(t_n)[a_0 + a_1 + \dots + a_m] = 0.$$

A konzisztenciához így kapom a

$$\sum_{k=0}^m a_k = 0 \tag{3.14}$$

feltételt. Nézzük most meg a többi  $\tau$  tag eltüntetését. A következőekben az alábbi lépéseket végezzük el. Először is mivel az  $\frac{1}{\tau}$  komponens esetén az  $l = 0$  esetet megvizsgáltuk fentebb, ennek szummába való felírásától eltekintünk. Második lépésként a második tagban a szummáció határát  $l = 0$ -ról  $l = 1$ -re módosítjuk és eszerint kerül átírásra a többi  $l$ -től függő elem is. Az egyenlőség harmadik átírásánál a nem rögtön észrevehető módosítás az első tag  $(-1)$ -einek összevonása,  $(-1) \cdot (-1)^l = (-1)^{l+1} = (-1)^{l-1}$ . Negyedik lépésként pedig felcseréljük a szummákat.

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)} &= - \sum_{k=0}^m \frac{a_k}{\tau} \sum_{l=1}^p (-1)^l \frac{u^{(l)}(t_n)}{l!} (k\tau)^l + \\ &+ \sum_{k=0}^m b_k \sum_{l=0}^{p-1} (-1)^l \frac{u^{(l+1)}(t_n)}{l!} (k\tau)^l + O(\tau^p) = \\ &= - \sum_{k=0}^m a_k \sum_{l=1}^p (-1)^l \frac{u^{(l)}(t_n)}{l!} k^l \tau^{l-1} + \\ &+ \sum_{k=0}^m b_k \sum_{l=1}^p (-1)^{l-1} \frac{u^{(l)}(t_n)}{(l-1)!} (k\tau)^{l-1} + O(\tau^p) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^m k a_k \sum_{l=1}^p (-1)^{l-1} \frac{u^{(l)}(t_n)}{l!} k^{l-1} \tau^{l-1} + \\
&+ \sum_{k=0}^m b_k \sum_{l=1}^p (-1)^{l-1} \frac{u^{(l)}(t_n)}{l!} l k^{l-1} \tau^{l-1} + O(\tau^p) = \\
&= \sum_{l=1}^p (-1)^{l-1} \frac{u^{(l)}(t_n)}{l!} \tau^{l-1} \sum_{k=0}^m k a_k k^{l-1} + \\
&+ \sum_{l=1}^p (-1)^{l-1} \frac{u^{(l)}(t_n)}{l!} \tau^{l-1} l \sum_{k=0}^m b_k k^{l-1} + O(\tau^p) = \\
&= \sum_{l=1}^p (-1)^{l-1} \frac{u^{(l)}(t_n)}{l!} \tau^{l-1} \left[ \sum_{k=0}^m (k a_k k^{l-1} + l b_k k^{l-1}) \right] + O(\tau^p)
\end{aligned}$$

Innen pedig megkapjuk a  $p$ -edrendű konzisztencia további feltételét,

$$\sum_{k=0}^m k^{l-1} (k a_k + l b_k) = 0, \quad \forall l = 1, 2, \dots, p. \quad (3.15)$$

Ha eleget tesz egy többlépéses módszer az (3.14), (3.12), (3.15) feltételeknek, akkor  $p$ -edrendű. Ebből az következik, hogy  $p + 2$  darab feltételünk van, míg a megválasztható paraméterek száma  $2(m + 1)$ .<sup>4</sup> Tehát az elérhető rend a következő egyenlőtlenséggel fejezhető ki:

$$p \leq 2m.$$

Explicit esetben a  $b_0 = 0$  megszorítás miatt csak  $2m + 1$  paraméterünk van, ami azt jelenti, hogy a maximális rend csupán  $p = 2m - 1$  lehet.

## Adams-módszer

A leggyakrabban használt többlépéses módszer az *Adams-módszer*, ami a következőképp néz ki:

$$\frac{y_\tau(t_n) - y_\tau(t_{n-1})}{\tau} = b_0 f(t_n, y_\tau(t_n)) + b_1 f(t_{n-1}, y_\tau(t_{n-1})) + \dots + b_m f(t_{n-m}, y_\tau(t_{n-m})).$$

Ez az általános eset az

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = \dots = a_m = 0$$

---

<sup>4</sup>Ezek a paraméterek az alábbiak:  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_m$ .

paraméterek megválasztása mellett. Mivel a szabad paramétereink száma  $m+1$ , így ezzel nem lehet olyan magas rendet elérni, mint az általános képlettel. Noha a megválasztható paraméterek száma csökkent, a független feltételeink is  $p$  darabra redukálódtak, ugyanis a (3.15) képletet  $l = 1$ -re alkalmazva az alábbi kritérium adódik:

$$\sum_{k=0}^m k^0 (ka_k + b_k) = \sum_{k=0}^m ka_k + \sum_{k=0}^m b_k = a_1 + \sum_{k=0}^m b_k = 0.$$

Ez viszont pont a (3.12) megszorításunk, ugyanis  $a_1 = -1$ . Így már csak  $p+1$  feltételünk van. Azonban ha megnézzük a (3.14) feltétel is automatikusan teljesül, ugyanis

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m = 1 + (-1) + 0 + \dots + 0 = 0.$$

Ezzel megkapjuk, hogy  $p$  darab feltételünk van, tehát a maximális rend implicit esetben  $m + 1$ , explicit esetben pedig  $m$  lesz.

**3.13. Megjegyzés.** *Amennyiben az Adams-módszer explicit, úgy Adams–Bashford-módszerek, amennyiben pedig implicit Adams–Moulton-módszerek nevezzük.*

## 4. fejezet

# Példák

Mint már a bevezetőben említésre került, a differenciálegyenleteket az élet számos területén alkalmazzák. Nézzünk most meg pár konkrét feladatot.

### 4.1. Populációs modellek

A populációs vizsgálatok során meg szeretnénk becsülni az adott területen várható egyedszámot. Nézzünk erre két példát, amikor csak a születést vesszük be a modellbe, illetve amikor adott terület csak bizonyos számú egyedre képes eltartani. Mindkét esetben jelölje  $k \in \mathbb{R}$  az arányossági számot. Legyen  $N(t)$  a populáció egyedszáma a  $t$  időpillanatban. Hogyan alakul az egyedszám változása, azaz  $N'(t)$ ?

#### Korlátlan növekedés modellje

Ha a születést tekintjük csak befolyásoló tényezőnek (ezt a típust *korlátlan növekedés modelljének* nevezik), akkor a következőt kapjuk:

$$N'(t) = kN(t)$$

$$N(0) = N_0,$$

ahol az első egyenlet az arányosságot, a második egyenlet pedig a kezdetiértéket fejezi ki.

Oldjuk meg ezt analitikusan. A fenti egy szétválasztható változójú differen-



ciálegyenlet, így adódik a következő:

$$\int \frac{1}{N} dN(t) = \int k dt,$$

amit kiintegrálva kapjuk az

$$\ln |N(t)| = kt + c$$

egyenletet, ahol  $c \in \mathbb{R}$ . Vegyük ennek az exponenciálisát:

$$N(t) = e^{kt+c} = e^c e^{kt}.$$

Legyen  $e^c := \bar{c}$ . Már csak ennek a  $\bar{c}$  értéknek a kiszámítása van hátra, amit a kezdetiértékből fogunk megadni:

$$N(0) = \bar{c}e^{k \cdot 0} = \bar{c} = N_0.$$

Így a megoldásunk:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt}.$$

## Korlátozott növekedés modellje

Ennél valamivel bonyolultabb a differenciálegyenlet, ha belevesszük azt is, hogy egy területnek véges az eltartóképessége (az effajta modelleket *korlátozott növekedés modelljének* hívjuk). Adott élettér kapacitását jelöljük  $K > 0$ -val. Ez azt jelenti, hogy a régió  $K$  számú egyedet képes eltartani. Nézzük tehát a modelljét:

$$N'(t) = kN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

$$N(0) = N_0.$$

Oldjuk meg analitikusan. Ez szintén szétválasztható változójú differenciálegyenlet, így adódik:

$$\int \frac{1}{N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)} dN(t) = \int k dt. \quad (4.1)$$

A megoldáshoz alakítsuk át az egyenlet bal oldalát a következőképp:

$$\int \frac{1}{\frac{1}{K}N(t)(K - N(t))} dN(t) = K \int \frac{1}{N(t)(K - N(t))} dN(t).$$

Következő lépésként bontsuk parciális törtekre.

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(t)(K - N(t))} &= \frac{A}{N(t)} - \frac{B}{K - N(t)} = \\ &= \frac{A(K - N(t)) + BN(t)}{N(t)(K - N(t))} = \frac{N(t)(B - A) + AK}{N(t)(K - N(t))} \end{aligned}$$

Ezen egyenlet elejét és végét összehasonlítva kapjuk az  $AK = 1$  illetve  $B - A = 0$  egyenleteket, amiből  $A = \frac{1}{K}$  és  $B = \frac{1}{K}$  következik. Ezt felhasználva pedig

$$\begin{aligned} K \int \frac{1}{N(t)(K - N(t))} dN(t) &= K \left( \int \frac{\frac{1}{K}}{N(t)} dN(t) - \int \frac{\frac{1}{K}}{K - N(t)} dN(t) \right) = \\ &= \int \frac{1}{N(t)} dN(t) - \int \frac{1}{K - N(t)} dN(t) = \\ &= \ln |N(t)| - \ln |K - N(t)| + c_1 = \\ &= \ln \frac{|N(t)|}{|K - N(t)|} + c_1 \end{aligned}$$

egyenletet kapjuk, ahol  $c_1 \in \mathbb{R}$ .

(4.1) jobb oldalát integrálva  $kt + c_2$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}$  adódik, tehát megkapjuk az

$$\ln \frac{|N(t)|}{|K - N(t)|} = kt + c \quad (4.2)$$

egyenletet. Itt az egyszerűség kedvéért a  $c_1$ -ből és  $c_2$ -ből képzett konstanst  $c$ -vel jelöljük.

(4.2) exponenciálisát véve

$$\frac{|N(t)|}{|K - N(t)|} = e^{kt+c} = e^c e^{kt} \quad (4.3)$$

adódik, ahol a későbbiekben  $e^c$ -t pusztán  $\bar{c}$ -vel jelöljük.

Vegyük (4.3) reciprokát,

$$\frac{|K - N(t)|}{|N(t)|} = \bar{c} \cdot e^{-kt}.$$

Elhagyható az abszolút érték, ugyanis  $N(t)$ , a populáció egyedszáma nemnegatív illetve a számlálóban a  $K$  kapacitást nem haladhatja meg az egyedszám, így adódik a következő:

$$\frac{K}{N(t)} - 1 = \bar{c} \cdot e^{-kt}.$$

Ebből pedig átrendezéssel a szinte teljes értékű megoldás:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \bar{c} \cdot e^{-kt}}.$$

Már csak  $\bar{c}$  meghatározása van hátra, amit a kezdeti feltételből fogunk megadni:

$$N(0) = \frac{K}{1 + \bar{c} \cdot e^{-k \cdot 0}} = \frac{K}{1 + \bar{c}} = N_0.$$

Ebből jól látszik, hogy  $1 + \bar{c} = \frac{K}{N_0}$ , tehát

$$\bar{c} = \frac{K}{N_0} - 1.$$

Így a differenciálegyenlet megoldása  $t \geq 0$ -ra:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-kt}}.$$

A korlátozott növekedés jól észlelhető a megoldáson, ugyanis  $t \rightarrow +\infty$  esetén  $\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-kt} \rightarrow 0$ , tehát  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K$ . Ez azt jelenti, hogy ha „elég sokat” várunk, akkor annyi egyed lesz adott élettérben, amennyit az el tud tartani.

## 4.2. Nyomozás

Ebben a blokkban a halál időpontját fogjuk meghatározni differenciálegyenlettel. Tegyük fel, hogy előttünk fekszik egy holttest. Legyen  $T(t)$  a test hőmérséklete a  $t$  időpillanatban.  $t_1$  időpontban megmérjük a test illetve a környezet hőmérsékletét is, legyen ez  $T_1$ , illetve  $T_k$ . Erre azért van szükség, mert a test kihűlési sebessége egyenesen arányos a test és a környezete közötti hőmérséklet különbséggel, tehát  $T'(t) \sim T(t) - T_k$ . Rendelkezésünkre áll továbbá az az adat, hogy egy ember testhőmérséklete általában mennyi, legyen ez  $T(0) = T_0$ .

Jelen esetben  $t_1$ -et keressük, azaz, hogy mikor is mértük meg a halál időpontjához viszonyítva a testhőmérsékletet. Nézzük ezek alapján a differenciál-

egyenletünket:

$$T'(t) = k(T(t) - T_k)$$

$$T(t_1) = T_1$$

$$T(0) = T_0$$

$k \in \mathbb{R}$  az arányossági tényező,  $T_k$ ,  $T_1$  és  $T_0$  pedig adott valós számok. Oldjuk meg ezt analitikusan. Mivel ez is egy szeparábilis differenciálegyenlet, hasonló módon oldjuk meg ahogy az előbbieket. Első lépésként válasszuk szét a változókat:

$$\int \frac{1}{T(t) - T_k} dT(t) = \int k dt.$$

Ezt kiintegrálva adódik az

$$\ln |T(t) - T_k| = kt + c$$

egyenlet, ahol  $c \in \mathbb{R}$ . A fenti egyenlet exponenciálisát véve megkapjuk a

$$T(t) - T_k = e^{kt+c} = e^c e^{kt} = \bar{c} e^{kt}$$

összefüggést, ahol az egyszerűség kedvéért bevezettük az  $e^c := \bar{c}$  jelölést. Ezt átrendezve megkapjuk  $T(t)$ -t:

$$T(t) = T_k + \bar{c} e^{kt}.$$

Ekkor még mindig van két ismeretlenünk,  $\bar{c}$  és  $k$ . Ezeket a kezdeti feltételekből fogjuk kiszámolni.

$$T(t_1) = T_k + \bar{c} e^{k \cdot t_1} \equiv T_1$$

$$T(0) = T_k + \bar{c} e^{k \cdot 0} = T_k + \bar{c} \equiv T_0$$

A második egyenletből adódik az  $\bar{c} = T_0 - T_k$  összefüggés, amit az első egyenletbe behelyettesítve és  $k$ -ra rendezve, megkapjuk a

$$k = \frac{1}{t_1} \ln \left( \frac{T_1 - T_k}{T_0 - T_k} \right)$$

képletet. Ebből kifolyólag a test hőmérsékletét a  $t$  időpillanatban az alábbi

egyenlet adja meg:

$$T(t) = T_k + (T_0 - T_k)e^{\frac{t}{t_1} \cdot \ln\left(\frac{T_1 - T_k}{T_0 - T_k}\right)}.$$

Ezzel sajnos még mindig nem kaptuk meg a  $t_1$  értéket. Ehhez további számolás szükséges. Mérjük meg a test hőmérsékletét egy újabb időpontban,  $t_2$ -ben. Ekkor megkapjuk a

$$T(t_2) = T_2$$

feltételt. Vegyük észre, hogy a

$$T(t_2) = T_k + (T_0 - T_k)e^{\frac{t_2}{t_1} \cdot \ln\left(\frac{T_1 - T_k}{T_0 - T_k}\right)}$$

egyenletben csak  $t_1$  és  $t_2$  az ismeretlen. Viszont  $t_2 - t_1$ -et ismerem, ugyanis az a két mérés között eltelt idő. A fenti képletből pedig meghatározható  $t_2/t_1$ . Ezzel a két információval már könnyedén ki lehet számolni  $t_1$ -et, azaz, hogy a halál időpontjához képest mikor végeztem el az első mérést.

### 4.3. Radioaktív bomlás

Vizsgáljuk most meg a radioaktív bomlást, tehát a nem stabil atommagok bomlási folyamatát. Legyen ehhez  $m(t)$  a radioaktív anyag tömege a  $t$  időpillanatban. Ebből kifolyólag  $m'(t)$  a bomlás időbeli megváltozása. Tudjuk, hogy a bomlási sebesség egyenesen arányos az anyag pillanatnyi tömegével, azaz  $m'(t) \sim m(t)$  minden  $t \geq 0$  időpontra. Legyen az arányossági tényező<sup>1</sup>  $k \in \mathbb{R}$ . Ekkor felírható az alábbi differenciálegyenlet és kezdeti feltétel:

$$m'(t) = km(t) \tag{4.4}$$

$$m(0) = m_0 \tag{4.5}$$

Ezt, ahogy eddig is, szeparábilis módszerrel meg tudjuk oldani, oldjuk is meg. Ahogy eddig is, először a változókat válogatjuk külön:

$$\int \frac{1}{m(t)} dm(t) = \int k dt$$

---

<sup>1</sup>Mivel bomlásról van szó, így  $k < 0$  lesz ez az együttható.

Ezt integrálva adódik az

$$\ln |m(t)| = kt + c,$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$ . Ennek exponenciálisát véve<sup>2</sup>, megkapjuk az

$$m(t) = e^{kt+c} = e^{kt}e^c = \bar{c}e^{kt}$$

egyenletet, a  $\bar{c} = e^c$  megválasztással. A kezdeti értékből kiszámolva  $\bar{c}$  értékét az  $m(0) = \bar{c}e^{k \cdot 0} = m_0$  behelyettesítéssel, megkapjuk a teljes megoldást, ami a következő:

$$m(t) = m_0 \cdot e^{kt}.$$

Ezzel megkaptuk a bomlások számának időbeni változását. Noha analitikusan már megoldottuk, nézzük meg az 5. fejezetben, hogy hogy viselkedik (4.4) különböző numerikus módszerekre.

---

<sup>2</sup>Az abszolútérték elhagyható, ugyanis  $m$ -mel a tömeget jelöltük, ami csak nemnegatív szám lehet.

## 5. fejezet

# Differenciálegyenletek MATLAB megoldása

Nézzük meg ezen fejezetben, hogy a radioaktív bomlásra felírt analitikus megoldásunkat mennyire jól közelítik különböző numerikus módszerek. Az ismertett módszerek közül az explicit Euler-módszerre és a középponti módszerre megírt programok<sup>1</sup> kimeneti ábrái lesznek láthatók.

Tekintsük tehát az alábbi differenciálegyenletet a  $t = 0$  időpillanattól indítva,  $m_0 = 1$  kezdeti tömeggel és az egyszerűség kedvéért  $k = -1$  értékkel:

$$m'(t) = km(t)$$

$$m(0) = m_0.$$

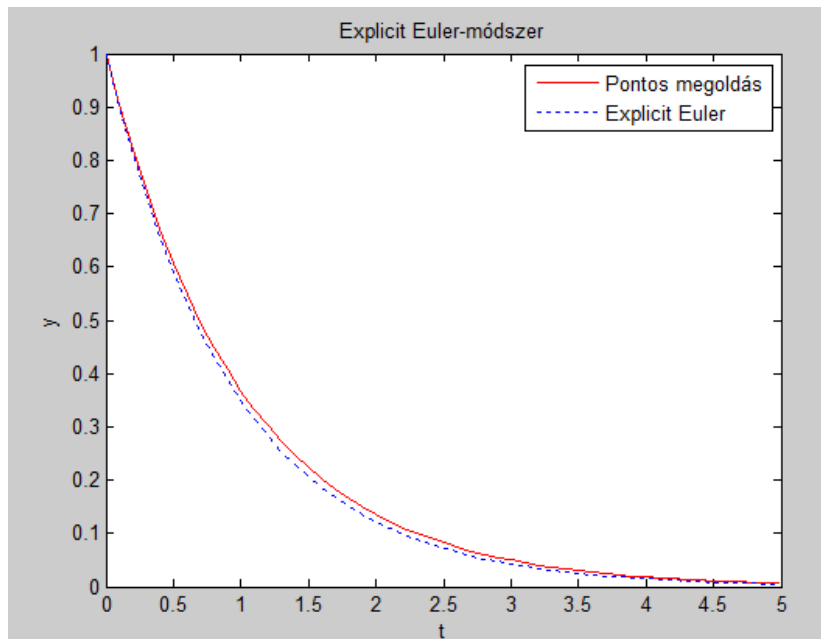
A pontos megoldásunkra is ezek a paraméterek lesznek érvényesek a fejezet további részeiben,

$$m(t) = m_0 \cdot e^{kt}.$$

Az következő ábrán az explicit Euler-módszer látható. A módszert csak a  $t = 5$  időpontig vesszük, ugyanis már ezen időérték mellett is jól látszik, hogy a függvényünk a 0-hoz konvergál. A numerikus módszerünkben  $\tau$  lépésköznek 0.1-et választottunk.

---

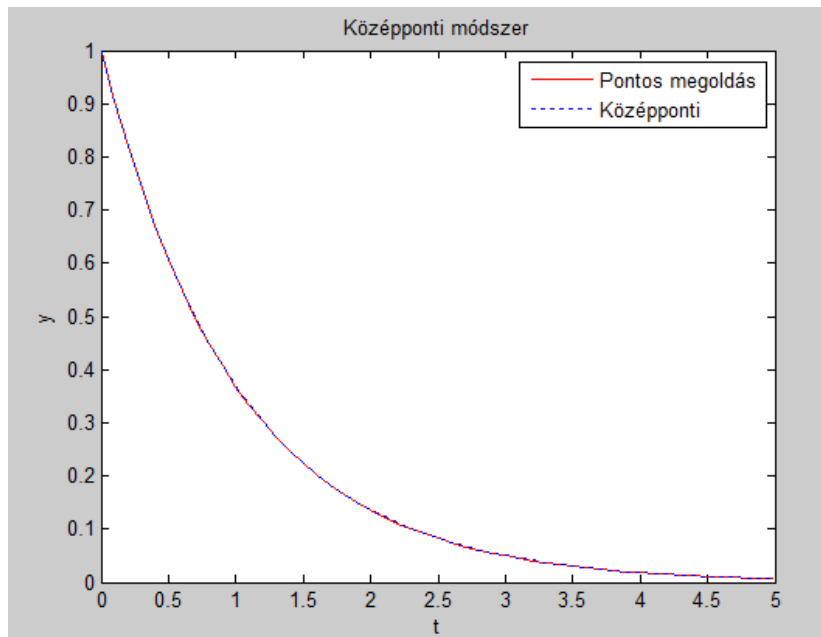
<sup>1</sup>Ezen programok kódjai a Függelékben található meg.



5.1. ábra. Explicit Euler-módszer

Jól látható, hogy ezen exponenciálisan változó függvény esetén az elsőrendben konvergens explicit Euler-módszer is jól közelíti az analitikus megoldást. Nézzünk azonban egy másodrendben konvergens módszert is összehasonlításképpen, a Runge–Kutta-módszerek közül a középponti sémát. A különböző bemeneti értékeket ugyanannak választottuk, mint az előző esetben.





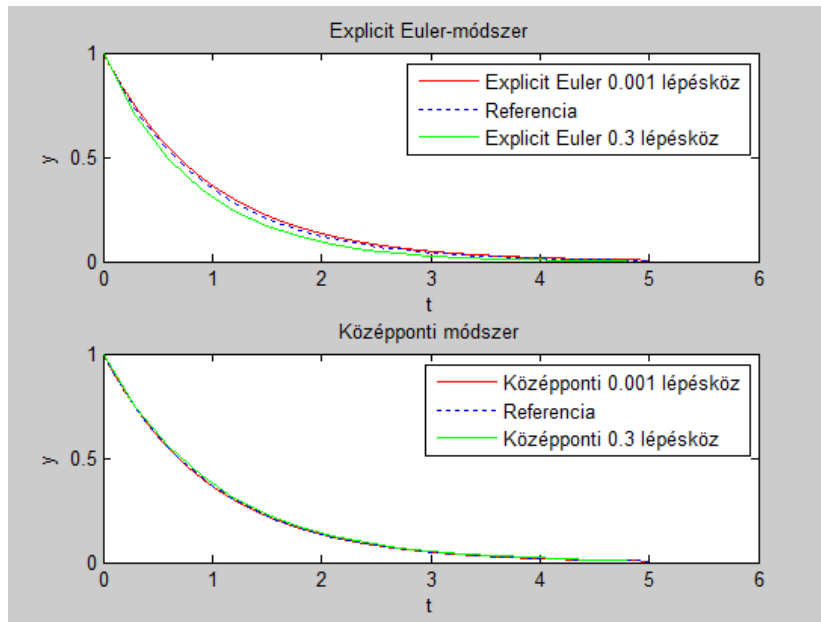
5.2. ábra. Középponti módszer

Ebben az esetben a pontos és a numerikus megoldást már alig lehet egymástól elkülöníteni. Jól látható, hogy ezen feladat esetén egy másodrendben pontos numerikus módszer szinte egyenértékű a pontos megoldással. Természetesen ha  $\tau$  értékét még kisebbre választjuk jóval pontosabbak lesznek a módszerek is.

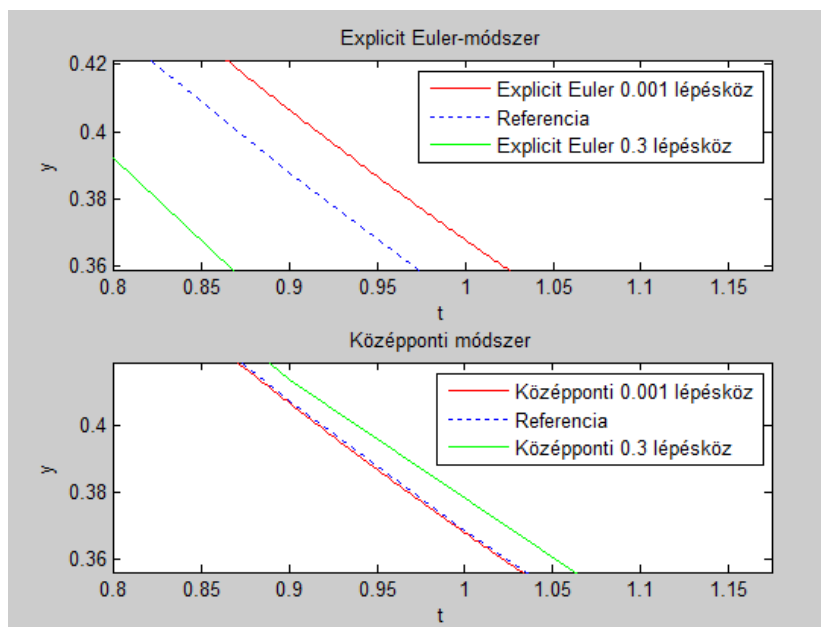
**5.1. Megjegyzés.** Ezen a példán kiválóan látszik, hogy a többlépéses módszereknél miért a Runge–Kutta módszerrel érdemes kiszámolni az első  $m$  rácspontban a közelítést egy másik egylépéses módszerrel szemben. Természetesen a lépcsőszám növelésével a másodrendél magasabb rendet érdemes megcélozni a többlépéses módszerek magasabb rendűsége érdekében.

A következő két ábrán az explicit Euler és a középponti módszer szerepel különböző megválasztott lépésközökkel. Szaggatott vonallal mindkét esetben az előzőekben is ezzel jelölt megoldás szerepel.

Itt talán mégjobban érzékelhető a középponti módszer nagyságrendbeli jobbsága, ugyanis egy nagy, 0.3-as lépésköz esetén is a nála jóval pontosabb 0.001-es lépésközű társa körül van.



5.3. ábra. A két fenti módszer különböző  $\tau$  értékekre



5.4. ábra. A két fenti módszer különböző  $\tau$  értékekre, nagyításban

## 6. fejezet

# Kitekintés

Mivel ezen dolgozat csak az elsőrendű közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozik nem tudunk kitérni számos azokon túlmutató eredményre. Nézzük például az alábbi differenciálegyenlet rendszert egy minden embert érintő probléma kapcsán, ami jól mutatja, hogy kis változtatásokkal<sup>1</sup> is milyen óriási kapuk nyílnak meg előttünk.

### 6.1. Szerelmi modell

Hogyan szeressünk, hogy örökké szeressenek?

Ennek megválaszolásához jelölje  $R(t)$  Rómeó érzelmeinek erősségét Júlia iránt, és  $J(t)$  Júlia érzelmeinek erősségét Rómeó iránt a  $t$  időpontban. Tegyük fel, hogy  $R, J: (0, +\infty) \rightarrow [-1, 1]$ , ahol a negatív értékek ellenszenvet, illetve gyűlöletet, míg a pozitív értékek szeretet, illetve szerelmet, a nulla pedig semleges érzelmeket jelölnek. Tekintsük tehát az alábbi differenciálegyenlet-rendszert:

$$R'(t) = aR(t) + bJ(t)$$

$$J'(t) = cR(t) + dJ(t)$$

A modellben két dolgot veszünk figyelembe: azt hogy mennyire szereti őt a másik, illetve hogy mennyire szerelmes ő maga, a szerelmük mértékét pedig az együtthatókkal írjuk le.

A fenti modell szerint Rómeó érzéseinek megváltozása az idő függvényében

---

<sup>1</sup>Jelen esetben, hogy nem egy, hanem két elsőrendű differenciálegyenlet teljesülését vizsgáljuk egy időben.

(azaz  $R'(t)$ ) függ a saját érzéseitől, melynek erősségét  $a$  írja le, illetve függ Júlia szerelmétől, amit a  $b$  együttható jellemez. Júlia érzelmeinek megváltozása ( $J'(t)$ ) hasonlóan a saját (melyet  $d$  ír le), illetve Rómeó érzéseitől ( $c$ ) függ.

## 6.2. Légszennyezés

Egy másik izgalmas terület a parciális differenciálegyenletek témaköre. Nézzünk erre is egy hétköznapi esetet, egy gyár füstkibocsátásának koncentrációját az idő és a hely függvényében. Legyen  $u: [0, \infty+) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Jelölje  $u(t, x)$  a szennyező anyag koncentrációját a  $t$  időpillanatban és az  $x$  pontban. Tegyük továbbá fel azt, hogy  $c \in \mathbb{R}$  erősségű szél is fúj. A szél irányát  $+$ -al jelöljük, ha jobb irányba fúj és  $-$ -al, ha bal irányba fúj. Ekkor az alábbi úgynevezett *egydimenziós advekciós egyenletet* írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} &= 0 \\ u(0, x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

## 6.3. Szánkózás

Végül nézzünk egy másodrendű differenciálegyenletet is. Tegyük fel, hogy télen a szánkónkkal le szeretnénk csúszni egy  $\alpha$  dőlésszögű domboldalon és kíváncsiak vagyunk, hogy mennyire tudunk felgyorsulni. Ebben az esetben Newton 2. törvényét fogjuk használni,

$$a = \frac{F}{m},$$

azaz kihasználjuk, hogy a gyorsulás egyenesen arányos a testre ható erők nagyságával, és fordítottn arányos a test  $m$  tömegével. Most az egyszerűség kedvéért vegyük úgy, hogy csak a gravitációs és a súrlódási erő hat ránk. Legyen  $s: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  kétszeresen differenciálható függvény és legyen  $a = s''(t)$  a  $t$  időpillanatban történt gyorsulás. Legyen továbbá a test tömege  $m$ . Ezek alapján felírható a gyorsulásra az alábbi képlet:

$$s''(t) = g(\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha))$$

A két fenti képlet jelentősen eltér egymástól, azonban egy kis magyarázattal világossá válik, hogy a kettő ugyanaz. Először is az, hogy hogyan gyorsulunk függ a gravitációtól, a tömegünktől illetve a domb szögétől is, azaz  $F_{gyorsító} = mg \sin(\alpha)$ . A modellbe azonban bevettük még a súrlódási erőt is, ami szintén függ a tömegünktől, gravitációtól, a domb szögétől és attól, hogy milyen felületen csúszunk, azaz  $F_{súrlódási} = \mu mg \cos(\alpha)$ , ahol  $\mu$  azt jelöli, hogy mi az adott felület súrlódási együtthatója. Továbbá ez az erő ellentétes a gyorsító erővel, így kapjuk az alábbi összefüggést:

$$s''(t) = \frac{F}{m} = \frac{F_{gyorsító} - F_{súrlódási}}{m} = \frac{mg \sin(\alpha) - \mu mg \cos(\alpha)}{m}$$

Newton 2. törvényét természetesen nagyon sok helyen lehet ezen felül is alkalmazni. Például az űrhajósok tömegét is a segítségével mérik meg súlytalan állapotban, kihasználva a rugómozgást és tehetetlenségi tömeget. Ezt utóbbit úgy határozzák meg, hogy ismeretlen tömegű testre ismert nagyságú erőket alkalmaznak és megméri a test gyorsulását. Jelen esetben van egy ismert erejű rugó, egy ismert tömegű speciális szék, amit a rugó mozgat, ha erre rácsatlakozik az űrhajós, a mozgás lelassul és az eltérésből meghatározható az űrhajós tömege.

A dolgozat elején felvetésre került, hogy megszámlálhatatlanul sok folyamat illetve jelenség leírható differenciálegyenletek segítségével. Mostanra ez világossá is vált. Zárszóul pedig álljanak itt ismét Péter Rózsa szavai,

"Én nemcsak azért szeretem a matematikát, mert alkalmazni lehet a technikában, hanem főleg azért, mert szép. Mert játékos kedvét is belevitte az ember és a legnagyobb játékokra is képes: megfoghatóvá tudja tenni a végtelent."

# Irodalomjegyzék

- [1] **Csomós Petra**, *Folytonos modellezés*, előadás jegyzet, 2016.
- [2] **D. Curran, A. Sövegjártó, L. Szili, M. Vicsek**, *Numerical Solutions of Ordinary Differential Equations (Initial Value Problems)*, egyetemi jegyzet, 1997.
- [3] **Faragó István**, *Numerikus modellezés és közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldási módszerei*, [http://www.cs.elte.hu/~faragois/jegyzet\\_Szeged.pdf](http://www.cs.elte.hu/~faragois/jegyzet_Szeged.pdf).
- [4] **Kurcsik Tamás**, *Differenciálegyenletek*, egyetemi jegyzet, 2011.
- [5] **Simon Péter**, *Bevezetés az analízisbe II*, egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2016.
- [6] **Simon L. Péter**, *Közönséges differenciálegyenletek*, egyetemi jegyzet, 2007.
- [7] **Szili László**, *Differenciálegyenletek*, egyetemi jegyzet, 2015.
- [8] **Tóth János, Simon L. Péter**, *Differenciálegyenletek*, Typotex Kiadó, Budapest, 2005.

# Függelék

Az alábbi függvény a radioaktív bomlásnak megfelelő differenciálegyenlet, melyet a későbbi programok során fogunk felhasználni:

```
function dydt=radboml(t,y,k)
dydt=k*y;
end
```

Az 5.1 ábrához tartozó Explicit Euler-módszer programkódja MATLAB-ban:

```
function [t y]=ExpEuler(radboml,t0,y0,T,h,k)
N=(T-t0)/h;
t=zeros(N+1,1);
y=zeros(N+1,1);
t(1)=t0;
y(1)=y0;
for i=1:N
    t(i+1)=t(i)+h;
    y(i+1)=y(i)+h*radboml(t(i),y(i),k);
end
u=exp(k*t)
plot(t,u,'r',t,y,':')
title('Explicit Euler-módszer')
legend('Pontos megoldás','Explicit Euler')
xlabel('t')
ylabel('y')
end
```

Az 5.2 ábrához tartozó Középponti módszer programkódja MATLAB-ban:

```
function [t y]=Kozepponti(radboml,t0,y0,T,h,k)
```

```

N=(T-t0)/h;
t=zeros(N+1,1);
y=zeros(N+1,1);
t(1)=t0;
y(1)=y0;
for i=1:N
    t(i+1)=t(i)+h;
    k1=radboml(t(i),y(i),k);
    k2=radboml(t(i)+h/2,y(i)+k1*h/2,k);
    y(i+1)=y(i)+h*k2;
end
u=exp(k*t)
plot(t,u,'r',t,y,':')
title('Középponti módszer')
legend('Pontos megoldás','Középponti')
xlabel('t')
ylabel('y')
end

```

Végül a 5.3 és 5.4 ábrákhoz tartozó program<sup>2</sup>:

```

[t_ee_ref y_ee_ref]=ExpEuler(@radboml,0,1,5,0.1,-1)
[t_ee_kis y_ee_kis]=ExpEuler(@radboml,0,1,5,0.001,-1)
[t_ee_nagy y_ee_nagy]=ExpEuler(@radboml,0,1,5,0.3,-1)
[t_kp_ref y_kp_ref]=Kozepponti(@radboml,0,1,5,0.1,-1)
[t_kp_kis y_kp_kis]=Kozepponti(@radboml,0,1,5,0.001,-1)
[t_kp_nagy y_kp_nagy]=Kozepponti(@radboml,0,1,5,0.3,-1)
subplot(2,1,1)
plot(t_ee_kis,y_ee_kis,'r',
     t_ee_ref,y_ee_ref,':',
     t_ee_nagy,y_ee_nagy,'g')
title('Explicit Euler-módszer')
legend('Explicit Euler 0.001 lépésköz',
      'Referencia',

```

---

<sup>2</sup>A legend és plot függvényekhez tartozó utasítások természetesen egy sorban helyezkednek el a MATLAB kódban, csak az átláthatóság kedvéért lett külön sorba elhelyezve ezen dokumentumban.



```
        'Explicit Euler 0.3 lépésköz')
xlabel('t')
ylabel('y')
subplot(2,1,2)
plot(t_kp_kis,y_kp_kis,'r',
      t_kp_ref,y_kp_ref,':',
      t_kp_nagy,y_kp_nagy,'g')
title('Középponti módszer')
legend('Középponti 0.001 lépésköz',
       'Referencia',
       'Középponti 0.3 lépésköz')
xlabel('t')
ylabel('y')
```